НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

Институт математики

В.Н. РАДЧЕНКО

ИНТЕГРАЛЫ ПО ОБЩИМ СЛУЧАЙНЫМ МЕРАМ

Киев Институт математики 1999

УДК 519.21, 517.987

Интегралы по общим случайным мерам / Радченко В.Н.; НАН Украины. Ин-т математики. — К., 1999. — 109 с.

В монографии изучаются вопросы интегрирования по случайным мерам, удовлетворяющим лишь самым общим условиям. Строится и подробным образом изучается интеграл от действительной функции по такой мере. С помощью случайных функциональных рядов определяется интеграл для некоторого класса случайных функций. Дается конструкция интеграла от случайной функции, определенной на числовой прямой, по случайной аддитивной функции множеств. Получены предельные теоремы для указанных интегралов. Рассмотрено решение интегральных уравнений.

Для специалистов в области теории случайных процессов и теории меры.

Библиогр.: с. 108 - 109 (40 назв.).

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

Оглавление

Предисловие

Стохастические интегралы являются одним из важнейших объектов изучения в теории случайных процессов. К настоящему времени хорошо развита теория интегралов по ортогональной случайной мере, по винеровскому процессу, по семимартингалу. В таких объектах накладываются определенные требования на случайные меры или процессы, по которым проводится интегрирование, и эти требования можно назвать довольно ограничительными. Автор попытался построить и изучить интеграл по случайным мерам, удовлетворяющим лишь минимально необходимому набору условий — аддитивности на непересекающихся множествах и непрерывности по вероятности в пустом множестве. В определенной степени, это удалось сделать, опираясь на недавно полученные результаты в теории векторнозначных мер.

Случайные меры в указанном широком смысле являются частным случаем мер со значениями в полных метризуемых топологических пространствах. В 1970-ых годах некоторыми авторами (например, Ф. Тюрпеном) были предложены конструкции интегралов от действительных функций по мерам со значениями в топологических пространствах, где, однако, на меры накладывались определенные условия ограниченности. В 1980-ых годах Н.Дж. Калтоном, Н.Т. Пеком, У.Дж. Робертсом и чуть позже М. Талаграном был опубликован результат об ограниченности по вероятности значений L_0-меры, который вскоре был несколько обобщен Л. Древновским. Это дало возможность использовать предложенные ранее конструкции интеграла. Рассмотрению свойств так определенного интеграла посвящена значительная часть данной работы. Также в монографии даются и изучаются некоторые возможные определения интеграла от случайной функции по общей случайной мере. При этом, правда, довольно ограничительные требования накладываются на функции.

В небольшой главе 0 даются основные обозначения и определения, а также некоторые известные утверждения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

В главе 1 сначала дается конструкция интеграла от действительной функции по случайной мере, опирающаяся на общие результаты Ф. Тюрпена. В дальнейшем подробно изучаются предельные свойства такого интеграла — при переходе к пределу по последовательности функций, по последовательности случайных мер и по последовательности множеств интегрирования.

В главе 2 изучается обобщение понятия случайной меры — рассматриваются $\sigma-$конечные случайные функции множеств. Для них вводится интеграл от действительной функции, доказываются предельные ткоремы.

В главе 3 изучаются некоторые частные случаи мер и интегралов. Рассмотрены случайные меры, непрерывные в пустом множестве п. н. и сходимость п. н. интегралов по таким мерам. Для случайных мер, являющихся при каждом фиксированном ω действительными знакопеременными мерами, получен аналог теоремы Радона — Никодима. Определяется интеграл от случайной функции по действительной мере как предел интегралов от простых функций, и для него доказывается аналог теоремы Лебега о предельном переходе.

В главе 4 рассматриваются случайные функции, которые можно представить в виде суммы ряда из действительных функций со случайными коэффициентами. При определенных условиях для такого ряда определяется интеграл по общей случайной мере. Для него получены предельные теоремы, рассмотрены уравнения с неизвестной случайной мерой под знаком интеграла.

В главе 5 дается еще один способ определения интеграла от случайной функции, в некотором смысле обобщающий интеграл Ито по винеровскому процессу. При этом, правда, интеграл определяется лишь на конечных объединениях двоичных полуинтервалов и требуется выполнение достаточно ограничительных условий для предельного перехода под знаком интеграла, для нахождения решений интегральных уравнений.

Автор благодарит академика НАН Украины А.В. Скорохода за многочисленные полезные замечания по рассматриваемым в книге вопросам.

Глава 0

Основные обозначения и определения

0.1 Обозначения

В работе будут использоваться обозначения:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство.

X — произвольное множество (в некоторых частях работы на него будут накладываться определенные условия).

$\mathcal{B}$ — произвольная σ-алгебра подмножеств X (в некоторых частях работы на нее будут накладываться определенные условия).

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел.

$\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел.

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

$B(X)$ — множество измеримых ограниченных функций на X со значениями в $\mathbf{R}$.

I_A — индикатор множества A.

$\mathbf{E}\,\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ.

$\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ — последовательность ξ_n сходится к ξ по вероятности.

$\operatorname{p\,lim}_{n\to\infty} \xi_n$ — предел по вероятности последовательности ξ_n.

$\|\xi\| = \sup\{\delta : \mathbf{P}\{|\xi| > \delta\} > \delta\}$.

$L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — пространство классов эквивалентности случайных величин с топологией сходимости по вероятности.

с. ф. — случайная функция.

п. в. — почти всюду.

п. н. — почти наверное.

0.2 Основные определения и предварительные сведения

Всюду в работе равенство или неравенство случайных величин — это их равенство или неравенство п. н.

Определение. *Случайной мерой μ называется набор случайных величин $\{\mu(A),\ A \in \mathcal{B}\}$ такой, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для $A \cap B = \emptyset$ и $\mu(A_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ для $A_n \downarrow \emptyset$.*

Здесь и всюду дальше сходимость берется при $n \to \infty$, если не указано другое.

В некоторых случаях мы можем добавлять, что случайная мера μ определена на $(X, \mathcal{B})$ или на $\mathcal{B}$.

Отметим, что, вообще говоря, мы не требуем от μ неотрицательности или существования моментов. В других терминах — это мера на $(X, \mathcal{B})$ со значениями в L_0.

Действительные знакопеременные меры являются частным случаем наших случайных мер.

Определение. *Случайная мера μ называется $\sigma-$аддитивной п. н., если $\mu(A_n) \to 0$ п. н. для $A_n \downarrow \emptyset$.*

Определение. *Множество $A \in \mathcal{B}$ называется $\mu-$пренебрежимым, если $\forall B \subset A,\ B \in \mathcal{B}\quad \mu(B) = 0$ п. н.*

Определение. *Последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ $\mu-$почти всюду (пишем $\mu-$п. в.), если множество $\{\omega : \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}$ является $\mu-$пренебрежимым.*

Определение. *Случайная функция множеств ν_1, определенная на $\mathcal{B}$, называется абсолютно непрерывной относительно случайной функции множеств ν_2, определенной на $\mathcal{B}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{B}\ \sup_{B\subset A} \|\nu_2(B)\| < \delta \Rightarrow \|\nu_1(A)\| < \varepsilon$.*

В этом случае мы будем использовать обозначение $\nu_1 \ll \nu_2$. В частности, $\nu_1,\ \nu_2$ могут быть случайными мерами, действительными функциями множеств на $\mathcal{B}$.

Для любых случайных функций множеств ν_1 и ν_2 через $(\nu_1 - \nu_2)$ мы обозначаем случайную функцию множеств, на каждом A равную $\nu_1(A) - \nu_2(A)$.

Определение. *Субмерой будем называть функцию множеств $v : \mathcal{B} \to \mathbf{R}_+$, для которой выполняются условия:*

(i) $\forall A, B \in \mathcal{B} \quad v(A \cup B) \le v(A) + v(B)$;

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}, \quad A \subset B,\ v(A) \le v(B)$;

(iii) $\forall A_n \downarrow \emptyset \quad v(A_n) \to 0$.

В [26], [27], [28] такая функция множеств называется порядково непрерывной субмерой.

Пространство L_0 с метрикой $\rho(\xi, \zeta) = \|\xi - \zeta\|$ является полным метрическим пространством, сходимость в нем — это сходимость по вероятности. Легко проверить, что $\|\xi + \zeta\| \le \|\xi\| + \|\zeta\|$ и $\|c\xi\| \le c\|\xi\|$ для $c \ge 1$.

Величину $\|\xi\|$ будем называть квазинормой ξ, это согласуется с определением квазинормы в [5]. В терминологии [5] наше пространство L_0 является $F-$пространством.

Определение. *Ряд случайных величин $\sum_n \xi_n$ сходится безусловно по вероятности (или п. н.), если для любой перестановки индексов $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, σ взаимно однозначное, ряд $\sum_n \xi_{\sigma(n)}$ сходится по вероятности (соответственно, п. н.).*

Известно, что если ряд сходится безусловно по вероятности или п. н., то его сумма не зависит от конкретной перестановки слагаемых (см. [6], стр. 12). Следующий факт о безусловной сходимости рядов мы сформулируем для нужного нам случая пространства L_0, при этом он справедлив и в более общей ситуации.

Теорема ([1], гл. 5, предложение 4.2). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Ряд случайных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится безусловно по вероятности.*

(ii) *Какими бы ни были натуральные числа $n_1 < n_2 < \dots$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$ сходится по вероятности.*

Неоднократно мы будем ссылаться на следующее неравенство.

Лемма ([1], гл. 5, лемма 4.3 в)). *Для любых случайных величин $\xi_n,\ n \ge 1$, для каждого конечного набора действительных чисел $\lambda_1, \dots,\ \lambda_n,\ |\lambda_1| \le 1, \dots,\ |\lambda_n| \le 1$, и любого $t > 0$ выполняется*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k\right| > 8t\right\} \le 8 \max_{\theta_1,\dots,\theta_n = \pm 1} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} \theta_k \xi_k\right| > t\right\}.$$

Определение. *Набор случайных величин $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ называется ограниченным по вероятности, если*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_\gamma \mathbf{P}\{|\xi_\gamma| > c\} = 0.$$

Ограниченность $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ по вероятности также эквивалентна выполнению равенства

$$\lim_{t\to 0}\sup_{\gamma}\|t\xi_\gamma\| = 0.$$

Теорема ([29], теорема). *Для любой случайной меры μ множество случайных величин $\{\mu(A),\ A \in \mathcal{B}\}$ ограничено по вероятности.*

Следующие утверждения являются классическими для случая действительных мер. Мы приведем их обобщения на случай векторнозначных мер, сформулировав их в терминах, используемых в данной монографии.

Теорема. ([26], теорема 3.2 (теорема Витали — Хана — Сакса)) *Пусть на $\mathcal{B}$ заданы субмера v и последовательность случайных мер $\mu_n,\ n \geq 1$, где каждая μ_n абсолютно непрерывна относительно v. Если для каждого $A \in \mathcal{B}$ существует $\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A)$, тогда μ аддитивна, абсолютно непрерывна относительно v, и $\mu_n,\ n \geq 1$, равномерно абсолютно непрерывны относительно v.*

Теорема ([28], теорема 8.6 (теорема Никодима)). *Пусть на $\mathcal{B}$ задана последовательность случайных мер $\mu_n,\ n \geq 1$, Если для каждого $A \in \mathcal{B}$ существует $\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A)$, тогда μ является случайной мерой и $\mu_n,\ n \geq 1$, равномерно $\sigma-$аддитивны.*

Глава 1

Интегралы от действительных функций по общим случайным мерам

Соглашения

Всюду в этой главе:

$f,\ f_n,\ g,\ g_n,\ h$ — измеримые функции, которые определены на X и принимают значения в $\mathbf{R}$.

μ — случайная мера, определенная на $(X, \mathcal{B})$.

1.1 Определение интеграла и его свойства

1.1.1 Построение интеграла

Для построения интеграла $\int_A f\, d\mu$ нам нужен следующий факт.

Теорема 1.1. *Для любой* μ

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{A_k\cap A_j=\emptyset, l\in\mathbf{N}, |c_k|\le 1} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k\mu(A_k)\right| \ge c\right\} = 0 \tag{1.1}$$

(в супремуме требуется $A_k \cap A_j = \emptyset$ *только для* $k \ne j$*).*

Доказательство. Утверждение леммы 4. 3 в) [1, глава 5] нам дает, что для любых $l \in \mathbf{N},\ c_k,\ |c_k| \le 1$, и $A_k \in \mathcal{B}$ будет

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k\mu(A_k)\right| \ge c\right\} \le 8 \max_{a_k=\pm 1} \left\{\left|\sum_{k=1}^{l} a_k\mu(A_k)\right| \ge \frac{c}{8}\right\}.$$

Рассмотрев множества $A = \cup_{k:a_k=1} A_k$ и $B = \cup_{k:a_k=-1} A_k$, поскольку $A_k \cap A_j = \emptyset$ для $k \ne j$, будем иметь, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k\mu(A_k)\right| \ge c\right\} \le 8 \sup_{A,B\in\mathcal{B}} \mathbf{P}\left\{|\mu(A) - \mu(B)| \ge \frac{c}{8}\right\}$$
$$\le 16 \sup_{A\in\mathcal{B}} \mathbf{P}\left\{|\mu(A)| \ge \frac{c}{16}\right\}. \tag{1.2}$$

Теперь утверждение нашей теоремы следует из того, что множество значений L_0-значной меры на $\sigma-$алгебре ограничено по вероятности [29, теорема]. $\square$

В работе [40, глава 7] дается построение интеграла от действительной измеримой функции по мере, принимающей значения в топологическом векторном пространстве. Равенство (1.1) означает, что случайная мера является $L^\infty-$ограниченной в смысле работы [40], и мы можем использовать для нашей случайной меры построенную в [40] теорию интеграла. Ниже взятое определение интеграла является переформулировкой определения 7.3.4 [40] для нашего случая.

Для простой функции

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k I_{A_k}(x), \quad c_k \in \mathbf{R}, \quad A_k \in \mathcal{B},$$

стандартным образом положим

$$\int_X f^{(0)} d\mu = \sum_{k=1}^{l} c_k \mu(A_k).$$

Определение 1.1. *Измеримая функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется интегрируемой по случайной мере μ, если существует последовательность простых функций $f_n^{(0)}$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|g^{(0)}(x)| \le |f(x) - f_n^{(0)}(x)|} \left\| \int_X g^{(0)}\, d\mu \right\| = 0$$

(в супремуме берутся простые функции $g^{(0)}$).

Тогда положим $\int_X f\, d\mu = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n^{(0)} d\mu$.

Для интегрируемой f и $A \in \mathcal{B}$ положим $\int_A f\, d\mu = \int_X f I_A\, d\mu$.

Теорема 7.3.5 [40] дает нам, что это определение корректно, $f \in B(X)$ всегда является интегрируемой по μ. Так определенный интеграл является линейным по f и по μ.

Теперь мы изложим утверждения, полученные в [40] для предложенной там конструкции интеграла по векторнозначной мере, переформулировав их на случай нашего интеграла.

Теорема (7.3.5 [40]). *a) Множество интегрируемых по μ функций является топологическим векторным $F-$пространством. Если для измеримой f и некоторого c $|f(x)| \le c$ $\mu-$п. в., то f интегрируема по μ.*

b) Если f интегрируема по μ, g измерима, $|g(x)| \le |f(x)|$, то g интегрируема по μ.

c) Если f интегрируема по μ, то

$$\forall H_k \in \mathcal{B},\ H_k \downarrow \emptyset \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{|f^{(0)}(x)| \le |f(x)|} \left\| \int_{H_k} f^{(0)}\, d\mu \right\| = 0$$

(в супремуме берутся простые функции $f^{(0)}$).

d) Пространство интегрируемых по μ функций является полным относительно метрики

$$\rho(f, g) = \sup_{|f^{(0)}(x)| \le |f(x) - g(x)|} \left\| \int_X f^{(0)}\, d\mu \right\|$$

(в супремуме берутся простые функции $f^{(0)}$).

e) Множество значений $\int_X f^{(0)}\, d\mu$, $f^{(0)}$ простые, единственным образом продолжается на множество всех интегрируемых по μ функций, и при этом

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| \le \sup_{|f^{(0)}(x)| \le |f(x)|} \left\| \int_X f^{(0)}\, d\mu \right\|$$

(в супремуме берутся простые функции $f^{(0)}$).

Теорема (7.3.6 [40]). *Пусть даны* f_n, $n \geq 1$, *все интегрируемые по* μ, *и измеримая* f, $f_n \to f$ $\mu-$ *п. в. Пусть*

$$\forall H_k \in \mathcal{B},\ H_k \downarrow \emptyset \quad \lim_{k\to\infty} \sup_n \sup_{|f^{(0)}(x)|\leq|f_n(x)|} \left\| \int_{H_k} f^{(0)}\, d\mu \right\| = 0$$

(в супремуме берутся простые функции $f^{(0)}$*). Тогда* f *является интегрируемой по* μ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|g(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|} \left\| \int_X g\, d\mu \right\| = 0 \tag{1.3}$$

(в супремуме берутся произвольные измеримые функции g*).*

Следствие. (7.3.7 [40], теорема о доминируемой сходимости) *Пусть функции* g *и* $f_n, n \geq 1$, *интегрируемы по* μ, $|f_n(x)| \leq g(x)$, $f_n \to f$ $\mu-$*п. в. Тогда* f *интегрируема по* μ *и выполняется* (1.3).

Теорема (7.3.8 [40]). *Пусть даны* f_n, $n \geq 1$, *все интегрируемые по* μ, *и измеримая* f, $f_n \to f$ $\mu-$*п. в. Пусть для любой измеримой* g, $|g(x)| \leq c$ $\mu-$*п. в. для некоторого* c, *последовательность* $\int_X f_n g\, d\mu$, $n \geq 1$, *сходится по вероятности. Тогда* f *есть интегрируема по* μ *и выполняется* (1.3).

В частности, действительная измеримая функция f *будет интегрируемой по* μ *тогда и только тогда, когда найдутся простые функции* $f_n^{(0)}$, $n \geq 1$, *такие, что для любой измеримой* g, $|g(x)| \leq c$ $\mu-$*п. в. для некоторого* c, *последовательность* $\int_X f_n^{(0)} g\, d\mu$, $n \geq 1$, *сходится по вероятности.*

Отметим, что в [35] построен интеграл от действительных измеримых функций по аддитивными функциями множеств со значениями в топологических пространствах, рассмотрены некоторые его свойства. Показано, что он является обобщением интеграла из [40].

1.1.2 Свойства интеграла по случайной мере

Для нашего интеграла может быть использован аналог теоремы Лебега (следствие 7.3.7 [40]) о доминируемой сходимости по вероятности под знаком нашего интеграла при $f_n \to f$ $\mu-$п. в. Учитывая также аддитивность нашего интеграла по множествам A, получаем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть функция* f *интегрируема по* μ. *Тогда функция множеств*

$$\eta(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{B},$$

является случайной мерой.

Дальше мы рассмотрим некоторые утверждения, связанные с интегрированием по такой η.

Лемма 1.2. *Для функции* $f \in B(X)$, $|f(x)| \leq \alpha$, *выполняется неравенство*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \left\| \int_A f\, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{B\subset A} \|\alpha\mu(B)\|. \tag{1.4}$$

Доказательство. Неравенство (1.2) дает нам, что для простой функции $f^{(0)}$, $|f^{(0)}(x)| \le 1$, будет
$$\left\| \int_X f^{(0)}\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \|\mu(B)\|.$$
Взяв вместо X — A, вместо $\mathcal{B}$ — $\sigma-$алгебру измеримых подмножеств A, вместо μ — $\alpha\mu$, получим, что (1.4) выполняется для простых f. Для произвольной f, удовлетворяющей условиям теоремы, можно построить последовательность простых $f_n^{(0)}$ такую, что
$$\forall x \in X \quad f_n^{(0)}(x) \to f(x), \quad |f_n^{(0)}(x)| \le \alpha.$$
Из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] следует, что тогда
$$\int_A f_n^{(0)} d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$
Предельный переход дает нам выполнение (1.4) для всех наших f. □

Лемма 1.3. *Для функции f, интегрируемой по μ, $g \in B(X)$ и случайной меры*
$$\eta(A) = \int_A f\, d\mu$$
выполняется равенство
$$\int_A fg\, d\mu = \int_A g\, d\eta. \tag{1.5}$$
Доказательство. Возьмем $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $|g(x)| \le \alpha$.

Отметим, что функция fg будет интегрируемой по μ. Это следует из теоремы 7.3.5 [40], поскольку $|f(x)g(x)| \le \alpha|f(x)|$, αf интегрируема.

Возьмем простые функции $g_n^{(0)}(x) \to g(x)$ для всех $x \in X$, $|g_n^{(0)}(x)| \le |g(x)|$. Очевидно, будут иметь место равенства
$$\int_A f g_n^{(0)} d\mu = \int_A g_n^{(0)} d\eta.$$
Аналог теоремы Лебега 7.3.7 [40] делает законным предельный переход, откуда мы получаем утверждение леммы. □

Теорема 1.2. *Для функции f, интегрируемой по μ, произвольного множества $A \in \mathcal{B}$ и измеримой функции $g : X \to \mathbf{R}$, $|g(x)I_A(x)| \le \alpha$, выполняется неравенство*
$$\left\| \int_A fg\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{B\subset A} \left\| \alpha \int_B f\, d\mu \right\|. \tag{1.6}$$
Доказательство. Утверджение вытекает из равенства (1.5) и леммы 1.2, использованной для gI_A и η. □

Теорема 1.3. *Для функции f, интегрируемой по μ, произвольного множества $A \in \mathcal{B}$ и измеримой функции $h : X \to \mathbf{R}$, $|h(x)I_A(x)| \le \alpha|f(x)|$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$, выполняется неравенство*
$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \left\| \int_A h\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{B\subset A} \left\| \alpha \int_B f\, d\mu \right\|. \tag{1.7}$$
Доказательство. Требуемое неравенство получаем, положив в (1.6) $g(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$ (для $f(x) = 0$ возьмем $g(x) = 0$), $|g(x)I_A(x)| \le \alpha$. □

Теорема 1.4. *Для функции f, интегрируемой по μ, случайная мера $\eta(A) = \int_A f\,d\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ.*

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся $A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, такие, что

$$\sup_{B \subset A_n} \|\mu(B)\| < 2^{-n}, \quad \left\| \int_{A_n} f\,d\mu \right\| > \varepsilon. \tag{1.8}$$

Поэтому

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \|\mu(B \cap \cup_{k=n}^{\infty} A_k)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда получаем, что $f(x) I_{A_n}(x) \to 0$ для всех x, кроме $\mu-$пренебрежимого множества. Из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] получаем, что $\int_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, что противоречит (1.8). □

1.2 Предельные теоремы для интегралов при сходимости подынтегральных функций

1.2.1 Субмеры. Сходимость по субмере и по случайной мере

Легко показать, что любая субмера v $\sigma-$полуаддитивна и непрерывна на монотонных последовательностях множеств (такие рассуждения проведены в [27, глава 5]).

Сходимость по субмере и сходимость $v-$п. в. определяем стандартно.

Определение 1.2. $f_n \xrightarrow{v} f \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad v\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \to 0.$

Определение 1.3. $f_n \to f \quad v -$ *п. в.* $\quad \Leftrightarrow \quad v\{x : f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} = 0.$

Лемма 1.4 (теорема Егорова). *Если $f_n \to f$ $v -$ п. в., то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathcal{B}\ (v(A) < \varepsilon) : \quad \sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Доказательство. Дословно повторяем доказательство для случая действительных мер (см., например, теорему 2.3.7 [22]). □

Лемма 1.5. *Если $f_n \to f$ $v -$ п. в., то $f_n \xrightarrow{v} f$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.4. □

Лемма 1.6. *Если $f_n \xrightarrow{v} f$, то $\exists\{n_k\} : f_{n_k} \to f$ $v -$ п. в., $k \to \infty$.*

Доказательство. Берем n_k такие, что

$$v\left\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\right\} < 2^{-k},$$

и рассуждаем аналогично случаю действительных мер. □

Теперь для функций f, f_n, по аналогии со сходимостью по действительным мерам, определим сходимость по случайной мере.

Определение 1.4. *Последовательность функций f_n сходится к функции f по случайной мере μ, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{A \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\}} \|\mu(A)\| = 0.$$

В этом случае используем обозначение $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Для действительных μ данное определение совпадает с общеупотребительным.

Лемма 1.7. *Для* $\{A_n,\ n \ge 1\} \subset \mathcal{B}$ *из* $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ *следует* $\sup_{B\subset A_n} \|\mu(B)\| \to 0$.

Доказательство. Если утверждение леммы неверно, то найдутся n_k, $B_k \subset A_{n_k}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что все $\|\mu(B_k)\| > \varepsilon$. Последнее неравенство противоречит аналогу теоремы Лебега 7.3.7 [40], поскольку функции $f_k(x) = I_{B_k}(x)$ таковы, что $f_k(x) \to 0$ $\mu-$п. в., $k \to \infty$, и $|f_k(x)| \le 1$. □

Лемма 1.8. *Функция множеств* $v_\mu(A) = \sup_{B\subset A} \|\mu(B)\|$, $A \in \mathcal{B}$, *является субмерой и сходимость по* v_μ *эквивалентна сходимости по* μ.

Доказательство. Монотонность v_μ очевидна, ее полуаддитивность следует из свойств нашей квазинормы, необходимая непрерывность в $\emptyset$ — из леммы 1.7. Поэтому v_μ — квазимера. Эквивалентность сходимости по v_μ и по μ следует непосредственно из определений. □

Отметим, что сходимость $v_\mu-$п. в. — это сходимость $\mu-$п. в. Из лемм 1.5 и 1.6 следует, что сходимость по μ и $\mu-$п. в. связаны таким же образом, как и соответствующие сходимости для действительных мер. Следующее утверждение показывает, что из сходимости интегралов по μ (равномерной) следует сходимость функций по μ.

Теорема 1.5. *Пусть функции* f_n, $n \ge 1$, *и* f *интегрируемы по* μ *и таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu \right\| = 0. \tag{1.9}$$

Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$ и рассмотрим случайную меру

$$\eta_n(A) = \int_A (f_n - f)\, d\mu.$$

Возьмем

$$A \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

тогда на A

$$\frac{1}{|f_n - f|} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Из утверждения леммы 1.3 (взятого на множестве $X = A$, где функция $\frac{1}{f_n - f}$ ограничена) следует, что

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{f_n - f} d\eta_n.$$

Теперь из леммы 1.2 получаем, что

$$\|\mu(A)\| \le 16 \sup_{B\subset A} \left\| \frac{1}{\varepsilon} \eta_n(B) \right\| \le 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \frac{1}{\varepsilon} \|\eta_n(B)\|$$

(здесь мы использовали свойство нашей квазинормы для $\frac{1}{\varepsilon} > 1$). Из (1.9) следует, что последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда получаем и необходимую сходимость соответствующих супремумов $\|\mu(A)\|$. □

В некоторых дальнейших рассуждения нам буде нужна субмера специального вида. Для этого мы получим следующий результат.

Лемма 1.9. *Для любых случайных мер μ_n, $n \geq 1$, функция множеств*

$$v_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{B \subset A} \|\mu_n(B)\|, \quad A \in \mathcal{B}, \tag{1.10}$$

является субмерой.

Доказательство. Такая v_0, очевидно, определена. Каждое отдельное слагаемое ряда (1.10) будет субмерой по лемме 1.8, отсюда сразу получаем выполнение условий (i) и (ii) определения субмеры. Для $A_n \downarrow \emptyset$ будет $v_0(A_n) \to 0$, ведь мы можем отделить остаток ряда (1.10), который на всех множествах будет как угодно малым, и каждый из конечного количества оставленных слагаемых будет стремиться к нулю, поскольку он является субмерой. Поэтому выполняется и условие (iii) определения. □

1.2.2 Теорема о равномерной интегрируемости по случайной мере и обобщение теоремы Лебега

Теперь для нашего интеграла введем понятие равномерной интегрируемости, с которым будут связаны утверждения, аналогичные соответствующим утверждениям для действительных мер.

Определение 1.5. *Множество интегрируемых по μ функций $f_\gamma : X \to \mathbf{R}$, $\gamma \in \Gamma$, называется равномерно интегрируемым по μ если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{c \to \infty} \sup_{\gamma, A} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{A \cap \{|f_\gamma| > c\}} f_\gamma \, d\mu \right| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{1.11}$$

Равенству (1.11), очевидно, эквивалентно такое условие:

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{\gamma, A} \left\| \int_{A \cap \{|f_\gamma| > c\}} f_\gamma \, d\mu \right\| = 0. \tag{1.12}$$

В случае действительных мер μ наше определение равномерной интегрируемости совпадает с общеупотребительным.

Теорема 1.6. *Пусть множество функций $f_\gamma : X \to \mathbf{R}$, $\gamma \in \Gamma$, равномерно интегрируемо по μ, и измеримые функции $h_\gamma : X \to \mathbf{R}$, $\gamma \in \Gamma$, таковы, что $\forall \gamma,\ x \quad |h_\gamma(x)| \leq |f_\gamma(x)|$. Тогда множество h_γ, $\gamma \in \Gamma$, также равномерно интегрируемо по μ.*

Доказательство. Положим в неравенстве (1.7) $f = f_\gamma$, $h = h_\gamma$. Учитывая, что

$$\{x : |h_\gamma(x)| > c\} \subset \{x : |f_\gamma(x)| > c\},$$

будем иметь:

$$\sup_{\gamma, A} \left\| \int_{A \cap \{|h_\gamma| > c\}} h_\gamma \, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{\gamma, A} \left\| \int_{A \cap \{|f_\gamma| > c\}} f_\gamma \, d\mu \right\|.$$

Из полученного неравенства и условия равномерной интегрируемости в виде (1.12) следует нужное утверждение. □

Теорема 1.7. *Пусть функции $f_n,\ n \geq 1$, интегрируемы по μ, μ является абсолютно непрерывной относительно субмеры v, и $f_n \xrightarrow{v} f$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *f интегрируема по μ и*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu \right\| \to 0;$$

(ii) *f интегрируема по μ и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_n\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu;$$

(iii) *множество функций $f_n,\ n \geq 1$, равномерно интегрируемо по μ.*

Доказательство. Следование (i) $\Rightarrow$ (ii) является очевидным.

Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Из интегрируемости f_n следует, что множества $\{x : |f_n(x)| = \infty\}$ являются $\mu-$пренебрежимыми. Из того, что $f_n \xrightarrow{v} f$ имеем, что $\mu-$пренебрежимым является множество $\{x : |f(x)| = \infty\}$. Будем считать эти множества пустыми.

Дальше будем рассматривать случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f_n\, d\mu.$$

По теореме 1.4 каждая η_n абсолютно непрерывна относительно μ, и, значит, относительно v.

По условию (ii) $\eta_n(A),\ A \in \mathcal{B}$, сходятся по вероятности. Из теоремы 3.2 [26] (обобщение теоремы Витали — Хана — Сакса на меры со значениями в топологических группах) следует, что η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно v (то есть, будет $\sup_n \|\eta_n(A_k)\| \to 0$ для $v(A_k) \to 0,\ k \to \infty$). Поэтому для доказательства (iii) достаточно проверить, что

$$\sup_{n,A} v(A \cap \{|f_n| > c\}) \to 0, \quad c \to \infty.$$

Последнее утверждение легко выводится из того, что $f_n \xrightarrow{v} f$ и $\{|f| > c\} \downarrow \emptyset$, $c \uparrow \infty$.

Теперь докажем, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Покажем, что при выполнении (iii) η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно v. Для любых $A,\ n,\ c$ будет

$$\|\eta_n(A)\| = \left\| \int_A f_n\, d\mu \right\| \leq \left\| \int_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n\, d\mu \right\| + \left\| \int_{A \cap \{|f_n| \leq c\}} f_n\, d\mu \right\|.$$

Из условия (iii) следует, что выбором большого c можно сделать первое слагаемое как угодно малым равномерно по $A,\ n$. Из леммы 1.2 следует, что второе слагаемое не превышает $16 \sup_{B \subset A} \|c\mu(B)\|$, что для $c \geq 1$ не больше чем $16c \sup_{B \subset A} \|\mu(B)\|$. Для фиксированного $c \geq 1$ выбором малого $v(A)$ мы можем это слагаемое сделать малым равномерно по n.

Покажем, что f интегрируема по μ. Теорема 1.2 нам дает для произвольной измеримой функции $g,\ |g(x)| \leq 1$, неравенство:

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \left\| \int_A f_n g\, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{B \subset A} \left\| \int_B f_n\, d\mu \right\|. \tag{1.13}$$

Рассмотрев функции $g = h/f_n$ (считаем $g(x) = 0$ для $f_n(x) = 0$), из (1.13) и доказанной выше равномерной абсолютной непрерывности η_n для $A_k \downarrow \emptyset$ получим, что

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n, |h| \leq |f_n|} \left\| \int_{A_k} h\, d\mu \right\| = 0. \tag{1.14}$$

Выберем подпоследовательность f_{n_i}, $i \geq 1$, такую, что $f_{n_i} \to f$ $v-$п. в. (эту возможность нам обеспечивает лемма 1.6). Тогда для этих f_{n_i} равенство (1.14) означает, что выполняется условие теоремы 7.3.6 [40]. По этой теореме, предельная f интегрируема и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_{n_i}\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu, \quad i \to \infty.$$

Остается доказать, что последовательность $\int_A f_n\, d\mu$, $n \geq 1$, сходится по вероятности. Для любых n, k, δ имеем, что

$$\left\| \int_A (f_n - f_k)\, d\mu \right\| \leq \left\| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| \leq \delta\}} (f_n - f_k)\, d\mu \right\| \\ + \left\| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| > \delta\}} f_n\, d\mu \right\| + \left\| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| > \delta\}} f_k\, d\mu \right\|.$$

Из леммы 1.2 и ограниченности множества значений случайной меры ([29, теорема]) следует, что выбором малого $\delta > 0$ мы можем сделать как угодно малым первое слагаемое равномерно по A, n, k. Для фиксированного $\delta > 0$ выбором достаточно больших n, k мы можем сделать как угодно малой $v\{|f_n - f_k| > \delta\}$ (это следует из условия $f_n \xrightarrow{v} f$). Поскольку η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно v, тем самым мы можем сделать как угодно малыми второе и третье слагаемые равномерно по всем A и достаточно большим n, k. Так как пространство L_0 полно, имеет место нужная сходимость. □

Следующее утверждение непосредственно обобщает известную теорему о сходимости функций по мере и их равномерную интегрируемость на случайные меры.

Следствие 1.1. *Пусть функции f_n, $n \geq 1$, интегрируемы по μ и $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тогда эквивалентны утверждения* (i), (ii), (iii) *теоремы 1.7.*

Доказательство. Утверждение следствия получаем, положив в теореме $v(A) = \sup_{B \subset A} \|\mu(B)\|$ и использовав лемму 1.8. □

Следующее утверждение является обобщением теоремы Лебега и для сходимости $f_n \to f$ $\mu-$п. в. содержится в следствии 7.3.7 [40].

Теорема 1.8. *Пусть μ абсолютно непрерывна относительно субмеры v, функции g и f_n, $n \geq 1$, интегрируемы по μ, $|f_n(x)| \leq |g(x)|$, $f_n \xrightarrow{v} f$. Тогда f интегрируема по μ и*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu \right\| \to 0.$$

Доказательство. Из теорем 1.6 и 1.7 следует, что достаточно проверить равномерную интегрируемость по μ множества, состоящего из одной функции g. Для последовательности одинаковых функций $g_n = g$, $n \geq 1$, очевидно, выполняется условие (i) теоремы 1.7, и из эквивалентности утверждений получаем выполнение условия (iii). □

Следствие 1.2. *Пусть функции g и f_n, $n \geq 1$, интегрируемы по μ, $|f_n(x)| \leq |g(x)|$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тогда f интегрируема по μ, и*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu \right\| \to 0.$$

Доказательство. Данное утверждение получаем из теоремы для $v(A) = \sup_{B \subset A} \|\mu(B)\|$. □

1.2.3 Теорема Валле — Пуссена для интегралов по случайной мере

В пункте 1.2.2 показана важность нашего условия равномерной интегрируемости (1.11) для обоснования предельного перехода под знаком интеграла. Теперь будет получен критерий для выполнения равенства (1.11), аналогичный теореме Валле — Пуссена для интегралов по действительным мерам (см., например, [9, теорема 22 главы II]). Имеет место следующий факт.

