48 Міжнародна математична олімпіада

С.М. Торба [1]

48-ма міжнародна математична олімпіада проходила з 19 по 31 липня 2007 року в столиці В'єтнаму – місті Ханой. Журі працювало окремо, у місті Ха Лонг, яке розташоване у 170 км від столиці. До Ханою прибули команди 93 країн і ще дві країни надіслали спостерігачів. Загальна кількість учасників олімпіади – 523 школяра, завдяки чому цьогорічне змагання стало наймасовішим за всі роки проведення.

Математична спільнота В'єтнаму більше десяти років добивалася права провести змагання у своїй країні, і, здобувши його, приклала усі зусилля для того, щоб створити гідні умови учасникам та керівникам як для роботи, так і для спілкування та відпочинку. Олімпіада пройшла на високому рівні ще й завдяки підтримці уряду В'єтнаму. Відчувалося, що для країни Міжнародна математична олімпіада є непересічною подією. На церемонії відкриття учасників привітали голови кабінету міністрів та парламенту, на церемонії нагородження золоті медалі вручав президент В'єтнаму Нгуен Мінь Чіет. Як сказав Йожеф Пелікан, голова консультативної ради олімпіади, "В історії проведення ММО ще не було конкурсів, так гарно організованих". Крім самого змагання, за короткий час перебування у В'єтнамі учасники мали можливість відвідати головні туристичні об'єкти столиці та затоку Халонг.

Склад команди України було визначено за підсумками Всеукраїнської математичної олімпіади 2007 року та відбірково-тренувальних зборів, які в травні проходили на базі факультету кібернетики Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка. Почесне право участі в Міжнародній олімпіаді вибороли такі шість учнів:

Богданський Юрій, випускник Києво-Печерського ліцею №171 "Лідер", нині студент Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка,

Медвідь Володимир, випускник фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті ім. Івана Франка, нині студент Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка,

Міщенко Павло, учень 10 класу загальноосвітнього спеціалізованого санаторно-інтернатного закладу ліцею "Ерудит", м.Донецьк,

Ніколаєнко Станіслав, випускник загальноосвітньої школи №64 м. Донецька,

Радченко Данило, випускник Києво-Печерського ліцею №171 "Лідер", нині студент Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка,

Шишацький Юрій, учень 10 класу Києво-Печерського ліцею №171 "Лідер".

Науковий керівник команди (Leader)— Торба Сергій Миколайович, аспірант Інституту математики НАН України.

Керівник команди (Deputy Leader)— Прокопенко Наталія Сергіївна, головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти, МОН України.

Завдання міжнародних математичних олімпіад вибираються науковими керівниками команд країн-учасниць з попереднього переліку задач (Short List). Такий Short List створюється із задач, надісланих з усього світу, Міжнародним задачним комітетом

[1] Науковий керівник команди України, аспірант Інституту математики НАН України.

(Problem Selection Committee). У Short List ММО-2007 було включено й дві задачі з України, автор яких — В.А.Ясінський, доцент Вінницького державного педагогічного університету, відомий автор задач численних математичних олімпіад (у 1998 і 2002 рр. задачі В.А.Ясінського було включено в комплекти завдань ММО).

Міжнародне журі, яке складалось з наукових керівників усіх країн-учасниць, після складної системи голосування відібрало 6 задач, які й стали завданням олімпіади. Цього року з шести задач дві (№ 3 і №6) були дуже високого рівня складності. Цим пояснюється, що золоті медалі присуджувались учням, які набрали 29 і більше балів з 42 можливих і ніхто з учасників змагання не набрав 42 бали (найкращий результат, показаний Констянтином Матвєєвим (Росія) – 37 балів). Срібні медалі присуджувались учням, які набрали 21–28 балів, а бронзові — тим, хто набрав 14–20 балів. Українським учасникам підкорилися п'ять з шести задач. Задачу 3, з якою не впоралась наша команда, розв'язали тільки чотири учасники (з команд Китаю, Сербії, Угорщини та Росії). Бездоганне розв'язання кожної задачі оцінювалось, як завжди, у 7 балів. Окремі просування в нерозв'язаній задачі оцінювались від 1 до 3 балів. Відповідно, за різні недоліки у правильному розв'язку учасникам знижували оцінку на 1–3 бали. Наші учасники показали такі результати:

