Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ТЕОРІЯ КРИВИХ.

Київ — 2016

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. П. Петравчук,
д-р фіз.-мат. наук, проф. І. О. Парасюк,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. О. Пришляк

Упорядники:
С. В. Білун,
І. М. Циганівська

Збірник завдань до практичних занять з диференціальної геометрії. Теорія кривих. Київ — 2016. — 27 с.

Посібник розраховано на проведення десяти занять з теорії кривих. Посібник призначений для студентів механіко-математичного факультету.

Зміст

Передмова 4

1. ПРОСТОРОВІ КРИВІ 5

1.1. Векторна функція скалярного аргумента. 5
1.2. Дотична до кривої. Довжина дуги. Тригранник Френе. . 8
1.3. Формули Сере-Френе для кривої. Кривина. Скрут. 14
1.4. Дотик кривих. Дотик лінії з поверхнею. Стична сфера. . 17

2. ПЛОСКІ КРИВІ 19

2.1. Дотична і нормаль. Особливі точки. 19
2.2. Еволюти і евольвенти. Радіус кривини. 21
2.3. Дискримінантна крива. 23

Відповіді 25

Список літератури 26

Передмова

Даний посібник призначений для студентів математичних факультетів університетів, а також може бути використаний іншими навчальними закладами, у яких вивчається дисципліна «Диференціальна геометрія». Він містить задачі з тих розділів, які входять до типової програми з диференціальної геометрії.

Диференціальна геометрія вивчає властивості ліній і поверхонь в околі кожної точки. Даний посібник присвячений вивченню лише частини диференціальної геометрії, а саме, вивченню просторових та плоских кривих та їх властивостей. Вивчення цієї теми розбито на десять практичних занять. Для зручності перед практичними заняттями наведено короткі теоретичні відомості, в яких студент легко може знайти усі необхідні формули для розв'язання наведених нижче завдань. Після кожного практичного заняття наведено домашнє завдання, яке містить завдання аналогічні до аудиторних. Ці завдання студент повинен опрацьовувати самостійно для закріплення вивченого матеріалу.

Посібник складається з двох розділів: «Просторові криві», «Плоскі криві». Кожен розділ розбито на декілька підрозділів. Навчальний посібник містить понад 125 завдань різної складності, до переважної більшості яких наведено відповіді та вказівки, що дозволяє забезпечити отримання необхідних знань з кожної наведеної теми.

1. ПРОСТОРОВІ КРИВІ

1.1. Векторна функція скалярного аргумента.

Нехай M- довільна множина точок числової прямої.

Вектор-фунцією називається відображення $\overrightarrow{a}(t)$, яке кожній точці t множини M ставить у відповідність вектор $\overrightarrow{a}(t)$.

Вектор $\overrightarrow{a}_0$ називають *границею вектор-фунції* $\overrightarrow{a}(t)$ при $t \longrightarrow t_0$, якщо $|\overrightarrow{a}(t) - \overrightarrow{a}_0(t)| \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow t_0$, і записують

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{a}_0(t)$$

Для вектор-функцій мають місце теореми про границі, аналогічно теоремам про границі для скалярних функцій . Наприклад, якщо $\overrightarrow{a}(t)$ і $\overrightarrow{b}(t)$- вектор-функції, а $\lambda(t)$ - скалярна функція та існують $\lim \overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{a}_0, \lim \overrightarrow{b}(t) = \overrightarrow{b}_0$ і $\lim \lambda(t) = \lambda_0$, то:

1. $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (\overrightarrow{a}(t) \pm \overrightarrow{b}(t)) = \overrightarrow{a}_0 \pm \overrightarrow{b}_0$;
2. $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \lambda(t)\overrightarrow{a}(t) = \lambda_0 \overrightarrow{a}_0$;
3. $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t)) = (\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{b}_0)$;
4. $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t)] = [\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{b}_0]$;

Вектор-функція $\overrightarrow{a}(t)$ називається *неперервною в точці* $t = t_0$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і $\lim \overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{a}(t_0)$.

Нехай $\overrightarrow{a}(t)$- вектор-функція, яка є визначеною на відрізку $[a, b]$. Говорять, що вона має в точці $t \in [a, b]$ *похідну*, якщо існує границя

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{a}(t+h) - \overrightarrow{a}(t)}{h}$$

.

Похідна функції $\overrightarrow{a}(t)$ в точці t позначається $\overrightarrow{a}'(t)$.

Якщо $\overrightarrow{a}(t)$ і $\overrightarrow{b}(t)$ – диференційовані в точці t вектор-функції, а $\lambda(t)$- диференційована в цій точці скалярна функція, то $\lambda(t)\overrightarrow{a}(t)$, $\overrightarrow{a}(t) \pm \overrightarrow{b}(t)$, $(\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t))$, $[\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t)]$ є функціями диференційованими в точці t, причому:

1. $(\lambda(t)\overrightarrow{a}'(t)) = \lambda'(t)\overrightarrow{a}(t) + \lambda\overrightarrow{a}'(t)$;
2. $(\overrightarrow{a}(t) \pm \overrightarrow{b}(t))' = \overrightarrow{a}'(t) \pm \overrightarrow{b}'(t)$;

3. $(\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t))' = (\overrightarrow{a}'(t), \overrightarrow{b}(t)) + (\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}'(t))$;

4. $[\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}(t)]' = [\overrightarrow{a}'(t) \pm \overrightarrow{b}(t)] + [\overrightarrow{a}(t), \overrightarrow{b}'(t)]$.

