В.О.Борисова[1], *В.М.Лейфура*[2], *І.М.Мітельман*[3], *К.В.Рабець*[4], *В.А.Ясінський*[5]

IX ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

З 28 жовтня по 2 листопада 2006 року в мальовничому місті, яке називають воротами до Карпат — Івано-Франківську — на базі обласного ліцею-інтернату для обдарованих дітей із сільської місцевості (директор Рачій І.О.) проведено IX Всеукраїнський турнір юних математиків. Управління освіти і науки Івано-Франківської державної адміністрації (начальник управління Болюк З.А.) та Івано-Франківський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти (директор Зуб'як Р.М.) велику увагу приділяють роботі з обдарованими дітьми. Учні області беруть активну участь в олімпіадах, наукових конкурсах різних рівнів.

Учасники IX Всеукраїнського турніру юних математиків щиро вдячні освітянам Івано-Франківщини за створення належних умов для його проведення, організацію цікавих екскурсій (зокрема, відвідування міста Коломиї).

У турнірі взяли участь 77 учнів з Волинської, Дніпропетровської, Житомирської, Івано-Франківської, Закарпатської, Львівської, Луганської, Сумської та Харківської областей. Змагалось 17 команд, які представляли ФМШ №1 м. Луганська, Дніпропетровський обласний ліцей-інтернат фізико-математичного профілю, Дніпропетровський ліцей інформаційних технологій, Дрогобицький педагогічний ліцей, Івано-Франківський фізико-технічний ліцей, Лисичанський багатопрофільний ліцей, Івано-Франківський природничо-математичний ліцей, Житомирський обласний педагогічний ліцей, гімназію №82 м. Харкова, Академічну гімназію №45 м. Харкова, Конотопську гімназію, ЗОШ №8 і гімназію м. Ужгорода, НВК №9 м. Луцька, збірну учнів Івано-Франківської області, гімназію №21 м. Луцька, Львівський фізико-математичний ліцей при ЛНУ імені Івана Франка, Манявську ЗОШ Івано-Франківської області.

IX Всеукраїнський турнір показав, що з кожними роком зростає зацікавленість педагогічного загалу в проведенні предметних турнірів — потужної форми залучення широких верств учнівської молоді до опанування основ наукової діяльності. Варто звернути увагу на те, що в Івано-Франківській, Волинській, Житомирській, Львівській областях Всеукраїнському турніру передували обласні турніри юних математиків (для проведення яких можна було частково змінювати перелік задач, запропонований МОН України, включаючи інші, можливо — більш прості, задачі). Обласні етапи учнівських турнірів сприяють підвищенню якості учнівських доповідей і варті всілякої підтримки методич-

---

[1] методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України
[2] засл. вчитель України, професор, Миколаївський державний університет ім. Петра Могили, заступник голови журі ТЮМ
[3] засл. вчитель України, доцент, Рішельєвський ліцей при Одеському національному університеті ім. І.І.Мечникова, експерт-консультант ТЮМ
[4] доцент, Українська академія банківської справи, м. Суми, заступник голови журі ТЮМ
[5] засл. вчитель України, доцент, Вінницький державний педагогічний університет ім. М.М.Коцюбинського, заступник голови журі ТЮМ

ними установами, органами управління освітою, ученими та викладачами університетів тощо.

Задачі, запропоновані науковцями для відбіркових етапів IX Всеукраїнського ТЮМ, були досить складними. Оцінювались і окремі часткові просування, розбір суттєвих випадків, ситуації, коли команда ставила і розв'язувала аналогічну, але не таку складну, задачу. Для задач, які на перший погляд здавались надто простими, високо оцінювались різноманітні узагальнення. Усе це створювало підстави для плідних і корисних наукових дискусій.

Задачі для відбіркових етапів IX Всеукраїнського ТЮМ

1. "***«Тупокутна» множина***". Множина M точок площини називається *тупокутною*, якщо для будь-якої трійки точок A, B, C цієї множини трикутник ABC є тупокутним. Дослідіть питання щодо існування для *тупокутної* множини M такої точки $X \notin M$, що множина $M \cup \{X\}$ також є *тупокутною*.