УЧАСНИК	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum$	**НАГОРОДА**
Богданський Віктор	3	7	1	7	7	0	25	Срібна медаль
Медвідь Володимир	7	7	1	7	7	0	29	Золота медаль
Міщенко Павло	7	7	1	7	7	0	29	Золота медаль
Ніколаєнко Станіслав	3	7	0	7	0	0	17	Бронзова медаль
Радченко Данило	7	7	0	7	7	7	35	Золота медаль
Шишацький Юрій	4	7	0	7	1	0	19	Бронзова медаль

Усі наші учні здобули медалі, продемонстрували гідний рівень підготовки, підтвердили своє право представляти нашу країну на Міжнародній математичній олімпіаді. Завдяки досвіду учнів у боротьбі за окремі невеличкі просування в нерозв'язаних задачах Володимир Медвідь і Павло Міщенко вибороли золоті медалі. В абсолютному заліку результат Данила Радченко — четвертий. Варто відмітити, що три золоті медалі наша команда отримувала останній раз у 1997 році.

Міжнародні олімпіади не є командними змаганнями. Офіційними є лише особисті результати учасників. Командні підсумки носять суто інформаційний характер. Цього року Україна посіла в цьому неофіційному рейтингу 6-е місце (наша команда здобула однакову кількість балів з командою Японії, але випередила її за числом золотих медалей) і всього на 1 бал відстала від збірної США. Ще раз хочеться відмітити гідний результат учнів — востаннє 6-е місце в неофіційному рейтингу українська команда займала у 1997 році.

Команда України з нагородами ММО-2007

Країна	**Золото**	**Срібло**	**Бронза**	**Кількість балів**
Росія	5	1		184
Китай	4	2		181
В'єтнам	3	3		168
Південна Корея	2	4		168
США	2	3	1	155
Україна	3	1	2	154
Японія	2	4	0	154
КНДР	1	4		151
Болгарія	2	3	1	149
Тайвань	2	3	1	149
Румунія	1	4	1	146
Іран	1	3	2	143
Гонг Конг	0	5	1	143
Таіланд	1	3	2	133
Німеччина	1	3	1	132
Угорщина	0	5	0	129
Туреччина	1	2	2	124
Польща	1	2	2	122
Білорусь	1	1	4	119
Молдова	0	3	2	118

Повні результати Міжнародної математичної олімпіади 2007 року містяться на її офіційному сайті `http://www.imo2007.edu.vn` та на офіційному сайті Міжнародних математичних олімпіад http://www.imo-official.org.

Наводимо завдання Міжнародної математичної олімпіади 2007 року та їх розв'язання. Наполегливо радимо читачам, які готуються до участі в математичних змаганнях вищого рівня, ретельно опрацювати всі деталі доведень.

Задачі 47-ої Міжнародної математичної олімпіади

1. (*Нова Зеландія*) Дані дійсні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для кожного i, $1 \le i \le n$ покладемо
$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}.$$
Нехай
$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$
(a) Доведіть, що для довільних дійсних чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ виконується нерівність
$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$
(b) Покажіть, що існують такі дійсні числа $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, для яких нерівність $(*)$ обертається на рівність.

2. (*Люксембург*) Задано п'ять точок A, B, C, D, E таким чином, що $ABCD$ є паралелограмом, а навколо чотирикутника $BCED$ можна описати коло. Пряма ℓ проходить через точку A, перетинає відрізок DC у його внутрішній точці F, а пряму BC — у точці G. Припустимо, що $EF = EG = EC$. Доведіть, що пряма ℓ є бісектрисою кута DAB.

3. (*Росія*) Деякі учасники математичного змагання товаришують один з одним, причому якщо A товаришує з B, то й B товаришує з A. Назвемо групу учасників *клікою*, якщо кожні двоє з неї товаришують. (Зокрема, довільна група, що складається менш, ніж з двох людей, є клікою.) Назвемо кількість людей у кліці її *розміром*.

Відомо, що найбільший розмір кліки, що складається з учасників змагання, є парним числом. Доведіть, що можливо розсадити усіх учасників у дві кімнати таким чином, щоб найбільший розмір кліки в одній кімнаті дорівнював найбільшому розміру кліки у другій кімнаті.

