XLVII МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА ОЛІМПІАДА

В.М.Лейфура[1], *О.О.Литвиненко*[2], *І.М.Мітельман*[3]

47-ма Міжнародна математична олімпіада проходила з 6 по 18 липня 2006 року в столиці Республіки Словенії — місті Любляні. Словенія, населення якої складає близько 2 млн. чоловік, є найменшою за всю історію країною, що організувала міжнародну учнівську олімпіаду. До Любляни прибули команди 90 країн. Журі працювало в м. Порторожі, яке розташовано за 120 км від столиці. Уряд країни зробив усе можливе для того, щоб створити учасникам олімпіади, членам журі, керівникам команд, іншим запрошеним на олімпіаду особам чудові умови для перебування і роботи. Відчувалося, що для Словенії Міжнародна математична олімпіада є непересічною подією. Почесний комітет ММО-2006 очолював Президент Республіки Словенії доктор Янеш Дрновшек. Для наукових керівників команд урочистий прийом був влаштований Президентом Національної Асамблеї Республіки Словенії доктором Франсом Кук'яті. Організаційний комітет олімпіади був керований професором Звонко Тронтелі — головою Словенського Товариства математиків, фізиків та астрономів. Значної підтримки проведенню олімпіади надала Європейська комісія з науки та наукових досліджень.

Склад команди України було визначено за підсумками Всеукраїнської математичної олімпіади 2006 року та відбірково-тренувальних зборів, які в травні проходили на базі Дніпропетровського обласного фізико-математичного ліцею при Дніпропетровському національному університеті. Почесне право участі в Міжнародній олімпіаді вибороли такі шість учнів:

Гончарук Наталія, випускниця фізико-математичного ліцею №27 м. Харкова, нині студентка Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна,

Лішунов Віталій, випускник Українського фізико-математичного ліцею при Київському національному університету ім. Тараса Шевченка, нині студент цього університету,

Медвідь Володимир, учень 10 класу фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті ім. Івана Франка,

Рагель Ярослав, випускник гімназії м. Ужгорода, нині студент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,

Радченко Данило, учень 10 класу ліцею №171 "Лідер" м. Києва,

Чуклін Олександр, випускник гімназії №1 м. Севастополя, нині студент Московського фізико-технічного інституту.

Науковий керівник команди (Leader) — Лейфура Валентин Миколайович, професор, завідувач кафедри Миколаївського державного університету ім. Петра Могили.

---

[1]засл. вчитель України, професор, канд. фіз.-мат. наук, науковий керівник команди України

[2]методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України, керівник команди України

[3]засл. вчитель України, доцент, канд. фіз.-мат. наук, координатор ММО-2006

Керівник команди (Deputy Leader)— Литвиненко Ольга Олександрівна, методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України.

Завдання міжнародних математичних олімпіад укладаються науковими керівниками команд країн-учасниць з попереднього переліку задач (Short List). Такий Short List створюється із задач, надісланих з усього світу, Міжнародним задачним комітетом (Problem Selection Committee). У Short List ММО-2006 була включена й задача з України, автор якої — В.А.Ясінський, доцент Вінницького державного педагогічного університету, відомий автор задач численних математичних олімпіад (його задачі потрапляють до Short List майже щорічно; у 1998 і 2002 рр. задачі В.А.Ясінського було включено в комплекти завдань ММО). Цього року Міжнародний задачний комітет був сформований з таких п'яти авторитетних в олімпіадній галузі професорів: Геза Кьош (Угорщина), Свєтослав Савчев (Болгарія), Марчін Кучма (Польща), Андрій Бауер (Словенія, голова комітету), Роберт Герецшлягер (Австрія).

Міжнародне журі, що складалось з наукових керівників усіх країн-учасниць, після складної системи голосування відібрало 6 задач, які й утворили завдання олімпіади. Цього року з шести задач дві (№ 3 і №6) були дуже високого рівня складності. Цим пояснюється, що золоті медалі присуджувались учням, які набрали 28 і більше балів з 42 можливих. Бронзові медалі присуджувались учням, які набрали 15–18 балів. Українським учасникам підкорилися п'ять з шести задач. Задачу 6, з якою не впоралась наша команда, розв'язали тільки десять учасників (по два учасники з команд Росії та Китаю, по одному з команд Франції, Німеччини, Республіки Кореї, Молдови, Польщі, Латвії). Бездоганне розв'язання кожної задачі оцінювалось, як завжди, у 7 балів. Окремі просування в нерозв'язаній задачі оцінювались в 1–3 бали. Відповідно, за різні недоліки в розв'язаній у цілому задачі учасникам знижували оцінку на 1–3 бали. Наші учасники показали такі результати:

УЧАСНИК	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum$	**НАГОРОДА**
Гончарук Наталія	7	7	0	7	7	0	28	Золота медаль
Медвідь Володимир	7	1	7	7	1	0	23	Срібна медаль
Чуклін Олександр	7	5	0	7	0	0	19	Срібна медаль
Радченко Данило	7	1	1	7	1	0	17	Бронзова медаль
Лішунов Віталій	7	0	1	7	0	0	15	Бронзова медаль
Рагель Ярослав	7	0	0	5	0	0	12	Почесна грамота