2. "***Поле чудес***". Нехай $m \geq 1$ і $n \geq 2$ — натуральні числа. Спонсор капітал-шоу "Поле чудес" для преміювання фіналіста підготував m дорогих автомобілів і n цапів. Фіналіст має стати володарем або одного з цих автомобілів, або ж — одного з цих цапів. У кожній з $m+n$ чорних скриньок випадковим чином розміщується або нашийник для цапа, або ключі від автомобіля. Шоумен запитує фіналіста: "Де ж автомобіль?" Гравець указує на певну скриньку, але ведучий спочатку відкриває іншу, в якій знаходиться цапів нашийник. Ведучий запитує: "Ви наполягаєте на своєму виборі?" Якщо гравець наполягає, то ведучий відкриває саме обрану гравцем скриньку і вручає фіналістові приз, а якщо ні — то гравцеві дозволяється відкрити якусь іншу (на його вибір) скриньку й отримати відповідний приз. При якій стратегії для гравця ймовірність виграти автомобіль є більшою: *а*) завжди наполягати на своєму виборі; *б*) ніколи не наполягати на своєму виборі? Запропонуйте й дослідіть узагальнення цієї задачі.

3. “***Цеглини в коробці***”. Яку найбільшу кількість цеглин розміром $1\times1\times4$ можна розмістити в коробці розміром $6\times6\times2006$? Запропонуйте й дослідіть узагальнення цієї задачі.

4. “***Нерівність з модулями***”. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a_1, $a_2,\ldots,$ a_n має місце нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\left|a_k+a_m\right|\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\left|a_k-a_m\right|$. Дослідіть питання щодо досяжності рівності в такій нерівності.

5. “***Корені многочленів***”. Дано многочлен 2006-го степеня з дійсними коефіцієнтами $P(x)=a_{2006}x^{2006}+a_{2005}x^{2005}+\ldots+a_1x+a_0$, який має 2006 дійсних коренів $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2006}$. Нехай $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{2005}$ — корені многочлена $P'(x)$. Знайдіть

$$\sum_{i=1}^{2006}\sum_{j=1}^{2005}\frac{1}{\alpha_i-\beta_j}.$$

6. “***Півгрупи***”. Множина $S\ne\varnothing$ називається *півгрупою*, якщо існує таке відображення $f:S\times S\to S$, що для будь-яких $a\in S$, $b\in S$, $c\in S$ має місце співвідношення $f\left(f(a,b),c\right)=f\left(a,f(b,c)\right)$. Для $x\in S$ і $y\in S$ позначатимемо $f(x,y)$ символом $x\circ y$. Наведіть якомога більше прикладів і дослідіть властивості півгруп S таких, що кожен елемент $u\in S$ можна подати у вигляді $u=e_1\circ e_2\circ\ldots\circ e_n$, де $n\in\mathbf{N}$, $e_k\circ e_k=e_k$ при всіх k, $1\le k\le n$.

7. “***Описані дев’ятнадцятигранники***”. Нехай F — множина всіляких дев’ятнадцятигранників (розглядаються поверхні), описаних навколо сфери радіуса r. Дослідіть властивості множини
$D(r)=\left\{\delta>0\,|\,\forall M\in F\ \exists X\in M\ \exists Y\in M:\rho(X,Y)>\delta\right\}$ (тут через $\rho(X,Y)$ позначається відстань між точками X і Y). Які з чисел 21, 22, 24 належать множині $D(10)$?

8. “***Трансцендентне рівняння***”. Нехай a, b, c, d — дійсні числа, причому $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $a\neq b$. Дослідіть кількість розв'язків рівняння вигляду

$$a^x = b^x + cx + d\,.$$

9. “***Діофантове рівняння***”. Нехай задано натуральне число $p\geq 2$ та натуральні числа m і n, $n>1$. Дослідіть розв'язність у натуральних числах x і y рівняння

$$p^{n-1}\left(x^n + y^n\right) = (x-y)^{mn}\,.$$

10.“***Рівняння в комплексній площині***”. Нехай $P(z)$ — многочлен n-го степеня з комплексними коефіцієнтами. Дослідіть властивості рівняння вигляду $P(z)=\bar{z}$ (тут для $z\in\mathbf{C}$ через $\bar{z}$ позначається комплексно-спряжене число).

11.“***Аналоги опуклості функцій***”. Дано дійсні числа $\alpha>1$ і $\beta>1$. Нехай для функції $f:[0;+\infty)\to\mathbf{R}$ для будь-яких $x\in[0;+\infty)$ і $y\in[0;+\infty)$ справджується нерівність

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Дослідіть питання щодо нерівності

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\geq f\left(\left(\frac{x_1{}^\beta + x_2{}^\beta+\ldots+x_n{}^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

($x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[0;+\infty)$; $n\geq 3$).

