Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 15 лютого 2009 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище ____

Ім'я ____

По-батькові ____

Область ____

Місто, село ____

Номер школи, клас ____

Адреса школи, телефон ____

Домашня поштова адреса, телефон _________________________________

Зошити надсилаються за адресою:

01033, Київ-33, Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
жюрі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

Заочний тур олімпіади з математики механіко–математичного факультету в 2009 році

1. Розв'язати рівняння $\log_3 \frac{x^2}{1-x^2} = \log_2 x$.

2. Знайти усі пари цілих чисел (x, y) для яких виконується рівність

$$\sqrt{2x-y-3} + \sqrt{2y-x+3} = 2 \cdot \sqrt{3-x-y}.$$

3. В трикутнику ABC точки D, E, F належать сторонам AB, BC і CA відповідно. Обчислити площу трикутника, утвореного прямими CD, BF, AE, якщо $AD = \frac{1}{3}AB$, $BE = \frac{1}{3}BC$, $CF = \frac{1}{3}CA$ і площа трикутника ABC дорівнює S.

4. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sin x \le \frac{1}{2}, \\ \cos 2x \ge -\frac{1}{2}, \\ \sin \frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

5. Зобразити на координатній площині xOy множину усіх точок (x, y), координати яких задовольняють умову $x^2 = y + \sqrt{x+y}$.

6. Трапеція може мати такі властивості:

(1) діагоналі трапеції перпендикулярні;

(2) менша бічна сторона є середнім геометричним основ трапеції;

(3) один із кутів трапеції – прямий.

Довести, що із довільних двох властивостей, вказаних вище, випливає третя.

7. Знайти найбільше значення функції

$$z = \sin^2(x+y)\cos(x-y) + \sin^2(x-y)\cos(x+y),$$

якщо $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$.

8. Розв'язати рівняння $2^{x^4-3x^3+2x^2-x} + 2^{x^4-5x^3+6x^2+x} = 2$.

9. Знайти усі значення параметра p, при яких рівняння

$$25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$$

має 5 різних дійсних розв'язків, що утворюють арифметичну прогресію.

10. Довести, що існує просторовий неопуклий рівносторонній семикутник, кожні дві сусідні сторони якого перпендикулярні.