4. (*Чехія*) Бісектриса кута BCA трикутника ABC вдруге перетинає його описане коло у точці R, а серединні перпендикуляри до сторін BC і AC — у точках P і Q відповідно. Точки K і L — середини відрізків BC і AC відповідно. Доведіть, що площі трикутників RPK і RQL рівні.

5. (*Велика Британія*) Натуральні числа a і b такі, що число $(4a^2 - 1)^2$ ділиться на $4ab - 1$. Доведіть, що $a = b$.

6. (*Нідерланди*) Нехай n — натуральне число. Розглянемо множину
$$S = \big\{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, \ x + y + z > 0\big\},$$
яка складається з $(n + 1)^3 - 1$ точок тривимірного простору. Знайдіть найменшу можливу кількість площин, об'єднання яких містить всі точки з S, проте не містить точку $(0, 0, 0)$.

Розв'язання задач

1. (а) Припустимо, що $|x_i - a_i| < \frac{d}{2}$ для всіх $1 \le i \le n$. Нехай $\max\{d_i : 1 \le i \le n\} = d_{i_0}$. Розглянемо такі номери $1 \le k \le i_0 \le l \le n$, для яких виконуються рівності

$$a_k = \max\{a_j : 1 \le j \le i_0\}, \quad a_l = \min\{a_j : i_0 \le j \le n\}.$$

Тоді $k \le l$, а тому $x_k \le x_l$, звідки

$$d = d_{i_0} = a_k - a_l = (a_k - x_k) + (x_k - x_l) + (x_l - a_l) \le |x_k - a_k| + |x_l - a_l| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d,$$

суперечність.

(б) Візьмемо $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$ та для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ покладемо $x_{i+1} = \max\left\{x_i, a_{i+1} - \frac{d}{2}\right\}$. Тоді $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ за побудовою. Покажемо, що нерівність $(*)$ обертається на рівність. Припустимо, що існує таке $1 \le k \le n$, для якого $|x_k - a_k| > \frac{d}{2}$. Тоді $k > 1$ і $x_k = x_{k-1}$. Тому $x_{k-1} \ge a_k - \frac{d}{2}$ та має виконуватись нерівність $x_k > a_k + \frac{d}{2}$. Виберемо найменший індекс $j \le k$ такий, що $x_j = \ldots = x_{k-1} = x_k$. Розглянемо окремо два випадки: $j = 1$ або $j \ge 2$.

У першому випадку $x_k = x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$, тому $a_1 - \frac{d}{2} > \frac{d}{2} + a_k$ і $d_1 \ge a_1 - a_k > d$, суперечність з означенням числа d.

У другому випадку $x_j \ne x_{j-1}$, а тому за побудовою $x_j = a_j - \frac{d}{2}$. Звідси

$$x_k = x_j = a_j - \frac{d}{2} > \frac{d}{2} + a_k, \quad \text{тобто} \quad d_j \ge a_j - a_k > d,$$

знову суперечність з означенням числа d. Таким чином, побудована послідовність $\{x_i\}$ є шуканою.

2. Оскільки $\angle FAD = \angle FGC$, $\angle BAF = \angle GFC$, то достатньо встановити рівність $\angle FGC = \angle GFC$, тобто показати, що трикутник GFC є рівнобедреним. Доведемо, що $\angle FCE = \angle GCE$. Тоді у рівнобедрених трикутниках CEF та CEG будуть рівними бічні сторони та кути при основі, звідки отримаємо $\triangle CEF = \triangle CEG$, $CF = CG$ і задачу буде розв'язано. Нарешті, оскільки чотирикутник $DBCE$ вписаний, то

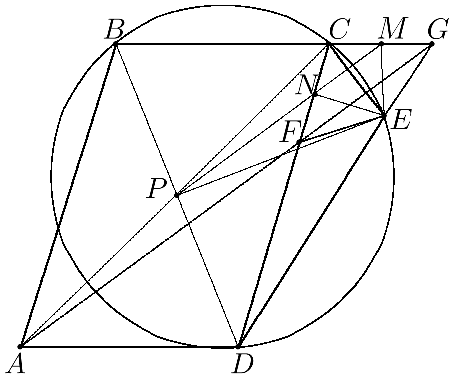
$$\angle FCE = \angle DCE = \angle DBE, \quad \angle GCE = \angle BDE$$

і достатньо встановити, що рівнобедреним є трикутник BDE.