12. “***Перерізи куба***”. Нехай AB, AC і AD — ребра куба, $AB=a$. Точку E відмітили на промені AC так, що $AE=\lambda a$, а точку F відмітили на промені AD так, що $AF=\mu a$ $(\lambda>0, \mu>0)$. Які ви зумієте знайти (охарактеризувати) пари чисел λ і μ такі, що площа перерізу куба будь-якою площиною, паралельною площині BCD, дорівнює площі перерізу тетраедра $ABEF$ тією ж самою площиною.

13. “***Суми й добутки***”. Нехай $m\geq 2$, $n\geq 2$ — задані натуральні числа. Дослідіть рівняння

$$\prod_{k=1}^{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+x_k{}^m+x_{k+1}+\ldots+x_n\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^n$$

(у натуральних числах $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$).

14. “***Занумеровані кульки***”. У Петрика було N кульок, занумерованих усіма натуральними числами від 1 до N. Нехай $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 2$. Петрик загубив m кульок. При якому найбільшому $m=m(N,k)$ з-поміж кульок, котрі залишилися, можна вибрати $2k$ кульок так, щоб сума чисел на половині з них дорівнювала сумі чисел на решті з вибраних кульок?

15. “***Тривалість освітлення***”. Дослідіть тривалість освітлення точки M на планеті Z Сонячної системи в залежності від положення цієї точки на поверхні планети та в залежності від положення планети на орбіті обертання навколо Сонця в межах наступної моделі (можете запропонувати й додаткові обмеження). Планета Z вважається кулею з центром у точці O, яка рівномірно обертається навколо власної осі з періодом обертання T_0 і — одночасно — з періодом T_1 навколо Сонця по орбіті, яка є колом з центром у точці O_1. Власна вісь обертання планети нахилена до площини орбіти обертання навколо Сонця під кутом φ. Планета Z у кожний момент часу освітлюється променями світла, паралельними прямій OO_1.

У фіналі турніру грали три найсильніші команди: команда Академічної гімназії №45 м. Харкова, команда Львівського фізико-математичного ліцею і команда луцької гімназії № 21. Учасникам фіналу було запропоновано для розв’язування 8 складних задач, з якими командам потрібно впоратись за 5 годин.

Переможці IX ТЮМ — команда Академічної гімназії №45 м. Харкова

За підсумками фінального бою переможцем турніру була визнана команда Академічної гімназії №45 м. Харкова, котра продемонструвала традиційно високий рівень математичної підготовки, належну культуру наукової доповіді (керівник команди — заслужений вчитель України О.Ф.Крижанівський). Члени цієї команди Вайсбурд Антон, Кадець Людмила, Філь Пилип, Шамов Олександр нагороджені дипломами І ступеня.

Команда ЛФМЛ (Медвідь Володимир, Клюка Володимир, Бичкова Ольга, Добосевич Олесь) і команда гімназії №21 м. Луцька (Халаш Станіслав, Гуда Ольга, Куц Петро, Сапожнік Олександр, Дацюк Денис) відзначені дипломи II ступеня.

Дипломи III ступеня вручено командам Івано-Франківського фізико-технічного ліцею, Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, НВК №9 м. Луцька, збірній команді Івано-Франківської області.

Спеціальним дипломом за вагомі творчі досягнення нагороджено команду Манявської ЗОШ Івано-Франківської області.

В особистій першості дипломом I ступеня нагороджений учень Академічної гімназії №45 м. Харкова Вайсбурд Антон, дипломами II ступеня — Кадець Людмила (АГ №45 м. Харкова), Шамов Олександр (АГ №45 м. Харкова), Медвідь Володимир (Львівський ФМЛ), Хижа Артем (Дніпропетровський ЛІТ), дипломами III ступеня — Добосевич Олесь (Львівський ФМЛ), Пашковський Богдан (Івано-Франківський ФТЛ).

Під час проведення півфінальних боїв турніру відбулась традиційна олімпіада для членів команд, що не потрапили до півфіналу. Завдання олімпіади уклав член журі турніру доцент Прикарпатського національного університету І.В.Федак.

В олімпіаді взяли участь 23 учні, бажаючі перевірити свої сили. Переможцями олімпіади стали: Баранов Олексій (Луганська область), Бовсунівський Сергій (Житомирська область) — диплом I ступеня; Черновалова Ольга (Луганська область), Гончаренко Іван, Семеняка Юрій (Сумська область) — диплом II ступеня; Радовіченко Олексій, Ярема Олег (Львівська область), Дерев'янко Світлана, Садовий Михайло (Закарпатська область) — диплом III ступеня.

