

Олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко - математичний факультет. Олімпіада проходить в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко - математичного факультету не пізніше 1 березня 2010 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

АНКЕТА УЧАСНИКА ОЛІМПІАДИ

Прізвище _____

Ім'я _____

По-батькові _____

Область _____

Місто, село _____

Номер школи, клас _____

Адреса школи, телефон _____

Домашня поштова адреса, телефон _____

Зошити надсилаються за адресою:

01601 МСП, Київ, Володимирська, 64,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади з математики, механіко-математичний факультет.

**Заочний тур олімпіади з математики
механіко–математичного факультету в 2010 році**

1. Знайти добуток перших n членів геометричної прогресії, якщо їх сума дорівнює S_1 , а сума чисел, обернених до перших n членів прогресії, дорівнює S_2 .
2. Нехай висоти трикутника ABC , проведені з вершин A і B , ділять на три рівних частини бісектрису, проведену з вершини C . Знайти косинус кута C .
3. Площа трикутника дорівнює $\sqrt{3}$ $см^2$, а його периметр дорівнює 6 см. Довести, що трикутник обов'язково буде правильним.
4. Розв'язати рівняння
а) $\sqrt[4]{1-x^4} = \sqrt[5]{1-x^5}$,
б) $\sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + x(3-4x^2) = \sqrt{2}$,
в) $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.
5. Кожна з п'яти труб незалежно наповнює басейн водою. Перша, друга і третя труби, працюючи разом, наповняють басейн за 6 годин; перша, третя, четверта і п'ята – за 3 години; друга, четверта і п'ята – за 4 години. За скільки годин наповнять басейн усі п'ять труб, працюючи одночасно?
6. Яке число більше: $\sin 3$ чи $\sin 3^\circ$?
7. Знайти всі квадратні тричлени $f(x)$, для яких справджуються усі нерівності $f(1) \geq 5$, $f(2) \leq 4$, $f(3) \geq 2$, $f(4) \leq -1$.
8. Нехай a, b, c - довжини сторін трикутника, $a \leq c$, $b \leq c$. Довести, що $4 < \frac{13a + 9b - 5c}{2a + b} \leq \frac{17}{3}$.
9. Нехай A, B, C, D - довільні точки простору. Якщо існує така точка O , що $2\vec{OA} + 3\vec{OC} = \vec{OB} + 4\vec{OD}$, то $2\vec{MA} + 3\vec{MC} = \vec{MB} + 4\vec{MD}$ для довільної точки M простору. Довести це твердження.
10. Побудувати графіки функцій: а) $y = \log_2 \frac{|x+1| - x}{(2x+1)^2}$,
б) $y = \sin 3x + 3\sin x$.
11. Розв'язати нерівність $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x \cdot (2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$.