Оскільки точка E належить описаному колу трикутника BCD, то за теоремою Симсона[2] основи перпендикулярів, опущених з точки E на сторони трикутника BCD, лежать на одній прямій. Позначимо N та M основи перпендикулярів, опущених з точки E на прямі DC та BC відповідно. Оскільки E — центр описаного навколо $\triangle FCE$ кола, то N та M є серединами відрізків FC та CG. Нехай P — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Тоді точки P, N, M лежать на одній прямій як середини CA, CF і CG, а отже основою перпендикуляра, опущеного з точки E на пряму BD, є саме точка P. Але P — середина відрізка BD, тому трикутник BDE є

[2] Див., наприклад, статтю Г.Б. Філіпповського "Ґрунтовна розмова про пряму Симсона–Уоллеса"// "У світі математики" **11**(2005), № 3.

рівнобедреним.



3. Нехай К$_1$, К$_2$ — кімнати, а $2m$ — розмір найбільшої кліки. Спочатку посадимо в К$_1$ усіх людей з найбільшої кліки (можливо, однієї з найбільших клік) і тільки їх, а усіх інших людей посадимо в К$_2$. Будемо переводити людей з К$_1$ до К$_2$, допоки або найбільші розміри клік в обох кімнатах стануть рівними (у цьому випадку більше нічого робити не потрібно), або найбільший розмір кліки у К$_2$ стане на 1 більшим за найбільший розмір кліки в К$_1$. Надалі будемо вважати, що у кімнаті К$_1$ залишилось p людей та найбільша кліка в К$_1$ має розмір p, бо складається з усіх цих людей, а розмір найбільшої кліки в К$_2$ становить $p+1$.

Позначимо A_0 кліку з p людей, які залишились у К$_1$, та A — множину з $2m-p$ людей, яких перемістили з К$_1$ до К$_2$. Таким чином, усі люди з $A_0 \cup A$ утворюють вихідну кліку найбільшого розміру. Зауважимо, що $p \geq m$, інакше $p \leq m-1$ та у кімнаті К$_2$ утворилась принаймні кліка A з $2m-p \geq m+1 \geq p+2$ людей, суперечність. Але тоді $2m-p \leq p < p+1$, тобто A не є найбільшою клікою у К$_2$.

Якщо деяка людина з A не входить до складу деякої з найбільших клік у К$_2$, то переведемо цю людину назад до К$_1$. Тоді у К$_2$ збережеться найбільша кліка розміру $p+1$, а у кімнаті К$_1$ також утвориться кліка з $p+1$ людей, тобто розміри найбільших клік у кімнатах стануть однаковими. Залишилось розглянути випадок, коли усі люди з A входять до складу кожної найбільшої кліки у К$_2$. Позначимо $B_1, \ldots, B_n$ усі множини людей, які доповнюють A до найбільших клік у кімнаті К$_2$, тобто нехай найбільшими кліками у К$_2$ є множини людей $B_1 \cup A, \ldots, B_n \cup A$.

Будемо тепер переводити людей з К$_2$ до К$_1$ таким чином. Поки розмір найбільшої кліки в К$_2$ дорівнює $p+1$, вибираємо будь-яку людину з будь-якої множини B_i, $1 \leq i \leq n$, і переводимо її до К$_1$. При переміщенні до К$_1$ однієї людини розмір найбільшої кліки в К$_2$ зменшується щонайбільше на 1, тому на деякому кроці цей розмір стане рівним p. Покажемо, що при цьому в К$_1$ не виникне кліки більшого розміру.

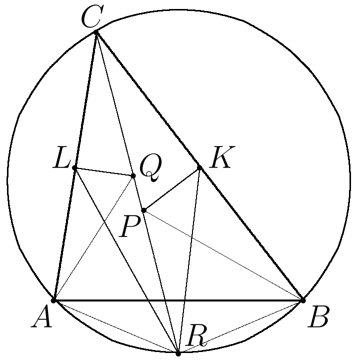
Припустимо, що у К$_1$ виникла кліка Q розміру більшого за p. Відмітимо, що до Q можуть входити лише два типи людей:

◇ деякі люди з A_0. Усі вони входили до початкової найбільшої кліки, тому будь-яка така людина товаришує з усіма людьми з A.