Теорема 1.9. *Для того, чтобы множество функций* $f_\gamma : X \to \mathbf{R}$, $\gamma \in \Gamma$, *интегрируемых по случайной мере* μ,*было равномерно интегрируемым по* μ, *необходимо и достаточно, чтобы существовала измеримая функция* $G(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *такая, что*

$$\lim_{|t|\to\infty} \left| \frac{G(t)}{t} \right| = \infty,$$

и набор случайных величин

$$\left\{ \int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu,\ A \in \mathcal{B},\ \gamma \in \Gamma \right\}$$

был ограничен по вероятности.

Доказательство. Сначала предположим, что указанная G существует, и обоснуем выполнение (1.11).

Зафиксируем $\alpha > 0$. Возьмем $c \in \mathbf{R}$ такое, что $|t/G(t)| < \alpha$ для $|t| > c$. Рассмотрим

$$\sup_{\gamma,A} \left\| \int_{A\cap\{|f_\gamma|>c\}} f_\gamma d\mu \right\| = \sup_{\gamma,A} \left\| \int_{A\cap\{|f_\gamma|>c\}} G(f_\gamma(x)) \frac{f_\gamma(x)}{G(f_\gamma(x))}\, d\mu \right\|.$$

В интеграле $|f_\gamma(x)| > c$, поэтому

$$\left| \frac{f_\gamma(x)}{G(f_\gamma(x))} \right| I_{A\cap\{|f_\gamma|>c\}} < \alpha,$$

и рассматриваемое выражение не превышает

$$\sup_{\gamma,h:|h(x)|\le\alpha} \left\| \int_X G(f_\gamma(x))h(x)\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{\gamma,A} \left\| \alpha \int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu \right\|.$$

Здесь в последнем неравенстве использована теорема 1.2. Используя ограниченность $\int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu$ по вероятности, выбором α (а, значит, и выбором c) можем сделать последнее выражение как угодно малым. Поэтому (1.11) выполняется.

Теперь предположим, что (1.11) имеет место, и построим функцию G, удовлетворяющую указанным требованиям.

Воспользовавшись (1.11), возьмем натуральные числа $s_n,\ n \ge 1$, такие, что $s_n \uparrow \infty$, и для всех $f_\gamma,\ A$

$$\left\| \int_{A\cap\{|f_\gamma|>s_n\}} f_\gamma d\mu \right\| \le 2^{-n}. \tag{1.15}$$

Положим

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \max\{i : s_i \le k\}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n I_{\{n\le|t|<n+1\}}(t).$$

Поскольку $\max\{i : s_i \le k\} \to +\infty$ при $k \to +\infty$, будет $\lim_{n\to\infty} r_n/n = +\infty$ и $\lim_{|t|\to\infty} |G(t)/t| = \infty$. Остается проверить, что интегралы из условия теоремы ограничены по вероятности. Имеем, что

$$\begin{aligned}G(f_\gamma(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\max\{i : s_i \le k\}\right) I_{\{n\le|f_\gamma|<n+1\}}(x)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\max\{i : s_i \le k\} I_{\{n\le|f_\gamma|<n+1\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\max\{i : s_i \le k\} I_{\{|f_\gamma|\ge k\}}(x)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=s_k}^{\infty} I_{\{|f_\gamma|\ge i\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=s_k}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} I_{\{j\le|f_\gamma|<j+1\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=s_k}^{\infty}\sum_{i=s_k}^{j} I_{\{j\le|f_\gamma|<j+1\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,\gamma}(x), \tag{1.16}$$

где

$$g_{k,\gamma}(x) = \sum_{j=s_k}^{\infty}(j - s_k + i) I_{\{j\le|f_\gamma|<j+1\}}(x). \tag{1.17}$$

Очевидно, что $|g_{k,\gamma}(x)| \le |f_\gamma(x)|$, и по теореме 7.3.5 [40] все функции $g_{k,\gamma}$ интегрируемы по μ. Отметим, что $g_{k,\gamma}(x) \ne 0$ лишь тогда, когда $|f_\gamma(x)| \ge s_k$.

Используя теорему 1.3 и (1.15), для произвольного $0 \le t \le 1$ и измеримой $h : X \to \mathbf{R}$, $|h(x)| \le 1$, (тогда $|tg_{k,\gamma}(x)h(x)| \le |f_\gamma(x)|$, мы имеем:

$$\left\|t\int_A g_{k,\gamma} h\, d\mu\right\| = \left\|\int_{A\cap\{|f_\gamma|\ge s_k\}} t f_\gamma \frac{g_{k,\gamma} h}{f_\gamma} d\mu\right\| \le 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \left\|t\int_{B\cap\{|f_\gamma|\ge s_k\}} f_\gamma d\mu\right\| \le 16\cdot 2^{-k}. \tag{1.18}$$

По лемме Бореля — Кантелли, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_A g_{k,\gamma} h\, d\mu$ сходится почти наверное. Теперь из теоремы 7.3.8 [40] следует, что $G(f_\gamma(x))$ интегрируема по μ и

$$\int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_A g_{k,\gamma} d\mu.$$

Используя (1.18) для $h(x) \equiv 1,\ t \le\ 1$, мы получаем, что

$$\begin{aligned}\left\|t\int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu\right\| &\le \sum_{k=1}^{\infty}\left\|t\int_A g_{k,\gamma} d\mu\right\| = \sum_{k=1}^{j}\left\|t\int_A g_{k,\gamma} d\mu\right\| + \sum_{k=j+1}^{\infty}\left\|t\int_A g_{k,\gamma} d\mu\right\| \le\\ &\sum_{k=1}^{j} 16 \sup_{B\in\mathcal{B}}\left\|t\int_B f_\gamma d\mu\right\| + \sum_{k=j+1}^{\infty} 16\cdot 2^{-k} \le\\ &16j \sup_{B\in\mathcal{B}}\left\|t\int_B f_\gamma I_{\{|f_\gamma|\le\delta\}} d\mu\right\| + 16j \sup_{B\in\mathcal{B}}\left\|t\int_B f_\gamma I_{\{|f_\gamma|>\delta\}} d\mu\right\| + 2^{4-j}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Выбором j мы можем сделать последнее слагаемое как угодно малым. Потом для $t = 1$, используя (1.11), выбором достаточно большого δ можем как угодно уменьшить второе слагаемое. Первое же слагаемое не превышает $256j \sup_{Y\in\mathcal{B}} \|t\delta\mu(Y)\|$ (по теореме 1.2 для $f(x) \equiv t,\ g(x) = f_\gamma(x) I_{\{|f_\gamma|\le\delta\}}(x),\ |g(x)| \le \delta$). Это выражение мы можем сделать как угодно малым выбором малого $t \le 1$. Это следует из теоремы работы [29], которая дает нам ограниченность по вероятности значений нашей случайной меры. При уменьшении t величина второго слагаемого не увеличится.

Поэтому множество значений

$$\int_A G(f_\gamma(x))\, d\mu, \quad A \in \mathcal{B}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

ограничено по вероятности. □

1.2.4 Обобщение теоремы Беппо Леви

Теорема 1.10. *Пусть даны функции f_n, все интегрируемые по μ, и такие, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится по случайной мере μ (см. определение 1.4). Пусть для каждого $A \in \mathcal{B}$ сходится по вероятности ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Тогда функция

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

интегрируема по μ и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A g \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 1.6, выделим $\{n_k\}$ такую, что

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{n_k} f_n(x) \to g(x) \ \mu - \text{п. в.}, \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим случайные меры

$$\eta_k(A) = \int_A g_k \, d\mu = \sum_{n=1}^{n_k} \int_A f_n \, d\mu.$$

По условию теоремы, каждая последовательность $\eta_k(A)$, $k \geq 1$, $A \in \mathcal{B}$, сходится по вероятности. Каждая η_k абсолютно непрерывна относительно субмеры

$$v_\mu(A) = \sup_{B \subset A} \|\mu(B)\|$$

(по теореме 1.4 и лемме 1.8). По аналогу теоремы Витали — Хана — Сакса 3.2 [26], эти случайные меры равномерно абсолютно непрерывны относительно v_μ. Возьмем произвольные $H_i \in \mathcal{B}$, $i \geq 1$, $H_i \downarrow \emptyset$. Тогда $v_\mu(H_i) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $i \to \infty$. Используя неравенство (1.4), имеем:

$$\sup_k \sup_{|f^{(0)}(x)| \leq |g_k(x)|} \left\| \int_{H_i} f^{(0)} \, d\mu \right\| = \sup_k \sup_{|f^{(0)}(x)| \leq |g_k(x)|} \left\| \int_{H_i} \frac{f^{(0)}}{g_k} g_k \, d\mu \right\|$$
$$\leq 16 \sup_{k, B \subset H_i} \left\| \int_B g_k \, d\mu \right\| = 16 \sup_{k, B \subset H_i} \|\eta_k(B)\|.$$

Из равномерной абсолютной непрерывности η_k следует, что последнее выражение стремится к нулю при $i \to \infty$. Теперь из теоремы 7.3.6 [40] мы имеем нужное нам утверждение. $\square$

1.2.5 Интегральное представление случайного линейного функционала

Соглашения

Всюду в этом пункте:

X — компактное топологическое пространство.

$\mathcal{B}$ — $\sigma-$алгебра борелевских подмножеств X.

$C(X)$ — пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbf{R}$ с нормой $\|f\|_c = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Теперь мы получим аналог теоремы Рисса об общем виде линейного функционала на пространстве непрерывных функций для случайного функционала.

Определение 1.6. *Случайным линейным функционалом (далее — с. л. ф.) на $C(X)$ называется непрерывный линейный оператор, действующий из $C(X)$ в $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.*

Действие с. л. ф. φ на функцию f будем обозначать через $\langle\varphi, f\rangle$.

Для указанных нами X, $\mathcal{B}$ для любой случайной меры на $(X,\ \mathcal{B})$ интеграл $\int_X f\,d\mu,\ \ f \in C(X)$, задает с. л. ф. Поскольку на компактном X непрерывные f ограничены, записанные интегралы существуют. Линейность такого оператора очевидна, его непрерывность следует из полученных нами фактов о предельном переходе (например, из следствия 1.2).

Имеет место и обратное утверждение — любой с. л. ф. является интегралом.

Теорема 1.11. *Пусть X — это компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{B}$ — $\sigma-$алгебра его борелевских подмножеств. Для любого с. л. ф. φ на $C(X)$ найдется случайная мера μ на $\mathcal{B}$ такая, что*

$$\forall f \in C(X) \quad \langle\varphi, f\rangle = \int_X f\,d\mu \quad \text{п. н.} \tag{1.20}$$

Если при этом (1.20) *будет выполняться для μ и для некоторой другой случайной меры μ_1 на $\mathcal{B}$, то*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(A) = \mu_1(A) \quad \text{п. н.}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n,\ n \ge 1\}$ функций из $C(X)$ такова, что все $f_n(x) \ge 0$, и для некоторого $M > 0$ для всех x

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le M.$$

Тогда для любых $c_n,\ |c_n| \le 1$, и для $l \in \mathbf{N}$

$$\left\|\sum_{n=1}^{l} c_n f_n\right\|_c \le M.$$

Также из непрерывности с. л. ф. имеем, что

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\|f\|_c\le M} \mathbf{P}\left\{|\langle\varphi, f\rangle| > c\right\} = \lim_{c\to\infty} \sup_{\|f\|_c\le M} \mathbf{P}\left\{\left|\left\langle\varphi, \frac{f}{c}\right\rangle\right| > 1\right\} = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{|c_n|\le 1, l\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{n=1}^{l} c_n \langle\varphi, f_n\rangle\right| > c\right\} = 0.$$

Лемма [32] нам дает, что последнего равенства достаточно, чтобы $\langle\varphi, f_n\rangle \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Тем самым мы доказали, что в смысле работы [30] оператор $\varphi : C(X) \to L_0$ является исчерпывающим (в [30] — *exhaustive*). Таким образом, для φ выполняются условия теоремы 10 [30], что и дает нам интегральное представление (1.20). Однозначность определения μ следует из хода доказательства теоремы 10 [30] (утверждение 8 [30], на которое непосредственно опирается доказательство теоремы 10, дает однозначность продолжения нашего оператора с $C(X)$ на $B(X)$).

Наш интеграл и интеграл из [30] на функциях из $B(X)$ дают одно и то же значение. Совпадение значений на простых функциях следует из линейности этих объектов. Для произвольной $f \in B(X)$ можно выбрать простые f_n, интегралы от которых совпадают с $\int_X f\, d\mu$ и в смысле данной работы, и в понимании [30]. Ведь в [30] интеграл строится так, что для $f_n \in B(X),\ n \geq 1$, с $f_n(x) \leq f(x),\ \forall x \quad f_n(x) \to f(x)$ имеет место

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$$

в топологии, в которой берется непрерывность нашего оператора. □

1.3 Предельные теоремы для интегралов при сходимости случайных мер

1.3.1 Условия равномерной ограниченности значений случайных мер

В данном параграфе мы будем изучать условия сходимости

$$\int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu$$

и связанные с этим задачи.

Совершенно естественным является следующее определение.

Определение 1.7. *Будем говорить, что значения случайных мер $\mu_\gamma,\ \gamma \in \Gamma$, равномерно ограничены по вероятности, если*

$$\lim_{t\to 0}\ \sup_{\gamma, A} \|t\mu_\gamma(A)\| = 0. \tag{1.21}$$

Эквивалентным (1.21) является равенство

$$\lim_{c\to\infty}\ \sup_{\gamma, A} \mathbf{P}\left\{|\mu_\gamma(A)| > c\right\} = 0. \tag{1.22}$$

Теорема 1.12. *Пусть даны случайные меры μ и $\mu_n,\ n \geq 1$, такие, что*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A).$$

Тогда эквивалентными являются следующие утверждения:

(i) *значения $\mu_n,\ n \geq 1$, равномерно ограничены по вероятности;*

(ii) *существует такая последовательность $\{a_k,\ k \geq 1\} \subset \mathbf{R}$, что $\forall k \quad 0 < |a_{k+1}| \leq |a_k|/2$ и $\forall \{n_k,\ k \geq 1\} \subset \mathbf{N}$, $A \in \mathcal{B}$, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_{n_k}(A)$$

сходится п. н.;

(iii) *существует такая последовательность* $\{a_k,\ k \ge 1\} \subset \mathbf{R}$, *что* $\forall k \quad 0 < |a_{k+1}| \le |a_k|/2$ *и* $\forall \{n_k,\ k \ge 1\} \subset \mathbf{N}$, $A \in \mathcal{B}$, *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_{n_k}(A)$$

сходится по вероятности.

Доказательство. Сначала докажем, что из (i) следует (ii). Воспользовавшись (1.21), возьмем $a_k,\ k \ge 1$, такие, что для всех $k \quad 0 < |a_{k+1}| \le |a_k|/2$ и

$$\sup_{A,n} \|a_k \mu_n(A)\| < 2^{-k}.$$

Тогда из леммы Бореля — Кантелли следует, что для любых A и n_k с вероятностью 1 сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_{n_k}(A),$$

выполняется условие (ii).

Следование (ii) $\Rightarrow$ (iii) является очевидным.

Теперь докажем (iii) $\Rightarrow$ (i). Будем считать $\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(A) = 0$. Это не ограничивает общности, поскольку для указанных a_k ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A)$$

будет сходиться, и мы можем рассматривать случайные меры $(\mu_n - \mu)$ вместо μ_n.

Пусть (1.21) не выполняется. При этом множество значений каждой отдельной μ_n является ограниченным в соответствии с [29, теорема]. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\{t_i,\ i \ge 1\} \subset \mathbf{R}$ с $t_i \to 0$, $i \to \infty$, и возрастающая последовательность $\{n_i,\ i \ge 1\} \subset \mathbf{N}$ такие, что

$$\forall i \quad \sup_{A \in \mathcal{B}} \|t_i \mu_{n_i}(A)\| > \varepsilon_0. \tag{1.23}$$

Мы можем выбрать число $n_1^{(1)}$ из последовательности $\{n_i\}$ а также множество $A_1 \in \mathcal{B}$ такие, что

$$\|a_1 \mu_{n_1^{(1)}}(A_1)\| > \varepsilon_0.$$

В дальнейшем из последовательности $\{n_i\}$, начиная с $n_1^{(1)}$, выбираем подпоследовательность $\{n_i^{(1)},\ i \ge 1\}$ такую, что

$$\mu_{n_i^{(1)}}(A_1) \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad i \to \infty$$

(здесь мы использовали условие $\mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$). Также положим $c_1 = 1$.

Теперь покажем как после выбора элементов $A_{k-1} \in \mathcal{B}$, $c_{k-1} \in \mathbf{R}$, последовательности $\{n_i^{(k-1)},\ i \ge 1\} \in \mathbf{N}$ (и всех предыдущих элементов) сделать такой выбор для k. На каждом шаге выбор делается так, что мы имеем

$$\mu_{n_i^{(k-1)}}(A_{k-1}) \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad i \to \infty. \tag{1.24}$$

Использовав ограниченность значений каждой μ_n, возьмем $0 < c_k \le 1/k$ так, что

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| c_k \sum_{s=1}^{k-1} a_s \mu_{n_1^{(s)}}(A) \right\| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{1.25}$$

Возьмем число $n_1^{(k)}$ в последовательности $\{n_i^{(k-1)},\ i \geq\ 1\}$ и множество $A_k \in \mathcal{B}$ так, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu_{n_1^{(k-1)}}(A_{k-1})\right| > 4 \sup_{i: n_i^{(k-1)} > n_1^{(k)}} \left|\mu_{n_i^{(k-1)}}(A_{k-1})\right|\right\} > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{1.26}$$

$$\left\|c_k a_k \mu_{n_1^{(k)}}(A_k)\right\| > \varepsilon_0. \tag{1.27}$$

Здесь возможность выполнения (1.26) следует из (1.24), а (1.27) — из (1.23). Теперь из последовательности $\left\{n_i^{(k-1)},\ i \geq 1\right\}$, начиная с $n_1^{(k)}$, выбираем подпоследовательность $\left\{n_i^{(k)},\ i \geq 1\right\}$ так, что

$$\mu_{n_i^{(k)}}(A_k) \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad i \to \infty$$

(мы снова использовали условие $\mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$).

Таким же образом продолжаем выбор дальше.

Теперь рассмотрим случайную меру

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_{n_1^{(k)}}(A).$$

Этот ряд сходится по условию (iii) и по выбору a_k, его сумма является случайной мерой по теореме 8.6 [28]. Рассмотрим

$$c_j \nu(A_j) = c_j \sum_{k=1}^{j-1} a_k \mu_{n_1^{(k)}}(A_j) + c_j a_j \mu_{n_1^{(j)}}(A_j) + c_j \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k \mu_{n_1^{(k)}}(A_j). \tag{1.28}$$

Имеем, что $0 < |a_{k+1}| \leq |a_k|/2$ и $\left\{n_i^{(j)},\ i \geq 1\right\}$ содержит все $n_1^{(k)}$ для $k > j$. Поэтому из (1.26) и (1.27) мы находим, что модуль суммы второго и третьего слагаемых (1.28) превышает $3\varepsilon_0/4$ с вероятностью большей, чем $3\varepsilon_0/4$. Учитывая также (1.25), имеем:

$$\|c_j \nu(A_j)\| > \varepsilon_0/2.$$

Поскольку по нашему выбору $|c_j| \leq 1/j$, мы получаем неограниченность по вероятности значений ν. Это противоречит [29, теорема], утверждение (i) доказано. □

Замечание 1.1. *Из выбора n_k, производимого, начиная с равенства* (1.23)*, следует, что выполнение условий (i) и (ii) достаточно проверять для возрастающих последовательностей $\{n_k,\ k \geq 1\}$.*

Следствие 1.3. *Пусть даны случайные меры μ и μ_n, $n \geq 1$, такие, что*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A), \quad \sup_n |\mu_n(A)| < \infty \ \textit{п. н.}$$

Тогда значения μ_n, $n \geq 1$, равномерно ограничены по вероятности.

Доказательство. При $A_k = 2^{-k}$ будет справедливым утверждение (ii) теоремы. Поэтому имеет место и утверждение (i). □

Следствие 1.4. *Пусть даны случайные меры μ и μ_n, $n \geq 1$, такие, что*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_n(A) \to \mu(A) \ \textit{п. н.}$$

Тогда значения μ_n, $n \geq 1$, равномерно ограничены по вероятности.

Доказательство. Утверждение следует из предыдущего следствия. □

1.3.2 Условия предельного перехода в интеграле при сходимости случайных мер

Дальше нам будет полезным понятие равномерной интегрируемости для одной действительнозначной функции и множества случайных мер.

Определение 1.8. *Пусть даны множество случайных мер μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, и функция f, интегрируемая по всем μ_γ. Тогда f называется равномерно интегрируемой по случайным мерам μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{c\to\infty} \sup_{\gamma, A} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\,d\mu_\gamma\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{1.29}$$

Равенству (1.29), очевидно, эквивалентно такое условие:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\gamma, A} \left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\,d\mu_\gamma\right\| = 0. \tag{1.30}$$

Теорема 1.13. *Пусть функция $f : X \to \mathbf{R}$ равномерно интегрируема по μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, и измеримая функция $h : X \to \mathbf{R}$ такова, что $\forall x \quad |h(x)| \le |f(x)|$. Тогда функция h также равномерно интегрируема по μ_γ, $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Положив в (1.7) $\mu = \mu_\gamma$ и учитывая, что $\{|h| > c\} \subset \{|f| > c\}$, имеем:

$$\sup_{\gamma, A} \left\|\int_{A\cap\{|h|>c\}} h\,d\mu_\gamma\right\| \le 16 \sup_{\gamma, A} \left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\,d\mu_\gamma\right\|.$$

Отсюда и из условия равномерной интегрируемости в виде (1.30) следует факт теоремы. □

Значение условий равномерной ограниченности значений случайных мер и равномерной интегрируемости по множеству случайных мер видно в следующем утверждении.

Теорема 1.14. *Пусть даны случайные меры μ и μ_n, $n \ge 1$, а также функция f, интегрируемая по всеми μ_n. Если выполняются условия:*

(i) $\mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A)$ *для любого множества $A \in \mathcal{B}$;*

(ii) *значения μ_n, $n \ge 1$, равномерно ограничены по вероятности;*

(iii) *функция f является равномерно интегрируемой по μ_n, $n \ge 1$,*

то f является интегрируемой по μ и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\,d\mu.$$

Если

$$\forall f \in B(X) \quad \int_X f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\,d\mu,$$

то выполняются условия (i) *и* (ii).

Если данная f является интегрируемой по μ и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\,d\mu,$$

то имеет место (iii).

Доказательство. Пусть выполняются условия (i), (ii) и (iii).

Из (i) следует, что для любой простой функции

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k I_{A_k}(x)$$

будет

$$\int_A f^{(0)}\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f^{(0)}\, d\mu.$$

Возьмем произвольную $f \in B(X)$, некоторое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим простую функцию $f^{(0)}$ такую, что

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f^{(0)}(x)| \le \varepsilon.$$

Используя (1.4) имеем, что

$$\begin{aligned}\left\|\int_A f\, d\mu_n - \int_A f\, d\mu\right\| &\le \left\|\int_A f^{(0)}\, d\mu_n - \int_A f^{(0)}\, d\mu\right\| + \left\|\int_A (f - f^{(0)})\, d\mu_n\right\| + \left\|\int_A (f^{(0)} - f)\, d\mu\right\| \\ &\le \left\|\int_A f^{(0)}\, d\mu_n - \int_A f^{(0)}\, d\mu\right\| + 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \|\varepsilon\mu_n(B)\| + 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \|\varepsilon\mu(B)\|. \quad (1.31)\end{aligned}$$

Используя условие (ii) и ограниченность значений μ, мы можем выбором ε сделать в последней сумме как угодно малыми второе и третье слагаемые. Взяв для этого ε нужную $f^{(0)}$, для нее выбором достаточно больших n мы можем сделать малым и первое слагаемое. Поэтому в этом случае

$$\int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$

Теперь рассмотрим произвольную функцию f, удовлетворяющую условию (iii). Положим

$$f_k(x) = f(x) I_{\{|f(x)|\le k\}}(x).$$

Из интегрируемости f следует, что при $k \to \infty \quad \forall n \quad f_k(x) \to f(x)$ μ_n–п. в., значит и μ–п. в. Мы будем считать, что $\forall x \quad f_k(x) \to f(x),\ k \to \infty$. Каждая f_k — как ограниченная — является интегрируемой по μ. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty} \sup_{k,A} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A\cap\{|f_k|>c\}} f_k\, d\mu\right| > \varepsilon\right\} &\le \lim_{c\to\infty} \sup_{k,A,n} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A\cap\{|f_k|>c\}} f_k\, d\mu_n\right| > \varepsilon\right\} \\ = \lim_{c\to\infty} \sup_{k,A,n} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A\cap\{c<|f|\le k\}} f\, d\mu_n\right| > \varepsilon\right\} &\le \lim_{c\to\infty} \sup_{A,n} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\, d\mu_n\right| > \varepsilon\right\} = 0.\end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из выше доказанной сходимости интегралов по μ_n на ограниченных функциях, следующее равенство — из определения f_k. Имеем, что $f_k,\ k \ge 1$, равномерно интегрируемы по μ, из теоремы 1.7 получаем интегрируемость f по μ.

Для любых $A,\ c$ мы имеем неравенство

$$\begin{aligned}\left\|\int_A f\, d\mu_n - \int_A f\, d\mu\right\| \le \left\|\int_{A\cap\{|f|\le c\}} f\, d\mu_n - \int_{A\cap\{|f|\le c\}} f\, d\mu\right\| \\ + \left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\, d\mu_n\right\| + \left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\, d\mu\right\|.\end{aligned}$$

Воспользовавшись условием (iii), выбором достаточно больших c мы можем сделать как угодно малым второе слагаемое. Поскольку множество из одной функции f является равномерно интегрируемым по μ (для последовательности одинаковых f справедливо утверждение (i) теоремы 1.7, а значит и ее утверждение (iii)), выбором c мы можем уменьшать и третье слагаемое. Для любого фиксированного c первое слагаемое можно сделать малым выбором больших n — сходимость наших интегралов на ограниченных функциях мы уже доказали. Следовательно,

$$\int_A f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\,d\mu.$$

Пусть

$$\forall f \in B(X) \ \int_X f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\,d\mu.$$

Положив здесь $f(x) = I_A(x)$, получим выполнение условия (i). Теперь предположим, что не выполняется условие (ii). Из ограниченности значений μ имеем, что не будут равномерно ограниченными значения $(\mu_n - \mu)$, $n \geq 1$, соответствующий предел для $(\mu_n - \mu)$ в (1.21) положителен.

Тогда можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$, $\{t_i,\ i \geq 1\} \subset \mathbf{R}$, $\{A_i,\ i \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ и возрастающую последовательность$\{n_i,\ i \geq 1\} \subset \mathbf{N}$ такие, что

$$\forall i \quad \|t_i(\mu_{n_i} - \mu)(A_i)\| > \varepsilon_0, \tag{1.32}$$

$$\forall i \geq 2 \quad 0 < t_i \leq \frac{t_{i-1}}{2}, \tag{1.33}$$

$$\forall i \geq 2 \quad \left\| \sum_{s=1}^{i-1} t_s(\mu_{n_i} - \mu)(A_s) \right\| < \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{1.34}$$

$$\forall i \geq 2 \quad \sup_{B \in \mathcal{B}} \left\| 2t_i(\mu_{n_{i-1}} - \mu)(B) \right\| < \frac{\varepsilon_0}{64}. \tag{1.35}$$

Для такого выбора сначала возьмем $\varepsilon_0 > 0$ из условия неограниченности $(\mu_n - \mu)$ — некоторое положительное число, меньшее по значению предела (1.21). На первом шаге возьмем $t_1 = 1$ и $n_1,\ A_1$ такие, что выполняется условие (1.32). Далее на каждом $i-$ом шаге сначала берем t_i, для которого справедливы (1.33) и (1.35) (последнего можно добится благодаря ограниченности значений каждой случайной меры). Потом выбираем n_i, большее n_{i-1}, начиная с тех достаточно больших значений, для которых всех имеет место (1.33) (здесь пользуемся условием $\forall A \quad (\mu_n - \mu)(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$) и так, что для некоторого $A_i \in \mathcal{B}$ выполняется (1.32).

Теперь рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} t_s I_{A_s}(x).$$

Сходимость этого ряда и ограниченность значений f следует из (1.33). Из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] имеем, что $\int_X f\,d\mu_{n_i}$, $\int_X f\,d\mu$ равны суммам соответствующих рядов, и мы получаем:

$$\int_X f\,d\mu_{n_i} - \int_X f\,d\mu = \sum_{s=1}^{i-1} t_s(\mu_{n_i} - \mu)(A_s) + t_i(\mu_{n_i} - \mu)(A_i) + \sum_{s=i+1}^{\infty} t_s(\mu_{n_i} - \mu)(A_s).$$

Обозначим три слагаемых последнего выражения через $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ соответственно. Тогда $\|\alpha_1\| < \varepsilon_0/4$ по (1.33), $\|\alpha_2\| > \varepsilon_0$ по (1.32). Также

$$\alpha_3 = \int_X g\,d(\mu_{n_i} - \mu)$$

для функции g такой, что

$$|g(x)| \le \sum_{s=i+1}^{\infty} t_s \le 2t_{i+1}.$$

По неравенству (1.4) и условию (1.35),

$$\|\alpha_3\| \le 16 \sup_{B\in\mathcal{B}} \|2t_{i+1}(\mu_{n_i} - \mu)(B)\| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Тогда для всех $n_i \quad \|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\| > \varepsilon_0/2$, и не выполняется условие

$$\int_X f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\, d\mu.$$

Полученное противоречие доказывает условие (ii).

Теперь пусть

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$

Тогда, по обобщению теоремы Никодима 8.6 [28], случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f\, d\mu_n$$

равномерно $\sigma-$аддитивны. Поскольку

$$\{x : |f(x)| > c\} \downarrow \emptyset, \quad c \uparrow \infty,$$

выполняется условие (iii). □

Замечание 1.2. *Согласно теореме 1.12, условие равномерной ограниченности в формулировке последней теоремы можно заменить на условие* (ii) *или* (iii) *теоремы 1.12.*

Из теоремы 1.14 и следствия 1.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Пусть даны случайные меры μ и $\mu_n,\ n \ge 1$, а также функция f, интегрируемая по всем μ_n. Если выполняются условия:*

(i) $\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A)$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{B} \quad \sup_n |\mu_n(A)| < \infty$ *п. н.*

(iii) *функция f равномерно интегрируема по $\mu_n,\ n \ge 1$,*

то f интегрируема по μ и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$

Теперь получим условия равномерной по $A \in \mathcal{B}$ сходимости интегралов по случайным мерам.

Теорема 1.15. *Пусть даны случайные меры μ и $\mu_n,\ n \ge 1$, а также функция f, интегрируемая по всем μ_n. Пусть выполняются условия:*

(i) $\sup_{A\in\mathcal{B}} \|\mu_n(A) - \mu(A)\| \to 0$;

(ii) *значения $\mu_n,\ n \ge 1$, равномерно ограничены по вероятности;*

(iii) *функция f равномерно интегрируема по $\mu_n,\ n \ge 1$.*

Тогда f интегрируема по μ и

$$\sup_{A\in\mathcal{B}} \left\| \int_A f\, d\mu_n - \int_A f\, d\mu \right\| \to 0.$$

Доказательство. Проводим рассуждения аналогично доказательству теоремы 1.14.

Из (i) имеем для любой простой функции $f^{(0)}$

$$\sup_{A\in\mathcal{B}}\left\|\int_A f^{(0)}\,d\mu_n-\int_A f^{(0)}\,d\mu\right\|\to 0.$$

Возьмем произвольную $f\in B(X)$, некоторое $\varepsilon>0$ и рассмотрим простую функцию $f^{(0)}$ такую, что

$$\sup_{x\in X}|f(x)-f^{(0)}(x)|\le\varepsilon.$$

Как и в (1.31) имеем, что

$$\left\|\int_A f\,d\mu_n-\int_A f\,d\mu\right\|\le\left\|\int_A f^{(0)}\,d\mu_n-\int_A f^{(0)}\,d\mu\right\|+16\sup_{B\in\mathcal{B}}\|\varepsilon\mu_n(B)\|+16\sup_{B\in\mathcal{B}}\|\varepsilon\mu(B)\|.$$

Выбором ε мы можем сделать в этой сумме как угодно малыми второе и третье слагаемые. Взяв для этого ε требуемую $f^{(0)}$, для нее выбором n мы можем сделать первое слагаемое как угодно малым равномерно по $A\in\mathcal{B}$. Поэтому для $f\in B(X)$ утверждение имеет место.

Теперь возьмем произвольную f, удовлетворяющую условиям нашей теоремы. Поскольку тогда выполняются все условия теоремы 1.14, f будет интегрируемой по μ.

Для любых A, c мы имеем неравенство

$$\left\|\int_A f\,d\mu_n-\int_A f\,d\mu\right\|\le\left\|\int_{A\cap\{|f|\le c\}} f\,d\mu_n-\int_{A\cap\{|f|\le c\}} f\,d\mu\right\|$$
$$+\left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\,d\mu_n\right\|+\left\|\int_{A\cap\{|f|>c\}} f\,d\mu\right\|.$$

Как и в доказательстве теоремы 1.14, по условию (iii) выбором достаточно больших c мы можем сделать как угодно малым второе и третье слагаемые. Для любого фиксированного c первое слагаемое можно сделать малым равномерно по $A\in\mathcal{B}$ выбором больших n — возможность этого для ограниченных функций мы уже доказали. □

Отметим, что необходимость условия (i) в последней теореме очевидна, условия (ii) и (iii) необходимы в том же смысле, что и в теореме 1.14.

1.3.3 Теорема Валле — Пуссена для сходимости случайных мер

Для условия (1.29) равномерной интегрируемости действительной функции по множеству случайных мер докажем критерий его выполнения, аналогичный теореме Валле — Пуссена (для равномерной интегрируемости множества действительных функций по случайной мере соответствующий факт дает теорема 1.9.)

Теорема 1.16. *Пусть даны множество случайных мер μ_γ, $\gamma\in\Gamma$, и функция f, интегрируемая по всем μ_γ.*

Пусть существует функция $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такая, что

$$\lim_{|t|\to\infty}\left|\frac{G(t)}{t}\right|=\infty,$$

$G(f(x))$ интегрируема по всем μ_γ, $\gamma\in\Gamma$, и набор случайных величин

$$\left\{\int_A G(f(x))\,d\mu_\gamma,\quad A\in\mathcal{B},\quad \gamma\in\Gamma\right\}$$

ограничен по вероятности. Тогда f равномерно интегрируема по случайным мерам μ_γ, $\gamma \in \Gamma$.

Если значения μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, равномерно ограничены по вероятности и f равномерно интегрируема по случайным мерам μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, то существует функция G с указанными свойствами.

Доказательство. Рассуждения проводим аналогично доказательству теоремы 1.9.

Сначала предположим, что указанная G существует, и докажем выполнение (1.29).

Зафиксируем $\alpha > 0$. Возьмем $c \in \mathbf{R}$ такое, что $|t/G(t)| < \alpha$ для $|t| > c$. Рассмотрим

$$\sup_{\gamma,A} \left\| \int_{A\cap\{|f|>c\}} f\, d\mu_\gamma \right\| = \sup_{\gamma,A} \left\| \int_{A\cap\{|f|>c\}} G(f(x)) \frac{f(x)}{G(f(x))}\, d\mu_\gamma \right\|.$$

В интеграле

$$\left| \frac{f(x)}{G(f(x))} \right| I_{A\cap\{|f|>c\}(x)} < \alpha,$$

и, как нам дает теорема 1.2, рассматриваемое выражение не превышает

$$16 \sup_{\gamma,A} \left\| \alpha \int_A G(f(x))\, d\mu_\gamma \right\|.$$

Используя ограниченность $\int_A G(f(x))\, d\mu_\gamma$ по вероятности, выбором α (а, значит, и выбором c) можем сделать последнее выражение как угодно малым. Поэтому (1.29) имеет место.