Усі наші учні розв'язали щонайменше дві задачі, продемонстрували гідний рівень підготовки, підтвердили своє право представляти нашу країну на Міжнародній математичній олімпіаді. Але цього року особливого значення набув досвід учнів у боротьбі за окремі невеличкі просування в нерозв'язаних задачах. Саме це й дозволило Данилу Радченку й Віталію Лішунову вибороти важливі для нашої команди бронзові медалі. Ці ж самі дві задачі, як і наші бронзові призери (хоча й з незначними технічними недоліками), розв'язав також і Ярослав Рагель, нагороджений Почесною грамотою олімпіади. Для цього учня вирішальним виявилось те, що до результатів високого рівня він дістався тільки в одинадцятому класі і не встиг опанувати всі тонкощі олімпіадної тактики. Його виступ також слід вважати успішним.

Навчальні заклади, які очікують на високі олімпіадні досягнення своїх вихованців, зокрема — на їх участь у Міжнародних олімпіадах, мають приділяти значної уваги постійному тренуванню цих учнів на різних наукових конкурсах, турнірах тощо. Зауважимо, зокрема, що з шести членів нашої команди п'ятеро (Гончарук Наталія, Медвідь Володимир, Чуклін Олександр, Лішунов Віталій, Рагель Ярослав) пройшли, крім олімпіадної, корисну школу Всеукраїнських турнірів юних математиків.

Міжнародні олімпіади не є командними змаганнями. Офіційними є лише персональні результати учасників. Командні підсумки носять суто інформаційний характер. Цього року Україна посіла в цьому неофіційному рейтингу 22-е місце. Такий результат дещо поступається результатам трьох попередніх Міжнародних олімпіад, але він залишає Україну серед 25 найсильніших команд на Міжнародних математичних олімпіадах. Поруч з нашою командою в рейтинг-таблиці знаходяться потужні команди болгарських і білоруських школярів. На останній ММО всі країни-учасники знизили свої показники за кількістю набраних балів, що відображає специфіку задачного матеріалу, відібраного для олімпіади. Без золотих медалей залишилися такі, наприклад, традиційно результативні команди, як збірні Угорщини, Канади, Білорусі.

Країна	**Золото**	**Срібло**	**Бронза**	**Почесна грамота**	**Кількість балів**
Китай	6				214
Росія	3	3			174
Республіка Корея	4	2			170
Німеччина	4		2		157
США	2	4			154
Румунія	3	1	2		152
Японія	2	3	1		146
Іран	3	3			145
Молдова	2	1	3		140
Тайвань	1	5			136
Польща	1	2	3		133
Італія	2	2		1	132
В'єтнам	2	2	2		131

Гонконг	1	3	2		129
Таїланд	1	3	2		123
Канада		5	1		123
Угорщина		5	1		122
Словаччина	1	2	3		118
Велика Британія	4	1		1	117
Туреччина	4	1		1	117
Таїланд	1	3	2		123
Канада		5	1		123
Угорщина		5	1		122
Словаччина	1	2	3		118
Велика Британія	4	1		1	117
Туреччина	4	1		1	117
Болгарія	4	1		1	116
Україна	1	2	2	1	114
Білорусь		3	2	1	111
Мексика	1	2	1	2	110
Ізраїль		3	1	2	109
Австралія		3	2	1	108
Сінгапур		2	3	1	100
Франція	1		3	2	99
Бразилія			6		96
Швейцарія	1	1		4	95

Повні результати Міжнародної математичної олімпіади 2006 року містяться на її офіційному сайті http://imo2006.dmfa.si.

Роботи учнів, написані їхніми рідними мовами, перевіряють, як добре відомо, наукові керівники відповідних команд. Але оцінки мають пройти складну й відповідальну процедуру координації, яка забезпечує дотримання однакових вимог для всіх перевірених робіт. Міжнародні математичні олімпіади створюють для цього групи спеціальних експертів — задачних координаторів (Problem Coordinators). Традиційно такі групи складаються переважно з математиків країни-організатора. Як виняток, персонально запрошуються найкваліфікованіші фахівці з інших країн. Три роки поспіль для такої роботи запрошується український математик і викладач І.М.Мітельман (м. Одеса).

Наводимо завдання Міжнародної математичної олімпіади 2006 року з розв'язаннями, деякі з яких запропоновані українськими школярами. Наполегливо радимо читачам, які готуються до участі в математичних змаганнях вищого рівня, ретельно опрацювати всі деталі доведень.

Задачі 47-ої Міжнародної математичної олімпіади

1. (*Республіка Корея*) Точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. Усередині цього трикутника вибрано таку точку P, що $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$.

Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з I.

2. (*Сербія*) Діагональ правильного 2006-кутника P називається *добрим* відрізком, якщо її кінці поділяють межу P на дві частини, кожна з яких містить непарну кількість сторін. Сторони P також вважаються *добрими* відрізками. Нехай P розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині P. Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожен з яких має дві *добрі* сторони, може містити таке розбиття?

3. (*Ірландія*) Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел a, b і c.

