

Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходить в два тури. Перший — заочний, другий — очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 1 березня 2012 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище

Ім'я

По-батькові

Область

Місто, село

Номер школи, клас

Адреса школи, телефон

Домашня поштова адреса, телефон

.....

Зошити надсилаються за адресою:

01601 МСП, Київ, Володимирська, 64,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

Заочний тур олімпіади з математики механіко-математичного факультету в 2012 році

1. Пункти A , B , C розташовані у вершинах рівностороннього трикутника зі сторонами 168 км. Із A в B починає рухатись автомобіль зі швидкістю 30 км/год. Одночасно із B в C виїжджає автомобіль зі швидкістю 60 км/год. Через який час відстань між автомобілями буде найменшою?

2. Скласти рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$:
 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x - 8$.

3. Чи можуть бути послідовними членами геометричної прогресії числа b , c , $2b - a$, якщо числа ab , b^2 , c^2 є послідовними членами арифметичної прогресії?

4. На сторонах трикутника ABC розташовані точки L , M , K так, що $AL : LB = \frac{1}{3}$, $BM : MC = 2$, $CK : KA = \frac{1}{2}$. В якому відношенні пряма KL поділяє відрізок AM ?

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ \frac{1 + y^2}{1 + x^2} = 5. \end{cases}$$

6. Знайти найбільше і найменше значення виразу $2x^2 - xy - y^2$ за умови, що $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$.

7. Довести, що площа правильного восьмикутника дорівнює добутку його найкоротшої і найдовшої діагоналей.

8. Розв'язати рівняння

$$\log_2(9x + 5 - 9p) + \log_3(16p - 5 - 16x) = 0.$$

При якому значенні параметра p сума квадратів розв'язків рівняння буде найменшою?

9. У якому відношенні ділить об'єм куба площина, що проходить через середини його трьох попарно мимобіжних ребер?

10. Порівняти числа $A = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$ та $B = \sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$.

11. Довести, що для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ має місце нерівність

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0.$$