Теперь предположим, что значения μ_γ, $\gamma \in \Gamma$, равномерно ограничены и f равномерно интегрируема по этим случайным мерам. Используя равномерную интегрируемость f, возьмем натуральные числа s_n, $n \geq 1$, такие, что $s_n \uparrow \infty$, и для всех μ_γ, A

$$\left\| \int_{A\cap\{|f|>s_n\}} f\, d\mu_\gamma \right\| \leq 2^{-n}. \tag{1.36}$$

Положим

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \max\{i : s_i \leq k\}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n I_{\{n\leq|t|<n+1\}}(t).$$

Поскольку $\max\{i : s_i \leq k\} \to +\infty$ при $k \to +\infty$, будет $\lim_{n\to\infty} r_n/n = +\infty$ и $\lim_{|t|\to\infty} |G(t)/t| = \infty$. Остается проверить, что интегралы из условия нашей теоремы ограничены по вероятности. Точно так же, как и в (1.16), имеем, что

$$G(f(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

где

$$g_k(x) = \sum_{j=s_k}^{\infty} (j - s_k + 1) I_{\{j\leq|f|<j+1\}}(x).$$

В дальнейшем повторяем все рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 1.9 после равенства (1.17), заменив там $g_{k,\gamma}$, f_γ, μ на g_k, f, μ_γ соответственно. Так же, как и (1.19), для $t \leq 1$ получаем неравенство

$$\left\| t \int_A G(f(x))\, d\mu_\gamma \right\| \leq 16j \sup_{B\in\mathcal{B}} \left\| t \int_B f I_{\{|f|\leq\delta\}} d\mu_\gamma \right\| + 16j \sup_{B\in\mathcal{B}} \left\| t \int_B f I_{\{|f|>\delta\}} d\mu_\gamma \right\| + 2^{4-j}.$$

Выбором j мы можем сделать последнее слагаемое как угодно малым. Потом для $t = 1$, используя равномерную интегрируемость f по μ_γ, выбором достаточно большого δ

можем как угодно уменьшить второе слагаемое. Первое же слагаемое не превышает $256j \sup_{\gamma,Y} \|t\delta\mu_\gamma(Y)\|$ (по теореме 1.2 для $f(x) \equiv t,\ g(x) = f(x)I_{\{|f|\le\delta\}}(x),\ |g(x)| \le \delta$). Это выражение мы можем сделать как угодно малым выбором малого $t \le 1$, поскольку значения μ_γ равномерно ограничены.

Поэтому множество значений

$$\int_A G(f(x))\, d\mu_\gamma, \quad A \in \mathcal{B}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

ограничено по вероятности. □

1.3.4 Сходимость случайных мер, являющихся интегралами

Теперь мы рассмотрим возможность перехода от сходимости последовательности случайных мер к сходимости интегралов по этими мерам в том частном случае, когда каждая случайная мера в последовательности является интегралом по фиксированной случайной мере.

Теорема 1.17. *Пусть даны случайные меры μ и η, а также функции $f_n : X \to \mathbf{R}$, $n \ge 1$, все интегрируемые по μ. Для того, чтобы имела место сходимость*

$$\forall g \in B(X) \quad \int_X f_n g\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X g\, d\eta, \tag{1.37}$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_n d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A), \tag{1.38}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{c\to\infty} \sup_{n, A \subset \{|f_n|>c\}} \mathbf{P}\{|\mu(A)| > \varepsilon\} = 0. \tag{1.39}$$

Доказательство. Будем рассматривать случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f_n d\mu.$$

Пусть выполняются условия (1.38) и (1.39), докажем выполнение (1.37). Имеем

$$\forall g \in B(X),\ A \in \mathcal{B} \quad \int_A g\, d\eta_n = \int_A f_n g\, d\mu$$

(согласно лемме 1.3) и $\eta_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A)$. Теперь нам нужно доказать, что

$$\int_X g\, d\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X g\, d\eta,$$

для чего используем теорему 1.14.

Как мы отметили, условие (i) теоремы 1.14 выполняется, условие (iii) имеет место, поскольку функция g ограничена, остается проверить равномерную ограниченность по вероятности значений η_n. Для любых $t,\ c$ имеем:

$$\sup_{n,A} \|t\eta_n(A)\| = \sup_{n,A} \left\| t \int_A f_n d\mu \right\| \le \sup_{n,A} \left\| t \int_{A\cap\{|f_n|>c\}} f_n d\mu \right\| + \sup_{n,A} \left\| t \int_{A\cap\{|f_n|\le c\}} f_n d\mu \right\|.$$

Как следует из (1.39) и теоремы 1.4 (об абсолютной непрерывности интеграла по случайной мере относительно этой случайной меры), для $t = 1$ выбором большого c мы можем сделать как угодно малым первое слагаемое. Согласно лемме 1.2, второе слагаемое не превышает $16 \sup_{A\in\mathcal{B}} \|tc\mu(A)\|$. Для произвольного c это значение можно сделать достаточно малым уменьшением t (это следует из ограниченности значений случайной меры), и при таком изменении t не увеличится первое слагаемое. Поэтому значения η_n равномерно ограничены, выполняется (1.37).

Теперь пусть (1.37) имеет место. Положив там $g(x) \equiv 1$, получим выполнение (1.38). Из (1.37) и теоремы 1.14 следует равномерная ограниченность значений η_n. Из леммы 1.3 для $c > 0,\ A \subset \{|f_n| > c\}$ имеем:

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{f_n}\, d\eta_n.$$

Поскольку здесь $|1/f_n| < 1/c$, для таких $c,\ A$ из леммы 1.2 следует, что

$$\|\mu(A)\| \le 16 \sup_{B\subset A} \left\| \frac{1}{c}\eta_n(B) \right\|.$$

Из равномерной ограниченности η_n получаем:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n, A\subset\{|f_n|>c\}} \|\mu(A)\| = 0,$$

что эквивалентно (1.39). □

Автору неизвестно является ли (1.39) следствием (1.38) в общем случае. Но для некоторых μ это так.

Теорема 1.18. *Пусть случайная мера μ такова, что*

$$\forall\beta > 0 \quad \exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}\ (\|\mu(B)\| > \beta)$$
$$\exists A \subset B: \quad \sup_{F\subset A} \|\mu(F)\| < \delta, \quad \|c\mu(A)\| > \varepsilon. \quad (1.40)$$

Тогда для всех f_n, интегрируемых по μ, для которых выполняется (1.38), *будет выполняться и* (1.39).

Доказательство. Обозначим

$$2\beta = \lim_{c\to\infty} \sup_{n, B\subset\{|f_n|>c\}} \|\mu(B)\|.$$

Выполнение (1.39) эквивалентно равенству $\beta = 0$. Предположим, что $\beta > 0$. В (1.40) зафиксируем соответствующее $\varepsilon > 0$, возьмем произвольное $\delta > 0$ и для них $c > 0$. Тогда для этого c найдутся $n_c \in \mathbf{N}$ и $B \subset \{|f_{n_c}| > c\} : \|\mu(B)\| > \beta$. Возьмем $A \subset B$, удовлетворяющее (1.40). Положим в теореме 1.2 $\alpha = 1/c,\ f = f_{n_c},\ g = 1/f_{n_c}$ (g определена и $|g(x)| < 1/c$ на $A \subset B$), и возьмем $c\mu$ как случайную меру. Получим, что

$$\sup_{F\subset A} \left\| \int_F f_{n_c}\, d\mu \right\| \ge \frac{1}{16} \|c\mu(A)\| > \frac{\varepsilon}{16}. \quad (1.41)$$

Случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f_n d\mu, \quad n \ge 1,$$

абсолютно непрерывны относительно μ (теорема 1.4), значит и относительно субмеры

$$v_\mu(A) = \sup_{F\subset A} \|\mu(F)\|.$$

По условию (1.38),

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \eta_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A).$$

По теореме 3.2 [26] (обобщению теоремы Витали — Хана — Сакса) и лемме 1.8 η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно v_μ. Поскольку в (1.41) $\varepsilon > 0$ фиксировано, $\delta > 0$ произвольно и по (1.40) $v_\mu(A) < \delta$, мы получили противоречие. $\square$

Пример. Покажем, что случайная мера на $X = [0,\ 1]$ и борелевских подмножествах $[0,\ 1]$, заданная интегралом Ито

$$w(A) = \int_0^1 I_A(x)\, dw,$$

удовлетворяет (1.40) для произвольного $0 < \varepsilon < 1$.

То, что указанная функция множеств является случайной мерой в нашем смысле, следует из свойств интеграла Ито. Для этой случайной меры будет

$$\sup_{F \subset A} \|\mu(F)\| = \|\mu(A)\|\,.$$

Зафиксируем положительные $\beta,\ \varepsilon,\ \delta$, меньшие 1 (последнее требование не ограничивает общности). Тогда в любом $B \in \mathcal{B}$ с $\|\mu(B)\| > \beta$ мы можем взять подмножество A с $\|\mu(A)\| = \min\{\beta/2,\ \delta/2\}$. Поскольку для величины $\mu(A)$ с нормальным распределением будет $\|c\mu(A)\| \to 1,\ c \to \infty$, мы можем выбрать c такое, что будет $\|c\mu(A)\| > \varepsilon$. Значение c можно определить, зная β и δ (ведь при этом мы полностью знаем распределение $\mu(A)$). $\square$

1.3.5 Приближение интегралов по случайной мере с помощью действительных мер

В этом пункте мы рассмотрим последовательность случайных мер $\mu_n,\ n \geq 1$, специального вида. Мы покажем, что для ограниченных функций f интегралы $\int_X f\, d\mu$ можно приближать с помощью $\int_X f\, d\mu_n$, где каждая μ_n определяется через значения μ на конечном количестве множеств (не зависящих от f) и значения некоторой действительной меры.

Рассмотрим последовательность $T_n,\ n \geq 1$, измельчающихся разбиений X. То есть, выполняются условия:

$$T_n = \{X_{n,k},\ 1 \leq k \leq l_n\}\,, \quad X_{n,k} \in \mathcal{B};$$
$$\forall n \quad X = \cup_{k=1}^{l_n} X_{n,k};$$
$$\forall n,\ k \neq j \quad X_{n,k} \cap X_{n,j} = \emptyset;$$
$$\forall n,\ k \quad \exists j \quad X_{n+1,k} \subset X_{n,j}.$$

Для действительной неотрицательной меры m, случайной меры μ и $n \geq 1$ определим случайные меры

$$\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{l_n} \mu(X_{n,k}) \frac{m(A \cap X_{n,k})}{m(X_{n,k})} \tag{1.42}$$

(если для некоторых $n,\ k \quad m(X_{n,k}) = 0$, то соответствующее слагаемое в сумме считаем равным нулю).

Теорема 1.19. *Пусть последовательность $T_n,\ n \geq 1$, измельчающихся разбиений X такова, что $\mathcal{B} = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Пусть μ — случайная мера и m — конечная неотрицательная* *действительная мера такие, что μ абсолютно непрерывна относительно m. Тогда для μ_n, заданных равенством* (1.42),

$$\forall f \in B(X) \quad \int_X f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\, d\mu.$$

Доказательство. Сначала покажем, что рассматриваемые μ_n равномерно абсолютно непрерывны относительно m. Для некоторого $\alpha > 0$ рассмотрим

$$\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{l_n} \mu(X_{n,k}) \frac{m(A \cap X_{n,k})}{m(X_{n,k})} = S_1 + S_2,$$

где в S_1 берем все слагаемые с

$$\frac{m(A \cap X_{n,k})}{m(X_{n,k})} \le \alpha,$$

а в S_2 — все остальные. Тогда

$$S_1 = \int_X g\, d\mu$$

для некоторой простой функции g, $|g(x)| \le \alpha$. Из неравенства (1.4) мы получаем:

$$\left\| \int_X g\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{A \in \mathcal{B}} \|\alpha \mu(A)\|.$$

Из ограниченности значений μ (теорема [29]) следует, что выбором малого α мы можем сделать как угодно малым $\sup_{A\in\mathcal{B}} \|\alpha\mu(A)\|$, а следовательно и $\|S_1\|$.

Для данного α теперь будем брать $0 < \delta < \alpha$ и рассматривать множества A с $m(A) < \delta$. В S_2 по ее выбору

$$m(X_{n,k}) < \frac{1}{\alpha} m(A \cup X_{n,k}). \tag{1.43}$$

Сумма правых частей (1.43) по всем k меньше δ/α, поэтому

$$S_2 = \int_B h\, d\mu$$

для некоторой простой функции h, $|h(x)| \le 1$, и множества B, $m(B) < \delta/\alpha$. По неравенству (1.4),

$$\left\| \int_B h\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{F \subset B} \|\mu(F)\|.$$

Поскольку $\mu \ll m$, выбором малого δ мы можем сделать как угодно малым последний супремум, а значит и $\|S_2\|$, и $\|\mu_n(A)\|$ сразу для всех n при $m(A) < \delta$.

Теперь покажем, что

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A).$$

Пусть $\mathcal{B}_0$ — это алгебра, порожденная $\cup_{n=1}^{\infty} T_n$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)$. Очевидно, что

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \delta > 0 \quad \exists A_0 \in \mathcal{B}_0 : \quad m(A \cap A_0) < \delta.$$

Из доказанной выше равномерной абсолютной непрерывности получаем, что

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \quad \exists A_0 \in \mathcal{B}_0 \quad \forall n\ \ \|\mu_n(A) - \mu_n(A_0)\| < \varepsilon, \quad \|\mu(A) - \mu(A_0)\| < \varepsilon.$$

Для фиксированного A_0, начиная с некоторого n, $\mu_n(A_0) = \mu(A_0)$. Поэтому $\mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A)$.

Отсюда сразу находим, что для простых функций f

$$\int_X f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\,d\mu.$$

Для произвольной $f \in B(X)$ для любого $\alpha > 0$ мы можем найти простую f_α такую, что

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f_\alpha(x)| \le \alpha.$$

Тогда

$$\int_X f\,d\mu_n - \int_X f_\alpha\,d\mu_n = \sum_{k=1}^{l_n} \mu(X_{n,k}) \frac{1}{m(X_{n,k})} \int_{X_{n,k}} (f - f_\alpha)\,dm = \int_X g\,d\mu$$

для некоторой простой функции g, $|g(x)| \le \alpha$. Как уже отмечалось, из (1.4) получаем:

$$\left\| \int_X g\,d\mu \right\| \le 16 \sup_{A\in\mathcal{B}} \|\alpha\mu(A)\|,$$

что выбором малого α может быть сделанным как угодно малым. Из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] имеем:

$$\int_X f_\alpha\,d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\,d\mu, \quad \alpha \to 0.$$

Значит,

$$\forall f \in B(X) \quad \int_X f\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X f\,d\mu.$$

□

1.3.6 Общая теорема об интеграле по случайной мере, являющейся интегралом

Воспользовавшись доказанными предельными теоремами, мы получим общее утверждение о равенстве

$$\int_A g\,d\left(\int h\,d\eta\right) = \int_A gh\,d\eta.$$

Для ограниченной функции g такое равенство доказано в лемме 1.3.

Теорема 1.20. *Пусть функция $h : X \to \mathbf{R}$ интегрируема по случайной мере η. Измеримая функция $g : X \to \mathbf{R}$ интегрируема по случайной мере*

$$\nu(A) = \int_A h\,d\eta$$

тогда и только тогда, когда gh интегрируема по η. При этом

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A g\,d\nu = \int_A gh\,d\eta.$$

Доказательство. Записанное равенство интегралов будем доказывать для $A = X$, это не ограничивает общности.

Предположим сначала, что gh интегрируема по η. Возьмем простые функции

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{l_n} c_{kn} I_{A_{kn}}(x), \quad c_{kn} \in \mathbf{R}, \quad A_{kn} \in \mathcal{B},$$

такие, что $|h_n(x)| \le |h(x)|$ и $h_n(x) \to h(x)$ для всех x кроме $\eta-$пренебрежимого множества. Тогда

$$|g(x)h_n(x)| \le |g(x)h(x)|,$$

по теореме 7.3.5 [40] gh_n интегрируемы по η, и из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] следует, что

$$\int_X gh_n\,d\eta \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X gh\,d\eta.$$

Теперь рассмотрим случайные меры

$$\nu_n(A) = \int_A h_n\,d\eta.$$

Тогда

$$\int_X gh_n\,d\eta = \sum_{k=1}^{l_n} c_{kn}\int_{A_{kn}} g\,d\eta = \int_X g\,d\nu_n$$

(интегрируемость g по η на A_{kn} следует из интегрируемости gh_n на этих множествах). Докажем, что

$$\int_X g\,d\nu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X g\,d\nu,$$

для чего используем теорему 1.14.

Условие (i) этой теоремы выполняется, поскольку

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \nu(A)$$

по следствию 7.3.7 [40].

Проверим условие (ii) — ограниченность по вероятности множества величин

$$\{\nu_n(A),\ A \in \mathcal{B},\ n \ge 1\}.$$

Если бы этой ограниченности не было, то для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлись бы $n_i,\ A_i \in \mathcal{B}$ и числа $t_i \to 0,\ i \to \infty$, такие, что для всех $i \ge 1$

$$\|t_i\nu_{n_i}(A_i)\| = \left\|\int_X t_i h_{n_i}(x) I_{A_i}(x)\,d\eta\right\| > \varepsilon.$$

Но, по теореме 7.3.7 [40], указанные интегралы стремятся по вероятности к нулю при $i \to \infty$.

Для проверки условия (iii) теоремы 1.14 рассмотрим

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|g|>c\}} g\,d\nu_n\right\| = \sup_{n,A}\left\|\int_X gh_n I_{A\cap\{|g|>c\}}\,d\eta\right\|.$$

Если эта величина не стремится к нулю при $c \to \infty$, то можно подобрать $c_i \uparrow \infty$ и соответствующие подынтегральные функции, для которых не будут стремиться к нулю последние интегралы при $i \to \infty$. Но при этом

$$|g(x)h_n(x)| \le |g(x)h(x)|$$

и

$$(A \cap \{|g| > c_i\}) \downarrow \emptyset.$$

Так мы получили противоречие со следствием 7.3.7 [40].

Таким образом, все условия теоремы 1.14 выполняются, поэтому g интегрируема по ν, и

$$\int_X g\,d\nu = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_X g\,d\nu_n = \int_X gh\,d\eta.$$

Теперь предположим, что g интегрируема по ν. Рассмотрим простые функции

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{m_n} d_{kn} I_{B_{kn}}(x), \quad d_{kn}\in\mathbf{R}, \quad B_{kn}\in\mathcal{B},$$

такие, что $|g_n(x)| \le |g(x)|,\ g_n(x)\to g(x)$ кроме $\nu-$пренебрежимого подмножества X. Тогда

$$\int_X g_n\,d\nu = \int_X g_n h\,d\eta, \quad \forall A\in\mathcal{B} \quad \int_A g_n\,d\nu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A g\,d\nu.$$

Каждая случайная мера

$$\lambda_n(A) = \int_A g_n\,d\nu, \quad n\ge 1,$$

абсолютно непрерывна относительно субмеры

$$v_\nu(A) = \sup_{B\subset A}\|\nu(B)\|$$

(теорема 1.4 и лемма 1.8). По теореме 3.2 [26] (обобщению теоремы Витали — Хана — Сакса), λ_n равномерно абсолютно непрерывны относительно v_ν. Имеем, что

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|g_nh|>c\}} g_n h\,d\eta\right\| \le \sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|gh|>c\}} g_n h\,d\eta\right\| = \sup_{n,B\subset\{|gh|>c\}}\left\|\int_B g_n\,d\nu\right\|.$$

Из отмеченной равномерной абсолютной непрерывности следует, что последнее выражение стремится к нулю при $c\to\infty$. Теорема 1.7 и лемма 1.8 нам дают, что gh интегрируема по η,

$$\int_X g_n h\,d\eta \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_X gh\,d\eta,$$

и потому

$$\int_X gh\,d\eta = \int_X g\,d\nu.$$

□

1.3.7 Общая предельная теорема

В данном пункте мы получим результаты о пределе по вероятности значений

$$\int_A f_n\,d\mu_n, \quad n\ge 1,$$

при одновременной сходимости f_n и μ_n. В следующей формулировке мы используем понятия и термины из пунктов 1.2.1, 1.3.1. Условия частично совпадают с условиями теоремы 1.14.

Теорема 1.21. *Пусть даны случайные меры μ и $\mu_n,\ n\ge 1$, функции f и $f_n,\ n\ge 1$, и для каждого n $f,\ f_n$ интегрируемы по μ_n. Пусть выполняются условия:*

(i) $\mu_n(A)\xrightarrow{\mathbf{P}}\mu(A)$ *для любого множества* $A\in\mathcal{B}$;

(ii) *значения $\mu_n,\ n\ge 1$, равномерно ограничены по вероятности;*

(iii) *функция f равномерно интегрируема по $\mu_n,\ n\ge 1$;*

(iv) *для каждого* n $\quad f_k \to f \ \mu_n -$ *п. в.,* $k \to \infty$.

Тогда эквивалентны следующие две условия:

(v) $\forall A_k \downarrow \emptyset, \quad \sup\limits_n \left\| \int_{A_k} f_n \, d\mu_n \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$

(vi) f *интегрируема по* μ *и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_n \, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f \, d\mu.$$

Доказательство. Сначала обоснуем следование (v) $\Rightarrow$ (vi). Из выполнения условий (i)-(iii) и теоремы 1.14 получаем интегрируемость f по μ и сходимость величин $\int_A f \, d\mu_n$. Для произвольного $A \in \mathcal{B}$ имеем:

$$\left\| \int_A f_n \, d\mu_n - \int_A f \, d\mu \right\| \leq \left\| \int_A (f_n - f) \, d\mu_n \right\| + \left\| \int_A f \, d(\mu_n - \mu) \right\|. \tag{1.44}$$

Для данного A второе слагаемое здесь можно сделать как угодно малым выбором n, это следует из утверждения о сходимости интегралов теоремы 1.14.

Рассматривая первое слагаемое, мы введем величину

$$v_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{B \subset A} \|\mu_n(B)\|, \quad A \in \mathcal{B},$$

она является субмерой по лемме 1.9. Из условия (iv) мы получаем:

$$f_k \to f \ v_0 - \text{п. в.}, \ k \to \infty.$$

Лемма 1.4 (аналог теоремы Егорова) нам дает, что

$$\forall i \geq 1 \quad \exists B_i \in \mathcal{B} \ (v_0(B_i) < 2^{-i}) : \qquad \sup_{x \in X \setminus B_i} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Мы будем считать, что все

$$f(x) = f_n(x) = 0, \quad x \in \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{i=j}^{\infty} B_i, \quad n \geq 1,$$

изменив, при необходимости, наши функции. Поскольку изменения будут сделаны на v_0-нулевом множестве, значения рассматриваемых интегралов и условия теоремы при этом не изменятся. Возьмем теперь

$$A_k = (\cup_{i=k}^{\infty} B_i) \setminus \left(\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{i=j}^{\infty} B_i \right), \quad k \geq 1.$$

Тогда на каждом $X \setminus A_k$ мы будем иметь равномерную сходимость $f_n \to f$, $A_k \downarrow \emptyset$. Используя взятые A_k, рассмотрим первое слагаемое (1.44).

$$\left\| \int_A (f_n - f) \, d\mu_n \right\| \leq \left\| \int_{A \setminus A_k} (f_n - f) \, d\mu_n \right\| + \left\| \int_{A \cap A_k} f_n \, d\mu_n \right\| + \left\| \int_{A \cap A_k} f \, d\mu_n \right\|. \tag{1.45}$$

Поскольку для любого $B \in \mathcal{B}$ значения $\int_B f \, d\mu_n$ сходятся по вероятности, они равномерно $\sigma-$аддитивны (теорема 8.6 [28]). Поэтому выбором k мы можем как угодно уменьшить третье слагаемое (1.45) равномерно по всем n. Также сразу для всех n выбором k мы можем сделать как угодно малым второе слагаемое (1.45), пользуясь условием (v). Для взятого k и произвольного $\alpha > 0$ для достаточно больших n мы будем иметь:

$$\sup_{x \in X \setminus A_k} |f_n(x) - f(x)| < \alpha.$$

Из неравенства (1.4) получаем, что

$$\left\| \int_{A \setminus A_k} (f_n - f)\, d\mu_n \right\| \leq 16 \sup_{B \in \mathcal{B}} \|\alpha \mu_n(B)\| .$$

При $\alpha \to 0$ правая часть здесь стремится к нулю, это мы получаем из условия (ii). Значит, выбором n мы можем сделать как угодно малыми и первые слагаемые (1.45), (1.44). Выполнение условия (vi) доказано.

Покажем, что (vi) $\Rightarrow$ (v). По условию (vi), случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f_n\, d\mu_n, \quad n \geq 1,$$

на каждом $A \in \mathcal{B}$ имеют предел. По теореме 8.6 [28] (аналогу теоремы Никодима) они равномерно $\sigma-$аддитивны. Поэтому имеет место (v). $\square$

Напомним, что условия (i)-(iii) необходимы даже для сходимости интегралов от последовательности одинаковых функций $f_n = f$, точная формулировка по этому поводу содержится в теореме 1.14. Естественным является и наложение условия (iv).

Следствие 1.6. *Пусть для* μ, μ_n, f, f_n *из теоремы 1.21 выполняются условия* (i)-(iii) *той теоремы. Если*

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

то выполняется условия (vi) *теоремы 1.21.*

Доказательство. Выполнение условия (iv) теоремы 1.21 очевидно. Обосновав (v), из теоремы мы получим выполнение (vi). Для $A_k \downarrow \emptyset$ имеем, что

$$\left\| \int_{A_k} f_n\, d\mu_n \right\| \leq \left\| \int_{A_k} (f_n - f)\, d\mu_n \right\| + \left\| \int_{A_k} f\, d\mu_n \right\| . \tag{1.46}$$

Если для некоторого n

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \alpha,$$

то из неравенства (1.4) получаем, что

$$\left\| \int_{A_k} (f_n - f)\, d\mu_n \right\| \leq 16 \sup_{B \in \mathcal{B}} \|\alpha \mu_n(B)\| .$$

Из равномерной сходимости f_n и равномерной ограниченности значений μ_n следует, что первое слагаемое (1.46) можно как угодно уменьшить выбором n.

Из теоремы 1.14 мы имеем, что

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$

Из теоремы 8.6 [28] следует, что случайные меры

$$\int_A f\, d\mu_n, \quad n \geq 1,$$

есть равномерно $\sigma-$аддитивны. Поэтому выбором k мы можем как угодно уменьшать второе слагаемое (1.46), условие (v) теоремы 1.21 имеет место. $\square$

1.4 Предельные теоремы для интегралов при сходимости множеств интегрирования

1.4.1 Первая теорема о дифференцируемости интегралов по случайной мере (с наложением условий на μ и f)

В этом параграфе мы получим утверждения о существовании и величине пределов по вероятности значений
$$\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu$$
при $A_n \to \emptyset$. В частности, эти результаты дают возможность восстанавливать значения функции f, если известные все величины $\int_A f\,d\mu$ и $\mu(A)$, $A\in\mathcal{B}$, и выполняются условия теорем, полученных ниже.

Теорема 1.22. *1) Пусть даны $A_n\in\mathcal{B}$, $n\ge 1$, такие, что $\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\emptyset$, $\mu(A_n)\neq 0$ п. н., а также $f\in B(X)$ и $c\in\mathbf{R}$. Если множество случайных величин*
$$\left\{\frac{1}{\mu(A_n)}\sup_{x\in A_n}|f(x)-c|,\quad n\ge 1\right\}$$
ограничено по вероятности, то
$$\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} c.$$

2) Существует случайная мера μ на $X=[0,1]$ и борелевские $A_n\subset[0,1]$, $A_n\downarrow\emptyset$, такие, что для любой неубывающей $f\in B([0,1])$, $f(x)\ge 0$, с
$$\frac{1}{\mu(A_n)}\sup_{x\in A_n} f(x)\stackrel{\mathbf{P}}{\not\to} 0,$$
существует $g\in B([0,1])$, $0\le g(x)\le f(x)$, такая, что
$$\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} g\,d\mu\stackrel{\mathbf{P}}{\not\to} 0.$$

Доказательство. 1) Будем рассматривать $c=0$, это не ограничивает общности. Пусть наше утверждение неверно, тогда мы можем считать, что
$$\exists\varepsilon_0>0\ \ \forall n\quad \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu\right|>\varepsilon_0\right\}>\varepsilon_0.$$
Используя заданную в условии ограниченность по вероятности, возьмем $c_0>2$ такое, что
$$\forall n\quad \mathbf{P}\left\{|\mu(A_n)|>\frac{1}{c_0}\sup_{x\in A_n}|f(x)|\right\}>1-\frac{\varepsilon_0}{2}.$$
Из двух последних неравенств получим, что
$$\forall n\quad \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A_n}\frac{f(x)}{\sup_{x\in A_n}|f(x)|}\,d\mu\right|>\frac{\varepsilon_0}{c_0}\right\}>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$
Учитывая, что $c_0>2$, для функции
$$g_n(x)=\frac{f(x)}{\sup_{x\in A_n}|f(x)|}$$

имеем:
$$\left\|\int_{A_n} g_n\,d\mu\right\| \geq \frac{\varepsilon_0}{c_0}. \tag{1.47}$$
С другой стороны, поскольку $|g_n(x)| \leq 1$, из леммы 1.2 получаем:
$$\left\|\int_{A_n} g_n\,d\mu\right\| \leq 16 \sup_{B\subset A_n} \|\mu(B)\|. \tag{1.48}$$

По условию $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ и лемме 1.7, правая часть (1.48) должна стремиться к нулю, и это противоречит (1.47).

2) Пусть $\varepsilon_k,\ k \geq 1$ — это последовательность независимых случайных величин такая, что
$$\mathbf{P}\{\varepsilon_k = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_k = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем случайную меру μ, сосредоточенную в точках $1/n,\ n \geq 1$, со значениями
$$\mu\left(\left\{\frac{1}{2j-1}\right\}\right) = \varepsilon_{2j-1}2^{-2^j}, \quad \mu\left(\left\{\frac{1}{2j}\right\}\right) = \varepsilon_{2j}2^{-2^j}, \quad j \geq 1.$$

Будем рассматривать множества $A_n = (0, 1/(2n-1)],\ n \geq 1$. Возьмем функцию f, удовлетворяющую условиям части 2) теоремы. Мы можем считать, что для некоторых $\alpha > 0$ и $n_k,\ k \geq 1,\ (\forall k \quad 1 \leq n_k < n_{k+1})$ имеет место:
$$\left\|\frac{1}{\mu\left(A_{n_k}\right)} f\left(\frac{1}{2n_k - 1}\right)\right\| > \alpha. \tag{1.49}$$

Зафиксируем некоторые $k \geq 1$ и $m \in \mathbf{N}$ такие, что $2^{-m} < \alpha$. С вероятностью $1 - 2^{-m} > 1 - \alpha$ не выполняется хотя бы одно из равенств
$$\varepsilon_{2j-1} = -\varepsilon_{2j},\ n_k \leq j \leq n_k + m - 1,$$

и, значит, с такой вероятностью
$$\left|\mu\left(A_{n_k}\right)\right| > 2^{-2^{n_k+m}}.$$

Отсюда и из (1.49) получаем, что
$$f\left(\frac{1}{2n_k - 1}\right) > \alpha 2^{-2^{n_k+m}}.$$

Положим
$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{2n_i - 1}\right) I_{\left\{\frac{1}{2n_i-1}\right\}}(x).$$

Тогда $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Из определения нашей μ и убывания f имеем, что
$$\begin{aligned}\left|\int_{A_{n_k}} g\,d\mu\right| = \left|\sum_{i=k}^{\infty} f\left(\frac{1}{2n_i - 1}\right)\varepsilon_{2n_i-1}2^{-2^{n_i}}\right| &\geq f\left(\frac{1}{2n_k - 1}\right)\left(2^{-2^{n_k}} - \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-2^{n_i}}\right) \\ &\geq f\left(\frac{1}{2n_k - 1}\right) 2^{-1-2^{n_k}} > \alpha 2^{-1-2^{n_k+m}-2^{n_k}}.\end{aligned} \tag{1.50}$$

С другой стороны, с вероятностью 2^{-m-1} имеют место все равенства
$$\varepsilon_{2j-1} = -\varepsilon_{2j}, \quad n_k \leq j \leq n_k + m,$$

и тогда
$$|\mu\left(A_{n_k}\right)| < 4\cdot 2^{-2^{n_k+m+1}}. \tag{1.51}$$
Рассмотрев вместе (1.50) и (1.51), имеем для каждого $k\ge 1$ с вероятностью 2^{-m-1}
$$\left|\frac{1}{\mu(A_{n_k})}\int_{A_{n_k}} g\,d\mu\right| > \alpha 2^{2^{n_k+m}-2^{n_k}-3},$$
что дает утверждение 2) теоремы. □

Замечание 1.3. *В утверждении 1) предыдущей теоремы условие*
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\emptyset$$
можно заменить на
$$\sup_{B\subset A_n}\|\mu(B)\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Ведь первое записанное здесь условие в доказательстве первого утверждения теоремы используется лишь для того, чтобы обосновать сходимость правой части (1.48). Для этого достаточно и выполнения второго условия замечания.

В следующем утверждении мы имеем ситуацию, когда при изменении n также могут изменяться функции и случайные меры.

Следствие 1.7. *Пусть даны μ_n и $A_n\in\mathcal{B}$, $n\ge 1$, такие, что*
$$\sup_{B\subset A_n}\|\mu_n(B)\|\to 0,\ n\to\infty, \tag{1.52}$$
все $\mu_n(A_n)\ne 0$ п. н. , а также $f_n\in B(X)$, $n\ge 1$, и $c\in\mathbf{R}$. Если множество случайных величин
$$\left\{\frac{1}{\mu_n(A_n)}\sup_{x\in A_n}|f_n(x)-c|,\ n\ge 1\right\}$$
ограничено по вероятности, то
$$\frac{1}{\mu_n(A_n)}\int_{A_n} f_n\,d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c.$$

Доказательство. Мы дословно повторяем доказательство части 1) теоремы 1.22 до неравенства (1.48) включительно заменяя всюду μ на μ_n и f на f_n. Остается использовать условие (1.52), чтобы получить стремление к нулю правой части (1.48). □

1.4.2 Вторая теорема о дифференцируемости интегралов по случайной мере (с наложением условия на μ, f — произвольная ограниченная)

В теореме 1.22 условие ограниченности по вероятности накладывается сразу на пару объектов μ, f. В следующем утверждении даются условия на μ, при выполнении которых для всех ограниченных f, для которых существует требуемый предел значений, выполняются наши предельные соотношения.

Теорема 1.23. *Пусть μ — случайная мера, $c\in\mathbf{R}$, $\{a_n,\ n\ge 1\}$ — последовательность ненулевых чисел. Пусть $A_n\in\mathcal{B}$, $n\ge 1$, таковы, что $\mu(A_n)\ne 0$ п. н.*

Рассмотрим следующие условия.

(i) *Множество величин*
$$\left\{\frac{\mu(B)}{\mu(A_n)},\ B\subset A_n,\ n\ge 1\right\}$$

ограничено по вероятности.

(ii) *Для всех* $f \in B(X)$ *с*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f(x) - c| = 0$$

имеет место

$$\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} c.$$

(iii) *Множество величин*

$$\left\{ \frac{\mu(B)}{a_n},\ B \subset A_n,\ n \geq 1 \right\}$$

ограничено по вероятности.

(iv) *Для всех* $f \in B(X)$ *с*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f(x)| = 0$$

имеет место

$$\frac{1}{a_n} \int_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Тогда из (i) *следует* (ii), *из* (iii) *следует* (iv), *а при* $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ *из* (ii) *следует* (i) *и из* (iv) *следует* (iii).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $c = 0$. Пусть $\alpha_n = \sup_{x\in A_n} |f(x)|$.

Используя лемму 1.2 для функции $f(x),\ |f(x)| \leq \alpha_n$ на A_n, получим:

$$\left\| \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{B\subset A_n} \left\| \alpha_n \frac{\mu(B)}{\mu(A_n)} \right\|.$$

Поскольку у нас $\alpha_n \to 0$, из условия (i) следует (ii).

Теперь предположим, что при $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ условие (i) не выполняется. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ можно выбрать множества A_{n_k} среди наших A_n и $B_k \subset A_{n_k},\ k \geq 1$, такие, что:

(i$'$) $\mathbf{P}\left\{ |\mu(B_k)/\mu(A_{n_k})| > 2^k \right\} > \varepsilon_0$,

(ii$'$) $B_k \cap (\cup_{i>k} A_{n_i}) = \emptyset$,

(iii$'$) $\forall C \subset \cup_{i>k} A_{n_i}$ будет $\mathbf{P}\left\{ |\mu(B_k)| > 16\, \|\mu(C)\| \right\} > 1 - \varepsilon_0/4, \quad \|\mu(C)\| < \varepsilon_0/64$.