4. (*США*) Знайдіть усі пари цілих чисел x і y, для яких справджується рівність

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. (*Румунія*) Нехай $P(x)$ — многочлен степеня $n > 1$ з цілими коефіцієнтами, k — довільне натуральне число. Розглянемо многочлен $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ (тут P застосовується k разів). Доведіть, що існує не більше за n цілих чисел t таких, що $Q(t) = t$.

6. (*Сербія*) Кожній стороні b опуклого многокутника P поставлено у відповідність найбільшу з площ трикутників, які містяться в P і одна із сторін яких співпадає з b. Доведіть, що сума площ, які відповідають усім сторонам многокутника P, не менша за його подвоєну площу.

Розв'язання задач

1. Розв'язання (*Ярослав Рагель*). Будемо вважати без обмеження загальності, що $\angle ABP \geq \angle PBC$. Тоді $\angle BCP \geq \angle ACP$. Отже, матимемо:

$$\angle IBP = \angle ABP - \angle ABI = \angle ABP + \angle ACP - \angle ABI - \angle ACP = \\ = \angle CBP + \angle BCP - \angle ABI - \angle ACP = -\angle IBP + 2\angle ICP.$$

Таким чином, $\angle IBP = \angle ICP$, і точки B, C, P, I лежать на одному колі. Нехай W — друга точка перетину променя AI з описаним колом трикутника ABC. За відомою *теоремою про "тризуб"*, $BW = IW = CW$, звідки $WP = WI$. Далі, оскільки $AP + PW \geq AW = AI + IW$, то $AP \geq AI$. Якщо ж $AP = AI$, то точка P лежить на відрізку AW, і, зрозуміло, співпадає з точкою I.

Геометричні задачі, що передбачають аналогічні міркування, — цілком традиційні для математичних змагань українських школярів і вважаються майже "навчальними": усі члени нашої команди запропонували близькі за змістом розв'язання.

Розв'язання *Данила Радченка* містило такий простий спосіб показати, що точка P лежить на описаному колі трикутника BCI: оскільки $\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \angle B + \angle C$, то $\angle PBC + \angle PCB = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle BPC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = \angle BIC$. Подальші його міркування, так само як і в попередньому розв'язанні, спирались на *теорему про "тризуб"*.

Зауважимо, до речі, що після того, як встановлено факт належності точки P колу, описаному навколо трикутника BCI, твердження задачі миттєво випливає з того, що, як легко бачити, дотична до цього кола в точці I перпендикулярна прямій AI.

2. *Відповідь*: 1003.

Розв'язання 1 (*Наталія Гончарук*). *Рівнобедрені* трикутники з двома *добрими* сторонами, які входять до розглядуваної в умові тріангуляції, називатимемо *р-добрими*.

Лема. Нехай AB — одна з тих діагоналей, що бере участь у тріангуляції правильного 2006-кутника P, а L_{AB} — частина його контуру з кінцями A і B, яка містить $n \le 1003$ ланок. Тоді кількість *р-добрих* трикутників з усіма вершинами на L_{AB} не перевищує $\frac{n}{2}$.

Доведення (*індукцією за* n). Для $n = 2$ твердження є очевидним. Нехай $2 < n \le 1003$, і припустимо, що твердження справджується для ламаної, яка складається з $k < n$ ланок. Розглянемо тепер нашу ламану L_{AB} (що складається з n ланок) і всілякі *р-добрі* трикутники з усіма вершинами на L_{AB} (якщо ж там таких трикутників узагалі немає, то, зрозуміло, немає чого й доводити). Нехай відрізок PQ є найдовшою діагоналлю, що стала стороною такого трикутника PQS. Будемо вважати, що вершина P лежить на тій частині ламаної L_{AB}, що обмежується точками A і S. Тоді ламана L розбивається на частини L_{AP}, L_{PS}, L_{SQ}, L_{QB} (перша й остання можуть бути виродженими). Кожен з розглядуваних *р-добрих* трикутників (крім трикутника PQS), вписаних у ламану L_{AB}, як нескладно зрозуміти, має бути вписаним до однієї з чотирьох зазначених вище частин. Застосуємо до кожної з них припущення індукції і врахуємо, що ламані L_{PS} і L_{SQ} містять непарну кількість ланок. Отже, кількість *р-добрих* трикутників (без урахування трикутника PQS) не перевищує $\frac{n}{2} - 1$. Цим завершується доведення леми.

Нехай XY — найдовша діагональ тріангуляції (якщо таких декілька, то беремо будь-яку з них). Через L_{XY} позначимо ламану з кінцями X і Y, яка складається не більше, ніж з 1003 ланок. Нехай XYZ — такий трикутник тріангуляції, що вершина Z не належить L_{XY}. Залишається тільки застосувати доведену лему до L_{XY}, L_{YZ}, L_{ZX} і врахувати, що якщо трикутник XYZ є *р-добрим*, то отриманої оцінки "вистачить" і для нього. Легко навести приклад тріангуляції з 1003 *р-добрими* трикутниками: для цього треба сполучити вершини P послідовно "через одну" та тріангулювати правильний 1003-кутник, який утвориться, довільним чином).

Варто навести й наступний красивий спосіб розв'язування задачі 2.