◇ люди, яких перемістили назад з К$_2$ до К$_1$. Кожен з них входив до деякої кліки $A \cup K_i$, а отже товаришував з усіма людьми з A.

Тому усі люди з Q товаришують з усіма людьми з A. Але Q та A — кліки самі по собі, отже $Q \cup A$ — теж кліка. Оскільки A складається з $2m - p$ людей, а Q — більше, ніж з p людей, то кліка $Q \cup A$ має більший за $2m - p + p = 2m$ розмір, суперечність з тим, що $2m$ — розмір найбільшої кліки. Отже, розмір найбільшої кліки в К_1 не збільшився, тобто в обох кімнатах розмір найбільшої кліки став рівним p.

4. *I спосіб.* Оскільки $S_{RPK} = S_{RCK} - S_{CPK}$, $S_{RQL} = S_{RCL} - S_{QLC}$, то потрібно довести рівність $S_{RCK} - S_{CPK} = S_{RCL} - S_{QLC}$. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Маємо



$$S_{RCK} = \tfrac{1}{2} CR \cdot CK \cdot \sin\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{4} a \sin\tfrac{\gamma}{2} \cdot CR,$$
$$S_{CPK} = \tfrac{1}{2} KP \cdot KC = \tfrac{1}{2} KC^2 \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{8} a^2 \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}$$

та аналогічно

$$S_{RCL} = \tfrac{1}{4} b \sin\tfrac{\gamma}{2} \cdot CR, \quad S_{QLC} = \tfrac{1}{8} b^2 \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}.$$

Таким чином, слід перевірити, що

$$\tfrac{1}{4} a \sin\tfrac{\gamma}{2} \cdot CR - \tfrac{1}{8} a^2 \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{4} b \sin\tfrac{\gamma}{2} \cdot CR - \tfrac{1}{8} b^2 \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2},$$

або $\frac{1}{4}(a-b)\sin\frac{\gamma}{2} \cdot CR = \frac{1}{8}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, або $(a-b)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(2CR\cos\frac{\gamma}{2} - (a+b)\right) = 0$ (усі перетворення рівносильні).

Тепер для завершення доведення достатньо перевірити, що для довільного трикутника $2CR\cos\frac{\gamma}{2} - (a+b) = 0$. Справді, за теоремою синусів маємо

$$CR = 2R\sin\angle CAR = 2R\sin\left(\alpha + \tfrac{\gamma}{2}\right),$$

де R — радіус описаного кола, та

$$2CR\cos\tfrac{\gamma}{2} = 2R\sin\left(\alpha + \tfrac{\gamma}{2}\right)\cos\tfrac{\gamma}{2} = 2R\big(\sin\alpha + \sin(\alpha+\gamma)\big) = 2R\big(\sin\alpha + \sin\beta\big) = a + b,$$

що й було потрібно.

II спосіб. Оскільки трикутники CAQ та CBP подібні, як рівнобедрені трикутники з кутом $\frac{\gamma}{2}$ при основі, а QL, PK — висоти цих трикутників, то $\frac{QL}{PK} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$ та $\angle LQC = \angle KPC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, звідки $\angle LQR = \angle KPR = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

Але $\angle AQR = \angle RPB = \gamma$ (як зовнішні кути трикутників CAQ та CBP) та $\angle ARQ = \beta$, $\angle PRB = \alpha$ (як вписані). Тому $\triangle AQR \sim \triangle RPB \sim \triangle ACB$. Нарешті, R — середина дуги AB, а отже $RA = RB$, звідки $\triangle AQR = \triangle RPB \sim \triangle ACB$. Таким чином, $\frac{QR}{PR} = \frac{QR}{AQ} = \frac{a}{b}$ та

$$S_{LQR} = \tfrac{1}{2} LQ \cdot QR \sin\angle LQR = \tfrac{1}{2} PK \cdot \tfrac{b}{a} \cdot PR \cdot \tfrac{a}{b} \sin\angle KPR = \tfrac{1}{2} PK \cdot PR \sin\angle KPR = S_{KPR}.$$

5. Назвемо *гарними* пари натуральних чисел (a, b), для яких $(4a^2 - 1)^2$ ділиться на $4ab - 1$. Встановимо деякі властивості гарних пар (a, b).

