Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факуль-тет. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру олімпіади зараховуються до університету за результатами співбесіди.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко – математичного факультету не пізніше 31 березня 2004 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище ____

Ім'я ____

По-батькові ____

Область ____

Місто, село ____

Номер школи, клас ____

Адреса школи, телефон ____

Домашня поштова адреса, телефон __________________________________

Зошити надсилаються за адресою:

001033, Київ-33,

Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

жюрі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

Заочний тур олімпіади механіко – математичного факультету (2004)

1.Чи обов’язково буде паралелограмом чотирикутник, у якому діагоналі при перетині розбивають його на чотири трикутники з рівними площами ?

2. Довести, що фігура, утворена об’єднанням двох графіків $y = 2x^2 + x - 3$ і $y = - 2x^2 - 3x + 1$ має центр симетрії. Знайти координати цього центру.

3. Довести, що для довільного натурального n має місце тотожність

$$(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot\ldots\cdot(2n - 1)\cdot(2n) = 2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n - 6)\cdot(4n - 2)$$

4. Розв’язати рівняння

$$8^x + 18^x = 2\cdot 27^x.$$

5. Нехай дві менші сторони трикутника дорівнюють *2* і *4*. В яких межах може змінюватись середній за величиною кут трикутника ?

6. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3=2. \end{cases}$$

7. Побудувати графіки:

а) $y=\log_2\left(\dfrac{x+|x|}{2}+2\right)-2$; б) y = arcos(cosx).

8. Розв’язати нерівність $(\sin x+1)\cdot(\cos x-1)\cdot(2\sin x+1)\cdot(2\cos x-\sqrt{3})\ge 0$.

9. Нехай $\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{2}$. Знайти найбільше значення виразу

$$\sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y).$$

10. Довести, що число $tg\dfrac{\pi}{24}+ctg\dfrac{\pi}{6}-4\cos\dfrac{\pi}{12}$ є цілим і знайти це число.

11. Довести, що для довільних x і y справджується нерівність

$$\sin x+\sin y-\cos 2x\cdot\sin y-\sin x\cdot\cos 2y-2\sin x\cdot\sin y\le 2.$$

12. Знайти раціональне число $\dfrac{p}{q}$ з найменшим знаменником, щоб справджувалась нерівність $\dfrac{5}{18}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{2}{7}$.

13. Нехай *A, B* – деякі точки простору, *L* – пряма. Чи завжди на прямій *L* можна знайти таку точку *M*, щоб *AM* = *BM* ? Відповідь обгрунтувати.

14. Нехай у трикутній піраміді *ABCD* ребро $CD=\sqrt{3}$, а всі інші ребра дорівнюють $\sqrt{2}$. Знайти величину двогранного кута між гранями *ABD* і *ABC*.

15. Основою піраміди є трикутник, сторони якого дорівнюють *3* см, *25* см і *26* см. Площі відповідних бічних граней дорівнюють *12* см^2, *100* см^2 і *104* см^2. Знайти висоту піраміди.

16. Знайти усі пари $(a;b)$, для кожної з яких нерівність $|2x^2+ax+b|\le 1$ справджується для усіх чисел x, що належать проміжку $[1;3]$.

17. Нехай $f(a)$ – найбільше значення функції $g(x)=a^3-3ax^2+2x^3$ при $x\in[-1;1]$. Побудувати графік $y=f(x)$.

18. Відомо, що три сторони чотирикутника дорівнюють 6. Якою має бути четверта сторона цього чотирикутника, щоб він мав найбільшу площу ?

19. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_{4x^2-11x+7}(x-a)=1$ має єдиний розв’язок ?

20. Послідовність натуральних чисел x_n задана формулою $x_{n+1}=4x_n+1$, де $x_1=1$. Які з чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ будуть простими ?