Чтобы обеспечить выполнение этих условий, сначала мы берем ε_0 такое, что

$$0 < \varepsilon_0 < \lim_{t\to 0} \sup_{n, B\subset A_n} \left\| t \frac{\mu(B)}{\mu(A_n)} \right\|.$$

Для этого ε_0 можно предварительно выбрать множества $A_{n_k},\ B_k$, для которых выполняется условие (i$'$), и при этом последовательность $n_k,\ k \geq 1$, является возрастающей (ведь значение каждой отдельной случайной меры $\mu(A \cap A_n)/\mu(A_n)$, $A \in \mathcal{B}$, ограничено по вероятности). Потом, используя условие $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, последовательно для каждого k после выбора $A_{n_k},\ B_k$ следующее n_{k+1} увеличиваем таким образом, что для множества $B_k \setminus (\cup_{i>k} A_{n_i})$, взятого вместо B_k, еще выполнялось (i$'$). В дальнейшем эту разность множеств мы фиксируем себе как B_k. Далее, при необходимости, мы еще увеличиваем n_{k+1}, чтобы для наших ε_0 и B_k выполнялось условие (iii$'$) (такую возможность нам обеспечивает лемма 1.7). Потом делаем выбор уже для следующего k.

Теперь положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} I_{B_i}(x).$$

По нашему выбору, $B_k \cap B_j = \emptyset$ при $k \neq j$, поэтому этот ряд сходится. Из (ii′) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f(x)| = 0.$$

Имеем:

$$\frac{1}{\mu(A_{n_k})}\int_{A_{n_k}} f\,d\mu = \frac{1}{\mu(A_{n_k})}\sum_{i\geq k} 2^{-i}\mu(B_i) = \frac{2^{-k-1}}{\mu(A_{n_k})}\left(2\mu(B_k) + \int_X g\,d\mu\right), \tag{1.53}$$

где g — некоторая функция, равная нулю вне $\cup_{i>k}A_{n_i}$, $|g(x)| \leq 1$. По лемме 1.2 и (iii′), для нашей g получаем, что

$$\left\|\int_X g\,d\mu\right\| \leq 16\sup\|\mu(C)\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

(супремум берется по всем множествам $C \subset \cup_{i>k}A_{n_i},\ C \in \mathcal{B}$). Еще раз используя (iii′), имеем с вероятностью, не меньшей $1-\varepsilon_0/2$, выполнение неравенства

$$\left|2\mu(B_k) + \int_X g\,d\mu\right| > |\mu(B_k)|.$$

Из (i′) получаем, что для каждого k значение, рассмотренное в (1.53) больше $1/2$ с вероятностью, не меньшей $\varepsilon_0/2$. Значит, не выполняется условие (ii). Утверждение теоремы об (ii)$\Rightarrow$(i) доказано.

Утверждения, связанные с условиями (iii) и (iv) доказываются точно так же, как мы это сделали для условий (i) и (ii) выше. Необходимо лишь вместо $(\mu(A_n))^{-1}$ брать a_n^{-1}. □

Пример. Покажем, что случайная мера на $X = [0,\ 1]$ и борелевских подмножествах $[0,\ 1]$, заданная интегралом Ито

$$w(A) = \int_0^1 I_A(x)\,dw,$$

удовлетворяет условию (ii) последней теоремы для любых A_n. Действительно, для $B \subset A,\ z > 0$

$$\left|\frac{w(B)}{w(A)}\right| > z \Leftrightarrow -1-\frac{1}{z} < \frac{w(A\backslash B)}{w(B)} < -1+\frac{1}{z}.$$

Легко подсчитать, что последнее отношение двух случайных величин имеет распределение с плотностью

$$p(t) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2t^2)} \leq \frac{1}{2\pi|t|}$$

(здесь σ_1^2 — дисперсия $w(A\backslash B)$, σ_2^2 — дисперсия $w(B)$). Поэтому вероятность указанного двойного неравенства для $z > 1$ не превышает

$$\frac{2}{z}\,\frac{1}{2\pi(1-1/z)},$$

что стремится к нулю при $z \to \infty$. □

В следующем утверждении мы снова рассмотрим ситуацию, когда при изменении n могут изменяться функции и случайные меры.

Следствие 1.8. *Пусть $\mu_n,\ n \geq 1,$ — случайные меры, $c \in \mathbf{R}$, $\{a_n,\ n \geq 1\}$ — последовательность ненулевых чисел. Пусть $A_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1$, таковы, что все $\mu_n(A_n) \neq 0$ п. н. Имеют место следующие утверждения.*

1)Если множество случайных величин

$$\left\{\frac{\mu_n(B)}{\mu_n(A_n)},\ B \subset A_n,\ n \geq 1\right\}$$

ограничено по вероятности, то для произвольных $f_n \in B(X)$, $n \geq 1$, c

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f_n(x) - c| = 0$$

имеет место

$$\frac{1}{\mu_n(A_n)} \int_{A_n} f_n \, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c.$$

2) Если множество случайных величин

$$\left\{\frac{\mu_n(B)}{a_n},\ B \subset A_n,\ n \geq 1\right\}$$

ограничено по вероятности, то для всех $f_n \in B(X)$, $n \geq 1$, c

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f_n(x)| = 0$$

имеет место

$$\frac{1}{a_n} \int_{A_n} f_n \, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Доказательство. Мы повторяем доказательство следований (i) $\Rightarrow$ (ii) и (iii) $\Rightarrow$ (iv) теоремы 1.23, всюду заменяя μ на μ_n и f на f_n. $\square$

Глава 2

Интегралы по $\sigma-$конечным случайным мерам

Соглашения

Всюду в этой главе:

$f,\ f_n,\ g,\ g_n,\ h$ — измеримые функции, которые определены на X и принимают значения в $\mathbf{R}$.

$\mu^\sigma,\ \mu_n^\sigma,\ \eta^\sigma$ — $\sigma-$конечные случайные меры, определенные на $(X, \mathcal{B})$.

2.1 Определение интеграла и предельный переход при сходимости функций

2.1.1 Определение и основные свойства интеграла

Определение 2.1. *Случайная функция множеств μ^σ называется $\sigma-$конечной случайной мерой, если существует представление*

$$X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad X_j \in \mathcal{B}, \quad X_j \subset X_{j+1}, \tag{2.1}$$

при котором для любого $j \geq 1$ определен набор случайных величин $\{\mu^\sigma(A \cap X_j),\ A \in \mathcal{B}\}$, являющийся случайной мерой.

Всюду дальше при ссылке на представление (2.1) и использовании множеств X_j мы будем иметь в виду те, при которых $\sigma-$конечная μ^σ удовлетворяет определению 2.1.

Фактически $\sigma-$конечная μ^σ определена на наборе множеств

$$\cup_{j=1}^{\infty}\{A:\ A \in \mathcal{B},\ A \subset X_j\},$$

X_j из представления (2.1).

Случайные функции множеств, которые мы всегда называли случайными мерами, в данной главе иногда для ясности мы будем называть обычными случайными мерами.

Определение 2.2. *Измеримая функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется интегрируемой по $\sigma-$конечной случайной мере μ^σ, если f интегрируема по μ^σ на любом X_j из представления (2.1) и для любого $A \in \mathcal{B}$ существует*

$$\mathrm{p}\lim_{j\to\infty} \int_{A\cap X_j} f\, d\mu^\sigma.$$

Тогда положим $\int_A f\, d\mu^\sigma$ равным значению последнего предела.

Очевидно, что такой интеграл линеен по f и по μ^σ. Пока что мы рассматриваем все интегралы при фиксированном представлении (2.1). Ниже будет показано, что представление мы можем брать произвольное, и значение интеграла при этом не изменится (см. ниже теорему 2.4).

Обычная случайная мера является частным случаем $\sigma-$конечной случайной меры. Покажем, что для нее определения интегралов от действительной функции 2.2 и 1.1 согласуются.

Лемма 2.1. *Пусть множество $Y \in \mathcal{B}$ таково, что набор случайных величин $\{\mu^\sigma(A \cap Y),\ A \in \mathcal{B}\}$ является случайной мерой. Тогда любая f, интегрируемая по μ^σ по определению 2.2, будет интегрируемой на Y по сужению μ^σ на Y по определению 1.1 интегрируемости действительной функции по случайной мере. При этом величины $\int_Y f\, d\mu^\sigma$, взятые по этим двум определениям, совпадают п. н.*

Доказательство. Мы используем обобщение теоремы Беппо Леви теорему 1.10. Возьмем

$$f_n(x) = f(x) I_{Y \cap (X_n \setminus X_{n-1})}(x), \quad n \geq 1$$

(считаем тут $X_0 = \emptyset$). Тогда для каждого $A \in \mathcal{B},\ A \subset Y$, согласно определению 2.2, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu^\sigma = \mathrm{p} \lim_{j \to \infty} \int_{A \cap X_j} f \, d\mu^\sigma$$

(на подмножествах каждого X_j совпадение интегралов по двум определениям очевидно). Таким образом, выполняются условия теоремы 1.10 для μ^σ, рассмотренной на Y. Поэтому $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ интегрируема на Y,

$$\int_Y f \, d\mu^\sigma = \mathrm{p} \lim_{j \to \infty} \int_{Y \cap X_j} f \, d\mu^\sigma,$$

что совпадает с величиной из определения 2.2. □

Лемма 2.2. *Пусть функция f интегрируема по μ^σ. Тогда функция множеств*

$$\eta(A) = \int_A f \, d\mu^\sigma, \quad A \in \mathcal{B},$$

является случайной мерой (обычной).

Доказательство. По лемме 1.1, для каждого $j \geq 1$

$$\eta_j(A) = \int_{A \cap X_j} f \, d\mu^\sigma, \quad A \in \mathcal{B},$$

является случайной мерой. По определению интегрируемости 2.2,

$$\eta_j(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A), \quad j \to \infty, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Из обобщения теоремы Никодима 8.6 [28] следует утверждение нашей леммы. □

Лемма 2.3. *Пусть функция f интегрируема по μ^σ. Тогда*

$$\sup_{A \subset (X \setminus X_j)} \left\| \int_A f \, d\mu^\sigma \right\| \to 0, \quad j \to \infty,$$

где множества $X_j,\ j \geq 1,$ — из представления (2.1).

Доказательство. Если бы утверждение было неверным, для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ мы могли бы выбрать подпоследовательность $X_{n_j},\ j \geq 1$, и множества

$$A_j \subset \left(X_{n_j} \setminus X_{n_{j+1}}\right)$$

такие, что
$$\left\|\int_{A_j} f\,d\mu^\sigma\right\| > \varepsilon_0$$
(здесь, в частности, мы использовали, что интеграл по каждому множеству — это предел интегралов на X_j). Тогда для множества $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ последовательность
$$\int_{A\cap X_{n_j}} f\,d\mu^\sigma, \quad j\ge 1,$$
не будет иметь предела по вероятности, что противоречит интегрируемости f. □

Теорема 2.1. *Пусть функция f интегрируема по μ^σ, функция h измерима, для всех x $\quad |h(x)|\le |f(x)|$. Тогда h интегрируема по μ^σ.*

Доказательство. Из неравенства (1.6) (на X_i оно может быть использовано) имеем, что
$$\left\|\int_{B\cap(X_i\setminus X_j)} h\,d\mu^\sigma\right\| \le 16 \sup_{A\subset(X_i\setminus X_j)} \left\|\int_A f\,d\mu^\sigma\right\|. \tag{2.2}$$
Дальше получаем:
$$\sup_{A\subset(X_i\setminus X_j)} \left\|\int_A f\,d\mu^\sigma\right\| \le \sup_{A\subset(X\setminus X_j)} \left\|\int_A f\,d\mu^\sigma\right\|.$$
По лемме 2.3, для интегрируемой f последнее выражение стремится к нулю при $j\to\infty$. Поэтому будет стремиться к нулю и первое значение (2.2) при $i,\ j\to\infty$, из полноты пространства L_0 мы получаем существование предела по вероятности для $\int_{B\cap X_j} h\,d\mu^\sigma$, h интегрируема. □

Теорема 2.2. *Пусть функция $h: X\to \mathbf{R}$ интегрируема по $\sigma-$конечной случайной мере η^σ. Тогда измеримая функция $g: X\to\mathbf{R}$ будет интегрируемой по случайной мере*
$$\nu(A) = \int_A h\,d\eta^\sigma, \quad A\in\mathcal{B},$$
тогда и только тогда, когда gh будет интегрируемой по η^σ. При этом
$$\forall A\in\mathcal{B} \quad \int_A g\,d\nu = \int_A gh\,d\eta^\sigma.$$

Доказательство. Сначала предположим,что gh интегрируема по η^σ. Из теоремы 1.20, использованной для обычной случайной меры η^σ на произвольном X_j, имеем, что
$$\forall A\in\mathcal{B} \quad \int_{A\cap X_j} gh\,d\eta^\sigma = \int_{A\cap X_j} g\,d\nu, \tag{2.3}$$
и записанные здесь интегралы определены. Из интегрируемости gh следует, что данное значение имеет предел по вероятности при $j\to\infty$, равный
$$\int_A gh\,d\eta^\sigma.$$
Используем обобщение теоремы Беппо Леви 1.10 для
$$f_n(x) = g(x) I_{(X_n\setminus X_{n-1})}(x), \quad n\ge 1, \quad \mu=\nu$$

(считаем тут $X_0 = \emptyset$). Так мы получаем, что определен

$$\int_A g\, d\nu = \mathrm{p}\lim_{j\to\infty} \int_{A\cap X_j} g\, d\nu.$$

Утверждение теоремы в одну сторону доказано.

Пусть g интегрируема по ν. Тогда теорема 1.20 снова дает нам выполнение равенства (2.3). Для любого $A \in \mathcal{B}$ правая часть (2.3) при $j \to \infty$ стремится по вероятности к

$$\int_A g\, d\nu$$

(например, по аналогу теоремы Лебега 7.3.7 [40]). Поэтому существует предел левой части (2.3), для fg и η^σ выполняется определение интегрируемости 2.2. Предельным переходом в (2.3) получаем требуемое равенство интегралов. □

Далее нам будет нужен следующий технический факт.

Лемма 2.4. *Для любой μ^σ существует интегрируемая по μ^σ функция g вида*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j I_{(X_j \setminus X_{j-1})}(x),$$

где все $c_j > 0,\ c_{j+1} \le c_j$ (мы считаем $X_0 = \emptyset$).

Доказательство. Значения обычной случайной меры μ^σ на измеримых подмножествах $(X_j \setminus X_{j-1})$ ограничены по вероятности [29, теорема]. Поэтому для каждого $j \ge 1$ существует $c_j > 0$ такое, что

$$\sup_{B\subset(X_j\setminus X_{j-1})} \|c_j \mu^\sigma(B)\| \le 2^{-j}.$$

При этом для $j \ge 2$ мы можем брать $c_j \le c_{j-1}$. Тогда для любого $A \in \mathcal{B}$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \mu^\sigma \left(A \cap (X_j \setminus X_{j-1})\right)$$

сходится по вероятности, g интегрируема. □

Теперь приведем конкретный пример функции, интегрируемой по $\sigma-$конечной случайной мере.

Пример. Возьмем $X = \mathbf{R}_+$, $\mathcal{B}$ — σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathbf{R}_+$, $X_j = [0,\ j],\ j \ge 1$. На каждом X_j случайную меру зададим интегралом Ито:

$$w^\sigma(A) = \int_0^j I_A(x)\, dw, \quad A \in \mathcal{B}, \quad A \subset X_j.$$

Очевидно, что данная w^σ является $\sigma-$конечной случайной мерой. Покажем, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} I_{\{x\ge1\}}(x)$$

интегрируема по w^σ в смысле определения 2.2.

Из определения нашей квазинормы следует, что $\|\xi\| \le \sqrt{\mathbf{E}\,|\xi|}$, если существует указанное математическое ожидание случайной величины ξ.

Для произвольных $A \in \mathcal{B},\ i \geq j \geq 1$ имеем:

$$\left\| \int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f\, dw^\sigma \right\| \leq \sqrt{\mathbf{E}\left| \int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} \frac{1}{x}\, dw^\sigma \right|}$$

$$\leq \sqrt[4]{\mathbf{E}\left(\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} \frac{1}{x}\, dw^\sigma \right)^2} = \sqrt[4]{\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} \frac{1}{x^2}\, dx} \leq \sqrt[4]{\frac{1}{j}}.$$

Для любого $A \in \mathcal{B}$ первое выражение здесь стремится к нулю при $i,\ j \to \infty$. Из полноты пространства L_0 вытекает существование предела из определения 2.2, f интегрируема. $\square$

2.1.2 Предельные теоремы для сходимости функций и однозначность определения интеграла

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.7 о предельном переходе при условии равномерной интегрируемости.

Теорема 2.3. *Пусть функции $f_n,\ n \geq 1$, и f таковы, что для каждого X_j из представления (2.1) существует субмера v_j на $(X,\ \mathcal{B})$ такая, что*

$$f_n I_{X_j} \xrightarrow{v_j} f I_{X_j}, \quad n \to \infty,$$

и сужение μ^σ на X_j является случайной мерой, абсолютно непрерывной относительно v_j. Пусть каждая f_n интегрируема по μ^σ. Тогда эквивалентными будут следующие утверждения:

(i) *f интегрируема по μ^σ и*

$$\sup_{A\in\mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu^\sigma \right\| \to 0;$$

(ii) *f интегрируема по μ^σ и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_n\, d\mu^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu^\sigma;$$

(iii) *существует функция g, интегрируемая по μ^σ такая, что*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n,A} \left\| \int_{A\cap\{|f_n(x)|>c|g(x)|\}} f_n\, d\mu^\sigma \right\| = 0.$$

Доказательство. Следование (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Далее в доказательстве теоремы мы будем рассматривать обычные случайные меры

$$\eta(A) = \int_A f\, d\mu^\sigma, \quad \eta_n(A) = \int_A f_n\, d\mu^\sigma, \quad n \geq 1,$$

(они будут такими по лемме 2.2).

Также будем брать субмеру

$$v_0(A) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \sup_{B\subset A} \|\eta_n(B)\|, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Такая v_0 определена и является субмерой по лемме 1.9. Каждая η_n абсолютно непрерывна относительно v_0. Поскольку $\eta_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A)$, по теореме 3.2 [26] (обобщению теоремы Витали — Хана — Сакса) они равномерно абсолютно непрерывны относительно v_0.

В качестве функции g мы возьмем произвольную из леммы 2.4. Тогда для любого j имеем:

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|f_n|>c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\| \le \sup_{n,A}\left\|\int_{(A\cap\{|f_n|>c|g|\})\setminus X_j} f_n\,d\mu^\sigma\right\| + \sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|f_n|>c|g|\}\cap X_j} f_n\,d\mu^\sigma\right\|.$$

Поскольку $v_0(X\setminus X_j)\to 0,\ j\to\infty$, и $\eta_n,\ n\ge 1$, равномерно абсолютно непрерывны относительно v_0, первое слагаемое мы можем сделать как угодно малым выбором j. Для выбранного j из определения g мы имеем, что второе слагаемое не превышает

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|f_n|>cc_j\}\cap X_j} f_n\,d\mu^\sigma\right\|. \tag{2.4}$$

На множестве X_j с обычной случайной мерой μ^σ для функций $f,\ f_n$ выполняется условие (ii) теоремы 1.7 о равномерной интегрируемости. Значит, выполняется и условие (iii) этой теоремы — f_n равномерно интегрируемы. Поэтому значение (2.4) можно сделать как угодно малым выбором большого c. Условие (iii) нашей теоремы имеет место.

Докажем, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Для этого сначала покажем, что f интегрируема по μ^σ на каждом X_j. Зафиксируем некоторое X_j и будем на нем брать случайные меры и множества. Рассуждения будем проводить аналогично доказательству соответствующего факта теоремы 1.7 о равномерной интегрируемости. Покажем, что при выполнении (iii) η_n на данном X_j равномерно абсолютно непрерывны относительно v_j. Для любых $A\subset X_j,\ c$ будет

$$\sup_n\left\|\int_A f_n\,d\mu^\sigma\right\| \le \sup_n\left\|\int_{A\cap\{|f_n|>c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\| + \sup_n\left\|\int_{A\cap\{|f_n|\le c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\|. \tag{2.5}$$

Из условия (iii) следует, что выбором большого $c\ge 1$ можно сделать первое слагаемое как угодно малым равномерно по $A\subset X_j$. Используя теорему 1.3 для множества $A\cap\{|f_n|\le c|g|\}$, во втором слагаемом при $c>1$ имеем:

$$\sup_n\left\|\int_{A\cap\{|f_n|\le c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\| \le 16\sup_{B\subset A}\left\|c\int_B g\,d\mu^\sigma\right\| \le 16c\sup_{B\subset A}\left\|\int_B g\,d\mu^\sigma\right\|. \tag{2.6}$$

По теореме 1.4, значения последнего интеграла на подмножествах X_j абсолютно непрерывны относительно μ^σ, а потому и относительно v_j. Для фиксированного $c\ge 1$ выбором малого $v_j(A)$ мы можем это слагаемое сделать малым равномерно по n. Требуемая равномерная абсолютная непрерывность η_n доказана.

Дальше мы дословно повторяем доказательство теоремы 1.7 от неравенства (1.13) до окончания доказательства, считая там $X=X_j$, $v=v_j$, $\mu=\mu^\sigma$. Так мы получим, что предельная f интегрируема на X_j и

$$\sup_{A\subset X_j}\left\|\int_A (f_n-f)\,d\mu^\sigma\right\| \to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.7}$$

Теперь мы докажем, что f интегрируема на X. С учетом (2.7), для любых $A\in\mathcal{B}$, $i\ge j$ и $c>0$ имеем:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f\,d\mu^\sigma\right\| &\le \sup_n\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f_n\,d\mu^\sigma\right\| \\ &\le \sup_n\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)\cap\{|f_n|>c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\| + \sup_n\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)\cap\{|f_n|\le c|g|\}} f_n\,d\mu^\sigma\right\|.\end{aligned}$$

По условию (iii), здесь выбором достаточно большого $c > 1$ мы можем сделать как угодно малым первое слагаемое. Для второго слагаемого используем оценку (2.6) (мы можем это делать для интеграла на X_i). Так мы получаем, что это слагаемое не превышает

$$16c \sup_{B \subset (X_i \setminus X_j)} \left\| \int_B g \, d\mu^\sigma \right\|.$$

Для данного c последнее выражение можно сделать как угодно малым выбором больших $i, \ j$ (согласно лемме 2.3). Из полноты L_0 получаем существование предела

$$\mathrm{p} \lim_{j \to \infty} \int_{A \cap X_j} f \, d\mu^\sigma,$$

f интегрируема на X.

Теперь для произвольного $j \geq 1$ имеем:

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f) \, d\mu^\sigma \right\| \leq \sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_{A \cap X_j} (f_n - f) \, d\mu^\sigma \right\| + \sup_{n, A \in \mathcal{B}} \left\| \int_{A \setminus X_j} f_n \, d\mu^\sigma \right\| + \sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_{A \setminus X_j} f \, d\mu^\sigma \right\|. \tag{2.8}$$

Третье слагаемое мы можем уменьшать выбором j (используя лемму 2.3 для интегрируемой f).

Второе слагаемое мы оценим, используя (2.5) и (2.6). Оно не превышает

$$\sup_{n,i,A} \left\| \int_{A \cap (X_i \setminus X_j)} f_n \, d\mu^\sigma \right\| \leq \sup_{n,i,A} \left\| \int_{A \cap (X_i \setminus X_j) \cap \{|f_n| > c|g|\}} f_n \, d\mu^\sigma \right\| + 16c \sup_{i, B \subset A} \left\| \int_{B \cap (X_i \setminus X_j)} g \, d\mu^\sigma \right\|.$$

Выбором $c > 1$ мы можем здесь сделать малым первое слагаемое равномерно по j, потом выбором больших $i, \ j$ уменьшить второе.

Первое слагаемое (2.8) мы можем как угодно уменьшать выбором n (см. (2.7)). Так мы получаем выполнение (i). □

Как и для предельных теорем с обычными случайными мерами, здесь мы можем использовать понятие сходимости по случайной мере (см. определение 1.4, на каждом X_j μ^σ будет обычной).

Следствие 2.1. *Пусть функции $f_n, \ n \geq 1$, и f такие, что для каждого X_j из представления* (2.1)

$$f_n I_{X_j} \xrightarrow{\mu^\sigma} f I_{X_j}, \quad n \to \infty,$$

и каждая f_n интегрируема по μ^σ. Тогда эквивалентными будут утверждения (i), (ii) *и* (iii) *теоремы 2.3.*

Доказательство. Мы возьмем

$$v_j(A) = \sup_{B \subset A} \left\| \mu^\sigma \left(B \cap X_j \right) \right\|, \quad A \in \mathcal{B}, \quad j \geq 1.$$

они являются субмерами по лемме 1.8. Для них выполняются все условия предыдущей теоремы, сходимость по ним эквивалентна сходимости по μ^σ, и из теоремы получаем утверждение леммы. □

Следующий факт можно считать обобщением теоремы Лебега.

Следствие 2.2. *Пусть функции f_n, $n \geq 1$, и f таковы, что на каждом X_j из представления* (2.1)

$$f_n I_{X_j} \xrightarrow{\mu^\sigma} f I_{X_j}, \quad n \to \infty.$$

Пусть каждая f_n интегрируема по μ^σ и существует функция g, интегрируемая по μ^σ, такая, что все $|f_n(x)| \leq |g(x)|$. Тогда f также интегрируема по μ^σ и

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A (f_n - f)\, d\mu^\sigma \right\| \to 0.$$

Доказательство. Данные f_n, f, g и субмера v_j из доказательства следствия 2.1 удовлетворяют условию (iii) теоремы 2.3. Поэтому для них выполняется и условие (i) этой теоремы. □

Пока что мы рассматривали интегралы при фиксированном представлении (2.1). Следующее утверждение покажет, что мы можем брать и любое другое, множество интегрируемых функций и значения интегралов для данной μ^σ при этом не изменятся.

Теорема 2.4. *Пусть f интегрируема по μ^σ по определению 2.2 для данного представления* (2.1)*. Тогда f интегрируема по μ^σ при любом другом представлении вида* (2.1)*, при котором μ^σ удовлетворяет определению 2.1 $\sigma-$конечной случайной меры. При этом величины интегралов при этих двух определениях на каждом $A \in \mathcal{B}$ будут совпадать п. н.*

Доказательство. Рассмотрим вместе с (2.1) произвольное представление

$$X = \cup_{j=1}^{\infty} Y_j, \quad Y_j \in \mathcal{B}, \quad Y_j \subset Y_{j+1},$$

для которого выполняется определение 2.1. Возьмем функции

$$f_j(x) = f(x) I_{Y_j}(x), \quad j \geq 1.$$

Они интегрируемы по μ^σ с представлением $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j$ (это следует из теоремы 2.1). Все $|f_j(x)| \leq |f(x)|$, по следствию 2.2,

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_j\, d\mu^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu^\sigma, \quad j \to \infty. \tag{2.9}$$

Поскольку на Y_j наша μ^σ будет обычной случайной мерой, по лемме 2.1, не имеет значения для какого представления X рассматривать $\int_A f_j\, d\mu^\sigma$ — его величина не изменится. Поэтому существует

$$\operatorname{p}\lim_{j \to \infty} \int_{A \cap Y_j} f\, d\mu^\sigma,$$

f интегрируема с представлением $X = \cup_{j=1}^{\infty} Y_j$. Из (2.9) следует совпадение интегралов. □

Следовательно, во всех наших результатах для $\sigma-$конечных случайных мер, полученных ниже и выше, мы можем не фиксировать представление (2.1), а каждый раз брать любое.

2.2 Предельные теоремы для сходимости $\sigma-$конечных случайных мер

2.2.1 Предельный переход при фиксированной функции

В пункте 1.3.2 были получены условия сходимости интегралов по последовательности обычных случайных мер. Они могут быть использованы при проверке условий о сходимости интегралов на X_j в утверждениях, приведенных ниже.

Теорема 2.5. *Пусть даны $\sigma-$конечные случайные меры μ^σ и μ_n^σ, $n \geq 1$, а также функция f, интегрируемая по всем μ_n^σ. Пусть на любом X_j из представления (2.1) для μ^σ каждая μ_n^σ также является обычной случайной мерой, f интегрируема по μ^σ на X_j и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_{A\cap X_j} f\,d\mu_n^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{A\cap X_j} f\,d\mu^\sigma, \quad n\to\infty. \tag{2.10}$$

Тогда эквивалентными являются следующие условия:

(i) *f интегрируема на X по μ^σ и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\,d\mu_n^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\,d\mu^\sigma, \quad n\to\infty;$$

(ii) $\forall A_k \downarrow \emptyset \quad \sup\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{B\subset A_k}\left\|\int_B f\,d\mu_n^\sigma\right\| \to 0, \quad k\to\infty.$

Доказательство. Сначала мы обоснуем следование (i) $\Rightarrow$ (ii). Аналогично доказательству теоремы 2.3, мы будем рассматривать случайные меры

$$\eta(A) = \int_A f\,d\mu^\sigma, \quad \eta_n(A) = \int_A f\,d\mu_n^\sigma, \quad n\geq 1,$$

и субмеру

$$v_0(A) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\sup_{B\subset A}\|\eta_n(B)\|, \quad A\in\mathcal{B}. \tag{2.11}$$

Каждая η_n абсолютно непрерывна относительно v_0, по теореме 3.2 [26], они равномерно абсолютно непрерывны относительно v_0. Из последовательности $A_k \downarrow \emptyset$ для любого $\delta > 0$, начиная с некоторого номера, все $v_0(A_k) < \delta$, тогда для $B\subset A_k$ $v_0(B) < \delta$. Тем самым мы можем сделать равномерно как угодно малыми $\|\eta_n(B)\|$, $n\geq 1$, $B\subset A_k$, условие (ii) выполняется.

Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (i). В начале покажем, что при выполнении (ii) f интегрируема на X по μ^σ. Используя (2.10), для произвольных $A\in\mathcal{B}$, $i\geq j$ рассмотрим

$$\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f\,d\mu^\sigma\right\| \leq \sup_{n\geq 1}\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f\,d\mu_n^\sigma\right\| \leq \sup_{n\geq 1}\sup_{B\subset(X\setminus X_j)}\left\|\int_B f\,d\mu_n^\sigma\right\|.$$

Используя (ii) для $A_k = X\setminus X_k$, из полноты L_0 получим требуемую интегрируемость f. Теперь для произвольных $A\in\mathcal{B}$, $n\geq 1$, $j\geq 1$ мы можем рассмотреть

$$\left\|\int_A f\,d(\mu^\sigma-\mu_n^\sigma)\right\| \leq \left\|\int_{A\cap X_j} f\,d(\mu^\sigma-\mu_n^\sigma)\right\| + \left\|\int_{A\setminus X_j} f\,d\mu^\sigma\right\| + \left\|\int_{A\setminus X_j} f\,d\mu_n^\sigma\right\|. \tag{2.12}$$

Используя условие (ii), для данного A выбором j мы можем здесь уменьшить третье слагаемое равномерно по n. Увеличивая при необходимости j еще, мы можем сделать как угодно малым второе слагаемое, поскольку f интегрируема по μ^σ. Для выбранного j мы можем уменьшать первое слагаемое выбором большого n, используя (2.10). Так мы получаем выполнение (ii). □

Следствие 2.3. *Пусть даны $\sigma-$конечные случайные меры μ^σ и μ_n^σ, $n\geq 1$, а также функция f, интегрируемая по всем μ_n^σ. Пусть на любом X_j из представления (2.1) для μ^σ каждая μ_n^σ также является обычной случайной мерой, f интегрируема по μ^σ на X_j и*

$$\sup_{A\subset X_j}\left\|\int_A f\,d\mu_n^\sigma - \int_A f\,d\mu^\sigma\right\| \to 0, \quad n\to\infty. \tag{2.13}$$

Тогда эквивалентными являются следующие условия:

(i) f *интегрируема на* X *по* μ^σ *и*

$$\sup_{A\in\mathcal{B}}\left\|\int_A f\,d\mu_n^\sigma-\int_A f\,d\mu^\sigma\right\|\to 0,\quad n\to\infty;$$

(ii) $\forall A_k\downarrow\emptyset\quad \sup\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{B\subset A_k}\left\|\int_B f\,d\mu_n^\sigma\right\|\to 0,\quad k\to\infty.$

Доказательство. Имея доказанную теорему 2.5, мы сразу получаем следование (i) $\Rightarrow$ (ii). Если выполняется (ii), мы имеем интегрируемость f. Для обоснования предела в (i) рассмотрим супремум по множествам A в оценке (2.12). Третье слагаемое снова будет стремиться к нулю при $j\to\infty$, по (ii). Второе слагаемое имеет такой же предел по лемме 2.3. При выбранном j можем уменьшать первое слагаемое выбором n, используя (2.13). □

Если интегрируемость f по предельной μ известна, мы можем несколько ослабить условие (ii) предыдущих утверждений.

Следствие 2.4. *Пусть даны* $\sigma-$*конечные случайные меры* $\mu_n^\sigma,\ n\geq 1$, *а также функция* f, *интегрируемая по всем* μ_n^σ. *Пусть на любом* X_j *из представления* (2.1) *для* μ^σ *каждая* μ_n^σ *также является обычной случайной мерой, и*

$$\forall A\in\mathcal{B}\quad \int_{A\cap X_j} f\,d\mu_n^\sigma\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad n\to\infty. \tag{2.14}$$

Тогда эквивалентными будут следующие условия:

(i) $\forall A\in\mathcal{B}\quad \int_A f\,d\mu_n^\sigma\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad n\to\infty;$

(ii) $\forall A_k\downarrow\emptyset\quad \sup\limits_{n\geq 1}\left\|\int_{A_k} f\,d\mu_n^\sigma\right\|\to 0,\quad k\to\infty.$

Доказательство. Нам нужно лишь доказать следование (ii) $\Rightarrow$ (i). Для произвольных $A\in\mathcal{B},\ n\geq 1,\ j\geq 1$ имеем:

$$\left\|\int_A f\,d\mu_n^\sigma\right\|\leq\left\|\int_{A\cap X_j} f\,d\mu_n^\sigma\right\|+\left\|\int_{A\setminus X_j} f\,d\mu_n^\sigma\right\|.$$

По условию (ii), выбором j мы можем сделать малым второе слагаемое. Потом, воспользовавшись (2.14), для данного j мы можем уменьшать первое слагаемое выбором n. □

Для доказательства интегрируемости f по предельной μ^σ можно использовать следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть даны* $\sigma-$*конечные случайные меры* μ^σ *и* $\mu_n^\sigma,\ n\geq 1$, *а также функция* f, *интегрируемая по всем* μ_n^σ. *Пусть на любом* X_j *из представления* (2.1) *для* μ^σ *каждая* μ_n^σ *также является обычной случайной мерой,* f *интегрируема по* μ^σ *на* X_j *и*

$$\forall A\in\mathcal{B}\quad \int_{A\cap X_j} f\,d\mu_n^\sigma\xrightarrow{\mathbf{P}}\int_{A\cap X_j} f\,d\mu^\sigma,\quad n\to\infty. \tag{2.15}$$

Тогда:

1) Если существует функция $g:X\to\mathbf{R}$, *интегрируемая по* μ^σ *на* X, *такая, что*

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|f(x)|>c|g(x)|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\|\to 0,\quad c\to\infty, \tag{2.16}$$

то f интегрируема по μ^σ на X.

2) Если f интегрируема по μ^σ на X и

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f\,d\mu_n^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\,d\mu^\sigma, \quad n \to \infty,$$

то существует функция $g : X \to \mathbf{R}$, интегрируемая по μ^σ на X, для которой выполняется (2.16).

Доказательство. Сначала докажем 1). Чтобы доказать интегрируемость f, нам нам достаточно для произвольного $A \in \mathcal{B}$ показать стремление к нулю при $i,\ j \to \infty$ следующего значения:

$$\left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)} f\,d\mu^\sigma\right\| \le \sup_n \left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)\cap\{|f|>c|g|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\| + \left\|\int_{A\cap(X_i\setminus X_j)\cap\{|f|\le c|g|\}} f\,d\mu^\sigma\right\|$$

(при записи первого слагаемого мы использовали (2.15)). Выбором большого $c > 1$ мы можем сделать как угодно малым первое слагаемое равномерно по $i,\ j$. Для взятого нами c, в соответствии с (1.7), второе слагаемое не превышает

$$16 \sup_{B\subset(X_i\setminus X_j)} \left\|c\int_B g\,d\mu^\sigma\right\| \le 16c \sup_{B\subset(X\setminus X_j)} \left\|\int_B g\,d\mu^\sigma\right\|. \tag{2.17}$$

По лемме 2.3, это значение можно как угодно уменьшить выбором j. Интегрируемость f по μ^σ показана.