Розв'язання 2. Назвемо *р-добрий* трикутник ABC з $AB = BC$ *власним* для деякої сторони 2006-кутника, якщо ця сторона належить частині контуру L_{AB} або L_{BC}, але не належить L_{UV} чи L_{VW} для жодного *р-доброго* трикутника UVW з меншою довжиною бічних сторін $UV = VW$. Зрозуміло, що для кожної сторони власний трикутник щонайбільше один. Нехай ABC — довільний *р-добрий* трикутник. Для кожного відрізка, який належить L_{AB}, знайдемо *власний р-добрий* трикутник UVW. Якщо трикутник UVW не співпадає з ABC, то всі вершини U, V, W належать L_{AB}, а кожному відрізку з L_{UV} можна поставити у відповідність відрізок з L_{VW}. Але L_{AB} містить непарну кількість відрізків, тому принаймні для одного відрізка з L_{AB} *власним* є сам трикутник ABC. Аналогічно трикутник ABC є *власним* для деякого відрізка з L_{BC}.

Отже, кожен *p-добрий* трикутник є *власним* принаймні для двох сторін 2006-кутника, а тому матимемо щонайбільше 1003 *p-добрих* трикутників. Приклад ми навели вище.

Звернемо увагу читачів, що координатори, згідно із затвердженою журі схемою оцінювання (Marking Scheme) щодо цієї задачі, надзвичайно прискіпливо ставились до обґрунтування в роботах учасників зовні очевидних тверджень — з метою уникнути "псевдорозв'язань", до яких були схильні чимало конкурсантів.

3. *Відповідь*: $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Розв'язання 1 (*Володимир Медвідь*). Вихідну нерівність запишемо у вигляді

$$|(b-c)(a-b)\,(a-c)\,(a+b+c)| \le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Беручи $a=\sqrt{2}-3$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}+3$, ми отримаємо, що $M \ge \frac{9\sqrt{2}}{32}$. Покажемо, що наша нерівність справджується з $M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$ для будь-яких дійсних чисел a, b і c. Це, як нескладно переконатися, буде випливати з наступних двох допоміжних нерівностей.

Лема. Для всіх дійсних a, b і c має місце нерівність

$$\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3 \ge 54(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Доведення. Нерівність, яку потрібно довести, є симетричною, а тому можна вважати, що $a \ge b \ge c$. Нехай $m=a-b$, $n=b-c$. Тоді

$$(m^2+n^2+(m+n)^2)^3 \ge \left(\frac{(m+n)^2}{2}+(m+n)^2\right)^3 = \frac{27}{8}(m+n)^6 \ge$$
$$\ge \frac{27}{8}(2\sqrt{mn})^4(m+n)^2 = 54m^2n^2(m+n)^2.$$

Лему доведено.

Лема. Для всіх дійсних a, b і c має місце нерівність

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge \frac{16}{9}|a+b+c|\sqrt{\frac{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}{27}}.$$

Доведення. Нехай $p=a+b+c$, $y=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Тоді

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{(y+p^2)^2}{9} = \frac{\left(\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+p^2\right)^2}{9} \ge \frac{\left(4\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot p^2}\right)^2}{9} = \frac{16}{9}|a+b+c|\sqrt{\frac{y^3}{27}}.$$

Лему доведено.

Безперечно, наведене розв'язання можна вважати надто штучним, і з цієї точки зору немає нічого дивного в тому, що дану задачу розв'язав тільки один з членів нашої команди. Але, як з'ясувалось, результат може бути одержаний з використанням класичних методів аналізу, а саме — методу множників Лагранжа. Використанню цього методу для розв'язування олімпіадних задач традиційно приділяється чимало уваги під час підготовки українських учнів до міжнародних олімпіад і їхніми наставниками, і науковцями, що проводять відбірково-тренувальні збори. Усі без виключення члени української збірної були добре знайомі з технікою застосування методу Лагранжа. А тому можна лише шкодувати і, у певному сенсі, дивуватись, що наші учасники не використали такий ресурс власної підготовки. Мабуть, переважив суто "спортивний" чинник "хворобливо" шанобливого сприйняття третьої і шостої задач (які, як частогусто здається учасникам, аж ніяк не можуть розв'язуватись простим застосуванням стандартних технічних прийомів)... Утім, до цієї психологічно-математичної "пастки" потрапило чимало учасників ММО-2006: задачу 3 розв'язали тільки 33 учасники.

Розв'язання 2 (*метод множників Лагранжа*[4]). Можна вважати, що $a \geq b \geq c$ і знаходити найбільше значення виразу $|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)|$ за умови $a^2+b^2+c^2=1$. Або ж, після очевидної заміни змінних, — найбільше значення функції $f(x,y,z)=xyz(x+y)$ на компактній множині

$$M=\{(x,y,z)|\, x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}.$$

Найбільше значення функції f на множині M існує (за теоремою Веєрштрасса) і, очевидно, є числом додатним, а тому слід дослідити на звичайний екстремум функцію Лагранжа $f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2+(x+y)^2-3)$ в області $\{(x,y,z)|\, x>0, y>0, z>0\}$. Одержимо систему

$$\begin{cases} yz(2x+y)=2\lambda(2x+y), \\ xz(2y+x)=2\lambda(2y+x), \\ xy(x+y)=2\lambda z. \end{cases}$$

Звідси $x=y$, $z=2x^2$, $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Подальше є зрозумілим.