Завдання фінального туру IX Всеукраїнського ТЮМ

1. Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc=1$. Доведіть, що
$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\le\frac{1}{2}.$$

2. Доведіть, що трикутник ABC буде прямокутним тоді й тільки тоді, коли
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. Нехай a і b такі дійсні числа, що для будь-якого простого числа p число a^p-b^p є натуральним. Чи обов'язково обидва ці числа a і b є цілими?

4. Знайдіть усі такі функції $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, що при всіх $x>0$ і $y>0$ справджується рівність
$$f(x+y)=f(x)f(yf(x)).$$

5. На площині задано три точки N, Q і K, причому точка Q лежить між точками N і K, і $1<\dfrac{NQ}{QK}<3$. Доведіть, що існує рівно дві такі трійки точок A, B і C, що $\angle ABC=120°$, точка Q — центр вписаного кола трикутника ABC, CN — бісектриса трикутника ABC, а K — її точка перетину з відрізком, що сполучає кінці M і P бісектрис AP і BM трикутника ABC.

6. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких рівняння

$$x^m y^n = (x+y)^2 + 1$$

має розв'язки в натуральних числах.

7. Зовнівписане коло ω_C трикутника ABC дотикається сторони AB і продовжень сторін BC і CA в точках M, N і P відповідно, а зовнівписане коло ω_B дотикається сторони AC і продовжень сторін AB і BC в точках S, Q і R відповідно. Нехай $X = MN \cap RS$, $Y = PN \cap RQ$. Доведіть, що точки X, Y і A лежать на одній прямій.

8. У деяких клітинках таблиці розміром $n\times m$, $n\le m$, стоять фішки (не більше одної в кожній з клітинок), а в кожній з вільних від фішок клітинок записується число, яке дорівнює кількості фішок у сусідніх клітинках (тих, що мають з даною принаймні одну спільну вершину). Яку найбільшу можливу суму записаних чисел можна отримати в такий спосіб (m і n — фіксовані натуральні числа)?

Вказівки до розв'язання задач фінального туру

1. Нехай $a=\dfrac{y}{x}$, $b=\dfrac{z}{y}$, $c=\dfrac{x}{z}$. Тоді

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}\le\frac{1}{2(1+a+ab)}=\frac{x}{2(x+y+z)}.$$

Записуємо ще дві аналогічні нерівності, і після їх додавання отримуємо потрібний результат.

2. Дану рівність можна записати (відповідні перетворення залишаємо читачеві) у вигляді

$$\sin\left(\frac{\pi-2A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-2B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-2C}{4}\right)=0.$$

3. *Відповідь*: так, обов'язково будуть цілими. Доведемо спочатку, що вони є раціональними. Випадок $ab=0$ є тривіальним. Нехай $ab\ne 0$. Тоді, оскільки $a^3-b^3>0$ і $a^2-b^2>0$, то $a>|b|>0$. З урахуванням рівності

$\left(a^5-b^5\right)^2-\left(a^7-b^7\right)\left(a^3-b^3\right)=a^3b^3\left(a^2-b^2\right)^2$, маємо, що $a^3b^3\in\mathbf{Q}$. Далі,

$$\left(a^7-b^7\right)^2-\left(a^{11}-b^{11}\right)\left(a^3-b^3\right)=a^3b^3\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2\right)^2,$$

звідки $\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2\in\mathbf{Q}$, $a^2b^2\in\mathbf{Q}$, $ab=\dfrac{a^3b^3}{a^2b^2}\in\mathbf{Q}$. Запишемо рівності

$$\left(a^5-b^5\right)\left(a^{11}-b^{11}\right)-\left(a^{13}-b^{13}\right)\left(a^3-b^3\right)=a^3b^3\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right),$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)=\left(a^3-b^3\right)^2+2a^3b^3+a^2b^2\left(a^2+b^2\right),$$

з яких дістаємо раціональність числа a^2+b^2. Урешті-решт, раціональність чисел a і b випливає з рівностей $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$.