Докажем 2). Возьмем произвольную g из леммы 2.4. Тогда имеем, что

$$\sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap\{|f|>c|g|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\| \le \sup_{n,A}\left\|\int_{(A\setminus X_j)\cap\{|f|>c|g|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\| + \sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap X_j\cap\{|f|>c|g|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\| \le$$
$$\sup_{n,A}\left\|\int_{(A\setminus X_j)\cap\{|f|>c|g|\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\| + \sup_{n,A}\left\|\int_{A\cap X_j\cap\{|f|>cc_j\}} f\,d\mu_n^\sigma\right\|.$$

У нас выполняется условие (i) теоремы 2.5, поэтому будет выполняться и условие (ii) этой теоремы. Использовав его для $A_k = X \setminus X_k$, выбором j мы можем как угодно уменьшать первое слагаемое последней суммы равномерно по всем c. По условию (2.15) и теореме 1.14, на данном X_j функция f равномерно интегрируема по $\mu_n^\sigma,\ n \ge 1$. Поэтому при фиксированном j последнее слагаемое можно сделать как угодно малым выбором c. Значит, справедливо утверждение 2) данной теоремы. □

2.2.2 Общая предельная теорема для интегралов по $\sigma-$конечным случайным мерам

В данном пункте мы рассмотрим предел по вероятности значений $\int_A f_n\,d\mu_n^\sigma,\ n \ge 1$, при одновременной сходимости f_n и μ_n^σ. В следующем утверждении для проверки условий об интегрируемости и пределах интегралов на отдельных X_j можно использовать теорему 1.21.

Теорема 2.7. *Пусть даны $\sigma-$конечные случайные меры μ^σ и $\mu_n^\sigma,\ n \ge 1$, а также функции f и $f_n,\ n \ge 1$, каждая f_n интегрируема на X по соответствующей μ_n^σ. Пусть на любом X_j из представления (2.1) для μ^σ каждая μ_n^σ также является обычной случайной мерой, f интегрируема по μ^σ на X_j и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_{A\cap X_j} f_n\,d\mu_n^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_{A\cap X_j} f\,d\mu^\sigma, \quad n \to \infty. \tag{2.18}$$

Тогда эквивалентными являются следующие условия:

(i) f *интегрируема на* X *по* μ^σ *и*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f_n \, d\mu_n^\sigma \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f \, d\mu^\sigma, \quad n \to \infty;$$

(ii) $\forall A_k \downarrow \emptyset \quad \sup\limits_{n \geq 1} \sup\limits_{B \subset A_k} \left\| \int_B f_n \, d\mu_n^\sigma \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$

Доказательство. Доказательство того, что (i) $\Rightarrow$ (ii) проводим, дословно повторяя обоснование следования (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 2.5, только в качестве значений случайных мер $\eta_n(A)$ берем $\int_A f_n \, d\mu_n$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{B}$.

Доказательство того, что (ii) $\Rightarrow$ (i) мы также проведем аналогично доказательству соответствующего следования в теореме 2.5. Сначала покажем, что при выполнении (ii) f интегрируема на X по μ^σ. Используя (2.18), для произвольных $A \in \mathcal{B}$, $i \geq j$ рассмотрим

$$\left\| \int_{A \cap (X_i \setminus X_j)} f \, d\mu^\sigma \right\| \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \int_{A \cap (X_i \setminus X_j)} f_n \, d\mu_n^\sigma \right\| \leq \sup_{n \geq 1} \sup_{B \subset (X \setminus X_j)} \left\| \int_B f_n \, d\mu_n^\sigma \right\|.$$

Использовав (ii) для $A_k = X \setminus X_k$, из полноты L_0 получим требуемую интегрируемость f. Теперь для произвольных $A \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, $j \geq 1$ мы можем рассмотреть

$$\left\| \int_A f \, d\mu^\sigma - \int_A f_n \, d\mu_n^\sigma \right\| \leq \left\| \int_{A \cap X_j} f \, d\mu^\sigma - \int_{A \cap X_j} f_n \, d\mu_n^\sigma \right\| + \left\| \int_{A \setminus X_j} f \, d\mu^\sigma \right\| + \left\| \int_{A \setminus X_j} f_n \, d\mu_n^\sigma \right\|. \quad (2.19)$$

Используя условие (ii), для данного A выбором j мы можем здесь уменьшать третье слагаемое равномерно по n. Увеличивая при необходимости j еще, мы можем сделать как угодно малым второе слагаемое, поскольку f интегрируема по μ^σ. Для выбранного j можем уменьшать первое слагаемое выбором большого n, используя (2.18). Так мы получаем выполнение (ii). □

Следствие 2.5. *Пусть для обозначений, введенных в теореме 2.7, выполняются наложенные на них в этой теореме требования, и также*

$$\sup_{A \subset X_j} \left\| \int_A f_n \, d\mu_n^\sigma - \int_A f \, d\mu^\sigma \right\| \to 0, \quad n \to \infty. \quad (2.20)$$

Тогда эквивалентными являются следующие условия:

(i) f *интегрируема на* X *по* μ^σ *и*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} \left\| \int_A f_n \, d\mu_n^\sigma - \int_A f \, d\mu^\sigma \right\| \to 0, \quad n \to \infty;$$

(ii) $\forall A_k \downarrow \emptyset \quad \sup\limits_{n \geq 1} \sup\limits_{B \subset A_k} \left\| \int_B f_n \, d\mu_n^\sigma \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$

Доказательство. Из теоремы 2.7, мы получаем следование (i) $\Rightarrow$ (ii). Если выполняется (ii), мы имеем интегрируемость f. Для обоснования предела в (i) рассмотрим супремум по множествам A в оценке (2.19). Третье слагаемое снова будет стремиться к нулю при $j \to \infty$ по (ii). Второе слагаемое имеет такой же предел по лемме 2.3. При выбранном j мы можем уменьшать первое слагаемое выбором n, используя (2.20). □

Глава 3

Свойства некоторых классов случайных мер и стохастических интегралов

3.1 Сходимость почти наверное значений случайных мер и интегралов

Соглашения

Всюду в этом параграфе:
$f,\ f_n$ — измеримые функции, определенные на X и принимающие значения в $\mathbf{R}$.
μ — случайная мера, определенная на $(X, \mathcal{B})$.

3.1.1 Критерий сходимости п. н. к нулю случайных мер множеств, сходящихся к пустому множеству

Случайные меры, $\sigma-$аддитивные п. н., являются частным случаем наших случайных мер. Для них и функций $f : X \to \mathbf{R}$ будем рассматривать интегралы $\int_A f\, d\mu$, определенные нами в главе 1. В данном параграфе мы изучим некоторые свойства интегралов, связанные с дополнительными условиями, которым удовлетворяют эти случайные меры. Будут получены утверждения о сходимости п. н. значений случайных мер и интегралов.

Сначала приведем пример, показывающий, что существуют случайные меры, которые не является $\sigma-$аддитивными п. н.

Пример. Возьмем $X = \{1,\ 2,\ 3, \dots\}$, $\mathcal{B}$ — $\sigma-$алгебру всех подмножеств X. Построим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ случайных величин, который сходится безусловно по вероятности, но не сходится безусловно п. н. Тогда случайная мера $\eta(A) = \sum_{n\in A} \xi_n, \quad A \in \mathcal{B}$, является требуемым примером.

Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega = [0,\ 1]$, $\mathcal{F}$ — борелевские подмножества [0, 1], $\mathbf{P}$ — меру Лебега. Будем рассматривать функции Хаара

$$\chi_k^{(i)}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin [\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}], \\ 2^{k/2}, & \omega \in (\frac{i-1}{2^k},\ \frac{2i-1}{2^{k+1}}], \\ -2^{k/2}, & \omega \in (\frac{2i-1}{2^{k+1}},\ \frac{i}{2^k}] \end{cases}$$

для $k \geq 0,\ 1 \leq i \leq 2^k$. Также

$$\chi_k^{(i)}(\omega) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2}\left[\chi_k^{(i)}(\omega+\delta) + \chi_k^{(i)}(\omega-\delta)\right], \quad \omega = \frac{i-1}{2^k},\ \frac{2i-1}{2^{k+1}},\ \frac{i}{2^k}, \quad \omega \neq 0,\ 1;$$

$$\chi_k^{(i)}(0) = \lim_{\delta\to\ +0} \chi_k^{(i)}(\delta), \quad \chi_k^{(i)}(1) = \lim_{\delta\to\ +0} \chi_k^{(i)}(1-\delta).$$

Возьмем

$$\{\xi_n(\omega),\ n \geq 1\} = \left\{\frac{1}{k2^{k/2}}\chi_k^{(i)}(\omega), \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq 2^k\right\},$$

где элементы второй последовательности расположены в произвольном порядке. Рассмотрим ряд

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^{k/2}} \chi_k^{(i)}(\omega). \tag{3.1}$$

Он не сходится безусловно п. н., поскольку по теореме 15 [6, глава 3] для такой сходимости рядов вида

$$\sum_{i,k} a_{ik} \chi_k^{(i)}(\omega)$$

необходимо

$$\sum_{i,k} \left| a_{ik} \chi_k^{(i)}(\omega) \right| < \infty \text{ п. н.}$$

У нас в точках $\omega \neq i/2^k$ ряд (3.1) абсолютно расходится.

Наш ряд сходится безусловно по вероятности, поскольку по следствию 5 [6, глава 3] для такой сходимости рядов вида

$$\sum_{i,k} a_{ik} \chi_k^{(i)}(\omega)$$

достаточно

$$\sum_{i,k} a_{ik}^2 \left(\chi_k^{(i)}(\omega) \right)^2 < \infty \text{ п. н.}$$

Для ряда (3.1) это условие выполняется. □

Большинство предельных теорем, доказанных нами в главе 1 для сходимости интегралов по вероятности не имеют непосредственных аналогов для случайных мер, $\sigma-$аддитивных п. н. и сходимости п. н. Для таких μ и $A_n \downarrow \emptyset$, $B_n \subset A_n$, даже не обязательно будет $\mu(B_n) \to 0$ п. н. Имеет место следующий факт.

Теорема 3.1. *Для любой случайной меры μ эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *для любых $A_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1$, таких, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, выполняется $\mu(A_n) \to 0$ п. н.*

(ii) *для любых $B_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1$, таких, что $B_k \cap B_n = \emptyset$, $k \neq n$, выполняется $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(B_n)| < \infty$ п. н.*

Доказательство. Докажем сначала, что из (ii) следует (i). Рассмотрим произвольные $A_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1$, с $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$. Возьмем в качестве множеств B_n расположенный в произвольном порядке набор всех множеств вида

$$(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_i}) \setminus \cup_{j \neq n_1, \dots n_i} (A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_i} \cap A_j), \quad i \geq 1$$

(это точки X, которые входят в $A_{n_1}, \dots, A_{n_i}$ и больше ни в какие A_j), счетность этого набора очевидна. Тогда $B_k \cap B_n = \emptyset$, $k \neq n$.

Поскольку каждая точка X входит лишь в конечное число множеств A_n, из $\sigma-$аддитивности μ следует, что

$$\mu(A_n) = \sum_{k: B_k \subset A_n} \mu(B_k),$$

где ряд сходится по вероятности. Поскольку каждое B_k является подмножеством лишь конечного количества A_n, будет $\min\{k:\ B_k \subset A_n\} \to \infty$, $n \to \infty$. Поэтому

$$|\mu(A_n)| = \left| \sum_{k: B_k \subset A_n} \mu(B_k) \right| \leq \sum_{j \geq \min\{k:\ B_k \subset A_n\}} |\mu(B_j)|,$$

и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(B_n)|$ следует $\mu(A_n) \to 0$ п. н.

Теперь покажем, что из (i) следует (ii). Предположим, что при выполнении (i) существуют $B_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1$, с $B_k \cap B_n = \emptyset$, $k \neq n$, такие, что для события

$$D = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(B_n, \omega)| = \infty \right\}$$

будет $\mathbf{P}(D) > 0$.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится абсолютно, то для любых $c \in \mathbf{R}$, $m_0 \in \mathbf{N}$ найдется конечный набор $\{k_i\},\ k_i \geq m_0$, такой, что

$$\left| \sum_i a_{k_i} \right| > c.$$

Поэтому для произвольного $\omega_0 \in D$ для любых $c \in \mathbf{R},\ m_0 \in \mathbf{N}$ найдутся зависящие от ω_0 числа $m(\omega_0)$ и $\{k_i(\omega_0)\},\ \forall i \quad m_0 \leq k_i < m(\omega_0)$, такие, что

$$\sum_i \left| \mu(B_{k_i(\omega_0)}, \omega_0) \right| > c.$$

Поэтому, если мы рассмотрим события

$$D_{m_0,m_1}(c) = \left\{ \omega \in D : \max_{\{k_i\} \subset [m_0,\ m_1)} \left| \sum_i \mu(B_{k_i}) \right| > c \right\},$$

где максимум берется по всем подмножествам $\{k_i\}$ множества $\{m_0,\ m_0+1, \ldots,\ m_1-1\}$, то для любых $c,\ m_0$ будет

$$D_{m_0,m_1}(c) \uparrow D, \quad m_1 \uparrow \infty.$$

Значит,

$$\lim_{m_1 \to \infty} \mathbf{P}\left(D_{m_0,m_1}(c)\right) = \mathbf{P}(D).$$

Мы можем выбрать такую последовательность неслучайных натуральных чисел $\{n_j,\ j \geq 1\}$, что для всех j

$$\mathbf{P}\left(D_{n_j,n_{j+1}}(1)\right) > \mathbf{P}(D)(1 - 2^{-j-1}).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\cap_{j=1}^{\infty} D_{n_j,n_{j+1}}(1)\right\} > \frac{1}{2}\,\mathbf{P}(D),$$

то есть, мы будем иметь, что

$$\mathbf{P}\left\{ \cap_{j=1}^{\infty} \left\{ \max_{\left\{k_i^{(j)}\right\} \subset [n_j,\ n_{j+1})} \left| \sum_i \mu(B_{k_i^{(j)}}) \right| > 1 \right\} \right\} > \frac{1}{2}\,\mathbf{P}(D). \tag{3.2}$$

Для каждого j для всех возможных поднаборов набора $\{n_j,\ n_j+1, \ldots,\ n_{j+1}-1\}$ берем множества $\cup_i B_{k_i^{(j)}}$. Собрав эти множества для всех $j \geq 1$, мы получаем счетный набор множеств — возьмем его в некотором порядке как последовательность множеств $\{A_n,\ n \geq 1\}$. Так среди членов последовательности $\{A_n\}$ для каждого j будут множества

$$B_{n_j}, \quad B_{n_j+1}, \quad \ldots, \quad B_{n_{j+1}-1}, \quad B_{n_j} \cup B_{n_j+1}, \quad \ldots, \quad B_{n_j} \cup B_{n_j+1} \cup \cdots \cup B_{n_{j+1}-1},$$

всего $2^{n_{j+1}-n_j} - 1$ элементов для данного j.

Поскольку каждое B_k является подмножеством лишь конечного числа множеств A_n, будет $\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \emptyset$. Для каждого $\omega \in \cap_{j=1}^{\infty} D_{n_j,n_{j+1}}(1)$ в последовательности $\{\mu(A_n, \omega), n \geq 1\}$ есть бесконечно много элементов, по модулю больших 1. Из (3.2) следует, что не выполняется $\mu(A_n) \to 0$ п. н., что противоречит условию (i). $\square$

Дальше мы приведем пример $\sigma-$аддитивной п. н. случайной меры, не удовлетворяющей условию (ii) предыдущей теоремы. Это нам покажет, что для такой случайной меры не выполняется условие (i).

Пример. Рассмотрим случайную меру на $X = [0,\ 1]$ и борелевских подмножествах $[0,\ 1]$, заданную интегралом Ито

$$w(A) = \int_0^1 I_A(x)\, dw.$$

Ее значения на непересекающихся множествах — независимые случайные величины. Из сходимости ряда независимых случайных величин по вероятности следует сходимость этого ряда п. н. , поэтому данная случайная мера является $\sigma-$аддитивной п. н.

Возьмем множества

$$B_n = \left[\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Отметим, что дисперсия

$$\mathbf{D}w(B_n) = \frac{1}{n(n+1)},$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(|w(B_n)| I_{\{|w(B_n)|\leq 1\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 x \exp\left\{-\frac{1}{2}n(n+1)x^2\right\} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\right) = \infty.$$

Из теоремы Колмогорова о трех рядах мы имеем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w(B_n)|$ не сходится п. н. □

3.1.2 Теорема об интеграле как $\sigma-$аддитивной п. н. случайной мере.

В данном пункте мы получим достаточное условие того, что функция множеств

$$\eta(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{B},$$

является $\sigma-$аддитивной п. н. случайной мерой (то, что η будет случайной мерой для интегрируемой f, уже отмечалось в лемме 1.1). Для этого нам нужно следующее условие сходимости п. н. интегралов от последовательности функций.

Лемма 3.1. *Пусть дана случайная мера μ, $\sigma-$аддитивная п. н., и последовательность функций $\{f_n,\ n \geq 1\} \subset B(X)$ такие, что*

$$\sup_{n,x} |f_n(x)| < \infty, \quad \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{f_n \neq 0\}}(x) < \infty.$$

Тогда

$$\int_X \left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k\right) d\mu \to 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из наших условий следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится для всех x, из аналога теоремы Лебега 7.3.7 [40] следует, что

$$\int_X \left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k\right) d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из линейности нашего интеграла будем иметь, что

$$\int_X \left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=n}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu,$$

и последний ряд сходится по вероятности. Для доказательства данной леммы достаточно показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu$$

сходится п. н.

Будем считать, что все $f_k(x) \geq 0$. Если это не так, то мы можем взять представление

$$f_k(x) = f_k(x) I_{\{f_k \geq 0\}}(x) + f_k(x) I_{\{f_k < 0\}}(x),$$

и рассматривать в отдельности неотрицательные и неположительные части этих представлений. Поэтому данное предположение не ограничивает общности.

Сначала покажем, что если множества $A_k \in \mathcal{B},\ k \geq 1$, таковы, что

$$\exists q \in \mathbf{N} \quad \forall x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} I_{A_k}(x) \leq q, \tag{3.3}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сходится п. н. Мы берем произвольную перестановку наших A_k, то есть мы доказываем безусловную сходимость нашего ряда.

Для этого рассмотрим множества вида

$$(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_r}) \setminus \cup_{j \neq k_1, \dots k_r} (A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_r} \cap A_j), \quad 1 \leq r \leq q,$$

некоторым образом расположим их в виде последовательности $\{B_i,\ i \geq 1\}$. Учитывая (3.3), имеем для всех k

$$\mu(A_k) = \sum_{i: B_i \subset A_k} \mu(B_i)$$

(здесь сходимость ряда — по вероятности). Для каждого k возьмем конечный набор индексов $T_k \subset \mathbf{N}$ такой, что

$$\left\| \mu(A_k) - \sum_{i \in T_k} \mu(B_i) \right\| < 2^{-n}.$$

Тогда, по лемме Бореля — Кантелли, нам достаточно обосновать сходимость п. н. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in T_k} \mu(B_i). \tag{3.4}$$

Ряд (3.4) разобъем на q рядов. Сначала, не меняя порядка следования, выбираем из него $\mu(B_i)$, которые встречаются в сумме по первому разу — чтобы получить ряд, в котором ровно по одному разу встречаются все $\mu(B_i)$, что есть в (3.4). Дальше составляем второй ряд — из оставленных в (3.4) слагаемых, не изменяя порядка, выбираем все $\mu(B_i)$, что встречаются там по первому разу, и т. д. Составив так q рядов, мы выберем все слагаемые (3.4). Каждый из полученных нами рядов сходится п. н., поскольку множества в их слагаемых — непересекающиеся. Частные суммы ряда (3.4) являются суммой q слагаемых — частных сумм выделенных нами q рядов, и каждая из этих q частных сумм сходится п. н. Поэтому сходится п. н. и ряд (3.4), и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Дальше для каждой f_k возьмем простую функцию

$$f_k^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{l_k} c_{ki} I_{A_{ki}}(x), \quad A_{ki} \cap A_{kj} = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{3.5}$$

такую, что $0 \leq f_k^{(0)}(x) \leq f_k(x)$ и

$$\left\| \int_X \left(f_k - f_k^{(0)} \right) d\mu \right\| < 2^{-n}.$$

Теперь достаточно показать, что сходится п. н. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k^{(0)} \, d\mu.$$

Из условия леммы следует, что для некоторого q каждое $x \in X$ лежит не больше, чем в q из множеств $\{x : \ f_k(x) \neq 0\}$, $k \geq 1$. Поскольку также $0 \leq f_k^{(0)}(x) \leq f_k(x)$, для определенных в (3.5) множеств A_{ki} будет

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l_k} I_{A_{ki}}(x) \leq q,$$

и, как было доказано выше, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l_k} \mu(A_{ki})$$

сходится безусловно п. н. Поскольку все $|c_{ki}|$ в совокупности ограничены (числом $\sup_{n,x} |f_n(x)|$), сходится безусловно п. н. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l_k} c_{ki} \mu(A_{ki}).$$

(Это следует из теоремы 1 [36], которая утверждает, что при домножении членов сходящегося безусловно п. н. ряда на действительные коэффициенты, не большие 1, сходимость ряда сохраняется. Для $X = (0, \ 1)$ и лебеговой $\mathbf{P}$ аналогичный результат дается в следствии 6 [6, глава 2].) Значит, сходится п. н.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k^{(0)} \, d\mu.$$

$\square$

Теорема 3.2. *Пусть даны случайная мера μ, $\sigma-$аддитивная п. н., и функция $f \in B(X)$. Тогда случайная мера*

$$\eta(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{B},$$

является $\sigma-$аддитивной п. н.

Доказательство. Функция $f \in B(X)$ интегрируема по любой μ (это было отмечено в пункте 1.1.1). Рассмотрим произвольные множества $A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$, такие, что $A_n \downarrow \emptyset$. Возьмем функции

$$f_n(x) = f(x) I_{(A_n \setminus A_{n+1})}(x), \quad n \geq 1.$$

Для них выполняются условия предыдущей леммы:

$$\sup_{n,x} |f_n(x)| \le \sup_x |f(x)| < \infty, \quad \sup_{x\in X} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{f_n \ne 0\}}(x) \le 1.$$

Имеем равенство

$$\eta(A_n) = \int_X \left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k \right) d\mu,$$

и из утверждения леммы мы получаем, что $\eta(A_n) \to 0$ п. н. □

3.2 Теорема Радона — Никодима для мер, зависящих от ω

Соглашения

Всюду в этом параграфе:

$f = f(x,\omega)$ — функция $f : X \times \Omega \to \mathbf{R}$, для каждого фиксированного ω (кроме множества вероятности нуль) $\mathcal{B}-$измеримая как функция на X.

$\mathcal{B}_0$ — счетная алгебра, порождающая $\sigma-$алгебру $\mathcal{B}$ (в случае счетно-порожденной $\mathcal{B}$), $\mathcal{B}_0 = \{H_k,\ k \ge 1\}$.

3.2.1 Условия существования производной Радона — Никодима

Определение 3.1. *Функция множеств $\lambda(A,\omega)$, $A \in \mathcal{B}$, $\omega \in \Omega$, называется знакопеременной мерой, зависящей от ω, (далее — з. м. з. ω) если для каждого фиксированного ω $\lambda(\cdot,\omega)$ является действительной конечной знакопеременной мерой на $\mathcal{B}$.*

Отметим, что мы не требуем измеримости функций $\lambda(A,\cdot) : \Omega \to \mathbf{R}$.

Определение 3.2. *Пусть даны з. м. з. ω λ и функция $f(x,\omega) : X \times \Omega \to \mathbf{R}$, интегрируемая по $\lambda(\cdot,\omega)$ для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ (кроме множества вероятности нуль). Тогда под интегралом*

$$\int_A f(x,\omega)\,\lambda(dx,\omega), \quad A \in \mathcal{B},$$

понимается интеграл Лебега при каждом фиксированном ω (пренебрегая указанным множеством вероятности нуль).

Очевидно, что если наша λ также является случайной мерой, действительная функция f является интегрируемой по λ в данном смысле и в смысле главы 1, значения двух полученных интегралов совпадают, поскольку они совпадают для простых функций.

Определение 3.3. *Пусть даны з. м. з. ω ζ и λ. Будем говорить, что функция $f(x,\omega)$, интегрируемая по λ в вышеупомянутом смысле, является производной Радона — Никодима ζ по λ, если*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \zeta(A,\omega) = \int_A f(x,\omega)\,\lambda(dx,\omega) \text{ п. н.} \tag{3.6}$$

В данном параграфе мы будем изучать условия существования производных Радона — Никодима для з. м. з. ω и некоторых классов случайных мер.

Определение 3.4. *Функцию множеств, зависящую от ω, $\lambda : \mathcal{B} \times \Omega \to \mathbf{R}$ будем называть неотрицательной, если*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \lambda(A,\omega) \ge 0 \text{ п. н.}$$

Теорема 3.3. *Пусть $\sigma-$алгебра $\mathcal{B}$ счетно-порождена, даны з. м. з. ω ζ и λ. Для того, чтобы существовала производная Радона — Никодима ζ по λ необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ (кроме множества вероятности нуль) выполнялось $\zeta(\cdot,\omega) \ll \lambda(\cdot,\omega)$.*

Доказательство. Достаточность указанного условия является очевидной. Можно для каждого отдельного $\omega \in \Omega$ с $\zeta(\cdot,\omega) \ll \lambda(\cdot,\omega)$ взять обычную производную Радона — Никодима $f(x,\omega)$ для указанных действительных знакопеременных мер и такая f будет удовлетворять равенству (3.6).

Теперь пусть (3.6) имеет место. Исключим из рассмотрения множество вероятности нуль

$$\cup_{k=1}^{\infty}\left\{\omega : \zeta(H_k,\omega) \neq \int_{H_k} f(x,\omega)\,\lambda(dx,\omega)\right\}.$$

Для всех других ω правая и левая части (3.6) равны на всех H_k, обе части являются $\sigma-$аддитивными функциями множеств на $\mathcal{B}$, и потому они равны на всех $A \in \mathcal{B}$ для всех оставленных ω. Рассмотрев для каждого такого ω равенство с действительными мерами $\zeta(\cdot,\omega)$, $\lambda(\cdot,\omega)$, получаем необходимость указанного условия. □

Следствие 3.1. *Пусть $\mathcal{B}$ счетно-порождена. Тогда производная Радона — Никодима з. м. з. ω ζ по з. м. з. ω λ, если она существует, определена однозначно в том смысле, что для двух функций $f(x,\omega)$ и $f_1(x,\omega)$, удовлетворяющих* (3.6), *множество*

$$\{\omega : \lambda\left(\{x : f(x,\omega) \neq f_1(x,\omega)\},\omega\right) > 0\}$$

является $\mathbf{P}-$нулевым.

Доказательство. Поскольку для действительных знакопеременных мер производная Никодима определена однозначно, указанное множество является подмножеством $\{\omega : \zeta(\cdot,\omega) \not\ll \lambda(\cdot,\omega)\}$. □

Следующее утверждение дает достаточное условие выполнения (3.6), что может быть более удобным для проверки — например, когда значения ζ и λ являются случайными величинами с известным совместным распределением.

Теорема 3.4. *Пусть $\sigma-$алгебра $\mathcal{B}$ счетно-порождена, даны з. м. з. ω ζ и λ. Для того, чтобы существовала производная Радона — Никодима ζ по λ достаточно, чтобы*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_0\, \mathbf{P}\left\{\{|\zeta(A,\omega)| > \varepsilon\} \cap \{|\lambda(A,\omega)| < \delta\}\right\} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 3.3, достаточно показать, что при выполнении (3.7) будет

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \zeta(\cdot,\omega) \ll \lambda(\cdot,\omega)\right\} = 1.$$

Предположим, что это не верно и существует множество $D_1 \subset \Omega$, не являющееся $\mathbf{P}-$нулевым, и такое, что

$$\forall\omega \in D_1 \quad \exists B(\omega) \in \mathcal{B} : \quad |\zeta(B(\omega),\omega)| > 0, \quad \lambda(B(\omega),\omega) = 0.$$

Заменив при необходимости D_1 на его не $\mathbf{P}-$нулевое подмножество и поменяв знак ζ, не теряя общности, будем считать, что

$$\forall\omega \in D_1 \quad \zeta(B(\omega),\omega) > 0.$$

Из теории действительных мер следует, что

$$\begin{aligned}
&\forall\omega\in D_1 \quad \exists\left\{A_k^i(\omega), \quad k\geq 1, \quad i\geq 1\right\}\in\mathcal{B}_0: \\
&\forall k \quad \cup_{i=1}^{\infty} A_k^i(\omega)\supset\cup_{i=1}^{\infty}A_{k+1}^i(\omega)\supset B(\omega), \qquad (3.8)\\
&\lim_{k\to\infty}\zeta\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_k^i(\omega),\omega\right)=\zeta(B(\omega),\omega)>0, \qquad (3.9)\\
&\lim_{k\to\infty}\lambda\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_k^i(\omega),\omega\right)=\lambda(B(\omega),\omega)=0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

(Точнее говоря, непосредственно из теории меры следует существование таких A_k^i для $\zeta(\cdot,\omega)$ и $\lambda(\cdot,\omega)$ в отдельности, но мы можем взять пересечение соответствующих множеств.)

Найдутся $m_0\in\mathbf{N}$ и множество $D_2\subset D_1$, не являющееся $\mathbf{P}$ −нулевым, такие, что

$$\forall\omega\in D_2 \quad \zeta(B(\omega),\omega)>\frac{2}{m_0}. \qquad (3.11)$$

Используя (3.7), возьмем δ_0 такое, что

$$\forall A\in\mathcal{B}_0 \quad \mathbf{P}\left\{\left\{|\zeta(A,\omega)|>\frac{1}{m_0}\right\}\cap\{|\lambda(A,\omega)|<\delta_0\}\right\}=0. \qquad (3.12)$$

Из равенства (3.10) следует, что, не ограничивая общности, мы можем считать:

$$\forall\omega\in D_2 \quad \left|\lambda\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_1^i(\omega),\omega\right)\right|<\delta_0.$$

Из (3.8), (3.9), (3.11) следует, что

$$\forall\omega\in D_2 \quad \zeta\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_1^i(\omega),\omega\right)>\frac{2}{m_0}.$$

Отсюда имеем:

$$\forall\omega\in D_2 \quad \exists n(\omega)\in\mathbf{N}: \quad \zeta\left(\cup_{i=1}^{n(\omega)}A_1^i(\omega),\omega\right)>\frac{1}{m_0}.$$

Отметим, что $A_1(\omega)=\cup_{i=1}^{n(\omega)}A_1^i(\omega)\in\mathcal{B}_0$. Мы доказали, что

$$\forall\omega\in D_2 \quad \exists A_1(\omega)\in\mathcal{B}_0: \quad \zeta(A_1(\omega),\omega)>\frac{1}{m_0}, \quad |\lambda(A_1(\omega),\omega)|<\delta_0.$$

Алгебра $\mathcal{B}_0$ является счетной,

$$D_2=\cup_{k=1}^{\infty}\{\omega\in D_2: \ A_1(\omega)=H_k\}.$$

Найдутся $k_0\in\mathbf{N}$ и $D_3\subset D_2$, не являющееся $\mathbf{P}$ −нулевым, такие, что

$$\forall\omega\in D_3 \quad A_1(\omega)=H_{k_0}.$$

Тогда

$$\left\{\left\{\omega: \ |\zeta(H_{k_0},\omega)|>\frac{1}{m_0}\right\}\cap\{\omega: \ |\lambda(H_{k_0},\omega)|<\delta_0\}\right\}\supset D_3,$$

что противоречит (3.12). □

3.2.2 Теорема Радона — Никодима для некоторых классов случайных мер

Определение 3.5. *Случайная мера μ называется регулярной, если для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ $\mu(\cdot, \omega)$ является конечной знакопеременной мерой на $\mathcal{B}$.*

Иными словами, регулярная случайная мера μ — это з. м. з. ω, для которой $\mu(A, \omega),\ A \in \mathcal{B}$, являются измеримыми функциями на Ω. Покажем, что для регулярных случайных мер производная Радона — Никодима, когда она существует, может быть выбрана измеримой функцией.

Теорема 3.5. *Пусть $\sigma-$алгебра $\mathcal{B}$ счетно-порождена и даны регулярная случайная мера ν и неотрицательная регулярная случайная мера μ. Пусть существует функция $f(x, \omega)$, такая, что*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu(A, \omega) = \int_A f(x, \omega)\, \mu(dx, \omega) \text{ п. н.} \tag{3.13}$$

Тогда функцию f в (3.13) можно выбрать измеримой по совокупности двух переменных.

Доказательство. Сначала покажем, что утверждение теоремы достаточно доказать для неотрицательных ν.

Возьмем для ν для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ разложение Хана:

$$\nu(A, \omega) = \nu^+(A, \omega) + \nu^-(A, \omega) = \sup_{B \in \mathcal{B}_0} \nu(A \cap B, \omega) + \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \nu(A \cap B, \omega). \tag{3.14}$$

Используя (3.13) и счетность $\mathcal{B}_0$, получаем:

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu^+(A, \omega) = \sup_{B \in \mathcal{B}_0} \int_{A \cap B} f(x, \omega)\, \mu(dx, \omega) = \int_A f(x, \omega) I_{\{f(x,\omega) \geq 0\}}\, \mu(dx, \omega) \text{ п. н.,}$$

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu^-(A, \omega) = \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \int_{A \cap B} f(x, \omega)\, \mu(dx, \omega) = \int_A f(x, \omega) I_{\{f(x,\omega) < 0\}}\, \mu(dx, \omega) \text{ п. н.}$$

Таким образом, для знакопостоянных ν^+ и ν^- существуют производные Радона — Никодима относительно μ. Эти функции множеств являются случайными мерами — измеримость величин $\nu^+(A)$ и $\nu^-(A),\ A \in \mathcal{B}$, следует из того, что супремумы в (3.14) берутся по счетным множествам $B \in \mathcal{B}_0$. Очевидно, нам достаточно показать, что каждая из двух упомянутых производных может быть взята измеримой по двум переменным.

Поэтому, не ограничивая общности, мы можем считать случайную меру ν неотрицательной.

Также мы можем считать, что для каждого фиксированного ω $\nu(\cdot, \omega),\ \mu(\cdot, \omega)$ — это неотрицательные меры. Для этого достаточно исключить из рассмотрения множества нулевой вероятности

$$\cup_{k=1}^{\infty} \{\omega :\ \nu(H_k, \omega) < 0\}, \quad \cup_{k=1}^{\infty} \{\omega :\ \mu(H_k, \omega) < 0\}.$$

Рассмотрим последовательность конечных разбиений множества X

$$S_n = \{B_n^m,\ 1 \leq m \leq j_n\}, \quad n \geq 1,$$

такую, что каждое S_n является наиболее мелким возможным разбиением X на множества из алгебры, порожденной набором множеств $\{X,\ H_k,\ 1 \leq k \leq n\}$. Отметим, что

$$\forall n \quad S_n \subset S_{n+1}, \quad \sigma\left(\cup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mathcal{B}.$$

Рассмотрим з. м. з. ω

$$\nu_1(A, \omega) = \int_A f(x, \omega)\, \mu(dx, \omega), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Имеем, что $\nu_1(A,\omega) = \nu(A,\omega)$ п. н., поэтому ν_1 является случайной мерой. Определим последовательность функций $f_n(x,\omega),\ n \geq 1$, такую, что

$$f_n(x,\omega) = \begin{cases} \dfrac{\nu_1(B_n^m,\omega)}{\mu(B_n^m,\omega)}, & x \in B_n^m,\ 1 \leq m \leq j_n,\ \mu(B_n^m,\omega) \neq 0, \\ 0, & x \in B_n^m,\ 1 \leq m \leq j_n,\ \mu(B_n^m,\omega) = 0. \end{cases}$$

Из теорем о дифференцировании действительных мер по сети множеств (см., например, формулировку в замечании 48.3 [10]) следует, что

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mu\left(\left\{x:\ f(x,\omega) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x,\omega)\right\},\omega\right) = 0. \tag{3.15}$$

Рассмотрим функцию

$$f'(x,\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,\omega)$$

для всех $x,\ \omega$, для которых этот предел существует, и

$$f'(x,\omega) = 0$$

в ином случае. Из измеримости f_n следует измеримость f' по двум переменным. Из (3.15) получаем, что для функции $f'(x,\omega)$ будет выполняться (3.13). □

Определение 3.6. *Регулярная случайная мера μ_1 называется регулярной модификацией случайной меры μ, если $\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu_1(A) = \mu(A)$ п. н.*

Когда регулярная модификация для случайной меры μ существует, мы можем рассматривать $\int_A f(x,\omega)\,\mu(dx,\omega)$ в смысле определения 3.2, считая, что в интеграле берется произвольная регулярная модификация μ.

Разумеется, не все случайные меры имеют регулярную модификацию. Например, это уже рассмотренная нами

$$w(A) = \int_0^1 I_A(x)\,dw, \quad A \subset [0,\ 1].$$

Покажем, что случайные меры из одного важного класса все имеют регулярную модификацию.