Нарешті, розглянемо й цілком прозорий "геометричний" підхід до цієї задачі, який вимагає тільки навичок просторового уявлення та володіння початковими відомостями з аналітичної геометрії.

Розв'язання 3. У координатному декартовому просторі $Oabc$ розглянемо площини $\alpha : a-b=0$, $\beta : b-c=0$, $\gamma : c-a=0$, $\delta : a+b+c=0$. Треба знайти найбільше значення виразу $|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)|$ на сферичному двокутнику $\Omega=\{(a,b,c)|a^2+b^2+c^2=1, a\geq b\geq c\}$. Така задача еквівалентна знаходженню найбільшого значення добутку $\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)$ для $M\in\Omega$ (тут через ρ позначається відстань від точки M до відповідної площини). Легко обґрунтувати (зробіть це самостійно!), що найбільше значення досягається на бісекторі двогранного кута $\{(a,b,c)\,|\, a\geq b\geq c\}$, і при цьому $\rho\,(M;\alpha)=\rho\,(M;\beta)=\frac{1}{2}\rho(M;\ell)$ (тоді тут $\rho(M;\ell)=\rho\,(M;\gamma)$ — відстань від точки M до прямої $\ell:\ a=b=c$). Далі, враховуючи,

[4] див., наприклад, статтю: *В.М.Радченко*, Функції багатьох змінних у доведенні нерівностей// У світі математики, **4**(2002), сс. 37–44.

що $(\rho(M;\delta))^2 + (\rho(M;\ell))^2 = 1$, маємо:

$$\begin{aligned}(\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta))^2 &=\\ &= (\rho(M;\delta))^2\cdot\frac{1}{4}(\rho(M;\ell))^2\cdot\frac{1}{4}(\rho(M;\ell))^2\cdot(\rho(M;\ell))^2 =\\ &= \frac{27}{16}(\rho(M;\delta))^2\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2 \le\\ &\le \frac{27}{16}\left(\frac{(\rho(M;\delta))^2+(\rho(M;\ell))^2}{4}\right)^4 = \frac{27}{4^6}.\end{aligned}$$

Таким чином, для $M\in\Omega\quad \rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)\le\frac{3\sqrt{3}}{64}$, причому, зрозуміло, таке значення досягається (нескладно визначити $a=\frac{2\sqrt{2}+6}{4\sqrt{6}}$, $b=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $c=\frac{2\sqrt{2}-6}{4\sqrt{6}}$). Отже, найбільшим значенням виразу $|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)|$ на множині Ω є (згадайте формулу для відстані від точки до площини!) $\frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

4. *Відповідь*: $(0;\pm2)$, $(4;\pm23)$.

Розв'язання 1 (*Віталій Лішунов*). Якщо $x<0$ то $1<1+2^x+2^{2x+1}\le 2$. Для $x=0$ знаходимо $y=\pm2$. Далі вважаємо, що $x\ge3$ (випадки $x=1$, $x=2$ перевіряємо безпосередньо). Разом з кожним розв'язком $(x;y)$ розв'язком буде й $(x;-y)$, а тому можна розглядати тільки випадок $y\ge0$. Очевидно, що y — непарне число, причому $y\ge3$. Нехай $y=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді $2^{x-2}(2^{x+1}+1)=k(k+1)$. Оскільки НСД$(k;k+1)=1$, то k або $k+1$ ділиться на 2^{x-2}. Для першого випадку $k=2^{x-2}\ell$, $\ell\in\mathbb{N}$, і маємо $2^{x-2}(8-\ell^2)=\ell-1$. При $\ell\ge3$ ця рівність неможлива, безпосередньо перевіряємо й те, що для $\ell=1$ і $\ell=2$ розв'язків також не буде. Нехай тепер $k+1=2^{x-2}\ell$, $\ell\in\mathbb{N}$, тобто $2^{x-2}(\ell^2-8)=\ell+1$, звідки $\ell\ge3$. Якщо $\ell\ge4$, то, як легко помітити, $2^{x-2}(\ell^2-8)>2^{x-2}(\ell+1)>\ell+1$. Для $\ell=3$ знаходимо відповідь $(4;\pm23)$.

Розв'язання 2 (*Олександр Чуклін*). Як і в першому розв'язанні, знаходимо розв'язки $(0;\pm2)$ і приходимо до ситуації $x\ge3$, $y\ge3$. Зауважимо, що $2^x(2^{x+1}+1)=(y-1)(y+1)$, $2^x|(y-1)(y+1)$. Оскільки НСД$(y-1;y+1)\in\{1;2\}$, то $y-1$ або $y+1$ ділиться на 2^{x-1}. Нехай $y-1=2^{x-1}a$, $a\in\mathbb{N}$. Тоді $1+2^{x+1}=2^{x-2}a^2+a$. Випадки $a=1$, $a=2$ є очевидними, а для $a\ge3$ легко отримати нерівність $2^{x-2}a^2+a>1+2^{x+1}$. Нехай тепер $y+1=2^{x-1}a$, $a\in\mathbb{N}$, $1+2^{x+1}=2^{x-2}a^2-a$. Випадки $a=1$, $a=2$ розв'язків не дають. Якщо $a=3$, то маємо пари $(4;\pm23)$. Якщо ж $a\ge4$, то $a(2^{x-2}a-1)\ge4(2^x-1)>2^{x+1}+1$.