Подамо раціональні числа a і b у вигляді $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{k}{n}$, $k\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, причому n — найменший спільний знаменник. З умови випливає, що для будь-якого простого числа p $n^p\mid m^p-k^p$. Зауважимо, що $\gcd(m;n)=\gcd(k;n)=1$. Якщо $n>1$, то існує таке просте число q, що $q\mid n$. Тоді з рівності

$$\left(m^3-k^3\right)\left(m^2+k^2\right)-\left(m^3+k^3\right)\left(m^2+k^2\right)=2m^2k^2\left(m-k\right)$$

випливає, що $q^2\mid 2(m-k)$, $q\mid m-k$. Якщо $p>q$, то

$$m^p-k^p=(m-k)\left(m^{p-1}+m^{p-2}k+\ldots+k^{p-1}\right)\vdots\, q^p,$$

$$m^{p-1}+m^{p-2}k+\ldots+k^{p-1}\equiv pk^{p-1}(\operatorname{mod} q),\ m^{p-1}+m^{p-2}k+\ldots+k^{p-1}\not\equiv 0(\operatorname{mod} q).$$

Це означатиме, що $m-k$ ділиться без остачі на q^p для безлічі простих чисел p, більших за q. Отже, $m=k$, і прийшли до суперечності.

4. *Відповідь*: $f(x)=\dfrac{1}{1+ax}$, $a\geq 0$ — довільне. Спочатку покажемо, що не існує такого $x>0$, що $f(x)>1$. Припустимо, що таке x існує. Тоді покладемо в умові $y=\dfrac{x}{f(x)-1}>0$ і одержимо:

$$f\left(\frac{xf(x)}{f(x)-1}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{xf(x)}{f(x)-1}\right).$$

Звідси $f(x)=1$, що суперечить припущенню. Таким чином, $0<f(x)\leq 1$ для всіх $x>0$.

Нехай для деякого $x>0$ $f(x)=1$, тоді $f(x+y)=f(y)$ для всіх $y>0$. Крім того, оскільки $f(yf(x))\leq 1$ для будь-якого $y>0$, то $f(x+y)\geq f(x)=1$ для всіх $y>0$. Отже, $1\geq f(y)=f(x+y)\geq 1$, тобто $f(y)=1$ для всіх $y>0$.

Нехай тепер для всіх $x>0$ виконується нерівність $0<f(x)<1$. Тоді з умови випливає, що $f(x+y)>f(x)$ для всіх $x>0,\ y>0$. А це означає, що наша функція монотонно спадає. Далі, використовуючи умову, отримаємо:

$$f(x)\cdot f(yf(x))=f(x+y)=f\Big(yf(x)+\big(x+y(1-f(x))\big)\Big)=$$
$$=f(yf(x))\cdot f\Big(\big(x+y(1-f(x))\big)f(yf(x))\Big),$$

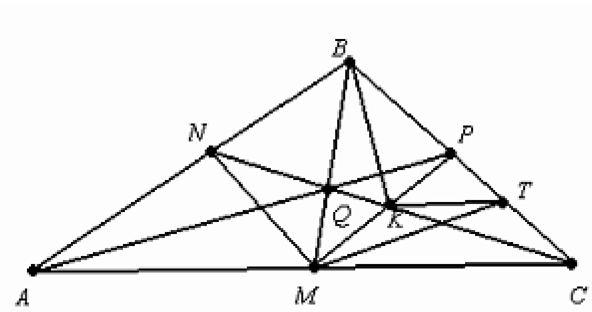
тобто

$$f(x)\cdot f(yf(x))=f(yf(x))\cdot f\Big(\big(x+y(1-f(x))f(yf(x))\big)\Big),$$

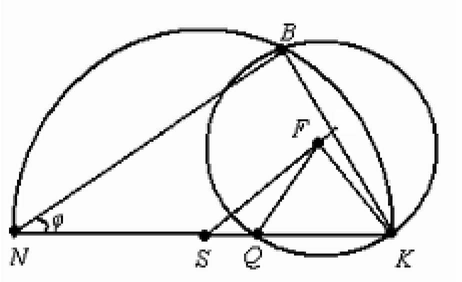
$$f(x)=f\Big(\big(x+y(1-f(x))\big)f(yf(x))\Big)$$

для всіх $x>0, y>0$. Позаяк функція f монотонно спадає, то для всіх $x>0, y>0$ $x=\big(x+y(1-f(x))\big)f(yf(x))$. Візьмемо в останній рівності $x=1$, $y=\dfrac{t}{f(1)}$ і позначимо $a=\dfrac{1-f(1)}{f(1)}$. Безпосередня перевірка показує, що для будь-якого $a\ge 0$ функція $f(t)=\dfrac{1}{1+at}$ задовольняє умову задачі.