Аналогично з. м. з. ω, случайную меру μ мы называем неотрицательной, если $\forall A \in \mathcal{B}$ $\mu(A) \geq 0$ п. н.

Теорема 3.6. *Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — борелевская. Тогда любая неотрицательная случайная мера μ на $(X,\mathcal{B})$ имеет регулярную модификацию.*

Доказательство. Обоснование этого факта можно провести, практически дословно повторяя доказательство существования регулярного условного распределения случайных элементов, данное в [24].

Для $X = \mathbf{R}$ повторяем доказательство теоремы 4 [24, глава 2, §7], взяв $\mu((-\infty,r],\omega)$ вместо $F_r(\omega)$. Также вместо множества вероятности 1

$$\left\{\omega:\ \lim_{n\to\infty} F_n(\omega) \neq 1\right\}$$

мы рассматриваем аналогичное

$$\left\{\omega: \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,n],\omega) \neq \mu((-\infty,\infty),\omega)\right\}.$$

Для произвольных X, $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям теоремы, используем тот факт, что существует взаимно однозначное отображение X в замкнутое подмножество $\mathbf{R}$ (следствие в [7, § 36, п. 3]), измеримое в обе стороны (точнее, гомеоморфизм класса (0, 1) в терминах [7]). □

Таким образом, для произвольных неотрицательных случайных мер могут быть применены предыдущие результаты этого параграфа в том смысле, что проверяются условия для регулярных модификаций этих мер. Правда, условия теоремы 3.4 можно рассматривать, не переходя к регулярным модификациям.

В конце мы рассмотрим утверждение, связанное с классом целочисленных случайных мер.

Теорема 3.7. *Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — борелевская $\sigma-$алгебра, на которой заданы з. м. з. ω ζ и случайная мера μ, каждое значение которой п. н. является неотрицательным целым числом. Для того, чтобы существовала производная Радона — Никодима ζ по μ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall A \in \mathcal{B}_0 \quad \mathbf{P}\left\{\{\mu(A,\omega)=0\} \setminus \{\zeta(A,\omega)=0\}\right\} = 0. \tag{3.16}$$

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения существования производной Радона — Никодима.

Достаточность следует из теоремы 3.4. Указанная $\mathcal{B}$ является счетно-порожденной. Согласно теореме 3.6, μ может рассматриваться как неотрицательная з. м. з. ω. Если в (3.7) положить $\delta = 1$ для всех ε, то из (3.16) и целочисленности μ следует выполнение этого равенства. □

3.3 Интеграл от случайной функции по действительной мере

Соглашения

Всюду в этом параграфе:

$\|\eta\|_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\,\dfrac{|\eta|}{1+|\eta|}$.

$\xi(x) = \xi(x,\omega)$ — функция $\xi : X \times \Omega \to \mathbf{R}$, для каждого фиксированного x $\mathcal{F}-$измеримая как функция на Ω (будем говорить — случайная функция или с. ф.).

m — неотрицательная конечная мера на $\mathcal{B}$.

$\omega-\int_A \xi(x)\,dm$ — интеграл, который определяется как интеграл Лебега от действительных функций $\xi(\cdot,\omega)$ при каждом фиксированном ω (возможно, кроме множества ω вероятности нуль).

3.3.1 Определение интеграла через интегралы от простых случайных функций

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые подходы к определению интеграла

$$\int_A \xi(x)\,dm$$

и его свойства.

Пусть для каждого фиксированного ω (возможно, кроме множества ω вероятности нуль) наша $\xi(x,\omega)$ интегрируема по Лебегу по мере m как действительная функция на X. Тогда мы можем определять наш интеграл при каждом отдельном ω, и так получаемое значение обозначим через

$$\omega - \int_A \xi(x)\,dm.$$

Также можно определять наш интеграл через простые случайные функции. Простыми мы будем называть с. ф. вида

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k(\omega) I_{A_k}(x), \quad \xi_k : \Omega \to \mathbf{R},\ A_k \in \mathcal{B}.$$

Для них стандартным образом положим

$$\int_A \xi(x)\,dm = \sum_{k=1}^{r} \xi_k\, m(A_k \cap A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Определение 3.7. *С. ф. $\xi(x)$ называется интегрируемой по m, если существует такая последовательность простых с. ф. $\xi^{(n)}(x)$, $n \geq 1$, что:*

(i) $\xi(x) = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}(x)$ *для $m-$почти всех x;*

(ii) *набор случайных величин*

$$\left\{\max_{x\in X} |\xi^{(n)}(x)|,\ n \geq 1\right\}$$

ограничен по вероятности.

При этом для $A \in \mathcal{B}$ положим

$$\int_A \xi(x)\,dm = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_A \xi^{(n)}(x)\,dm.$$

Обоснование корректности определения интеграла мы проведем с использованием вспомогательной леммы.

Лемма 3.2. *Для произвольных $l \geq 0$ и $c \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство*

$$\|c\xi\|_{\mathbf{E}} \leq (l+1)|c|\|\xi\|_{\mathbf{E}} + \mathbf{P}\left\{|\xi| > l\right\}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|c\xi\|_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\left(|c|\frac{|\xi|}{1+|\xi|}\frac{1+|\xi|}{1+|c\xi|} I_{|\xi|\leq l}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{|c\xi|}{1+|c\xi|} I_{|\xi|>l}\right) \leq |c|\|\xi\|_{\mathbf{E}}(l+1) + \mathbf{P}\left\{|\xi| > l\right\}$$

(здесь учтено, что $(1+|\xi|)/(1+|c\xi|) \leq l+1$ для $|\xi| \leq l$). □

Возьмем простые с. ф. $\xi^{(n)}(x)$ и $\xi^{(j)}(x)$ из определения 3.7. Будем считать, что они принимают постоянные случайные значения $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_k^{(j)}$ на одних и тех же множествах A_k. Используя лемму 3.2 и то, что $\|\xi+\eta\|_{\mathbf{E}} \leq \|\xi\|_{\mathbf{E}} + \|\eta\|_{\mathbf{E}}$, получаем

$$\begin{aligned}
\left\|\int_A \xi^{(n)}(x)\,dm - \int_A \xi^{(j)}(x)\,dm\right\|_{\mathbf{E}} &= \left\|\sum_k \left(\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\right) m(A_k\cap A)\right\|_{\mathbf{E}} \\
&\leq \left\|\sum_k \left(\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\right) m(A_k\cap A) I_{\left\{\max_k\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(j)}\right|\leq l\right\}}\right\|_{\mathbf{E}} \\
&+ \mathbf{P}\left\{\max_k \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\right| > l\right\} \leq (l+1)\sum_k \left\|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\right\|_{\mathbf{E}} m(A_k\cap A) \\
&+ \mathbf{P}\left\{\max_k \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(j)}\right| > l\right\} \leq (l+1)\int_A \left\|\xi^{(n)}(x) - \xi^{(j)}(x)\right\|_{\mathbf{E}} dm \\
&+ \mathbf{P}\left\{\max_k \left|\xi_k^{(n)}\right| > \frac{l}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_k \left|\xi_k^{(j)}\right| > \frac{l}{2}\right\}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

По условию (ii) определения, выбором l мы можем сделать как угодно малыми второе и третье слагаемые в последнем выражении. Из условия (i) следует, что

$$\left\|\xi^{(n)}(x) - \xi^{(j)}(x)\right\|_{\mathbf{E}} \to 0 \quad m - \text{п. в.}, \quad n,\ j \to \infty,$$

и выбором $n,\ j$ при заданном l мы можем сделать малым первое слагаемое. Сходимость по нашей квазинорме $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ — это сходимость по вероятности. Из полноты пространства L_0 получаем, что

$$\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_A \xi^{(n)}(x)\,dm$$

существует. Стандартным способом смешивания двух последовательностей можно показать, что значение предела не зависит от конкретного вида $\xi^{(n)}(x)$. Следовательно, определение 3.7 является корректным.

Отметим, что из наших соображений следует неравенство для простых с. ф. $\eta(x)$:

$$\forall l\geq 0\quad \left\|\int_A \eta(x)\,dm\right\|_{\mathbf{E}} \leq (l+1)\int_A \|\eta(x)\|_{\mathbf{E}}\,dm + \mathbf{P}\left\{\max_{x\in A}\left|\xi_k^{(j)}\right| > l\right\}. \tag{3.18}$$

Для его обоснования достаточно положить в (3.17) $\xi^{(j)}(x)=0$ и сравнить первое и предпоследнее выражения (3.17). В максимуме в (3.18) мы можем ограничиваться $x\in A$, поскольку в (3.17) в максимумах мы можем брать лишь $k:\ A_k\cap A\neq\emptyset$.

Следующее утверждение будет важным далее при определении измеримости интегрируемых с. ф.

Лемма 3.3. *Пусть $\xi^{(n)}(x),\ n\geq 1,$ — последовательность $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$измеримых с. ф. и*

$$\xi(x) = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(x)\quad m-\text{п. в.}$$

Тогда существует $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$измеримая с. ф. $\xi_{(m)}(x)$ такая, что для $m-$почти всех x

$$\mathbf{P}\left\{\xi(x)=\xi_{(m)}(x)\right\}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность действительных функций на X

$$f_n(x) = \sup\left\{\alpha : \mathbf{P}\left\{\left|\xi^{(n)}(x)-\xi(x)\right|\geq\alpha\right\}\geq\alpha\right\}$$
$$\overset{(\mathrm{mod}\ m)}{=} \lim_{k\to\infty}\sup\left\{\alpha : \mathbf{P}\left\{\left|\xi^{(n)}(x)-\xi^{(k)}(x)\right|\geq\alpha\right\}\geq\alpha\right\}.$$

Из представленной записи f_n следует их $\mathcal{B}-$измеримость. Для обоснования этого достаточно применить теорему Фубини для меры $\mathbf{P}$ и индикаторов множеств

$$\left\{(x,\omega) : \left|\xi^{(n)}(x,\omega)-\xi^{(k)}(x,\omega)\right|\geq\alpha\right\}.$$

Также будем иметь, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\quad m-\text{п. в.}$$

По теореме Егорова, исключением множества как угодно малой меры m последняя сходимость может быть сделана равномерной:

$$\forall i,j\quad \exists n_{i,j},\quad A_j\ \left(m(A_j)<2^{-j}\right):\quad f_{n_{i,j}}(x)<2^{-i}\quad \text{для } x\notin A_j.$$

Для всех $x,\ \omega$ положим

$$\xi_{(m)}(x,\omega) = \lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}\xi^{(n_{i,j})}(x,\omega),$$

если этот повторный предел существует, и

$$\xi_{(m)}(x,\omega)=0$$

в противном случае. Из леммы Бореля — Кантелли следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\xi(x)=\xi_{(m)}(x)\right\}=1\quad m-\text{п. в.}\ .$$

Измеримость $\xi_{(m)}(x)$ является очевидной. $\square$

Следующая теорема определяет условия интегрируемости с. ф. в смысле нашего определения.

Теорема 3.8. *С. ф. $\xi(x)$ является интегрируемой в смысле определения 3.7 тогда и только тогда, когда существуют $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$измеримая с. ф. $\xi_{(m)}(x)$ и сепарабельная с. ф. $\xi_{(s)}(x)$ такие, что для $m-$почти всех x*

$$\mathbf{P}\left\{\xi(x)=\xi_{(m)}(x)=\xi_{(s)}(x)\right\}=1,$$

а также

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x)\right|<\infty\right\}=1.$$

При этом для каждого $A\in\mathcal{B}$

$$\int_A \xi(x)\,dm=\omega-\int_A \xi(x)\,dm \quad \text{п. н.}$$

Доказательство. Пусть $\xi(x)$ интегрируема в смысле определения 3.7. Заменим на $m-$нулевом множестве нашу $\xi(x)$ и $\xi^{(n)}(x)$ из определения 3.7, положив

$$\xi(x)=\xi^{(n)}(x)=0$$

для всех x, где

$$\xi(x)\neq \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(x).$$

Возьмем $\xi_{(s)}(x)$ — сепарабельную модификацию измененной $\xi(x)$ (она существует по теореме 2 § 2 гл. 3 [3]), и пусть $\{x_i,\ i\geq 1\}$ — множество сепарабельности $\xi_{(s)}(x)$. Если

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x)\right|=\infty\right\}=\delta>0,$$

то

$$\forall l \quad \exists k \quad \mathbf{P}\left\{\max_{1\leq i\leq k}\left|\xi_{(s)}(x_i)\right|>l\right\}>\frac{\delta}{2}.$$

Однако, после проведенного изменения мы имеем:

$$\forall x\in X \quad \xi_{(s)}(x)=\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(x) \quad \Longrightarrow \quad \max_{1\leq i\leq k}\left|\xi_{(s)}(x_i)\right|=\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq i\leq k}\left|\xi^{(n)}(x_i)\right|,$$

и в последнем равенстве правая часть ограничена по вероятности. Мы получили противоречие.

Поскольку $\xi^{(n)}(x)$ в определении 3.7 измеримы, искомая с. ф. $\xi_{(m)}(x)$ существует по лемме 3.3. Кроме того, множество

$$A=\left\{(x,\omega):\left|\xi_{(m)}(x,\omega)\right|>\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x,\omega)\right|\right\}\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}.$$

При этом, поскольку

$$A\subset\left\{(x,\omega):\xi_{(m)}(x,\omega)\neq\xi_{(s)}(x,\omega)\right\}$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{(m)}(x,\omega)=\xi_{(s)}(x,\omega)\right\}=1 \quad m-\text{п. в.},$$

мы получаем для произведения мер соотношение $(m\times\mathbf{P})(A)=0$. Значит,

$$\mathbf{P}\left\{\omega: m\left\{x:\left|\xi_{(m)}(x,\omega)\right|>\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x,\omega)\right|\right\}>0\right\}=0. \tag{3.19}$$

Такая ограниченность $\xi_{(m)}$ позволяет нам определять $\omega - \int_A \xi(x)\,dm$, $A \in \mathcal{B}$, для $\mathbf{P}$ −почти всех ω (другими ω пренебрегаем).

Дальше совпадение интегралов мы докажем в отдельности для случая чисто атомической меры m и для m без атомов (при необходимости, m можно разложить в сумму таких частей).

Если m — чисто атомическая мера с атомами $A_k \in \mathcal{B}$, то с точностью до m−нулевого подмножества X

$$\xi_{(m)}(x) = \sum_k \xi_k(\omega) I_{A_k}(x)$$

(для обоснования существования такого представления мы можем для каждого фиксированного ω рассматривать действительную измеримую функцию $\xi_{(m)}(\cdot, \omega)$, являющуюся постоянной на атомах за исключением m−нулевого множества). Простые с. ф.

$$\xi^{(n)}(x) = \sum_{k \le n} \xi_k(\omega) I_{A_k}(x), \quad n \ge 1, \tag{3.20}$$

таковы, что для всех $A \in \mathcal{B}$

$$\int_A \xi^{(n)}(x)\,dm = \omega - \int_A \xi^{(n)}(x)\,dm,$$

и здесь интегралы в левой и правой частях стремятся соответственно к $\int_A \xi_{(m)}(x)\,dm$ и $\omega - \int_A \xi_{(m)}(x)\,dm$. Поскольку

$$\int_A \xi_{(m)}(x)\,dm = \int_A \xi(x)\,dm \quad \text{п. н.},$$

мы получаем нужное совпадение интегралов в данном случае.

Если m не имеет атомов, то мы рассмотрим последовательность

$$\{A_k^n, 1 \le k \le k_n\}, \quad n \ge 1,$$

разбиений множества X, где каждое n−тое разбиение является измельчением $(n-1)$−го и

$$0 < m(A_k^n) < 2^{-n}.$$

Возьмем простые с. ф.

$$\xi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \omega - \int_{A_k^n} \xi_{(m)}(x)\,dm\ \frac{I_{A_k^n}(x)}{m(A_k^n)}, \quad n \ge 1. \tag{3.21}$$

По теореме Лебега — Витали (см., например, теорему 1 п. 3 § 10 и ее следствие на стр. 212 [23]) будем иметь, что

$$\forall\ \omega \quad \xi^{(n)}(x, \omega) \to \xi_{(m)}(x, \omega) \quad m - \text{п. в.}$$

С учетом теоремы Фубини, отсюда мы имеем:

$$\mathbf{P}\left\{\xi(x) = \xi_{(m)}(x, \omega) = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}(x)\right\} = 1 \quad m - \text{п. в.}$$

Из (3.19) мы получаем, что

$$\max_{x \in X} \left|\xi^{(n)}(x)\right| \le \sup_{x \in X} \left|\xi_{(s)}(x)\right| \quad \text{п. н.},$$

поэтому выполняется условие (ii) определения 3.7. Значит,

$$\int_A \xi(x)\,dm = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_A \xi^{(n)}(x)\,dm.$$

Но для всех n
$$\int_A \xi^{(n)}(x)\,dm = \omega - \int_A \xi_{(m)}(x)\,dm.$$
Поэтому совпадение интегралов имеет место и в этом случае.

Для доказательства обратного утверждения теоремы достаточно заметить, что при существовании указанных $\xi_{(m)}(x)$ и $\xi_{(s)}(x)$ равенства (3.20) (для атомической составляющей m) и (3.21) (для неатомической части m) в сумме дают последовательность простых функций, которая обеспечит интегрируемость $\xi(x)$ по определению 3.7. □

Таким образом, определение 3.7 и определение интеграла при фиксированных ω для п. н. ограниченных $\xi(x)$ являются фактически эквивалентными. Однако, подход, данный в определении 3.7, в некоторых случаях может оказаться более удобным. Примером может быть предельная теорема, доказанная в следующем пункте.

3.3.2 Свойства интеграла от случайной функции по действительной мере

Докажем предельную теорему, которую можно считать аналогом теоремы Лебега для интегралов от с. ф.

Теорема 3.9. *Пусть $\xi_n(x)$, $n \geq 1$, — интегрируемые по мере m с. ф., для которых существуют такие сепарабельные с. ф. $\xi_{n(s)}(x)$, $n \geq 1$, что*
$$\mathbf{P}\left\{\xi_n(x) = \xi_{n(s)}(x)\right\} = 1 \quad m - \text{п. в.},$$
и набор случайных величин
$$\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{n(s)}(x)\right|, n \geq 1\right\}$$
ограничен по вероятности.

Если $\xi(x)$ — такая с. ф., что
$$\|\xi_n(x) - \xi(x)\|_{\mathbf{E}} \xrightarrow{m} 0, \quad n \to \infty,$$
то $\xi(x)$ интегрируема по m и для всех $A \in \mathcal{B}$
$$\int_A \xi(x)\,dm = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_A \xi_n(x)\,dm.$$

Доказательство. Мы можем выделить такую подпоследовательность n_i, что
$$\|\xi_{n_i}(x) - \xi(x)\|_{\mathbf{E}} \to 0 \quad m - \text{п. в.}, \quad i \to \infty.$$
Тогда
$$\xi(x) = \mathrm{p}\lim_{i\to\infty}\xi_{n_i}(x) \quad m - \text{п. в.},$$
по теореме 3.8 каждая $\xi_{n_i}(x)$ на множестве полной меры m имеет измеримую модификацию, и по лемме 3.3 такую измеримую модификацию имеет $\xi(x)$. Далее, положим
$$\xi(x) = \xi_{n_i(s)}(x) = 0$$
для всех x, для которых
$$\xi(x) \neq \mathrm{p}\lim_{i\to\infty}\xi_{n_i(s)}(x),$$
и возьмем $\xi_{(s)}(x)$ — сепарабельную модификацию такой измененной $\xi(x)$. Равенство
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x)\right| < \infty\right\} = 1$$

доказывается так же, как и в теореме 3.8 с использованием ограниченности $\xi_{n(s)}(x)$. Значит, $\xi(x)$ интегрируема.

Далее, для $\xi_n(x)$ и $\xi(x)$ возьмем простые $\xi_n^{(i)}(x)$ и $\xi^{(i)}(x)$, $i \geq 1$, построенные по равенству (3.20) (для атомической составляющей m) и (3.21) (для неатомической части m), представив для этого m в виде суммы таких частей. Тогда, очевидно, для всех $l \in \mathbf{R}$, $i \geq 1$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{x\in X}\left|\xi_n^{(i)}(x)\right| > l\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{n(s)}(x)\right| > l\right\},$$

и аналогичное неравенство имеет место для $\xi^{(i)}(x)$ и $\xi_{(s)}(x)$. Подставив $\left(\xi_n^{(i)}(x) - \xi^{(i)}(x)\right)$ в (3.18), после перехода к пределу при $i \to \infty$ получим для всех $A \in \mathcal{B}$, $l \geq 0$:

$$\left\|\int_A (\xi_n(x) - \xi(x))\, dm\right\|_{\mathbf{E}} \leq (l{+}1)\int_A \|(\xi_n(x) - \xi(x))\|_{\mathbf{E}}\, dm{+}\sup_i \mathbf{P}\left\{\max_{x\in A}\left|\xi_n^{(i)}(x) - \xi^{(i)}(x)\right| > l\right\}$$
$$\leq (l+1)\int_A \|(\xi_n(x) - \xi(x))\|_{\mathbf{E}}\, dm + \mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{n(s)}(x)\right| > \frac{l}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{x\in X}\left|\xi_{(s)}(x)\right| > \frac{l}{2}\right\}.$$

В последнем выражении выбором l мы можем сделать как угодно малыми второе и третье слагаемые равномерно по n. При фиксированном l выбором n можно сделать малым первое слагаемое. Отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Далее, пусть задана мера m и мы рассмотрим случайные функции множеств

$$\mu(A, \omega):\ \mathcal{B} \times \Omega \to \mathbf{R},$$

$\mathcal{F}-$измеримые для каждого фиксированного A. Мы получим критерий того, что заданная μ может быть представлена как интеграл от некоторой с. ф. по данной m. Из предыдущих результатов следует, что при этом достаточно рассмотреть лишь измеримые с. ф. В следующей формулировке мы будем использовать понятие регулярной модификации (см. определение 3.6).

Теорема 3.10. *Пусть $\sigma-$алгебра $\mathcal{B}$ счетно-порождена. Для случайной функции множеств μ существует с. ф. $\xi(x)$, $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$измеримая и при любом фиксированном ω интегрируемая по m, такая, что*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(A) = \omega - \int_A \xi(x)\, dm \quad \text{п. н.}, \tag{3.22}$$

тогда и только тогда, когда выполняются три следующих условия:

(i) *μ является случайной мерой;*

(ii) *μ имеет регулярную модификацию;*

(iii) *любая регулярная модификация μ для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ (кроме множества вероятности нуль) является знакопеременной мерой, абсолютно непрерывной относительно m.*

Доказательство. Пусть три указанных условия выполняются. Возьмем произвольную регулярную модификацию μ, и для каждого ω из множества абсолютной непрерывности возьмем ее производную Радона — Никодима относительно m. По теореме 3.5, ее можно выбрать измеримой. Это и будет нужная нам $\xi(x)$.

Пусть имеет место интегральное представление (3.22). Тогда условие (i) следует из того, что значения записанного в (3.22) интеграла для измеримой $\xi(x)$ являются случайными величинами. Этот интеграл также является регулярной модификацией, необходимой для условия (ii). Выполнение условия (iii) следует из теоремы 3.3. $\square$

Глава 4

Интегрирование случайных функциональных рядов

Соглашения

Всюду в этой главе:

$\mu,\ \mu_n,\ \eta,\ \eta_n$ — случайные меры, определенные на $(X, \mathcal{B})$.

$\xi,\ \xi_k,\ \xi_{kn},\ \zeta,\ \zeta_j$ — случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

4.1 Определение и свойства интеграла от общего случайного функционального ряда

4.1.1 Определение интеграла

В данном и следующем параграфах мы будем рассматривать случайные функции (или с. ф.) f вида

$$f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x), \tag{4.1}$$

где всюду ξ_k — случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $f_k : X \to \mathbf{R}$ — измеримые функции с $|f_k(x)| \leq 1$. Ряд (4.1) для каждого x, кроме $\mu-$пренебрежимого подмножества X, должен сходиться по вероятности безусловно.

Определение 4.1. *Для с. ф. f вида* (4.1), $A \in \mathcal{B}$ *положим*

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu, \tag{4.2}$$

если этот ряд сходится по вероятности безусловно для всех $A \in \mathcal{B}$. В этом случае будем называть f интегрируемой по μ.

Очевидно, что этот интеграл является линейным по f и по μ. Записанные в (4.2) $\int_A f_k \, d\mu$ всегда существуют для ограниченных измеримых f_k.

Лемма 4.1. *Пусть с. ф. f вида* (4.1) *интегрируема по μ. Тогда функция множеств*

$$\eta(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{B},$$

является случайной мерой.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что каждое слагаемое в правой части (4.2) является случайной мерой. Потом мы используем аналог теоремы Никодима 8.6 [28]. □

Замечание 4.1. *В данном и следующем параграфах все рассуждения проводятся для фиксированного представления f в виде* (4.1). *Можно считать f обозначением для данного ряда* (4.1). *При другом представлении той же самой f в виде суммы ряда, вообще говоря, мы можем получать другие значения интеграла. Однозначность определения величины интеграла имеет место в классе представлений* (4.1), *удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям (см. ниже теорему 4.3).*

Важным для нас в дальнейших рассуждениях будет следующее достаточное условие интегрируемости.

Теорема 4.1. *Пусть ξ_k таковы, что для любой последовательности $A_k \in \mathcal{B},\ k \geq 1$, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k) \tag{4.3}$$

сходится по вероятности безусловно. Тогда для любых $f_k,\ |f_k| \leq 1,\ A \in \mathcal{B}$ ряд (4.2) *сходится по вероятности безусловно.*

Доказательство. Из определения 1.1 интеграла от действительной функции следует, что каждый $\int f_k\,d\mu$ можно представить как предел интегралов от простых функций, модуль которых не превосходит 1. Поэтому, рассмотрев конечные суммы, мы имеем:

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k d\mu \right\| \leq \sup_{|c_{ik}|\leq 1, A_{ik}\cap A_{jk}=\emptyset} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{l_k} c_{ik}\mu(A_{ik}) \right\|$$
$$= \sup_{|c_{ik}|\leq 1, A_{ik}\cap A_{jk}=\emptyset} \left\| \sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu(A_{ik}) \right\| \leq 8 \sup_{a_{ik}=\pm 1, A_{ik}\cap A_{jk}=\emptyset} \left\| \sum_{i,k} a_{ik}\xi_k\mu(A_{ik}) \right\|.$$

Здесь мы просто переставили слагаемые по i, k, а потом использовали неравенство из леммы 4. 3в) [1] для линейной комбинации случайных величин $\xi_k\mu(A_{ik})$. Для каждого k отделим слагаемые с $a_{ik} = 1$ и отделим с $a_{ik} = -1$, и так получим сумму по k слагаемых вида $\xi_k(\mu(B_k) - \mu(C_k))$ для некоторых множеств B_k, C_k. Поэтому

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k d\mu \right\| \leq 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k\mu(A_k) \right\|. \tag{4.4}$$

Если бы ряд в (4.2) не сходился, то нашлись бы A_k, для которых не сходится ряд (4.3). □

Следствие 4.1. *Для с. ф. f вида* (4.1), *удовлетворяющей условию сходимости* (4.3), *и для любого $A \in \mathcal{B}$ будет:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k\, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\mu(A_k) \right\|. \tag{4.5}$$

Доказательство. Данное утверждение получаем из (4.4) для $m = 1$ предельным переходом по n. □

Следствие 4.2. *Пусть в* (4.3) *существуют все математические ожидания $\mathbf{E}\,\xi_k^2$ и*

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall A \in \mathcal{B}: \quad \mathbf{E}\,\mu^2(A) \leq c. \tag{4.6}$$

Тогда для безусловной сходимости по вероятности ряда (4.3) *достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{E}\,\xi_k^2}.$$

Доказательство. Из определения нашей квазинормы следует, что для любой ξ $\quad \mathbf{E}\,|\xi| \geq \|\xi\|^2$. Далее, учитывая, что

$$\mathbf{E}\,|\xi_k \mu(A_k)| \leq \sqrt{\mathbf{E}\,\xi_k^2\,\mathbf{E}\,\mu^2(A_k)},$$

имеем:

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu(A_k)\right\| \leq \sqrt{\mathbf{E}\left|\sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu(A_k)\right|} \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \mathbf{E}\,|\xi_k \mu(A_k)|} \leq \left(\sum_{k=m}^{n} \sqrt{c\,\mathbf{E}\,\xi_k^2}\right)^{1/2}. \tag{4.7}$$

Если бы ряд (4.3) не сходился, мы получили бы противоречие. □

Замечание 4.2. *Если найдется $A \in \mathcal{B}$ с $\mu(A) \neq 0$ п. н., то из сходимости ряда* (4.3) *следует безусловная сходимость по вероятности ряда* (4.1) *для каждого x.*

Ведь подставляя в (4.3) указанную A вместо некоторых A_k и $\emptyset$ вместо других, мы получим сходимость по вероятности любого ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{k_i}.$$

Из предложения 4.2 [1, глава 5] следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится по вероятности безусловно. По теореме 4.2 [1, глава 5], мы будем иметь указанную сходимость (4.1).

Множество случайных величин $\{\mu(A), A \in \mathcal{B}\}$ ограничено по вероятности (по теореме работы [29]). Поэтому для любой μ существует последовательность ненулевых ξ_k такая, что ряд (4.3) обязательно сходится.

4.1.2 Однозначность определения величины интеграла

Наш способ доказательства утверждения о единственности значения интеграла похож на подход В. Мацкявичюса [8] при доказательстве аналогичного факта для интеграла по винеровскому процессу от с. ф., представленной случайным рядом. Сначала мы получим утверждение для конечных сумм.

Теорема 4.2. *Пусть даны случайные величины ξ_k, ζ_j и интегрируемые по μ функции f_k, $g_j : X \to \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq l$, $1 \leq j \leq n$, такие, что для всех $x \in X$*

$$\sum_{k=1}^{l} \xi_k(\omega) f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(\omega) g_j(x) \quad \text{п. н.} \tag{4.8}$$

Тогда для каждого $A \in \mathcal{B}$

$$\sum_{k=1}^{l} \xi_k \int_A f_k\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \int_A g_j\, d\mu \quad \text{п. н.} \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть

$$\{h_r(x),\ 1 \leq r \leq s\}$$

является базисом линейной оболочки множества функций

$$\{f_k(x), \quad g_j(x), \quad 1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq j \leq n\},$$

выбранным из этого множества произвольным образом. Запишем каждую f_k и g_j в виде конечной линейной комбинации h_r. Тогда равенство (4.8) будет эквивалентно равенству вида

$$\sum_{r=1}^{s} \theta_r(\omega) h_r(x) = 0 \quad \text{п. н.}, \tag{4.10}$$

а равенство (4.9) — условию

$$\sum_{r=1}^{s} \theta_r \int_A h_r \, d\mu = 0 \quad \text{п. н.}, \tag{4.11}$$

где θ_r — некоторые случайные величины, причем одни и те же в обоих последних равенствах (это будут линейные комбинации данных в условии ξ_k, ζ_j).

Из линейной независимости h_r следует, что для каждого фиксированного ω, для которого левая часть (4.10) равна нулю, все $\theta_r(\omega) = 0$. Значит, и левая часть (4.11) будет равна нулю для этого фиксированного ω. Таким образом, из выполнения (4.10) следует справедливость (4.11). $\square$

Однозначность определения величины интеграла мы получим для с. ф. и их представлений (4.1), удовлетворяющих условиям теоремы 4.1.

Теорема 4.3. *Пусть для случайных величин ξ_k, ζ_j и измеримых функций f_k, $g_j : X \to \mathbf{R}$, $|f_k(x)| \le 1$, $|g_j(x)| \le 1$, $k \ge 1$, $j \ge 1$, для каждого $x \in X$ выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j(\omega) g_j(x) \quad \text{п. н.}$$

(ряды для каждого $x \in X$ сходятся по вероятности безусловно). Пусть также для любой последовательности $A_k \in \mathcal{B}$, $k \ge 1$, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \mu(A_k)$$

сходятся по вероятности безусловно. Тогда для каждого $A \in \mathcal{B}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int\limits_A f_k \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \int\limits_A g_j \, d\mu \quad \text{п. н.} \tag{4.12}$$

Доказательство. Сходимость записанных в (4.12) рядов вытекает из теоремы 4.1.

Обозначим через V множество всех с. ф., для которых существует представление вида (4.1) такое, что для любой последовательности $A_k \in \mathcal{B}$, $k \ge 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k)$$

сходится по вероятности безусловно. Обозначим через V_0 множество всех с. ф. вида (4.1), для которых разложение (4.1) состоит из конечного количества слагаемых. Очевидно, $V_0 \subset V$.

Для $f \in V$ рассмотрим квазинорму

$$\|f\|_V = \inf \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k) \right\|,$$

где инфимум берется по всем представлениям f, удовлетворяющим указанному условию теоремы 4.1. Множество V с метрикой $\rho(f,g)=\|f-g\|_V$ является метрическим пространством. V_0 плотно в V в данной метрике, для $f\in V$ приближающими элементами $f^{(n)}\in V_0$ могут быть последовательные частичные суммы ряда (4.1), когда это представление удовлетворяет условию теоремы 4.1. (Если тут $\rho(f^{(n)},f)\not\to 0$, то для ξ_k из (4.1) легко подобрать $A_k\in\mathcal{B}$, для которых ряд (4.3) расходится.)

Наш интеграл является линейным оператором, однозначно определенным на всех элементах V_0, со значениями в полном метрическом пространстве L_0 (теорема 4.2). Из неравенства (4.5) следует, что он непрерывен на V_0. Его можно продолжить по непрерывности на V, при этом для любых $f^{(n)}\to f$, $f^{(n)}\in V_0$, значение предела интегралов от $f^{(n)}$ будет одним и тем же. □

4.2 Предельные теоремы

4.2.1 Предельные теоремы для интегралов при сходимости случайных функций

Неравенство (4.5) позволяет получать предельные теоремы для наших интегралов. Следующий факт можно назвать теоремой о доминируемой сходимости случайных функций при фиксированных ξ_k в представлении (4.1).

Теорема 4.4. *Пусть дана последовательность функций*

$$h_n\in B(X),\ n\ge 1,$$

такая, что

$$\sup_{x\in X}|h_n(x)|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Пусть f — с. ф. вида (4.1), *для которой разложение* (4.1) *удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда fh_n могут быть представлены в виде* (4.1), *удовлетворяющем условиям теоремы* (4.1), *и для каждого $A\in\mathcal{B}$*

$$\int_A fh_n\,d\mu\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad n\to\infty. \tag{4.13}$$

Доказательство. Обозначим

$$c_n=\sup_{x\in X}|h_n(x)|.$$

Для fh_n мы будем брать следующие представления вида (4.1):

$$f(x,\omega)h_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(c_n\xi_k(\omega)\big)\left(f_k(x)\frac{h_n(x)}{c_n}\right).$$

Из неравенства (4.5) следует, что

$$\left\|\int_A fh_n\,d\mu\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_n\xi_k\int_A f_k(x)h_n(x)\,d\mu\right\|\le 16\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|c_n\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\mu(A_k)\right\|. \tag{4.14}$$

Покажем, что последнее выражение будет стремиться к 0 при $n\to\infty$. Если это не так, то для некоторого $\varepsilon>0$ мы можем найти как угодно большое n и некоторые $k_n,\ l_n,\ A_k$ такие, что

$$\left\|c_n\sum_{k=k_n}^{l_n}\xi_k\mu(A_k)\right\|>\varepsilon. \tag{4.15}$$

Множество значений случайной меры ограничено по вероятности [29, теорема], откуда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{B}} \|c_n\mu(A)\| = 0.$$

Значит, для любого фиксированного l

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| c_n \sum_{k=1}^{l} \xi_k \mu(A_k) \right\| = 0.$$

Тогда мы можем определить суммы в (4.15) так, чтобы множества индексов k не пересекались при разных n. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \mu(A_k)$$

для взятых таким образом A_k будет расходиться (мы берем $A_k = \emptyset$, если для этого k множество не определялось). Это противоречит условиям, наложенным на f.

Поэтому последнее выражение в (4.14) стремится к нулю, будет такая же сходимость у первого выражения (4.14), отсюда получаем утверджение теоремы. $\square$

В следующем утверждении случайные коэффициенты представления (4.1) будут различными при разных n.

Теорема 4.5. *Пусть даны с. ф. вида* (4.1)

$$f^{(n)}(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{kn}(x).$$

Пусть для каждого n для любых $A_k \in \mathcal{B}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu(A_k)$$

сходится по вероятности безусловно.