5. Розв'язання 1 (*Наталія Гончарук*). Припустимо супротивне: нехай многочлен $Q(x)$ має m цілих нерухомих точок $x_1,\dots,x_m$, $m>n$. Якими б не були цілі a і b, для них існує ціле число u, яке задовольняє рівність $(a-b)u=P(a)-P(b)$. А тому $x_i-x_j=Q(x_i)-Q(x_j)=u_1(P^{(k-1)}(x_i)-P^{(k-1)}(x_j))=\ldots=u_1\cdot\ldots\cdot u_{k-1}\cdot(P(x_i)-P(x_j))=u_1\cdot\ldots\cdot u_k\cdot(x_i-x_j)$, $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{Z}$, $1\le i<j\le m$. Звідси випливає, що $|u_i|=1$, $1\le i\le k$, $|P(x_i)-P(x_j)|=|x_i-x_j|$, $1\le i<j\le m$. Нехай для якоїсь пари індексів i та j виконується рівність $P(x_i)-P(x_j)=x_i-x_j$. Доведемо, що тоді для будь-якого s, $1\le s\le m$, $P(x_i)-P(x_s)=x_i-x_s$. Справді, якщо $P(x_i)-P(x_s)=x_s-x_i$, то $P(x_s)-P(x_j)=2x_i-x_j-x_s$, але ж $2x_i-x_j-x_s$, як легко бачити, не може дорівнювати ані x_s-x_j, ані x_j-x_s. Далі, якщо для якоїсь пари індексів i та j виконується рівність

$P(x_i) - P(x_j) = x_i - x_j$, то за доведеним $P(x_i) - P(x_r) = x_i - x_r$ при всіх r, а звідси, у свою чергу, для будь-якої пари індексів s і r маємо $P(x_s) - P(x_r) = x_s - x_r$. Отже, або для будь-якої пари індексів i та j виконується рівність $P(x_i) - P(x_j) = x_i - x_j$, або ж $P(x_i) - P(x_j) = x_j - x_i$ для всіх i та j, $1 \le i < j \le m$. Розглянемо перший випадок (другий випадок — аналогічно). Зафіксуємо j, і тоді рівняння $P(x) - x = P(x_j) - x_j$ матиме більше за n коренів, що неможливо. Задачу розв'язано.

Наступне розв'язання є близьким до щойно розібраного, але містить одне корисне, на наш погляд, міркування.

Розв'язання 2. Нехай t, u, v — три цілі нерухомі точки многочлена $Q(x)$, причому $t < u < v$. Серед чисел $P(t)$, $P(u)$, $P(v)$ рівних немає (див. перше розв'язання). Якщо припустити, наприклад, що $P(t) > P(v) > P(u)$, то (також див. перше розв'язання) $t - u = P(t) - P(u)$, $t - v = P(t) - P(v)$, $u - v = P(v) - P(u)$. Звідки $P(t) - P(v) = t - v = P(t) + P(v) - 2P(u)$, а тому $P(u) = P(v)$, що неможливо. Аналогічними міркуваннями залишаються тільки такі можливості: або $P(t) < P(u) < P(v)$, або $P(t) > P(u) > P(v)$. Нехай $t_0 > t_1 > \ldots > t_n$ — цілі нерухомі точки многочлена $Q(x)$. Тоді $P(t_0) > P(t_1) > \ldots > P(t_n)$ або $P(t_0) < P(t_1) < \ldots < P(t_n)$. Перший випадок дає нам многочлен n-го степеня $F(x) = -P(x) + x + P(t_0) - t_0$, який має принаймні $n + 1$ корінь $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Але це, звісно, неможливо. Для другого випадку беремо многочлен $R(x) = P(x) + x - P(t_0) - t_0$.

Зауваження. Доречно звернути увагу читачів на змістовний і нетривіальний факт, пов'язаний з розглядуваною задачею: ціла нерухома точка многочлена $Q(x)$ (k-ої ітерації многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P(x) \ge 2$) обов'язково є нерухомою точкою другої ітерації многочлена $P(x)$, тобто нерухомою точкою многочлена $P(P(x))$. Нехай для цілого x_0 $Q(x_0) = x_0$, причому $P(x_0) \ne x_0$ (нерухомі точки многочлена $P(x)$ будуть нерухомими точками всіх його ітерацій). Розглянемо послідовність $\{x_i,\ i \ge 0\}$: $x_{i+1} = P(x_i)$, $i \ge 0$. Усі її елементи є цілими нерухомими точками многочлена $Q(x)$. Треба довести, що $x_0 = x_2$. Дана послідовність є періодичною, причому — суто періодичною: першим повторюється саме її елемент x_0. Дійсно, нехай $j = \min\{i \ge 1 |\, \exists p > i : x_i = x_p\}$. Тоді, враховуючи раніше встановлені властивості нерухомих точок, $0 = |x_i - x_j| = |P(x_{i-1}) - P(x_{j-1})| = |x_{i-1} - x_{j-1}|$, що суперечить вибору індексу j. Нехай $\ell > 2$ — довжина періоду, $x_p = \max\{x_i |\, 0 \le i \le \ell - 1\}$, $x_q = \min\{x_i |\, 0 \le i \le \ell - 1\}$, $x_p > x_q$. Тоді $x_p - x_q = |x_p - x_q| = |P(x_p) - P(x_q)| = |x_{p+1} - x_{q+1}|$, причому, зверніть увагу, числа x_{p+1}, x_{q+1} обидва належать множині $\{x_i |\, 0 \le i \le \ell - 1\}$, оскільки $x_\ell = x_0$. Отже, або $x_p = x_{p+1}$ і $x_q = x_{q+1}$, або $x_p = x_{q+1}$ і $x_q = x_{p+1}$. Перший випадок неможливий, позаяк один з індексів p, q менший за $\ell - 1$. Для другого випадку $x_p = x_{p+2}$, чого, як легко переконатися, не може бути, якщо довжина періоду перевищує 2.