5. Зафіксуємо ту півплощину з межею NK, в якій лежатиме точка B. Нехай трійка точок A, B, C задовольняє умову задачі, і нехай AP — бісектриса трикутника ABC. Тоді $\angle NBQ=\angle QBP=60^\circ$, а тому BP — бісектриса зовнішнього кута трикутника ABM, і точка P — центр зовнівписаного кола трикутника ABM, яке дотикається до сторони BM. Отже, MP — бісектриса трикутника BMC. Аналогічно, N — центр зовнівписаного кола трикутника BMC, яке дотикається до сторони BM, і MN — бісектриса трикутника BMA. Отже, $\angle NMP=90^\circ$, $\angle NQP=\angle AQC=150^\circ$, $\angle PQK=30^\circ$. Оскільки, зрозуміло, точка K є інцентром трикутника BMC, то $\angle QKP=120^\circ$ і $\angle QPK=30^\circ$. Чотирикутник $BQKP$ є вписаним, і $\angle QBK=\angle KBP=30^\circ$, а тому точка B є відмінною від K спільною точкою описаного кола трикутника QPK і кола з діаметром NK ($\angle NBK=60^\circ+30^\circ=90^\circ$).



За умови $1<\dfrac{NQ}{QK}<3$ промені BN і PQ перетинаються, а також перетинаються й промені BP і NK. Дійсно, доведемо це. Нехай $QK=x$, $NQ=y$. Побудуємо рівносторонній трикутник



FQK так, щоб точки F, P і B лежали по один бік від прямої NQ. Треба показати, що $\varphi = \angle BNQ > 30°$. Нехай S — середина NK. Точка F буде центром описаного кола трикутника QKP. Пряма SF — лінія центрів, $d = SF$, $SF \perp BK$, $\angle FSQ = \varphi$. Маємо: $\sin\varphi = \frac{x}{d}\sin 60°$. Досить довести, що $x\sqrt{3} > d$. За теоремою косинусів для трикутника FSQ: $d^2 = \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + x^2 - 2\frac{y-x}{2}x\cos 120° = \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{1}{2}(y-x)x$. А тоді, як легко встановити, нерівності $3x^2 > d^2$ і $3x > y$ є рівносильними. Отже, промені BN і PQ насправді перетинаються. Для того, щоб довести, що й промені BP і NK перетинаються, досить показати, що відстань $\rho(B;NK)$ від точки B до прямої NK більше відстані від точки P до цієї ж прямої. Маємо, що $\rho(P;NK) = \rho(F;NK)$. Якщо точка S співпадає з Q, то $\rho(B;NK) = \rho(F;NK)$, а тому, зрозуміло, за умови $1 < \frac{NQ}{QK} < 3$ справджується нерівність $\rho(B;NK) > \rho(F;NK)$.

Нехай тепер A — точка перетину променів BN і PQ, C — точка перетину променів BP і NK. Залишається довести, що в отриманому трикутнику ABC точка Q насправді буде інцентром. Для цього покажемо, що CQ — бісектриса кута ACB. Зауважимо, що $\angle MCB < 60°$, $\angle BMC > 60°$, а тому $BM < BC$. Нехай T така точка сторони BC, що $BT = BM$, тобто трикутник BMT є рівностороннім. Тоді $\angle MKC = \angle MTC = 120°$, і точки M, K, T, C лежать на одному колі, трикутники MBK і TBK рівні, а тому $MK = KT$. Звідси випливає, що $\angle MCK = \angle KCT$.

Друга трійка точок A, B і C утворюється, якщо B міститься в іншій півплощині відносно прямої NK.

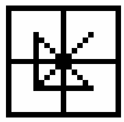
6. *Відповідь*: $m=1$, $n=2$; $m=2$, $n=1$. Нехай m та n такі натуральні числа, що для деяких натуральних x і y виконується рівність $x^m y^n = (x+y)^2 + 1$. Тоді $x \mid y^2+1$ і $y \mid x^2+1$. Якщо $x = y$, то $x \mid x^2+1$. Звідки випливає, що $x = y = 1$. Але пара $(1;1)$ не задовольняє дане рівняння.