Чтобы для данных ξ_{kn} для любых $|f_{kn}(x)| \le 1$ было

$$\int_A f^{(n)} d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n\to\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu(A_k) \right\| \to 0, \quad n\to\infty. \tag{4.16}$$

Доказательство. Из определения нашего интеграла и неравенства (4.5) мы получаем, что для всех A, n

$$\left\| \int_A f^{(n)}\, d\mu \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \int_A f_{kn}\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu(A_k) \right\|.$$

Из условия (4.16) следует требуемая сходимость интегралов.

Пусть супремумы в (4.16) не сходятся к нулю. Тогда можно найти $\varepsilon_0 > 0$ и множества A_{kn} такие, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu(A_{kn}) \right\| > \varepsilon_0. \tag{4.17}$$

Для каждого n можно зафиксировать набор множеств A_{kn}, с которыми суммы рядов из (4.16) не сходятся к нулю при $n \to \infty$. Теперь положим $f_{kn}(x)$ равными индикаторам этих множеств A_{kn}, тогда $\int_X f^{(n)} d\mu$ равны суммам в левых частях (4.17) и не сходятся к нулю. $\square$

Замечание 4.3. *Пусть в обозначениях теоремы 4.5 существуют все математические ожидания $\mathbf{E}\,\xi_{kn}^2$, и*

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall A \in \mathcal{B}: \quad \mathbf{E}\,\mu^2(A) \le c.$$

Тогда для выполнения условия (4.16) *достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{E}\,\xi_{kn}^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Данный факт следует из неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu(A_k) \right\| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{c\,\mathbf{E}\,\xi_k^2} \right)^{1/2}, \tag{4.18}$$

которое получается из (4.7) для $m = 1$ предельным переходом к бесконечным суммам.

Аналогично можно получать достаточные условия через вторые моменты и в следующих предельных теоремах.

4.2.2 Предельные теоремы для сходимости случайных мер и множеств интегрирования

Теорема 4.6. *Пусть f — с. ф. вида* (4.1), *для которой ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_n(A_k)$$

сходятся по вероятности безусловно для каждого n и любых A_k. Тогда если

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_n - \mu)(A_k) \right\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

то

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f d\mu, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Учитывая (4.5), мы имеем:

$$\left\| \int_A f\, d\mu_n - \int_A f\, d\mu \right\| = \left\| \int_A f\, d(\mu_n - \mu) \right\| \le 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_n - \mu)(A_k) \right\|,$$

и из (4.19) следует наше утверждение. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть даны с. ф. вида* (4.1)

$$f_{(n)}(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kn}(\omega)f_{k0}(x),\quad f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\omega)f_{k0}(x),$$

Пусть ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kn}\mu_n(A_k),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu_n(A_k),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu(A_k)$$

сходятся по вероятности безусловно для каждого n и любых A_k. Пусть выполняются условия

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_{kn}-\xi_k)\mu_n(A_k)\right\|\to 0,\quad n\to\infty, \tag{4.20}$$

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\mu_n-\mu)(A_k)\right\|\to 0,\quad n\to\infty. \tag{4.21}$$

Тогда

$$\forall A\in\mathcal{B}\quad \int_A f_{(n)}\,d\mu_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\int_A f\,d\mu,\quad n\to\infty.$$

Доказательство.

$$\int_A f_{(n)}\,d\mu_n-\int_A f\,d\mu=\int_A(f_{(n)}-f)\,d\mu_n+\int_A f\,d(\mu_n-\mu).$$

По неравенству (4.5),

$$\left\|\int_A(f_{(n)}-f)\,d\mu_n\right\|\le 16\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_{kn}-\xi_k)\mu_n(A_k)\right\|\to 0,$$

$$\left\|\int_A f\,d(\mu_n-\mu)\right\|\le 16\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\mu_n-\mu)(A_k)\right\|$$

(в оценке первого интеграла существенно, что с. ф. $f_{(n)}$ и f записываются через одни и те же f_{k0}). Остается использовать условия (4.20), (4.21). □

Теперь мы получим достаточное условие дифференцируемости нашего интеграла.

Теорема 4.8. *Пусть множества $A_n\in\mathcal{B}$, $n\ge 1$, случайная мера μ и с. ф. f вида* (4.1) *удовлетворяют условиям:*

(i) $\mu(A_n)\neq 0$ *п. н.*

(ii) *Множество случайных величин*

$$\left\{\frac{\mu(B)}{\mu(A_n)},\quad B\subset A_n,\quad n\ge 1\right\}$$

ограничено по вероятности.

(iii) *Для любой последовательности A_{n_k}, $k\ge 1$ (составленной из множеств A_n, и, возможно, некоторые множества в ней повторяются), любых $B_k\subset A_{n_k}$, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\mu(B_k)}{\mu(A_{n_k})}$$

сходится по вероятности безусловно.

(iv) *Для некоторых чисел* $c_k,\ k \geq 1$,

$$\forall k \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f_k(x) - c_k| = 0, \quad n \to \infty,$$

и при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$$

сходится по вероятности безусловно.

Тогда

$$\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из условия (iii) и теоремы 4.1 следует, что f интегрируема по μ на любом A_n. Рассмотрим для некоторого j

$$\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f_k\, d\mu + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f_k d\mu. \tag{4.22}$$

По неравенству (4.5) (для интегралов по случайной мере $\mu(\cdot)/\mu(A_n)$), квазинорма второго слагаемого не превышает

$$16 \sup_{B_k \subset A_n} \left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu(B_k)}{\mu(A_n)} \right\|.$$

Эти значения сходятся к нулю при $j \to \infty$ равномерно по n. (Иначе можно было бы выделять для как угодно больших j и различных n конечные суммы, которые не сходятся к нулю по вероятности, составить из них расходящийся ряд и получить противоречие с условием (iii).)

Первое слагаемое для фиксированного j при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $\sum_{k=1}^{j} \xi_k c_k$. Это следует из того, что для каждого k

$$\left\| \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f_k\, d\mu - c_k \right\| = \left\| \int_{A_n} (f_k - c_k)\, d\left(\frac{\mu}{\mu(A_n)} \right) \right\| \leq 16 \sup_{B\subset A_n} \left\| \varepsilon_{kn} \frac{\mu(B)}{\mu(A_n)}) \right\|. \tag{4.23}$$

(Здесь мы обозначили

$$\varepsilon_{kn} = \sup_{x\in A_n} |f_k(x) - c_k|,$$

и использовали неравенство (1.4) для интегралов от действительных функций.)

По условию (ii),

$$\forall k \quad \varepsilon_{kn} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из (iv) следует, что последнее выражение в (4.23) сходится к нулю при $k \to \infty$.

Из указанной сходимости двух слагаемых (4.22) и из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k,$$

получаем утверждение теоремы. □

Пусть даны две с. ф. вида (4.1)

$$f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\omega)f_k(x),\quad g(x,\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j(\omega)g_j(x). \tag{4.24}$$

Пусть для всех x, кроме $\mu-$пренебрежимого множества, сходится безусловно по вероятности ряд

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\xi_k(\omega)\zeta_j(\omega)f_k(x)g_j(x). \tag{4.25}$$

Тогда произведение fg тоже является с. ф. нашего вида, она может быть задана как сумма ряда (4.25), как раз такое представление для произведения двух заданных с. ф. мы в дальнейшие будем брать.

Теорема 4.9. *Пусть даны с. ф.* f *и* g *вида* (4.24), *удовлетворяющие условию сходимости* (4.25). *Пусть для любых* $A_j, A_{kj}\in\mathcal{B}$ *ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_j\mu(A_j), \tag{4.26}$$

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\xi_k\zeta_j\mu(A_{kj}) \tag{4.27}$$

сходятся безусловно по вероятности. Тогда для каждого $A\in\mathcal{B}$

$$\int_A f\,d\left(\int g\,d\mu\right)=\int_A fg\,d\mu,$$

записанные здесь интегралы определены.

Доказательство. Существование записанного интеграла от g следует из сходимости ряда (4.26) и теоремы 4.1, интеграла от fg — из сходимости (4.27) и той же теоремы. Обозначим

$$f_{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_k,\quad g_{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j g_j,$$

$$\mu_g^{(n)}(A)=\int_A g_{(n)}\,d\mu,\quad \mu_g(A)=\int_A g\,d\mu.$$

Тогда

$$\int f_{(n)}\,d\mu_g^{(n)}=\sum_{k,j=1}^{n}\xi_k\zeta_j\int_A f_k g_j\,d\mu\xrightarrow{\mathbf{P}}\sum_{k,j=1}^{\infty}\xi_k\zeta_j\int_A f_k g_j\,d\mu=\int_A fg\,d\mu,\quad n\to\infty.$$

Теперь достаточно показать, что

$$\int_A f_{(n)}\,d\mu_g^{(n)}\xrightarrow{\mathbf{P}}\int_A f\,d\mu_g,\quad n\to\infty. \tag{4.28}$$

Для этого будем использовать теорему 4.7. С помощью неравенства (4.5) мы получаем:

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=n}^{m}\xi_k\mu_g^{(n)}(A_k)\right\|=\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{n\le k\le m,1\le j\le n}\xi_k\zeta_j\int_X g_j I_{A_k}d\mu\right\|$$

$$\le 16\sup_{A_{kj}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{n\le k\le m,1\le j\le n}\xi_k\zeta_j\mu(A_{kj})\right\|.$$

Из сходимости (4.27) следует, что выбором достаточно больших n мы можем сделать последнее выражение как угодно малым равномерно по всем $m \geq n$ (иначе можно было бы составить расходящийся ряд вида (4.27)). Также отсюда следует сходимость для любых A_k ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k),$$

и

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Значит, у нас выполняется условие (4.20). Условие (4.21) в нашей ситуации эквивалентно сходимости к нулю при $n \to \infty$ значений

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{j=n}^{\infty} \zeta_j \int_{A_k} g_j \, d\mu \right\| = \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k \geq 1, j \geq n} \xi_k \zeta_j \int_{A_k} g_j \, d\mu \right\| \leq 16 \sup_{A_{kj} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k \geq 1, j \geq n} \xi_k \zeta_j \mu(A_{kj}) \right\|$$

(мы снова использовали (4.5)). Если последнее выражение не стремится к нулю, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ для каждого n можно найти $s \geq n$ и $A_{kj} \in \mathcal{B}$ такие, что

$$\left\| \sum_{k \geq 1, n \leq j \leq s} \xi_k \zeta_j \mu(A_{kj}) \right\| > \varepsilon_0.$$

Тогда из указанных слагаемых можно составить сходящийся ряд (4.21). Значит, сходимость к нулю имеется, все условия теоремы 4.7 выполняются, (4.28) верно. □

4.3 Решение интегральных уравнений относительно неизвестной случайной меры

4.3.1 Существование и единственность решения интегрального уравнения

Далее мы рассмотрим решение уравнения

$$\mu(A) = \eta(A) + \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{B}, \tag{4.29}$$

где μ — неизвестная случайная мера, η — известная случайная мера, f — известная с. ф., заданная в виде (4.1). Для каждого $A \in \mathcal{B}$ равенство (4.29) должно выполняться п. н.

Теорема 4.10. *Пусть для каждого n для всех x, кроме $\eta-$пренебрежимого множества сходится безусловно по вероятности ряд*

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 1} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n} f_{k_1}(x) \ldots f_{k_n}(x). \tag{4.30}$$

Пусть для любых множеств $A_{i_1 \ldots i_n} \in \mathcal{B}$ сходится безусловно по вероятности ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \geq 1, i_1, \ldots, i_n \geq 1} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \eta(A_{k i_1 \ldots i_n}) \tag{4.31}$$

(в сумме для каждого n перебираются все различные упорядоченные наборы натуральных чисел $i_1, \ldots, i_n$, где в каждом наборе i_k не обязательно все различные). Тогда с. ф. f^n равна сумме ряда (4.30)*, интегрируема в таком представлении и для него случайная мера*

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f^n \, d\eta \tag{4.32}$$

определена и является решением уравнения (4.29).

Доказательство. Равенство

$$f^n(x,\omega) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n} f_{k_1}(x) \ldots f_{k_n}(x) \tag{4.33}$$

следует из правил нахождения произведения рядов и условия сходимости (4.30). Из сходимости (4.31) следует, что для каждого n сходится безусловно по вероятности ряд

$$\sum_{k\geq 1, i_1,\ldots,i_n \geq 1} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \eta(A_{ki_1\ldots i_n})$$

(для обоснования сходимости части ряда можно использовать предложение 4.2 [1, глава 5]). Поэтому в правой части (4.32) каждое слагаемое определено.

Также из (4.5) имеем, что

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} \int_A f^n \, d\eta \right\| \leq 16 \sup_{A_{i_1\ldots i_n}} \left\| \sum_{n=p}^{q} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \eta(A_{i_1\ldots i_n}) \right\|.$$

Отсюда видим, что если бы ряд (4.32) для какого-то A не сходился, то можно было бы построить расходящийся ряд (4.31). Значит, ряд (4.32) сходится по вероятности, по аналогу теоремы Никодима 8.6 [28] его сумма является случайной мерой.

Теперь покажем, что (4.32) является решением нашего уравнения. Из теоремы 4.9 и условия (4.31) следует, что

$$\int_A f d \left(\int f^n \, d\eta \right) = \int_A f^{n+1} \, d\eta$$

(из указанного условия мы используем сходимость двух частей ряда (4.31), в которых число взятых i_j равно данным n и $n+1$). Поэтому

$$\int_A f \, d \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) = \sum_{n=1}^{q+1} \int_A f^n \, d\eta.$$

При $q \to \infty$ последнее выражение сходится к $\mu(A) - \eta(A)$. Покажем, что левая часть при этом сходится к $\int_A f \, d\mu$. Используем теорему 4.6. Условие (4.19) в нашей ситуации приводит к рассмотрению

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{j \geq n} \int_{A_k} f^j \, d\eta \right\| \leq 16 \sup_{A_{ki_1\ldots i_j}} \left\| \sum_{j\geq n, k, i_1,\ldots,i_j} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_j} \eta\left(A_{ki_1\ldots i_j}\right) \right\|.$$

Сходимость записанных рядов следует из (4.31). Если бы последний супремум не сходился к нулю при $n \to \infty$, то мы могли бы построить расходящийся ряд (4.31). Значит, выполняется условие (4.19), что доказывает нашу теорему. □

Теорема 4.11. *Пусть выполняются условия теоремы 4.10. Тогда нет решений уравнения* (4.29), *отличных от* (4.32), *среди всех случайных мер* μ, *удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\forall n,\ A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\left(\int f \, d\mu\right) = \int_A f^{n+1} \, d\mu, \tag{4.34}$$
$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$\mu(A) = \eta(A) + \int_A f \, d\mu = \eta(A) + \int_A f \, d\left(\eta + \int f \, d\mu\right)$$
$$= \eta(A) + \int_A f \, d\eta + \int_A f^2 \, d\mu = \ldots = \sum_{k=0}^{n} \int_A f^k \, d\eta + \int_A f^{n+1} \, d\mu.$$

Здесь при $n \to \infty$ сумма сходится к (4.32) (по условиям теоремы 4.10), последнее слагаемое сходится к нулю, откуда и следует утверждение нашей теоремы. □

Из теоремы 4.9 легко увидеть, что для выполнения условия (4.34) достаточно, чтобы для всех $n,\ A_{ki_1\ldots i_n} \in \mathcal{B}$ безусловно по вероятности сходился ряд

$$\sum_{k \geq 1, i_1, \ldots, i_n \geq 1} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \mu(A_{ki_1\ldots i_n}).$$

Также можно находить решения уравнения

$$f = g + h \int_X f \, d\mu \tag{4.35}$$

относительно неизвестной с. ф. f вида (4.1). Здесь $g,\ h$ — известные с. ф. вида (4.1), μ — известная случайная мера. Для каждого x, кроме μ−пренебрежимого множества, равенство (4.35) должно выполнятся п. н.

Если h и g интегрируемы по μ,

$$\mathbf{P}\left\{\int_X h \, d\mu = 1\right\} = 0,$$

то

$$f = g + h \frac{\int_X g \, d\mu}{1 - \int_X h \, d\mu}$$

будет решением (4.35). В этом легко убедиться непосредственной подстановкой. Функция f будет иметь вид (4.1) и интегрируема по μ как линейная комбинация двух таких функций.

4.3.2 Непрерывность по параметру решения интегрального уравнения

Теперь изучим непрерывность по параметру решений (4.32) уравнения (4.29). Рассмотрим набор уравнений со случайными функциями

$$\mu_n(A) = \eta_n(A) + \int_A f_{(n)} \, d\mu_n, \quad n \geq 1, \quad \mu(A) = \eta(A) + \int_A f \, d\mu,$$
$$f_{(n)}(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{k0}(x), \quad f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_{k0}(x). \tag{4.36}$$

Теорема 4.12. *Пусть в* (4.36) *существуют все*

$$\mathbf{E}\,\eta_n^2(A), \quad \mathbf{E}\,\eta^2(A), \quad \mathbf{E}(\xi_{i_1 n}\dots\xi_{i_k n})^2, \quad \mathbf{E}(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2.$$

Пусть для всех $f_{(n)}$ и η_n, для f и η выполняются условия теоремы 4.10. Пусть также

(i) $\sup_{A,n}\{\mathbf{E}\,\eta_n^2(A), \mathbf{E}\,\eta^2(A)\} < \infty$.

(ii) $\sup_{A\in\mathcal{B}} \mathbf{E}((\eta_n-\eta)(A))^2 \to 0, \quad n\to\infty$.

(iii) $\sum_{k\ge 1, i_1,\dots,i_k\ge 1} \sqrt{\mathbf{E}(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2} < \infty$.

(iv) $\sum_{k\ge 1, i_1,\dots,i_k\ge 1} \sqrt{\mathbf{E}(\xi_{i_1 n}\dots\xi_{i_k n} - \xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2} \to 0, \quad n\to\infty$.

Тогда $\forall A\in\mathcal{B}$ при $n\to\infty$

$$\mu_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_A f_{(n)}^k\,d\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_A f^k\,d\eta.$$

Доказательство. Учитывая неравенство (4.5), имеем:

$$\begin{aligned}\|\mu_n(A)-\mu(A)\| &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\,d\eta_n\right\| + \left\|\int_A f^k\,d(\eta_n-\eta)\right\|\right)\\ &\le 16\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{A_{i_1\dots i_k}}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k}(\xi_{i_1 n}\dots\xi_{i_k n} - \xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})\eta_n(A_{i_1\dots i_k})\right\| + \sup_{A\in\mathcal{B}}\|(\eta_n-\eta)(A)\|\\ &\qquad + 16\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{A_{i_1\dots i_k}}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}(\eta_n-\eta)(A_{i_1\dots i_k})\right\|.\end{aligned}$$

Далее оцениваем записанные квазинормы рядов через математические ожидания с помощью неравенства (4.18), учитываем условие (i). Теперь получаем, что для доказательство нам достаточно показать сходимость к нулю выражения

$$\sum_{k\ge 1, i_1,\dots,i_k\ge 1}\left(\sqrt{\mathbf{E}(\xi_{i_1 n}\dots\xi_{i_k n} - \xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2}\sup_{A_{i_1\dots i_k}}\sqrt{\mathbf{E}\,\eta_n^2(A_{i_1\dots i_k})}\right.$$
$$\left. + \sqrt{\mathbf{E}(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2}\sup_{A_{i_1\dots i_k}}\sqrt{\mathbf{E}((\eta_n-\eta)(A_{i_1\dots i_k}))^2}\right).$$

Из условий (i) — (iv) следует требуемая сходимость. □

4.3.3 Решение интегральных уравнений с конечными случайными функциональными суммами

В данном параграфе мы будем рассматривать случайные функции f вида

$$f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{l}\xi_k(\omega) f_k(x), \tag{4.37}$$

где всюду ξ_k — случайные величины на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, $f_k:\ X\to\mathbf{R}$ — измеримые функции. Мы не требуем от f_k ограниченности, как это было в предыдущих параграфах этой главы. Поэтому представление (4.37) не является, строго говоря, частным случаем рассмотренного ранее представления (4.1) случайных функций как сумм бесконечных рядов. Не могут быть автоматически использованы и результаты, полученные ранее в данной главе.

Определение 4.2. *Пусть в* (4.37) *все* $f_k(x)$ *интегрируемы по* μ. *Тогда* f *будем называть интегрируемой по* μ, *и для* $A \in \mathcal{B}$ *положим*

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{l} \xi_k \int_A f_k \, d\mu. \tag{4.38}$$

Очевидно, что этот интеграл линеен по f и по μ. Как функция от A, он является случайной мерой. Ведь из леммы 1.1 следует, что каждое слагаемое в правой части (4.38) является случайной мерой.

Однозначность определения интеграла для функции, представленной в виде (4.37), следует из теоремы 4.2.

Отметим, что если $f(x,\omega)$ имеет вид (4.37), то аналогичный вид имеет и $f^n(x,\omega)$ (то есть, может быть представлена как конечная линейная комбинация действительных измеримых функций со случайными коэффициентами).

Далее мы будем рассматривать решение уравнения

$$\mu(A) = \eta(A) + \int_A f \, d\mu, \tag{4.39}$$

где f — известная с. ф. вида (4.37), η — известная случайная мера, μ — неизвестная случайная мера. Равенство (4.39) должно выполняться п. н. для каждого $A \in \mathcal{B}$, с. ф. f должна быть интегрируемой относительно искомой μ.

Теорема 4.13. *Пусть в* (4.39) f^j *для всех* $j \geq 1$ *интегрируемы по* η, *и для всех* $A \in \mathcal{B}$ *и* f_k, $1 \leq k \leq l$, *из* (4.37) *ряд*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_A f_k f^j \, d\eta \tag{4.40}$$

сходится по вероятности безусловно. Тогда

$$\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_A f^j \, d\eta \tag{4.41}$$

определена и является случайной мерой, удовлетворяющей (4.39).

Доказательство. Отметим, что существование каждого интеграла в (4.40) следует из интегрируемости f^{j+1} и определения нашего интеграла. Из сходимости рядов вида (4.40) следует сходимость ряда (4.41).

Обозначим

$$\mu_n(A) = \sum_{j=0}^{n} \int_A f^j \, d\eta.$$

По лемме 1.1, каждая μ_n является случайной мерой, и из обобщения теоремы Никодима 8.6 [28] следует, что μ из (4.41) также является случайной мерой. Из теоремы 1.20 имеем, что

$$\int_A f \, d\left(\int f^j \, d\eta\right) = \int_A f^{j+1} \, d\eta$$

(мы можем записать f, f^j и f^{j+1} как линейные комбинации вида (4.37), для полученных там действительных функций использовать утверждение теоремы 1.20, откуда и будем иметь записанное равенство). Поэтому

$$\int_A f \, d\mu_n = \mu_{n+1}(A) - \eta(A). \tag{4.42}$$

Теперь, используя теорему 1.14, докажем, что для $A \in \mathcal{B}$, $1 \le k \le l$

$$\int_A f_k\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f_k\, d\mu, \quad n \to \infty,$$

откуда будет следовать, что

$$\int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_A f\, d\mu.$$

Проверим условия этой теоремы.

Сходимость $\mu_n(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu(A)$ следует из отмеченной выше сходимости ряда (4.41), условие (i) выполняется.

Для проверки условия (ii) покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_{k_n}(A) \tag{4.43}$$

сходится для любой последовательности k_n и $A \in \mathcal{B}$. Тогда теорема 1.12 обеспечит нам выполнение требуемого условия. Сходимость ряда (4.43) достаточно проверить для возрастающих $k_n \ge 2,\ k_n \to \infty$ (см. доказательство теоремы 1.12 и замечание после нее).

Множество значений случайной меры на $\sigma-$алгебре ограничено по вероятности [29, теорема]. Поэтому можно выбрать возрастающую последовательность

$$\{r_n,\ n \ge 1\} \subset \mathbf{N}, \quad r_n \to \infty, \quad r_n < k_n,$$

такую, что для любых $A \in \mathcal{B}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_{r_n}(A) \tag{4.44}$$

сходится. Например, мы можем брать r_n равным самому большому $j < k_n$, такому, что

$$\sup_{A, 1 \le i \le j} \mathbf{P}\{2^{1-n}|\mu_i(A)| > 2^{-j}\} \le 2^{1-j}. \tag{4.45}$$

Тогда ряд (4.44) переписывается как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu_j(A) \sum_{n:\ r_n = j} 2^{-n} \right),$$

и его сходимость следует из (4.45) и леммы Бореля — Кантелли.

Теперь сходимость (4.43) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{j=r_n+1}^{k_n} \int_A f^j\, d\eta.$$

Поскольку $r_n \to \infty$, здесь каждое слагаемое $\int_A f^j\, d\eta$ встречается конечное число раз, и нам достаточно доказать безусловную сходимость перестановки этого ряда

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n:\ r_n < j \le k_n} 2^{-n} \int_A f^j\, d\eta. \tag{4.46}$$

Согласно предложению 4.2 [1, глава 5], для этого достаточно проверить сходимость произвольного ряда, являющегося подрядом (4.46). Такой подряд можно будет записать в виде

$$\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j \int_A f^j\, d\eta,$$

где числа $|\alpha_j| \le 1$. Теперь сходимость последнего ряда следует из безусловной сходимости (4.41) и теоремы 4. 2 [1, глава 5].

Проверим условие (iii) теоремы 1.14. Рассмотрим случайные меры

$$\nu_{kn}(A) = \int_A f_k \, d\mu_n = \sum_{j=0}^{n} \int_A f_k f^j \, d\eta.$$

По условию нашей теоремы, они сходятся при $n \to \infty$, и из обобщения теоремы Никодима 8.6 [28] следует, что $\nu_{kn}, \ n \ge 0$, равномерно $\sigma-$аддитивны. Мы можем считать f_k конечными всюду кроме $\eta-$пренебрежимого множества, поэтому для каждого $k, \ 1 \le k \le l$,

$$\sup_{n,A} \left\| \int_{A \cap \{|f_k| > c\}} f_k \, d\mu_n \right\| \to 0, \quad c \to \infty,$$

и условие (iii) выполняется. Переходя в (4.42) к пределу, будем иметь, что μ удовлетворяет равенству (4.39). □

Единственность решения (4.39) мы можем гарантировать лишь с определенными ограничениями.

Теорема 4.14. *Пусть выполняются условия теоремы 4.13. Тогда* (4.41) *дает единственное решение среди всех случайных мер* μ, *удовлетворяющих следующему условию:*

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Доказательство. Используя теорему 1.20, из (4.39) имеем, что

$$\begin{aligned}\mu(A) = \eta(A) + \int_A f \, d\mu = \eta(A) + \int_A f \, d\left(\eta + \int f \, d\mu\right) \\ = \eta(A) + \int_A f \, d\eta + \int_A f^2 \, d\mu = \cdots = \sum_{j=0}^{n} \int_A f^j \, d\eta + \int_A f^{n+1} \, d\mu.\end{aligned}$$

Здесь при $n \to \infty$ сумма стремится к (4.41) (по теореме 4.13), последнее слагаемое стремится к нулю по условию нашей теоремы, откуда и следует однозначность определения μ. □

Глава 5

Интегралы от случайных функций по случайным аддитивным функциям множеств

Соглашения

Всюду в этой главе:

$X = (0,\ 1]$.

$\mathcal{B}$ — борелевская σ−алгебра на $(0,\ 1]$.

$\mathcal{B}_0$ — набор конечных объединений полуинтервалов $\left(\dfrac{k-1}{2^n},\ \dfrac{k}{2^n}\right]$, $\quad n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^n$.

$f,\ f(x,\omega),\ f_j,\ f_j(x,\omega)$ — случайные функции (или с. ф.) $f,\ f_j:\ (0,\ 1] \times \Omega \to \mathbf{R}$, измеримые по совокупности переменных.

m — мера Лебега на $(0,\ 1]$.

$\mu,\ \mu_j,\ \eta,\ \eta_j$ — случайные аддитивные функции множеств на $\mathcal{B}_0$.

$$\Delta_{k,n} = \left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right], \quad n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

$$f_n^0(x,\omega) = \sum_{k=2}^{2^n} 2^n \int_{\Delta_{k-1,n}} f(x,\omega)\, dx\ I_{\Delta_{k,n}}(x).$$

$$S_n(f) = \sum_{k=2}^{2^n} 2^n \int_{\Delta_{k-1,n}} f(x,\omega) dx\ \mu(\Delta_{k,n}).$$

$$S_n'(f) = \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{\Delta_{k,n}} f(x,\omega)\, dx\ \mu(\Delta_{k,n}).$$

5.1 Определение интеграла по случайным аддитивным функциям множеств

5.1.1 Определение интеграла и условия интегрируемости

Определение 5.1. *Случайной аддитивной функцией множеств μ называется набор случайных величин $\{\mu(A),\ A \in \mathcal{B}_0\}$ такой, что для любых $A,\ B \in \mathcal{B}_0$ с $A \cap B = \emptyset$ будет $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ п. н.*

Всюду далее μ в данной главе будет обозначать случайную аддитивную функцию множеств. Также введем обозначение

$$\Delta_{k,n} = \left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right].$$

Определение 5.2. *Пусть случайная функция (или с. ф.) $f:\ (0,\ 1]\times\Omega\to\mathbf{R}$ измерима по совокупности переменных, и для фиксированных ω из множества вероятности 1 $f(x,\omega)$ интегрируема по переменной x и мере m на (0, 1]. Положим*

$$\int_0^1 f(x,\omega)\,d\mu=\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{2^n}2^n\int_{\Delta_{k-1,n}}f(x,\omega)\,dx\ \mu(\Delta_{k,n}),\tag{5.1}$$

если этот предел по вероятности существует. Тогда случайную функцию f называем интегрируемой по μ.

Для $A\in\mathcal{B}_0$ естественным образом положим

$$\int_A f(x,\omega)\,d\mu=\int_0^1 f(x,\omega)I_A(x)\,d\mu.$$

(Если этот интеграл существует. Тогда f называем интегрируемой на A.)

Очевидно, что так определенный интеграл является случайной аддитивной функцией множеств по A (если f интегрируема на всех $A\in\mathcal{B}_0$) и будет линейным по f.

Далее мы изучим условия существования нашего интеграла, получим для него предельные теоремы, рассмотрим интегральное уравнение.

Для наших f будем использовать обозначения:

$$f_n^0(x,\omega)=\sum_{k=2}^{2^n}2^n\int_{\Delta_{k-1,n}}f(x,\omega)\,dx\ I_{\Delta_{k,n}}(x),$$
$$S_n(f)=\sum_{k=2}^{2^n}2^n\int_{\Delta_{k-1,n}}f(x,\omega)\,dx\ \mu(\Delta_{k,n}).$$

Всюду дальше в главе сходимость случайных величин рассматривается по вероятности, если не указывается другое.

Также для $A\in\mathcal{B}_0$ будем использовать обозначение

$$\mu^*(A)=\sum_{k,n:\ \Delta_{k,n}\subset A}2^{-n}|\mu(\Delta_{k,n})|.$$

(Здесь в сумме перебираются все $\Delta_{k,n}\in\mathcal{B}_0,\ \Delta_{k,n}\subset A$, в том числе и пересекающиеся. Возможно, что эта сумма есть $+\infty$ с положительной вероятностью.)

Теорема 5.1. *Пусть μ такова, что*

$$\mu^*((0,\ 1])<\infty\ \text{п. н.},\tag{5.2}$$

а также для любых $q\ge 0,\ 1\le p\le 2^q$

$$\mu(((p-1)2^{-q},\ (p-1)2^{-q}+2^{-n}]\cap(0,\ 1])\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad \mu((p2^{-q}-2^{-n},\ p2^{-q}])\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad n\to\infty.\tag{5.3}$$

Пусть измеримая $f:\ (0,\ 1]\times\Omega\to\mathbf{R}$ удовлетворяет условию:

$$\exists L(\omega)<\infty\ \text{п. н.}\quad \forall x,\ y\in\ (0,\ 1],\quad |f(x,\omega)-f(y,\omega)|\le L(\omega)|x-y|\ \text{п. н.}\tag{5.4}$$

Тогда для любого $A\in\mathcal{B}_0$ f интегрируема по μ на A, и при этом

$$\left|\int_A f\,d\mu\right|\le\sum_{\Delta_{k,n}\subset A}2^n\left|\int_{\Delta_{k,n}}f\,dx\right||\mu(\Delta_{k,n})|+\frac{1}{2}L(\omega)\sum_{\Delta_{k,n}\subset A}\mu^*(\Delta_{k,n})\ \text{п. н.}\tag{5.5}$$

(неравенство имеет место для произвольного представления A в виде конечного объединения непересекающихся множеств $A=\cup_{k,n}\Delta_{k,n}$, эти $\Delta_{k,n}$ и принимают участие в суммах).

Доказательство. Из (5.4) и теоремы Фубини следует, в частности, что для некоторой зависящей от ω константы $C(\omega) < \infty$ п. н.

$$|f(x,\omega)| < C(\omega) \text{ п. н.}, \quad x \in (0,1]. \tag{5.6}$$

Поэтому $f(x,\omega)$ п. н. интегрируема по x и m на $(0,1]$.

Обозначим

$$S'_n(f) = \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{\Delta_{k,n}} f(x,\omega)\,dx\ \mu(\Delta_{k,n}).$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что A имеет представление $A = \Delta_{p,q}$ для некоторых p, q. Тогда для $n \geq q$

$$S'_n(fI_A) - S_n(fI_A) = 2^n \int\limits_{\Delta_{j,n}} f\,dx\ \mu(\Delta_{j,n})$$

$$+ \sum_{k:\Delta_{k-1,n},\Delta_{k,n}\subset A} 2^n \left(\int\limits_{\Delta_{k,n}} f\,dx - \int\limits_{\Delta_{k-1,n}} f\,dx \right) \mu(\Delta_{k,n}) - 2^n \int\limits_{\Delta_{l,n}} f\,dx\ \mu(\Delta_{l,n}). \tag{5.7}$$

(Тут j таково, что $\Delta_{j-1,n} \not\subset A, \quad \Delta_{j,n} \subset A$ или $j = 1$. Тут l таково, что $\Delta_{l-1,n} \subset A, \quad \Delta_{l,n} \not\subset A$, при $\{1\} \in A$ третье слагаемое отутствует.)

Из (5.6) и (5.3) получим, что первое и третье слагаемые в правой части (5.7) стремятся к нулю. Во втором слагаемом, учитывая (5.4), имеем:

$$\left| \int_{\Delta_{k,n}} f\,dx - \int_{\Delta_{k-1,n}} f\,dx \right| = \left| \int_{\Delta_{k,n}} (f(x,\omega) - f(x-2^{-n},\omega))\,dx \right| \leq \int_{\Delta_{k,n}} L(\omega) 2^{-n}\,dx = L(\omega) 4^{-n}.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{k:\ \Delta_{k-1,n},\Delta_{k,n}\subset A} 2^n \left(\int_{\Delta_{k,n}} f\,dx - \int_{\Delta_{k-1,n}} f\,dx \right) \mu(\Delta_{k,n}) \right| \leq L(\omega) \sum_{k:\ \Delta_{k-1,n},\Delta_{k,n}\subset A} 2^{-n} |\mu(\Delta_{k,n})|.$$

Последние выражения сходятся к нулю п. н. как части сходящегося ряда (5.2). Значит,

$$(S'_n(fI_A) - S_n(fI_A)) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Также для $n \geq q+1$

$$S'_n(fI_A) - S'_{n-1}(fI_A)$$

$$= 2^{n-1} \sum_{i:\ \Delta_{2i-1,n},\Delta_{2i,n}\subset A} \left(\int_{\Delta_{2i-1,n}} f\,dx - \int_{\Delta_{2i,n}} f\,dx \right) (\mu(\Delta_{2i-1,n}) - \mu(\Delta_{2i,n}))\,.$$

Используя оценки

$$|f(x,\omega) - f(x+2^{-n},\omega)| \leq L(\omega) 2^{-n},$$
$$|\mu(\Delta_{2i-1,n}) - \mu(\Delta_{2i,n})| \leq |\mu(\Delta_{2i-1,n})| + |\mu(\Delta_{2i,n})|,$$

получим, что

$$\left| S'_n(fI_A) - S'_{n-1}(fI_A) \right| \leq L(\omega) \sum_{k:\ \Delta_{k,n}\subset A} 2^{-n-1} |\mu(\Delta_{k,n})|. \tag{5.8}$$

Из (5.2) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|S'_n(fI_A) - S'_{n-1}(fI_A)\right| < \infty \text{ п. н.},$$

существует предел $S'_n(fI_A)$, а значит и предел $S_n(fI_A)$.