Пропонуємо читачам розв'язати задачу 5, використовуючи щойно доведений факт, яким встановлено, що кожна ціла нерухома точка k-ої ітерації многочлена $P(x)$ степеня, вищого за перший, з цілими коефіцієнтами має (відносно відображення P) або орбіту довжини 1, або — орбіту довжини 2. До речі, на олімпіаді значна частина розв'язань даної задачі спиралась на цей факт, який чимало учасників вважали надто відомим (серед членів нашої команди, на превеликий жаль, знайомих з таким результатом не виявилось). Але, відповідно до Marking Scheme, якщо в роботі його доведення не наводилось, то більше за 3 бали отримати на координації було неможливо. Серед лідерів команд висловлювались різні думки щодо цього, але під час голосування лідерів з цієї Marking Scheme (а саме вони затверджують критерії оцінювання) переважила позиція, що цей факт значною мірою і є змістом задачі, і сумлінний, добросовісний учасник Міжнародної олімпіади, який помітив його зв'язок з твердженням задачі, не може не розуміти необхідності наведення належного обґрунтування в олімпіадній роботі... Тобто журі (і ще раніше — Problem Committee) свідомо і, на наш погляд, вельми доречно, вивело описану конкретну ситуацію за межі загальної олімпіадної практики використання "класичних" фактів різного ґатунку.

Самостійно наведіть також приклади многочленів $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P(x) = n \geq 2$, для яких:

a) многочлен $Q(x)$ матиме n цілих нерухомих точок з орбітою довжини 1;

b) многочлен $Q(x)$ матиме n цілих нерухомих точок з орбітою довжини 2 (випадок парного n);

c) многочлен $Q(x)$ матиме $n-1$ цілу нерухому точку з орбітою довжини 2 та одну — з орбітою довжини 1 (випадок непарного n).

6. Розв'язання 1. У цій задачі многокутник розглядається, зрозуміло, як частина площини. Для сторони b поставлену у відповідність площу позначимо S_b. Нам потрібно довести, що $\sum\limits_b S_b \geq 2S(P)$ (підсумовування відбувається по всіх сторонах многокутника P.) Розглянемо спочатку довільний опуклий многокутник з парною кількістю сторін.

Лема. Якщо F — опуклий $2n$-кутник, то серед його сторін можна обрати таку сторону b, що $S_b \geq S/n$.

Доведення. Для вершини X через XX' будемо позначати діагональ, яка виходить з X і розбиває контур F на дві ламані, кожна з яких містить по n ланок (такі діагоналі називатимемо *головними*). Нехай вершини A і B є кінцями сторони b многокутника F, $N_b = AA' \cap BB'$, через $\triangle_b$ позначимо трикутник (як частину площини) ABN_b. Покажемо, що $\bigcup\limits_b \triangle_b \supseteq F$. Для цього досить (поміркуйте — чому саме!) довести, що для довільної точки $M \in F$, яка не належить жодній з *головних* діагоналей, $M \in \bigcup\limits_b \triangle_b$. Вважаємо, що точка M лежить ліворуч від *променя* AA' (тут і надалі промені позначається так само, як і *головні* діагоналі, що їх визначають), а праворуч від цього променя — уся відповідна частина контуру F: ламана $A \equiv C_0 \to C_1 \to \ldots \to C_{n-1} \to C_n \equiv A'$. Оскільки відносно *променя* $A'A$ точка M лежить праворуч, то для деякого i точка M лежить ліворуч відносно променя C_iC_i', але праворуч відносно променя $C_{i+1}C_{i+1}'$. Тоді, зрозуміло, $M \in \triangle_a$, де за сторону a береться відрізок $C_i'C_{i+1}'$. Оскільки $\sum\limits_b S(\triangle_b) \geq S(F)$, то серед сторін F існує така сторона b з кінцями A і B, що для сторони b' з кінцями A' і B' справджується нерівність $S(\triangle_b) + S(\triangle_{b'}) \geq S/n$. Вважаючи без обмеження загальності, що $N_bB \geq N_bB'$, матимемо $S_b \geq S(ABA') = S(ABN_b) + S(N_bBA') \geq S(ABN_b) + S(N_bB'A') = S(\triangle_b) + S(\triangle_{b'}) \geq S/n$.