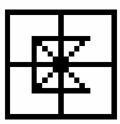
Не порушуючи загальності, ми можемо вважати, що $x < y$. При $x = 1$ одержуємо: $y^n = (1+y)^2 + 1$. Тоді $0 \equiv 2 \pmod{y}$. Звідки випливає, що $y = 2$. Але пара $(1;2)$, очевидно, не задовольняє дану рівність. Отже, $2 \le x < y$. Тоді $x^m y^n = (x+y)^2 + 1 < 4y^2 \le x^2 y^2 < xy^3 \le x^m y^3$. Звідси й випливає, що $n < 3$. При $n = 2$ маємо, що $x^m < 4$, тобто $2^m \le x^m < 4$. Для $m = 1$ і $n = 2$ дане рівняння має розв'язок: наприклад, $(2;5)$. При $n = 1$ маємо, що $x^m < 4y$. Оскільки $y \mid x^2+1$, то можливі наступні випадки. Нехай $y = x^2+1$, тоді $x \mid y^2+1 = x^4 + 2x^2 + 2$, тобто $x=2$, $y=5$. Тому одержуємо, що $2^m \cdot 5=(2+5)^2+1=50$, що неможливо. Таким чином, $x^2+1\geq 2y$, $x^m<2\left(x^2+1\right)$. Звідси знаходимо, що для $m\geq 4$ $x^4\leq x^m<2\left(x^2+1\right)$, $x^4<2\left(x^2+1\right)$, $\left(x^2-1\right)^2\leq 3$, що є неможливим для $x\geq 2$. Отже, $m\leq 3$. Якщо $m=3$, то $x^3<2\left(x^2+1\right)$, $x^2(x-2)<2$, $x=2$, а тому $y\leq\frac{5}{2}$, $y=2$, що суперечить нерівності $2\leq x<y$. Якщо $m=2$, то розв'язок у даного рівняння існує: наприклад, $(2;5)$. Якщо $m=1$, то одержуємо рівняння $xy=(x+y)^2+1$, котре не має розв'язків у натуральних числах.

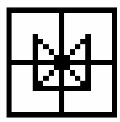
7. Легко отримати, що $\angle BRQ=90^\circ-\frac{\angle ABC}{2}$, $\angle MNB=\frac{\angle ABC}{2}$. Отже, $NX\perp YR$. Аналогічно, $RX\perp NR$. Отже, точка X — ортоцентр трикутника NRY, а тому $YX\perp BC$. Доведемо тепер, що $AX\perp BC$. Проведемо через вершину A пряму $\mathbf{l}\perp BC$, і нехай $X'=MN\cap\mathbf{l}$. Позначимо через p півпериметр трикутника ABC. Тоді, використовуючи теорему синусів для трикутника AMX', маємо: $\frac{AX'}{\sin\frac{\angle ABC}{2}}=\frac{p-AC}{\sin\left(90^\circ+\frac{\angle ABC}{2}\right)}$, $AX'=(p-AC)\operatorname{tg}\frac{\angle ABC}{2}$. Звідси випливає, що довжина відрізка AX' дорівнює радіусові r вписаного кола трикутника ABC. Якщо ж $X''=RS\cap\mathbf{l}$, то так само встановлюється, що $AX''=r$. Таким чином, точки X, X' і X'' співпадають, і задачу розв'язано.

8. *Відповідь*: $(3n-2)(m-1)$. Таке значення суми досягається, якщо, наприклад, фішки розставити в усіх клітинках стовпчиків з парними номерами.

Спочатку розглянемо випадок $m=n$ і скористаємось методом математичної індукції. База є тривіальною. Індукційний крок від таблиці розміром $n\times n$ до таблиці розміром $(n+1)\times(n+1)$ (один рядок додається знизу і один стовпчик — ліворуч) вимагає доведення того, що сума записаних чисел може збільшитися щонайбільше на $6n-2$. Для зручності введемо поняття *стандартного* 2×2*-блоку* (див. рисунок). У кожному *стандартному* блоці, як ми бачимо на рисунку, проведено спеціальним чином чотири відрізки. Відрізок назвемо *відміченим*, якщо він сполучає клітинку, в якій стоїть фішка, з клітинкою, в якій записано число. Кожен *стандартний* блок, як нескладно переконатись, містить не більше від трьох *відмічених* відрізків. Розглянемо $2n-1$ *стандартний* 2×2-блок, які породжуються доданим $(n+1)$-м стовпчиком і доданим $(n+1)$-м рядком. Ці блоки розташовані у "вигляді" літери $\mathbf{L}$, при цьому верхній блок і крайній справа блок ми, зрозуміло, повинні "модифікувати", проводячи в кожному з них ще по одному *особливому* відрізку (див. відповідні рисунки і порівняйте їх із зображенням стандартного блоку). А тоді треба довести, що загальна кількість







відмічених відрізків у $2n-3$ *стандартних* блоках і двох *модифікованих* не перевищує $6n-2$. Якщо це не так, то очевидно, що кожен *стандартний* блок має містити рівно по три *відмічені* відрізки, а кожен *модифікований* — по чотири, причому *відміченими* мають опинитися обидва *особливі* відрізки. Утім, нескладним перебором можна пересвідчитись (пропонуємо це читачеві як невеличку вправу), що з дотриманням таких вимог *обидва* особливі відрізки одночасно виявитись *відміченими* не можуть.

