Заочний тур олімпіади механіко-математичного факультета (2005)

1. Чи обов'язково будуть рівними подібні трикутники, якщо дві сторони одного із них дорівнюють двом сторонам іншого? Відповідь обгрунтувати.

2. З'ясувати, чи можна розмістити коло радіуса 2см всередині трикутника зі сторонами 5см, 12см і 13см так, щоб вони не мали жодної спільної точки.

3. Побудувати графіки
   (a) $y = \frac{\cos x - |\cos x|}{2\cos x}$,
   (b) $y = \frac{2^x|x-1|}{3^x(x-1)}$,
   (c) $y = \frac{|x-2|}{x+1}$.

4. Діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні і одна із них дорівнює 6 см. Відрізок, що сполучає середини двох сторін чотирикутника, дорівнює 5 см. Знайти площу чотирикутника.

5. Задано трикутник зі сторонами a, b, c і площею 1. Відомо, що $a \geqslant b \geqslant c$. Довести, що:
$$b \geqslant \sqrt{2}.$$

6. Знайти усі натуральні числа n, для яких дріб
$$\frac{11n+8}{7n+3}$$
можна скоротити.

7. Розв'язати нерівність
$$|x-1| - |x+2| + 2x \geqslant 3^{-x-3} - 4.$$

8. Нехай $a = \log_{105} 294$, $b = \log_{70} 21$. Виразити число $x = \log_{14} 21$ через a і b.

9. Чи є раціональним число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

10. На дузі параболи $y = x^2 + 2x - 1$, що з'єднує точки $M(0; -1)$ і $N(-3; 2)$ знайти таку точку K, щоб площа трикутника MNK була найбільшою.

11. Довести, що рівняння
$$\frac{x^{17} - x^5}{x^{22} - 1} = \frac{6}{11}$$
не має жодного дійсного кореня.

12. Задано n додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, що $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Довести, що
$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

13. Довести, що серед членів послідовності x_n, заданої умовою $x_{n+1} = 32x_n - 85$ де $x_1 = 3$ простими числами будуть тільки x_1 та x_2.

14. З'ясувати, скільки коренів має рівняння $5\cos 3x - 3\cos 5x = a$ на проміжку $[0; 2\pi]$ в залежності від значення параметра a.

15. Знайти найменше значення суми відстаней від довільної точки простору до усіх вершин паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо задані вершини: $A(1; 3; 2)$, $B(2; 5; 4)$, $D(-1; 1; 0)$, $A_1(3; 0; -2)$.