(1) Покажемо, що якщо пара (a, b) гарна, то пара (b, a) теж гарна. Справді, число $b^2(4a^2-1)^2 - a^2(4b^2-1)^2$ ділиться на $b(4a^2-1) + a(4b^2-1) = (a+b)(4ab-1)$, тому для гарної пари (a, b) число $a^2(4b^2-1)^2$ ділиться на $4ab - 1$. Внаслідок взаємної простоти чисел a та $4ab - 1$ звідси випливає, що і $(4b^2-1)^2$ ділиться на $4ab - 1$.

(2) Нехай пара (a, b) гарна, тобто число $k = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$ натуральне. Тоді

$$(4a^2 - 1)^2 = k(4ab - 1),$$

звідки $1 \equiv -k \pmod{4a}$. Звідси випливає, що $k = 4ac - 1$, де число c натуральне. Отримана рівність $(4a^2 - 1)^2 = (4ac - 1)(4ab - 1)$ означає, що пара (a, c) теж є гарною.

Припустимо тепер, що існують гарні пари (a, b), для яких $a \neq b$, та виберемо з усіх таких пар деяку пару з найменшим можливим значенням $a + b$. Позначимо цю пару (a_*, b_*). Завдяки властивості (1) можна вважати, що $a_* < b_*$, а за властивістю (2) існує така гарна пара (a_*, c_*), для якої має місце рівність $(4a_*^2 - 1)^2 = (4a_*c_* - 1)(4a_*b_* - 1)$. Але остання рівність можлива лише при $c_* < a_*$, бо $a_* < b_*$. Тому для гарної пари (a_*, c_*) маємо $a_* + c_* < b_* + a_*$, суперечність з вибором пари (a_*, b_*).

6. Доведемо, що це число рівне $3n$. Справді, $3n$ площин $x = 1, \ldots, x = n$, $y = 1, \ldots, y = n$, $z = 1, \ldots, z = n$ задовольняють умови, тому достатньо показати, що не вистачає меншої за $3n$ кількості площин. Для цього скористаємося такою теоремою (Combinatorial Nullstellensatz, або комбінаторна теорема про нулі):

Теорема. Нехай задано многочлен P від змінних[3]

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ такий, що

$$\deg P = m_1 + \ldots + m_n,$$

і коефіцієнт при $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ не рівний нулеві. Нехай $S_1, \ldots, S_n \subset \mathbb{R}$ — такі множини, що $|S_i| \geq m_i + 1$. Тоді існує точка $A = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ така, що $P(A) \neq 0$.

Під час доведення теореми будуть потрібні такі леми:

Лема 1. Нехай P — многочлен від змінних $x_1, \ldots, x_n$ і степінь P, як многочлена від x_i, не перевищує t_i. Тоді якщо $|S_i| \geq t_i + 1$ і многочлен рівний нулеві при всіх $x_i \in S_i$, то $P \equiv 0$.

Доведення. Проведемо індукцію за кількістю змінних. Для однієї змінної твердження вірне, бо многочлен степеня t_i має щонайбільше t_i коренів. Для того, щоб зробити індукційний перехід, достатньо записати $P = P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ у вигляді

$$P = P_{t_{n+1}} x_{n+1}^{t_{n+1}} + P_{t_{n+1}-1} x_{n+1}^{t_{n+1}-1} + \ldots + P_1 x_{n+1} + P_0,$$

де P_i — многочлени від $x_1, \ldots, x_n$, та застосувати припущення індукції до кожного многочлена P_i.

Лема 2. Нехай $g_i = g_i(x_i) = \prod\limits_{s \in S_i} (x_i - s)$ і многочлен $P(A)$ рівний нулеві для всіх $A \in S_1 \times \ldots \times S_n$. Тоді має місце подання $P(x) = g_1 h_1 + \ldots + g_n h_n$, де h_i — многочлени від $x_1, \ldots, x_n$, причому $\deg h_i \leq \deg P - \deg g_i$.

