

Всеукраїнська олімпіада з математики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Очний тур

23 квітня 2017 року

Варіант 1

1. а) Вказати координати хоча б одного ненульового вектора, паралельного до прямої $x + 2y = 5$.
- б) Знайти координати такої точки M прямої $x + 2y = 5$, що вектор \overrightarrow{PM} з початком у точці $P(-1; -3)$ перпендикулярний до прямої $2x + 5y = 1$.

2. а) Розв'язати рівняння $(x^2 - 7x + 6) \log_5(2 - x) = 0$.

- б) При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a) \log_5(2 - x) = 0$$

має рівно два корені?

3. а) Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{4}{25}\right)^{4-x}.$$

- б) Побудувати на координатній площині множину всіх точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівності

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} \geq \left(\frac{25}{4}\right)^{|y|} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-4}.$$

4. а) Обчислити

$$\cos \frac{23\pi}{12}.$$

- б) Перевірити, що розв'язок рівняння

$$\frac{2}{9} x = \left(\sin \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} \right)^2$$

є цілим числом.

5. а) Знайти радіус сфери, описаної навколо чотирикутної піраміди, основою якої є квадрат зі стороною a , а одне з її бічних ребер перпендикулярне до основи і теж має довжину a .
- б) Основою чотирикутної піраміди є квадрат. Одне з її бічних ребер перпендикулярне до основи. Якою повинна бути висота піраміди, щоб радіус описаної навколо неї сфери був мінімальним, якщо об'єм піраміди дорівнює 72 см^3 ?

Всеукраїнська олімпіада з математики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Очний тур

23 квітня 2017 року

Варіант 2

1. а) Вказати координати хоча б одного ненульового вектора, перпендикулярного до прямої $-x + 2y + 4 = 0$.
- б) Знайти координати такої точки M прямої $-x + 2y + 4 = 0$, що вектор \overrightarrow{PM} з початком у точці $P(4; 1)$ паралельний до прямої $-2x + 8y + 5 = 0$.

2. а) Розв'язати рівняння $(x^2 - 6x + 8) \log_2(x - 3) = 0$.

- б) При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a) \log_2(x - 3) = 0$$

має рівно два корені?

3. а) Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{x+3} > \left(\frac{4}{3}\right)^{x+6}.$$

- б) Побудувати на координатній площині множину всіх точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівності

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{|y-3|} > \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{16}{9}\right)^{|y|-3}.$$

4. а) Обчислити

$$\sin \frac{9\pi}{8}.$$

- б) Перевірити, що розв'язок рівняння

$$(10 + \sqrt{2})x = 16 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$$

є цілим числом.

5. а) Знайти радіус сфери, описаної навколо трикутної піраміди, основою якої є правильний трикутник зі стороною a , а одне з її бічних ребер перпендикулярне до основи і теж має довжину a .

- б) Основою трикутної піраміди є правильний трикутник. Одне з її бічних ребер перпендикулярне до основи. Якою повинна бути висота піраміди, щоб радіус описаної навколо неї сфери був мінімальним, якщо об'єм піраміди дорівнює 9 см^3 ?