**Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка**

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру олімпіади зараховуються до університету за результатами співбесіди.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко – математичного факультету не пізніше 20 березня 2006 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище ______________________________________________

Ім'я __________________________________________________

По-батькові ____________________________________________

Область _______________________________________________

Місто, село ____________________________________________

Номер школи, клас ______________________________________

Адреса школи, телефон ____________________________________

Домашня поштова адреса, телефон ___________________________

_____________________________________________________________

Зошити надсилаються за адресою:

001033, Київ-33,

Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

**Заочний тур олімпіади з математики**

**механіко–математичного факультету в 2006 році**

1.Скількома способами можна провести пряму, яка поділяє навпіл як площу, так і периметр трикутника зі сторонами 9 см, 10 см, 11 см?

2. Знайти усі пари цілих чисел $(x,y)$, для яких $\sqrt{xy}-\sqrt{x}=\sqrt{87-6\sqrt{y}}$ .

3. В прямокутнику $ABCD$ сторона $BC=3AB$. В середині прямокутника знаходиться така точка $N$, що $CN=\sqrt{2}$, $BN=\sqrt{17}$, $DN=1$. Знайти $cos\angle DCN$.

4. Знайти всі натуральні числа $n$, щоб число $n^4-3n^2+9$ було простим.

5. В чотирикутнику $ABCD$ виконуються рівності $AB=BD$, $\angle BAC=30^0$, $\angle DBC=3^0$, $\angle BCA=31^0$. Знайти $\angle BDC$.

6. Довести , що $ctg(\frac{\pi}{4}-\alpha)+ctg\frac{\pi}{4}+ctg(\frac{\pi}{4}+\alpha)\geq 3$ при умові

$2\pi k-\frac{\pi}{4}<\alpha<2\pi k+\frac{\pi}{4}$, де $k\in Z$.

7. Нехай $A,B,C,D,E$ – довільні точки простору, точки $K,L,M,N,P,Q$ лежать на відрізках $AB,BC,CD,DE,KM,LN$ відповідно, $AK:KB=2:1$, $BL:LC=3:1$, $CM:MD=1:1$, $DN:NE=1:6$, $KP:PM=4:1$, $LQ:QN=7:8$. Довести, що $PQ$ паралельно $AE$ і знайти $PQ:AE$.

8. Довести, що число $\underbrace{11\ldots1}_{n\,цифр}2\underbrace{155\ldots5}_{n-1\,цифра}801$ є квадратом цілого числа.

9. Нехай $S$ – вершина піраміди, основою якої є трапеція $ABCD$ $(BC\,||\,AD)$. Кути між гранями $BCS, ADS$ і основою дорівнюють відповідно $70^0$ і $50^0$. Знайти величину кута між гранями $BCS$ і $ADS$.

10. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+yz=1, \\ z^2-xy=3, \\ y^2+zx=2. \end{cases}$

11. Зобразити в прямокутній системі координат $Oxy$ множину точок $(x,y)$, координати яких задовольняють умову $|x-y|+xy\leq 0$.

12. Нехай для внутрішніх кутів $\alpha,\beta,\gamma$ трикутника справджується рівність

$sin\frac{3\alpha}{2}+sin\frac{3\beta}{2}-sin\frac{3\gamma}{2}-cos\frac{3\alpha}{2}-cos\frac{3\beta}{2}-cos\frac{3\gamma}{2}=1.$

Довести, що один із кутів трикутника дорівнює $60^0$ або $120^0$.

13. У якому відношенні ділить об’єм куба площина, що проходить через середини його трьох попарно мимобіжних ребер?

14 Знайти найменше і найбільше значення виразу $L=\frac{2x+y-5}{x+5y-9}$, де $\begin{cases} 3\leq x\leq 4 \\ 2\leq y\leq 5 \end{cases}$.

15 Знайти всі значення параметра $a$, при яких рівняння

$(a+1)tg^2x-\frac{2a+4}{cosx}-7a+1=0$ має більш одного розв’язку на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.