Лему доведено.

Нехай m — кількість сторін многокутника P. Доводжувану нерівність запишемо в більш зручному вигляді $\sum\limits_{i=1}^{m} S_i \geq 2S$ (відповідність між позначеннями є цілком зрозумілою). Припустимо супротивне, тобто нехай $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2$. Тоді, очевидно, існують такі раціональні числа $q_1, \ldots, q_m$, що $\sum\limits_{i=1}^{m} q_i = 2$, причому $q_i > S_i/S$, $1 \leq i \leq m$. Зведемо раціональні числа $q_1, \ldots, q_m$ до спільного знаменника n: $q_i = \frac{k_i}{n}$, $1 \leq i \leq m$. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = 2n$. Для кожного i розіб'ємо i-ту сторону многокутника P на k_i рівних частин і отримаємо $2n$-кутник з площею S, до якого застосуємо доведену лему (те, що деякі його кути мають величину $180°$, нам, як нескладно бачити, не заважатиме). Якщо трикутник T, для якого $S(T) \geq S/n$, має основу на стороні з номером i, то $k_i S(T) \geq k_i S/n = q_i S > S_i$. Утім, це неможливо в силу означення площі S_i. Задачу розв'язано.

Зауваження. У контексті розглянутого доведення можна міркувати й наступним чином. Нескладно зрозуміти, з урахуванням міркувань щільності, що задачу досить розв'язувати на множині опуклих многокутників, для яких усі S_i є числами раціональними, оскільки така множина містить сукупність усіх опуклих многокутників з раціональними координатами вершин. Отже, нехай $S_i = \frac{2k_i}{2\ell}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m}$. Для кожного i розіб'ємо i-ту сторону многокутника P на $2k_i$ рівних частин завдовжки u_i. Тоді, за доведеною вище лемою, знайдеться таке i, що трикутник з основою u_i має площу, не меншу за $S \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\right)^{-1}$. Але, з іншого боку, така площа дорівнює $\frac{S_i}{2k_i} = \frac{1}{2\ell}$. Отже, $\frac{1}{2\ell} \geq S \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\right)^{-1}$, тобто $\sum\limits_{i=1}^{m} S_i \geq 2S$, що й потрібно було довести.

Розв'язання 2. Для кожної вершини X многокутника розглянемо таку точку X' на його межі, що відрізок XX' ділить площу многокутника навпіл, та включимо її до переліку вершин. При цьому утвориться деякий $2n$-кутник (взагалі кажучи, його кути можуть дорівнювати $180°$), в якому кожна діагональ XX', що розбиває контур на дві ламані по n ланок, одночасно ділить площу навпіл. Для кожної сторони AB цього $2n$-кутника розглянемо "метелик" $ABNA'B'$, утворений з трикутників ABN та $A'B'N$ (де N — точка перетину AA' з BB'). За вибором A', B' маємо $S(ANB') = S(A'NB)$, а отже $NA \cdot NB = NB' \cdot NA'$ та або $NB \geq NB'$, або $NA \geq NA'$. Тому площа одного з трикутників $BA'B'$ чи $AB'A'$ принаймні вдвічі більша за площу трикутника $NB'A'$, а площа одного з трикутників $B'AB$ чи $A'BA$ принаймні вдвічі більша за площу трикутника NBA. Отже, сума площ трикутників з умови задачі, які відповідають AB та $B'A'$, принаймні вдвічі більша за площу "метелика" $ABNA'B'$. Залишається зауважити, що під час розв'язання 1 було встановлено, що сума площ усіх n "метеликів" не менша за площу многокутника.

Незважаючи на порівняно скромні успіхи всього загалу учасників з розв'язування задачі 6, усі визнали цю вишукану і складну комбінаторно-геометричну задачу — без перебільшення — справжньою перлиною 47-ої Міжнародної математичної олімпіади.

Але можна приєднатися до точки зору багатьох математиків, які працювали на олімпіаді, що, мабуть, не варто було включати до завдання дві задачі з комбінаторної геометрії (задача 2 і задача 6), враховуючи й те, що алгебраїчна задача 5 також має комбінаторний відтінок.

Тепер, після проведеного аналізу завдань Міжнародної математичної олімпіади 2006 року, усі зацікавлені читачі (у першу чергу — викладачі, які готують своїх учнів до Міжнародних математичних олімпіад) можуть зробити висновки щодо творчих результатів української команди — для того, щоб використати досвід останньої ММО та внести відповідні корективи до підготовки обдарованих юних математиків для участі в математичних змаганнях вищого рівня.

Привітаємо всіх наших учасників з нагородами 47-ої Міжнародної математичної олімпіади, висловимо щиру вдячність учителям і науковцям, які присвятили роботі з кожним з юних олімпійців роки напруженої праці, усім, хто брав активну участь у підготовці команди України до цього відповідального заходу. Бажаємо всім школярам України, які мріють про участь у Міжнародних математичних олімпіадах, натхненої й успішної підготовки до чергового форуму найкращих юних математиків планети, який відбудеться в липні 2007 року у В'єтнамі.