Также для сумм по fI_A

$$|S_n(fI_A)| \le |S'_q| + \sum_{k=q+1}^{n} |S'_k - S'_{k-1}| + |S_n - S'_n|.$$

Переходя к пределу и учитывая (5.8), получим (5.5). $\square$

Замечание 5.1. *В условиях теоремы 5.1 наш интеграл является пределом п. н. последовательности $S'_n(fI_A)$. Если дополнительно положить*

$$\mu((p2^{-q} - 2^{-n}, p2^{-q}]) \to 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty,$$
$$\mu((0, 2^{-n}]) \to 0 \text{ п. н.},$$

то и $S_n(fI_A)$ будут сходиться п. н. к значению интеграла.

Замечание 5.2. *Условиям (5.2), (5.3) удовлетворяет любая L_2-значная μ, для которой найдется действительная мера m_1 такая, что*

$$\forall k, n \quad \mathbf{E}\,\mu^2(\Delta_{k,n}) \le m_1(\Delta_{k,n}).$$

Действительно, тогда для всех n

$$\mathbf{E}\left(2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{k,n})|\right) = 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{E}\,|\mu(\Delta_{k,n})| \le \sqrt{2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n} \left(\mathbf{E}\,|\mu(\Delta_{k,n})|\right)^2} \le 2^{-n/2}\sqrt{m_1((0,\ 1])}.$$

Сумма последних значений по всем n сходится, поэтому даже математическое ожидание суммы в (5.2) конечно.

5.1.2 Примеры интегрируемых функций

В теореме 5.1 и в наших дальнейших рассуждениях является важным условие Липшица (5.4). Стоит отметить, что существуют с. ф., удовлетворяющие этому условию. Тривиальным примером может служить $f(x, \omega) = \xi(\omega)g(x)$, где ξ — п. н. конечная случайная величина, g — действительная функция на X, удовлетворяющая указанному условию Липшица. Более общим примером может быть с. ф.

$$f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)g_k(x), \tag{5.9}$$

где для случайных величин ξ_k и функций $g_k :\ X \to \mathbf{R}$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k(\omega)| < \infty \text{ п. н.},$$
$$\forall k,\ x,\ y \quad |g_k(x)| \le 1, \quad |g_k(x) - g_k(y)| \le L|x - y|$$

(константа L является общей для всех k). Из этих условий следует, что ряд в (5.9) сходится абсолютно п. н., и потому $f(x,\omega)$ определена. Также

$$|f(x,\omega)-f(y,\omega)| \le L\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k(\omega)|\,|x-y|,$$

и выполняется условие (5.4).

Приведем пример упреждающей с. ф., интегрируемой в нашем смысле по случайной функции множеств, порожденной винеровским процессом.

$$w(A)=\int_0^1 I_A(x)\,dw. \tag{5.10}$$

Возьмем

$$f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k w(2^{-k+1})I_{(2^{-k-1},\ 2^{-k}]}(x),$$

где действительные числа c_k являются произвольными такими, что $c_k\ne 0$, $|c_k|\le 1$. То, что f упреждающая, очевидно. Для данной с. ф.

$$S_n(f)=2^n\int_0^{2^{-n}}\sum_{k=n}^{\infty}c_k w(2^{-k+1})I_{(2^{-k-1},\ 2^{-k}]}(x)\,dx(w(2^{-n+1})-w(2^{-n}))\\ +\sum_{k=1}^{n-1}c_k w(2^{-k+1})(w(2^{-k}+2^{-n})-w(2^{-k-1}+2^{-n})). \tag{5.11}$$

Покажем, что первое слагаемое здесь стремится к нулю при $n\to\infty$, а записанная сумма при этом будет иметь предел. Мы будем обосновывать сходимость в L_1 для наших выражений.

$$\mathbf{E}\left|2^n\int_0^{2^{-n}}\sum_{k=n}^{\infty}c_k w(2^{-k+1})I_{(2^{-k-1},\ 2^{-k}]}(x)\,dx(w(2^{-n+1})-w(2^{-n}))\right|\\ =\mathbf{E}\left|2^n\sum_{k=n}^{\infty}c_k w(2^{-k+1})2^{-k-1}(w(2^{-n+1})-w(2^{-n}))\right|\\ \le\sum_{k=n}^{\infty}2^{n-k-1}|c_k|\,\mathbf{E}\left|w(2^{-k+1})(w(2^{-n+1})-w(2^{-n}))\right|\\ \le\sum_{k=n}^{\infty}2^{n-k-1}|c_k|\sqrt{\mathbf{E}\,w^2(2^{-k+1})}\sqrt{\mathbf{E}(w(2^{-n+1})-w(2^{-n}))^2}\\ =\sum_{k=n}^{\infty}2^{(n-3k-1)/2}|c_k|\le\left(2^{(2n+1)/2}\left(1-2\sqrt{2}\right)\right)^{-1}.$$

Полученная оценка обеспечивает нам сходимость к нулю первого слагаемого (5.11). Также имеем, что

$$\mathbf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k w(2^{-k+1})(w(2^{-k})-w(2^{-k-1}))\right|\\ \le\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\sqrt{\mathbf{E}\,w^2(2^{-k+1})}\sqrt{\mathbf{E}(w(2^{-k})-w(2^{-k-1}))^2}=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|2^{-k}.$$

Поэтому сходится в L_1 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w(2^{-k+1})(w(2^{-k}) - w(2^{-k-1})). \tag{5.12}$$

Рассмотрим математическое ожидание разности частных сумм этого ряда и сумм из (5.11).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big|\sum_{k=1}^{n-1} c_k w(2^{-k+1})\Big(\big(w(2^{-k}+2^{-n}) - w(2^{-k})\big) - \big(w(2^{-k-1}+2^{-n}) - w(2^{-k-1})\big)\Big)\Big| \\
&\le \sum_{k=1}^{n-1} |c_k| \left(\mathbf{E}\, w^2(2^{-k+1})\right)^{1/2} \Big(\mathbf{E}\big(w(2^{-k}+2^{-n}) - w(2^{-k})\big)^2 + \mathbf{E}\big(w(2^{-k-1}+2^{-n}) - w(2^{-k-1})\big)^2\Big)^{1/2} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n-1} |c_k| 2^{(2-k-n)/2} < \Big(2^{(n-1)/2}(1-\sqrt{2})\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Из стремления последнего выражения к нулю следует существование предела для $S_n(f)$, равного сумме ряда (5.12).

5.1.3 Теоремы о совпадении значений интегралов

Теорема 5.2. *Если для $f(x,\omega)$ существует интеграл Ито по винеровскому процессу w на (0, 1] (то есть, f — измеримая и неупреждающая, $\int_0^1 f^2(x,\omega)\,dx < \infty$ п. н.), то f интегрируема в нашем смысле по случайной функции множеств, порожденной w (см.* (5.10)*), и значения интегралов из этих двух определений совпадают.*

Доказательство. В [2] (см. задачу 2 § 12.1) показано, что для наших f и f_n^0

$$\int_0^1 \left|f(x,\omega) - f_n^0(x,\omega)\right|^2 dx \to\ 0 \text{ п. н.}, \quad n \to \infty.$$

По свойствам интеграла Ито,

$$\int_0^1 f(x,\omega)\,dw(x) = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^0(x,\omega)\,dw(x)$$

(см., например, [4, глава 8, § 1, свойство IV]). Теперь из равенства 5.1 и из того, что для f_n^0 анализируемые интегралы совпадают, получаем утверждение теоремы. □

Теорема 5.3. *Пусть μ — случайная аддитивная функция множеств, определенная на $\mathcal{B}$, и для любых $A_n \in \mathcal{B}$ с $m(A_n) \to 0$ выполняется $\mu(A_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Если $f:\ (0, 1] \to \mathbf{R}$ — действительная ограниченная измеримая функция, то f интегрируема по μ, и значение интеграла совпадает с интегралом, определенным в главе 1.*

Доказательство. Формально говоря, данную f мы можем рассматривать и как с. ф., значение которой для фиксированного x является одним и тем же для всех ω. Поэтому для f мы можем рассматривать определение интегрируемости 5.2 и другие факты, данные для с. ф.

Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 5.2, для f и построенным по ней простым функциям f_n^0 будет

$$\int_0^1 |f(x) - f_n^0(x))|^2\,dx \to\ 0, \quad n \to \infty.$$

(см. [2, задача 2 § 12.1]) В частности, будет

$$f_n^0(x) \xrightarrow{m} f(x),$$

и из теоремы 1.8 следует, что для интегралов в смысле главы 1 f интегрируема по μ, и

$$\int_0^1 f_n^0\, d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^1 f\, d\mu.$$

Для $f_n^0(x)$ наш интеграл и интеграл главы 1 совпадают, откуда следуют необходимая сходимость интегральных сумм и равенство интегралов. □

5.2 Свойства интеграла по случайным аддитивным функциям множеств

5.2.1 Предельные теоремы

Теперь мы получим теорему о предельном переходе под знаком нашего интеграла при сходимости подынтегральных функций.

Теорема 5.4. *Пусть для μ выполняются условия* (5.2) *и* (5.3), $A \in \mathcal{B}_0$, *случайные функции* f, f_j, $j \geq 1$, *интегрируемы по μ на A и удовлетворяют условиям:*

$$\exists L(\omega) < \infty \text{ п. н. } \quad \forall j \geq 1,\ x,\ y \in (0,\ 1]$$
$$|(f_j(x,\omega) - f(x,\omega)) - (f_j(y,\omega) - f(y,\omega))| \leq L(\omega)|x - y| \text{ п. н.}, \tag{5.13}$$

$$\mathbf{P}\{\omega:\ f_j(x,\omega) \xrightarrow{m} f(x,\omega),\ j \to \infty\} = 1. \tag{5.14}$$

Тогда

$$\int_A f_j\, d\mu \to \int_A f\, d\mu \text{ п. н.}, \quad j \to \infty.$$

Доказательство. Функция $(f_j - f)$ и μ удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Выберем q достаточно большим, чтобы для него существовало представление

$$A = \cup_{p:\ \Delta_{p,q} \subset A} \Delta_{p,q}.$$

Из (5.5) получим, что

$$\left|\int_A (f_j - f)\, d\mu\right| \leq \sum_{p:\ \Delta_{p,q} \subset A} 2^n \left|\int_{\Delta_{p,q}} (f_j - f)\, dx\right| |\mu(\Delta_{p,q})| + \frac{1}{2} L(\omega) \sum_{p:\ \Delta_{p,q} \subset A} \mu^*(\Delta_{p,q}) \text{ п. н.}$$

При $q \to \infty$ второе слагаемое здесь стремится к нулю п. н., поскольку в суммах для $\mu^*(\Delta_{p,q})$ участвуют лишь $|\mu(\Delta_{k,n})|$ с $n \geq q$. При каждом фиксированном q стремится п. н. к нулю первое слагаемое при $j \to \infty$ (это следует из (5.14), ограниченность п. н. $(f_j - f)$ следует из (5.13)). □

Теперь мы рассмотрим предельный переход под знаком нашего интеграла при сходимости случайных функций множеств.

Теорема 5.5. *Пусть с. ф. f удовлетворяет условиям теоремы 5.1. Пусть μ и μ_j, $j \geq 1$, — случайные аддитивные функции множеств, каждая из которых удовлетворяет условиям, наложенным на такие функции в теореме 5.1, и такие, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}|\mu(\Delta_{k,n})-\mu_j(\Delta_{k,n})|\right)\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad j\to\infty. \tag{5.15}$$

Тогда

$$\forall A\in\mathcal{B}_0\quad \int_A f\,d\mu_j\xrightarrow{\mathbf{P}}\int_A f\,d\mu,\quad j\to\infty.$$

Доказательство. Будем использовать запись

$$\int_A f\,d\mu_j-\int_A f\,d\mu=\int_A f\,d(\mu_j-\mu).$$

Зафиксируем некоторое разбиение A на непересекающиеся множества $A=\cup_{r,s}\Delta_{r,s}$. Из неравенства (5.5), мы получим:

$$\left|\int_A f\,d(\mu_j-\mu)\right|\leq\sum_{\Delta_{r,s}\subset A}2^s\left|\int_{\Delta_{r,s}}f\,dx\right||(\mu_j-\mu)(\Delta_{r,s})|$$
$$+\frac{1}{2}L(\omega)\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\sum_{1\leq k\leq 2^n,\Delta_{k,n}\subset A}|(\mu_j-\mu)(\Delta_{k,n})| \tag{5.16}$$

(в последней сумме берутся все $\Delta_{k,n}\subset A$, в том числе и пересекающиеся).

Из условия (5.15), в частности, следует, что

$$\forall\Delta_{r,s}\quad \mu_j(\Delta_{r,s})\xrightarrow{\mathbf{P}}\mu(\Delta_{r,s}),\quad j\to\infty.$$

Поэтому первая сумма в правой части 5.16 будет стремиться к нулю при $j\to\infty$. Сходимость к нулю второй суммы в этой части непосредственно следует из (5.15). Так мы получаем требуемую сходимость интегралов. $\square$

Следующее утверждение дает условия дифференцируемости нашего интеграла.

Теорема 5.6. *Пусть даны μ и f, удовлетворяющие условиям теоремы 5.1, и последовательность полуинтервалов Δ_{k_i,n_i}, $i\geq 1$. Пусть*

$$\frac{\mu^*(\Delta_{k_i,n_i})}{\mu(\Delta_{k_i,n_i})}\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad i\to\infty, \tag{5.17}$$

и существуют $C_i(\omega)$ такие, что

$$|f(x,\omega)|\leq C_i(\omega)\text{ п. н.},\quad x\in\Delta_{k_i,n_i}, \tag{5.18}$$

и при этом $C_i\to 0$ п. н., $i\to\infty$. Тогда

$$\frac{1}{\mu(\Delta_{k_i,n_i})}\int_{\Delta_{k_i,n_i}}f\,d\mu\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad i\to\infty.$$

Доказательство. По неравенству (5.5) и условиям нашей теоремы,

$$\left|\frac{1}{\mu\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}\int_{\Delta_{k_i,n_i}} f\,d\mu\right| \le C_i(\omega)+\frac{1}{2}L(\omega)\frac{\mu^*\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}{\mu\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}.$$

Из полученной здесь оценки, условия (5.17) и сходимости C_i следует утверждение теоремы. (Через $L(\omega)$ мы обозначили зависящую от ω константу из условия Липшица (5.4) из формулировки теоремы 5.1, ее измеримость здесь не играет роли.) □

Замечание 5.3. *Если C_i в (5.18) являются случайными величинами, то от них достаточно требовать $C_i \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $i\to\infty$, и тогда утверждение теоремы остается справедливым.*

Следующее очевидное следствие дает возможность восстанавливать значения с. ф. по значениям интеграла и случайной функции множеств.

Следствие 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы 5.6,*

$$m\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)\to 0, \quad i\to\infty, \tag{5.19}$$

и дано x_0 такое, что для всех i $x_0\in\Delta_{k_i,n_i}$. Тогда

$$\frac{1}{\mu\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}\int_{\Delta_{k_i,n_i}} f(x,\omega)\,d\mu \xrightarrow{\mathbf{P}} f(x_0,\omega), \quad i\to\infty.$$

Доказательство. Используем утверждение теоремы 5.6 для с. ф. $f(x,\omega)-f(x_0,\omega)$. Поскольку f удовлетворяет условию Липшица (5.4) и имеет место (5.19), для этой разности найдутся требуемые $C_i(\omega)$:

$$|f(x,\omega)-f(x_0,\omega)|\le L(\omega)m\left(\Delta_{k_i,n_i}\right), \quad x\in\Delta_{k_i,n_i}.$$

Теперь из утверждения теоремы получаем факт нашего следствия. □

Замечание 5.4. *Случайная аддитивная функция множеств $\mu=w$, порожденная винеровским процессом на (0,1] (см. (5.10)), удовлетворяет условию (5.17) для любых Δ_{k_i,n_i} с $m\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)\to 0$, $i\to\infty$.*

Действительно, пусть $m\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)=2^{-j}$. Имеем:

$$\frac{w^*\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}{w\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}=\frac{\sum_{n=j}^{\infty}2^{-n}\sum_{1\le k\le 2^n,\Delta_{k,n}\subset\Delta_{k_i,n_i}}|w(\Delta_{k,n})|}{w\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}$$
$$=2^{-j}\frac{\sum_{n=j}^{\infty}2^{j-n}\sum_{1\le k\le 2^n,\Delta_{k,n}\subset\Delta_{k_i,n_i}}|2^{j/2}w(\Delta_{k,n})|}{2^{j/2}w\left(\Delta_{k_i,n_i}\right)}.$$

Совместные распределения значений w от подмножеств (Δ_{k_i,n_i}) подобны соответствующим распределениям подмножеств $(0,\ 1]$ с множителем $2^{j/2}$. Поэтому последнее выражение одинаково распределено с

$$2^{-j}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}\sum_{1\le k\le 2^n}|w(\Delta_{k,n})|}{w((0,\ 1])}=2^{-j}\frac{w^*(X)}{w(X)}.$$

По замечанию 5.2, $w^*(X)<\infty$ п. н. В наших обозначениях при $i\to\infty$ будет $2^{-j}\to 0$. Поэтому для w выполняется условие (5.17).

5.2.2 Теорема об интеграле по случайной функции множеств, являющейся интегралом

Следующий факт будет важным для записи и решения интегральных уравнений.

Теорема 5.7. *Пусть μ и f удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Тогда случайная аддитивная функция множеств*

$$\eta(A) = \int_A f \, d\mu$$

удовлетворяет условиям (5.2) *и* (5.3).

Если с. ф. g удовлетворяет условиям теоремы 5.1, то

$$\forall A \in \mathcal{B}_0 \quad \int_A g \, d\eta = \int_A gf \, d\mu.$$

Доказательство. Из (5.5) и (5.6) имеем, что

$$|\eta(\Delta_{k,n})| \le C(\omega)|\mu(\Delta_{k,n})| + \frac{1}{2} L(\omega)\mu^*(\Delta_{k,n}). \tag{5.20}$$

Домножим эти неравенства на 2^{-n} и сложим их по всем k, n. Заметим, что в сумме $2^{-n}\mu^*(\Delta_{k,n})$ каждое $|\mu(\Delta_{i,j})|$ будет с общим коэффициентом не большим 2^{1-j}, и поэтому $\eta^*((0,\ 1]) < \infty$ п. н. Также из (5.20) следует выполнение условия (5.3).

Будем считать, что $L(\omega)$ и $C(\omega)$ являются соответствующими зависящими от ω константами для f и g одновременно. Легко показать, что случайная функция gf удовлетворяет условиям теоремы 5.1, поэтому интегрируема по μ, и интеграл равен пределу п. н. соответствующих интегральных сумм $S'_n(gf)$. Выберем произвольным образом точки $x_{k,n} \in \Delta_{k,n}$, тогда

$$|f(x,\omega) - f(x_{k,n},\omega)| \le L(\omega)2^{-n}, \quad x \in \Delta_{k,n}.$$

Рассмотрев для g интегральную сумму по η, используя (5.5), имеем, что

$$\begin{aligned}
|S'_n(g) - S'_n(gf)| \le \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \Big(\Big| \int_{\Delta_{k,n}} g \, dx \Big| \Big| \int_{\Delta_{k,n}} (f(x,\omega) - f(x_{k,n},\omega)) \, d\mu \Big| \\
+ \Big| \int_{\Delta_{k,n}} g(x,\omega) \, (f(x,\omega) - f(x_{k,n},\omega)) \, dx \, \mu(\Delta_{k,n}) \Big| \Big) \\
\le \sum_{k=1}^{2^n} \Big(C(\omega)(L(\omega)2^{-n}|\mu(\Delta_{k,n})| + \frac{1}{2}L(\omega)\mu^*(\Delta_{k,n}) + C(\omega)L(\omega)2^{-n}|\mu(\Delta_{k,n})| \Big) \\
= C(\omega)L(\omega)\Big(2\sum_{k=1}^{2^n} 2^{-n}|\mu(\Delta_{k,n})| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n} \mu^*(\Delta_{k,n}) \Big).
\end{aligned}$$

Из (5.2) получаем, что последнее выражение стремится к нулю п. н., откуда и следует сходимость интегралов. □

5.3 Решение интегральных уравнений относительно неизвестной случайной аддитивной функции множеств

5.3.1 Существование и единственность решения

Далее мы рассмотрим решение уравнений относительно неизвестной случайной аддитивной функции множеств.

Теорема 5.8. *Пусть даны μ и с. ф. f, удовлетворяющие условиям теоремы 5.1. Рассмотрим уравнение*

$$\eta(A) = \mu(A) + \int_A f(x,\omega)\, d\eta \tag{5.21}$$

относительно неизвестной случайной аддитивной функции множеств η (равенство должно выполняться п. н. для каждого $A \in \mathcal{B}_0$).

Если существует зависящая от ω величина $\varepsilon(\omega) > 0$ п. н. такая, что для каждого x

$$|f(x,\omega) - 1| \geq \varepsilon(\omega) \text{ п. н.},$$

то существует η, удовлетворяющая условиям (5.2), (5.3) *и равенству* (5.21). *Если существует зависящая от ω величина $C(\omega) < 1$ п. н. такая, что для каждого x*

$$|f(x,\omega)| \leq C(\omega) \text{ п. н.}, \tag{5.22}$$

то η, удовлетворяющая всем этим условиям, единственна (то есть, на каждом $A \in \mathcal{B}_0$ определена с точностью до равенства п. н.).

Доказательство. Решением уравнения (5.21) будет

$$\eta(A) = \int_A \frac{1}{1 - f(x,\omega)}\, d\mu. \tag{5.23}$$

Легко проверить, что при выполнении условий нашей теоремы с. ф. $f_1 = \frac{1}{1-f}$ удовлетворяет (5.4), поэтому указанный интеграл определен. По теореме 5.7, η удовлетворяет (5.2) и (5.3). То, что η удовлетворяет (5.21), проверяем непосредственной подстановкой, при этом $\int_A f\, d\eta$ можно переписать, используя теорему 5.7.

Теперь покажем, что если также $c(\omega) < 1$ п. н., то других решений нет. Пусть η_1 и η_2 — два решения (5.21). Взяв разность равенств (5.21) для них и проделав n итераций, получим, что

$$(\eta_1 - \eta_2)(A) = \int_A f^n\, d(\eta_1 - \eta_2). \tag{5.24}$$

Функция f^n будет удовлетворять (5.4) с зависящей от ω константой $n(\omega)C^n(\omega)$, а также $|f^n| \leq C^n(\omega)$ п. н. Зафиксируем $A \in \mathcal{B}_0$ и его представление через непересекающиеся множества $A = \cup_{k,n}\Delta_{k,n}$, оценим правую часть (5.24) по неравенству (5.5), и получим, что она стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому η_1 и η_2 совпадают п. н. □

5.3.2 Непрерывность решения по параметру

Теорема 5.9. *Пусть даны уравнение* (5.21) *относительно неизвестной η и уравнения*

$$\eta_j(A) = \mu_j(A) + \int_A f_j(x,\omega)\, d\eta_j, \quad A \in \mathcal{B}_0, \quad j \geq 1, \tag{5.25}$$

относительно неизвестных η_j.

Пусть μ и каждая μ_j удовлетворяют условиям теоремы 5.1, наложенным на случайные аддитивные функции множеств, и также выполняются условия:

$$(\mu - \mu_j)^*(X) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad j \to \infty, \tag{5.26}$$

$$\exists L(\omega) \quad \forall x,\ y \in X,\ j \geq 1 \quad |f_j(x,\omega) - f_j(y,\omega)| \leq L(\omega)|x - y| \text{ п. н.} \tag{5.27}$$

$$\exists \varepsilon(\omega) > 0 \quad \forall x \in X,\ j \geq 1 \quad |f_j(x,\omega) - 1| \geq \varepsilon(\omega) \text{ п. н.} \tag{5.28}$$

$$\mathbf{P}\{\omega: \ f_j(x,\omega) \xrightarrow{m} f(x,\omega), \ j\to\infty\} = 1. \tag{5.29}$$

Тогда для решений уравнений (5.21), (5.25), *вычисленным по равенству* (5.23), *имеет место соотношение*

$$\forall A \in \mathcal{B}_0 \quad \eta_j(A) = \int_A \frac{1}{1-f_j}\, d\mu_j \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A) = \int_A \frac{1}{1-f}\, d\mu, \ j\to\infty.$$

Доказательство. Отметим, что в формулировке теоремы мы не накладываем требований на измеримость зависящих от ω величин $L(\omega), \ \varepsilon(\omega)$.

Из условий (5.27), (5.28) с помощью (5.29) легко получить, что аналогичные свойства имеет и f :

$$\begin{gathered} |f(x,\omega) - f(y,\omega)| \le L(\omega)|x-y| \quad \text{п. н.}, \\ |f(x,\omega) - 1| \ge \varepsilon(\omega) \quad \text{п. н.} \end{gathered} \tag{5.30}$$

В преобразованиях, которые проводятся здесь ниже, обозначения типа $C(g,\omega), \ L(g,\omega)$ для с. ф. g служат для величин зависящих от ω констант ограниченности и липшицевости (для с. ф. f эти значения вводились в условиях (5.22), (5.4)).

Возьмем произвольное $A\in\mathcal{B}_0$ и будем рассматривать его фиксированное разбиение на непересекающиеся множества $A = \cup_{r,s}\Delta_{r,s}$ (как раз по этим $\Delta_{r,s}$ и берутся суммы ниже). Будем брать разбиение такое, что все $m(\Delta_{r,s}) < 2^{-i}$, где значение i выбирается ниже. Используя неравенство (5.5), имеем:

$$\begin{aligned} |\eta_j(A) - \eta(A)| &= \left|\int_A \frac{1}{1-f_j}\, d\mu_j - \int_A \frac{1}{1-f}\, d\mu\right| \\ &= \left|\int_A \frac{1}{1-f_j}\, d(\mu_j-\mu) + \int_A \left(\frac{1}{1-f_j} - \frac{1}{1-f}\right) d\mu\right| \\ &\le C\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right) \sum_{\Delta_{r,s}\subset A} |(\mu_j-\mu)(\Delta_{r,s})| + \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right)\left((\mu_j-\mu)^*(A)\right) \\ &+ \sum_{\Delta_{r,s}} 2^s \left|\int_{\Delta_{r,s}} \left(\frac{1}{1-f_j} - \frac{1}{1-f}\right) dx\right| |\mu(\Delta_{r,s})| + \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{1-f_j} - \frac{1}{1-f},\omega\right)\sum_{\Delta_{r,s}}\mu^*(\Delta_{r,s}) \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{aligned}$$

(здесь через $S_1, \ S_2, \ S_3, \ S_4$ очевидным образом обозначены соответствующие слагаемые предыдущей суммы).

В S_1

$$C\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right) \le \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \quad \text{п. н.}$$

(это следует из (5.28)). Из (5.26) мы имеем, что каждое

$$|(\mu_j-\mu)(\Delta_{r,s})| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad j\to\infty.$$

Поэтому $S_1 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \ j\to\infty$.

Рассматривая S_2, мы оценим $L\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right)$.

$$\left|\frac{1}{1-f_j(x,\omega)} - \frac{1}{1-f_j(y,\omega)}\right| = \left|\frac{f_j(x,\omega)-f_j(y,\omega)}{(1-f_j(x,\omega))(1-f_j(y,\omega))}\right| \le \frac{L(\omega)}{\varepsilon^2(\omega)}|x-y|.$$

Поэтому для любого j мы можем взять

$$L\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right) \leq \frac{L(\omega)}{\varepsilon^2(\omega)}. \tag{5.31}$$

Тогда

$$S_2 \leq \frac{1}{2}\frac{L(\omega)}{\varepsilon^2(\omega)}\big((\mu_j-\mu)^*(A)\big),$$

и из условия (5.26) мы получаем, что $S_2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,\ j\to\infty$.

В S_4 рассмотрим константу Липшица с учетом оценки (5.31) (очевидно, что такая же оценка имеет место и для $L\left(\frac{1}{1-f},\omega\right)$. Имеем:

$$L\left(\frac{1}{1-f_j}-\frac{1}{1-f},\omega\right) \leq L\left(\frac{1}{1-f_j},\omega\right) + L\left(\frac{1}{1-f},\omega\right) \leq 2\frac{L(\omega)}{\varepsilon^2(\omega)}.$$

В сумме

$$\sum_{\Delta_{r,s}} \mu^*(\Delta_{r,s})$$

участвуют слагаемые с $s>i$. Эта сумма является п. н. конечной (поскольку $\mu^*(X)<\infty$ п. н.). Выбором i она может быть сделана как угодно малой (например, в том смысле, что будет как угодно малой ее квазинорма). Поэтому выбором i S_4 может быть сделана как угодно малой равномерно по всем j.

В S_3 при уже выбранном i и фиксированном разбиении A будет фиксировано конечное число слагаемых. Имеем:

$$\left|\frac{1}{1-f_j(x,\omega)}-\frac{1}{1-f(x,\omega)}\right| = \left|\frac{f_j(x,\omega)-f(x,\omega)}{(1-f_j(x,\omega))(1-f(x,\omega))}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2(\omega)}|f_j(x,\omega)-f(x,\omega)|.$$

По условию (5.29), последнее выражение п. н. стремится к нулю по мере m. Ограниченность подынтегральных функций в S_3 следует из (5.28), (5.30). Поэтому $S_3\to 0,\ j\to\infty$ п. н., откуда получаем, что $\eta_j(A) \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta(A),\ j\to\infty$. $\square$

Комментарии

Глава 1. Свойства мер со значениями в общих топологических пространствах подробным образом рассмотрены в работах Л. Древновского [26, 27, 28]. Близкими вопросами занимался И. Лабуда [33, 34]. Большинство результатов в их работах получены для конечно аддитивных мер, удовлетворяющих некоторым условиям непрерывности.

Случайные меры с независимыми значениями подробно изучил А.В. Скороход [21].

Важное для нас утверждение об ограниченности значений L_0−значной меры получили Л. Древновский [29] и М. Талагран [39]. Аналогичное утверждение для L_0−значных мер на подмножествах [0, 1] одновременно доказали Н.Дж. Калтон, Н.Т. Пек, У.Дж. Робертс [31]. Отметим также, что М. Талагран [39] доказал, что любая L_0−значная мера представляется в виде произведения некоторой случайной величины и векторной меры со значениями в L_2.

Построение интеграла от действительной функции по мере со значениями в общих метризуемых и топологических пространствах проводили Ж.К. Массе [35], Ж. Пелломел [37], Ф. Тюрпен [40]. Интеграл по случайной мере с независимыми значениями рассмотрел А.В. Скороход [21]. Интегрирование банаховозначных функций по случайной мере, порожденной безгранично делимыми распределениями, изучил Я. Росински [38].

Различные важные для нас утверждения о безусловной сходимости рядов имеются в монографиях Н.Н. Вахании, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобаняна [1], Б.С. Кашина и А.А. Саакяна [6].

Возможность применения конструкции Тюрпена интеграла от действительной функции для L_0−значных мер (пункт 1.1.1) была показана в работах автора [12], [13].

Часть результатов параграфа 1.2 взята из работ [14], [17]. Предельные теоремы, схожие с нашими теоремами с условием равномерной интегрируемости множества функций, для случая мер со значениями в общих топологических пространствах доказал Ж.К. Массе [35]. Интегральное представление случайного линейного функционала получено в [13].

Большая часть результатов параграфа 1.3 содержится в работах [15], [18], [19]. Результаты о сходимости на $B(X)$ интегралов по последовательности векторнозначных мер при условии их сходимости на более узком множестве функций получил К. Бихтелер [25].

Глава 2. Излагаются новые результаты автора.

Глава 3. Лемма 3.1 содержится в работе автора [12]. Результаты параграфа 3.2 взяты из работы [11], параграфа 3.3 — из [16].

Глава 4. Интегралы по винеровскому процессу, определяемые через ряды с действительными функциями и случайными коэффициентами, рассматривал В. Мацкявичюс [8]. В данной главе излагаются результаты автора. Утверждения, связанные с конечными суммами нашего вида, доказываются в работе [20].

Глава 5. В данной главе изложены новые результаты автора.

Литература

[1] *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[2] *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975. — 320 с.

[3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971. — 664 с.

[4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.

[5] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[6] *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 496 с.

[7] *Куратовский К.* Топология. Т. 1 — М.: Мир, 1966. — 594 с.

[8] *Мацкявичюс В.* Симметрические стохастические интегральные уравнения типа Фредгольма // Литов. мат. сб. — 1984. — **24,** № 1. — С. 121-130.

[9] *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973. — 328 с.

[10] *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1983. — 344 с.

[11] *Радченко В.Н.* Теорема Радона-Никодима для случайных мер // Укр. мат. журн. — 1989. — **41,** № 1. — С. 63-67.

[12] *Радченко В.М.* Про інтеграли по випадкових мірах, $\sigma-$адитивних з ймовірністю 1 // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 1989. — **31.** — С. 111-114.

[13] *Радченко В.Н.* Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы // Теория вероятн. и ее прим. — 1991. — **36,** вып. 3. — С. 594-596.

[14] *Радченко В.Н.* Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0-значным мерам // Укр. мат. журн. — 1991. — **43,** № 9. — С. 1264-1267.

[15] *Радченко В.Н.* О сходимости интегралов по L_0-значным мерам // Матем. заметки — 1993. — **53,** вып. 5. — С. 102-106.

[16] *Радченко В.Н.* Об определении интеграла от случайной функции // Теория вероятн. и ее прим. — 1996. — **41,** вып. 3. — С. 677-682.

[17] *Радченко В.Н.* Равномерная интегрируемость и теорема Лебега для сходимости по L_0-значным мерам // Укр. мат. журн. — 1996. — **48,** № 6. — С. 857-860.

[18] *Радченко В.М.* Про наближення інтегралів по випадковій мірі з допомогою дійсної міри // Теор. ймовірност. та матем. статист. — 1996. — **55.** — С. 165-166.

[19] *Радченко В.Н.* Сходимость интегралов от неограниченных действительных функций по случайным мерам // Теория вероятн. и ее прим. — 1997. — **42,** вып. 2. — С. 358-364.

[20] *Радченко В.М.* Про розв'язання деяких інтегральних рівнянь із загальними випадковими мірами // Вісник Київ. ун-ту. Фізико-математичні науки. — 1998. — вип. 4. — С. 40-45.

[21] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986. — 320 с.

[22] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987. — 760 с.

[23] *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера и производная (общая теория). — М.: Наука, 1967, 220 с.

[24] *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 640 с.

[25] *Bichteler K.* On sequences of measures // Bull. Amer. Math. Soc. — 1974. — **80,** № 5. — P. 839-844.

[26] *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. phys. — 1972. — **20,** № 4. — P. 269-276.

[27] *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. II // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. math. astron. phys. — 1972. — **20,** № 4. — P. 277-286.

[28] *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. math. astron. phys. — 1972. — **20,** № 6. — P. 439-445.

[29] *Drewnowski L.* Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — **91,** № 4. — P. 581-588.

[30] *Kalton N.J.* Topologies on Riesz groups and applications to measure theory // Proc. London Math. Soc. — 1974. — **28,** № 2. — P. 253-273.

[31] *Kalton N.J., Peck N.T., Roberts James W.* L_0-valued vector measures are bounded // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — **85,** № 4. — P. 575-582.

[32] *Kwapien S.M.* Complement au theoreme de Sazonov — Minlos // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1968. — **A267,** № 19. — P. 698-700.

[33] *Labuda I.* Sur quelques généralisations des théorèmes de Nikodym et de Vitali — Hahn — Saks // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. math. astron. phys. — 1972. — **20,** № 6. — P. 447-456.

[34] *Labuda I.* Exhaustive measures in arbitrary topological vector spaces // Studia Math. — 1976. — **58,** № 3 — P. 239-248.

[35] *Massé J.C.* Intégration dans les semi-groupes // Studia Math. — 1979. — **66,** № 1. — P. 57-80.

[36] *Musial K., Ryll-Nardzewski C., Woyczyński W.A.* Convergence presque sure des series aleatoires vectorielles a multiplicateurs bornes // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1974. — **A279,** № 7. — P. 225-228.

[37] *Pellaumail J.* Intégrale de Daniell á valeurs dans un groupe // Rev. Roum. Math. pures et appl. — 1971. — **16,** № 8 — P. 1227-1236.

[38] *Rosiński J.* Bilinear random integral // Diss. Math. — 1987. — **259.** — 78 p.

[39] *Talagrand M.* Les mesures vectorielles a valeurs dans L_0 sont bornées. // Ann. sci. Ecole norm. super. — 1981. — **14,** № 4 — P. 445-452.

[40] *Turpin P.* Convéxites dans les espaces vectoriels topologiques généraux // Diss.Math. — 1976. — **131.** — 220 p.