Доведення. Нехай $|S_i| = t_i + 1$. Якщо розкрити дужки у означенні многочленів g_i, отримаємо деякі тотожності вигляду $x_i^{t_i+1} = g_i - \sum\limits_{j=1}^{t_i} k_{i,j} x_i^j$. Перетворимо многочлен P за допомогою таких операцій. Якщо у деякому одночлені зустрічається x_i у степені, більшому за t_i, то замінимо $x_i^{t_i+1}$ на праву частину відповідної тотожності. При цьому виникне деякий доданок вигляду $g_i h_i$, де h_i — одночлен степеня $\deg h_i \leq \deg P -$

[3]Многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — це скінченна сума одночленів вигляду $c_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, де $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, $c_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{R}$. Степенем многочлена $\deg P$ називається найбільше з чисел $k_1 + \ldots + k_n$, а степенем P, як многочлена від x_i, — найбільше з чисел k_i.

$\deg g_i$, та деякі одночлени від $x_1, \dots, x_n$ степенів, менших за степінь одночлена, до якого застосували операцію. Будемо застосовувати такі операції до одночленів від $x_1, \dots, x_n$, допоки P не перетвориться на суму многочлена P_1, степені якого по x_i не перевищують t_i, та деяких многочленів вигляду $g_i h_i$. Помітимо, що за побудовою $P_1 = 0$ для $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ та степінь P_1 по кожній змінній не перевищує $|S_i| - 1$. Тому за лемою 1 маємо $P_1 = 0$. Отже $P = \sum g_i h_i$, що і слід було довести.

Доведення теореми.

Без обмеження загальності можна вважати, що $|S_i| = m_i + 1$ для усіх i. Припустимо супротивне і розглянемо $g_i = \prod\limits_{s \in S_i} (x_i - s)$. За лемою 2 існують многочлени $h_1, \dots, h_n$ від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, степені яких при кожному i задовольняють умову $\deg h_i \leq \deg P - \deg g_i$, і має місце подання

$$P(x_1, \dots, x_n) = g_1 h_1 + \dots + g_n h_n.$$

За умовою коефіцієнт при $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ у лівій частині не дорівнює нулеві, тому і коефіцієнт біля цього одночлена у правій частині має бути ненульовим. Але степінь $g_i h_i = h_i \cdot \prod\limits_{s \in S_i} (x_i - s)$ не перевищує степеня P. Тому будь-який одночлен у цьому виразі або ділиться на $x_i^{m_i+1}$, або має степінь, строго менший за степінь $g_i h_i$, а отже менший за $\deg P$. Таким чином, коефіцієнт при $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ у правій частині дорівнює нулеві. Отримана суперечність доводить теорему. $\square$

Тепер ми можемо завершити розв'язання задачі. Припустимо, що існують $m < 3n$ площин $P_1, \dots, P_m$, які задовольняють умову задачі, і нехай рівняння площини P_i має вигляд $a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0$. Зауважимо, що $d_i \neq 0$, оскільки $(0, 0, 0) \notin P_i$. Розглянемо многочлен

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{m} (a_i x + b_i y + c_i x - d_i) - \prod_{i=1}^{n} (x - i)(y - i)(z - i) \frac{d_1 \dots d_m}{(-1)^{3n-m} (n!)^3}$$

та множини $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, \dots, n\}$. Тоді легко перевірити, що для кожної точки $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ буде $P(x, y, z) = 0$. Але коефіцієнт при $x^n y^n z^n$ у $P(x, y, z)$ дорівнює $\dfrac{d_1 \dots d_m}{(-1)^{3n-m} (n!)^3} \neq 0$, тому за комбінаторною теоремою про нулі має існувати така точка $(x_0, y_0, z_0) \in S_1 \times S_2 \times S_3$, що $P(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, суперечність.
Відповідь: $3n$ площин.

Наприкінці статті привітаємо всіх наших учасників з нагородами 48-ої Міжнародної математичної олімпіади, висловимо щиру вдячність учителям і науковцям, які присвятили роботі з кожним з юних олімпійців роки напруженої праці, усім, хто брав активну участь у підготовці команди України до цього відповідального заходу. Бажаємо всім школярам України, які мріють про участь у Міжнародних математичних олімпіадах, натхненної й успішної підготовки до чергового форуму найкращих юних математиків планети, який відбудеться в липні 2008 року у Іспанії.