Нехай тепер $m \geq n$. Зафіксуємо n і знов-таки використаємо індукцію, базою якої буде розглянутий вище випадок $m=n$. Тоді індукційний крок $m \to m+1$ потребує доведення, що сума записаних чисел може збільшитися щонайбільше на $3n-2$. Такий крок вимагає розглядання $n-1$ блоку (див. попередню частину розв'язання), з яких $n-2$ є *стандартними*, а один — верхній — відповідним чином *модифікованим*. Залишається тільки помітити, що $3n-2=3(n-2)+4$.

Завдання олімпіади для учасників турніру

1. У кожній вершині куба записали одне з двох чисел: 1 або -1. Потім на кожній грані куба записали добуток чисел, які знаходяться в чотирьох її вершинах. Учень обчислив суму всіх цих чотирнадцяти чисел. Знайдіть усі можливі значення цієї суми.
2. Розв'яжіть рівняння
$$(x-1)(2x-3)(4x-5)^2=9.$$
3. Знайдіть усі трійки простих чисел p, q, r, для яких справджується рівність
$$p(p+3)+q(q+3)=r(r-3).$$
4. На площині задано пряму m та дві точки A і B по один бік, але — на різних відстанях від неї. На прямій m відмітили точку C, рівновіддалену від A і B. Відомо, що для точки $D \in m$ $AD+BD=\min\limits_{X\in m}(AX+BX)$. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.
5. На столі знаходиться n сірників. Двоє гравців по черзі забирають їх зі столу. За один хід дозволяється забрати один або два сірники, але один і той самий гравець не має права двічі поспіль забирати один сірник (два сірники двічі поспіль брати дозволяється). Програє той, хто не зможе зробити свій черговий хід. Знайдіть усі такі n, для яких перемогу собі може забезпечити той з гравців, хто розпочинає гру. Опишіть цю стратегію.

Відповіді та вказівки до розв'язання задач олімпіади

1. *Відповідь*: $-10; -6; -2; 2; 6; 14$. Зрозуміло, що всі значення таких сум лежать у проміжку $[-14;14]$. Нескладно показати, що всі вони дають остачу 2 за $\mathrm{mod}\,4$. Значення -14 отримати, очевидно, неможливо. Суму, рівну 10, також

отримати ми не зможемо. Дійсно, для цього треба мати два доданки, рівні -1, але тоді, як легко довести, у вершинах куба мають стояти чотири числа, рівні 1, і два числа, рівні -1. Залишається переконатись, що тоді два від'ємні числа з'являються на гранях куба. Для всіх значень, що містяться у відповіді, наводяться приклади.

2. *Відповідь*: $\frac{1}{2}$; 2. Зробіть заміну $y = 4x - 5$.

3. *Відповідь*: $(3;2;7)$, $(3;7;11)$, $(2;3;7)$, $(7;3;11)$. Міркуваннями за $\bmod 3$ встановлюємо, що принаймні одне з чисел p або q має ділитися без остачі на 3, тобто дорівнювати 3. Якщо $p = 3$, то дана рівність записується у вигляді $(r+q)(r-q-3)=18$, звідки дістаємо дві перші трійки. Аналогічно розглядається випадок $q = 3$.

4. Нехай описане коло трикутника ABC вдруге перетинає пряму m в точці M. Нескладно довести, що точки M і D співпадають.

5. *Відповідь*: перший гравець має виграшну стратегію тоді й тільки тоді, коли $n \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod 7$. Легко довести, що якщо своїм ходом гравець у процесі гри залишає суперникові кількість сірників, яка за $\bmod 7$ дає остачі 0 або 4, то цей гравець може забезпечити собі перемогу. Крім того, якщо $n \equiv 3 \pmod 7$, то другий гравець може залишити першому кількіть сірників, яка ділиться без остачі на 7.