

**Механіко – математичний факультет**  
**Задачі заочного туру олімпіади КУ-2003.**

1. Знайти всі значення параметра  $n$ , для кожного з яких многочлен  $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x + n$  є добутком двох квадратних тричленів з цілими коефіцієнтами.
2. Три натуральні числа утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 38.
3. Два кола, що дотикаються зовні між собою, мають радіуси  $r$  та  $3r$  і дотикаються до деякої прямої в точках  $A$  та  $B$  відповідно. Ці точки одночасно починають рухатись за годинниковою стрілкою кожна по своєму колу зі швидкостями, які відносяться як 22 до 21. Довести, що точки  $A$  та  $B$  зустрінуться. Скільки повних обертів зробить точка  $A$  до першої зустрічі?
4. Довжина кожної сторони трикутника не перевищує 1. Довести, що квадрат його площі не перевищує  $3/16$ .
5. Сума квадратів всіх сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей. Довести, що чотирикутник є паралелограмом.
6. Довжина сторін трикутника 10 см та 15 см. В яких межах може змінюватись довжина бісектриси кута між ними?
7. Побудувати графіки функцій

$$y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x, \quad y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ \log_{1/2}(1-x), & \text{якщо } x < 0, \end{cases}, \quad y = \begin{cases} e^{-x} - 1, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

8. Зобразити на координатній площині  $Oxy$  множину точок, для координат  $(x; y)$  яких справджується рівність:
  - а)  $xy^2 - x^2y + 2y - xy + x^2 - 2 = 0$ ;
  - б)  $\left| x + \sqrt{x^2 - y^2} \right| + \left| x - \sqrt{x^2 - y^2} \right| = |x + y| + |x - y|$ .
9. На графіку функції  $y = x + \ln(1 + x)$  вказати точку, в якій дотична до графіка паралельна до прямої, що проходить через точки  $A(-2; 1)$  і  $B(1; 7)$ .
10. Яким має бути число  $a$ , щоб для довільних  $x$  справджувалась тотожність  $\sin(x + 5a) = \sin x + \sin(x - 8a)$ ?
11. Довести, що  $\sqrt{5 - x - 2y} + \sqrt{x + 3} + \sqrt{y + 1} \leq 5$ . При яких значеннях  $x$  і  $y$  виконуватиметься рівність?
12. Довести нерівність  $15 + 3\sin^2 x + 2\sin x + 4\cos x > 6\sin 2x + 6\cos^2 x$ .

13. Знайти всі значення  $a$ , щоб кількість цілих чисел  $x$ , які є розв'язками нерівності  $x^4 - (a - 2)x - a \leq 0$ , була найменшою.
14. З'ясувати, скільки коренів має рівняння в залежності від параметра  $a$  :
- а)  $x^5 = 5x + 2a$ ;                      б)  $x^2 - ae^x = 0$ .
15. Розв'язати рівняння:
- а)  $\log_2(9x + 2) = \log_3(16x + 3)$ ;
- б)  $\sqrt[3]{3x + 1 + \sqrt{x(x + 3)^2}} + \sqrt[3]{3x + 1 - \sqrt{x(x + 3)^2}} = 2$ .
16. Нехай  $ABCD$  – тетраедр, в якому  $E, F$  – середини ребер  $AB$  і  $CD$  відповідно,  $DE \perp CE$  і  $AF \perp BF$ . Довести, що  $AB = CD$ .
17. Довести, що довільну правильну трикутну піраміду можна перетнути площиною так, щоб в перерізі утворився квадрат.
18. Твірні конуса нахилені до площини його основи під кутом  $\alpha$ . Нескінченна послідовність куль  $K_1, K_2 \dots$  розміщена так, що перша з них (найбільшого радіуса) вписана в конус, а кожна наступна куля дотикається до попередньої і до всіх твірних конуса. Яку частину об'єму конуса становить сума об'ємів всіх куль?