Похідну від вектор-функції $\overrightarrow{a}'(t)$ називають *другою похідною* від вектор-функції $\overrightarrow{a}(t)$ і позначають $\overrightarrow{a}''(t)$. Аналогічно отримаємо $\overrightarrow{a}'''$, $\overrightarrow{a}^{IV}$, ...

Практичне заняття 1.

1. Довести, що з неперервності вектор-функції $\overrightarrow{r}(t)$ випливає неперервність функції $|\overrightarrow{r}(t)|$. Чи вірне обернене твердження?

2. Довести, що якщо функції $\overrightarrow{r_1}(t)$, $\overrightarrow{r_2}(t)$ і $f(t)$ диференційовані, то мають місце наступні рівності:

а) $(\overrightarrow{r_1}(t) \pm \overrightarrow{r_2}(t))' = \overrightarrow{r_1}'(t) \pm \overrightarrow{r_2}'(t)$,

б) $(f(t), \overrightarrow{r}(t))' = f'(t)\overrightarrow{r}(t) + f(t)\overrightarrow{r}'(t)$,

в) $[\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t)]' = [\overrightarrow{r_1}'(t), \overrightarrow{r_2}(t)] + [\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}'(t)]$.

3. Знайти похідні по t від наступних функцій, де $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$:

а) $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r})$,

б) $[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']$,

в) $\sqrt{[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']^2}$.

4. $|\overrightarrow{r}(t)| = \overrightarrow{const}$ на інтервалі (t_1, t_2). Довести, що $\overrightarrow{r}' \perp \overrightarrow{r}$ на цьому ж інтервалі. Чи вірне обернене твердження?

5. Точка M обертається рівномірно навколо деякої прямої і одночасно переноситься рівномірним рухом паралельно цій прямій. Лінія, яку описує точка M, називається гвинтовою лінією. Скласти рівняння цієї лінії.

6. Знайти проекції гвинтової лінії на координатні площини.

7. Знайти параметризацію кола $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, прийнявши за параметр:

а) кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через початок координат і точку кола;

б) кут між віссю OX і прямою, що проходить через точку кола і його центр.

8. Написати параметричні рівняння кривої: $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

9. Пряма OL, не перпендикулярна до осі OZ, рівномірно обертається навколо неї з постійною кутовою швидкістю, що дорівнює ω. Точка M

рухається по прямій OL зі швидкістю, що пропорційна відстані OM від рухомої точки до точки O. Точка M описує траєкторію, яка називається конічною спіраллю. Скласти параметричні рівняння конічної спіралі.

10. Довести, що для того, щоб крива γ з класу C^1 лежала на сфері необхідно і достатньо, щоб в просторі існувала така точка O, щоб для довільної точки $M \in \gamma$ пряма OM була б нормаллю до γ.

Домашнє завдання.

11. Довести, що якщо функції $\overrightarrow{r_1}(t)$, $\overrightarrow{r_2}(t)$, $\overrightarrow{r_3}(t)$ і $f(t)$ диференційовані, то мають місце рівності:

а) $(\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t))' = (\overrightarrow{r_1}'(t), \overrightarrow{r_2}(t)) + (\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}'(t))$,

б) $(f(t)\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}(t))' = (f'(t)\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}(t)) +$
$+(f(t)\overrightarrow{r_1}'(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}(t)) + (f(t)\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}'(t), \overrightarrow{r_3}(t)) +$
$+(f(t)\overrightarrow{r_1}(t), \overrightarrow{r_2}(t), \overrightarrow{r_3}'(t))$.

12. Знайти похідні по t від наступних функцій, де $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$:

а) $(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'')$,

б) $\sqrt{(\overrightarrow{r}')^2}$,

в) $(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''')$.

13. Довести, що якщо $|\overrightarrow{r}'(t)| = 0$ при всіх $t \in (t_1, t_2)$, то на цьому інтервалі $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{const}$. Чи можна стверджувати обернене?

14. Чи вірна рівність $|\overrightarrow{r}'(t)| = |\overrightarrow{r}(t)|'$?

15. Сферу радіуса $2R$ перетинає поверхня кругового циліндра, діаметр якого дорівнює радіусу сфери, а одна із твірних проходить через центр сфери. Отримана в перетині лінія називається кривою Вівіані. Скласти її рівняння.

1.2. Дотична до кривої. Довжина дуги. Тригранник Френе.

Нехай крива класу C^1 задана рівнянням $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{r}'(t_0) \neq 0$.

Довжина дуги кривої $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ визначається за формулою

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\overrightarrow{r}'(t)| dt \qquad (2.1).$$

Якщо $\overrightarrow{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то формула (2.1) буде мати вигляд

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)} dt \qquad (2.2).$$

Параметр t в параметризації кривої $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ називається натуральним, якщо з точністю до сталого доданку він дорівнює довжині дуги цієї кривої, де довжина дуги відраховується від якої-небудь точки цієї кривої у вибраному напрямку. Натуральний параметр позначається буквою s.

Тригранник Френе.

Розглянемо криві класу C^2. Нехай в точці M вектори $\overrightarrow{r}'$ і $\overrightarrow{r}''$ не колінеарні.

Орт дотичної позначається через $\overrightarrow{\tau}$. Лінія $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau}(t)$ називається *сферичною індикатрисою* дотичних.

Довільна пряма, яка перетинає лінію γ ортогонально дотичній, називається *нормаллю* лінії γ.

Для зручності формули для знаходження базису Френе, а також відповідних ребер і граней тригранника Френе внесемо до таблиці наведеної нижче.

Орт-вектори (базис)	Прямі, які відповідають векторам базиса	Площини, перпендикул векторів
орт дотичної $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{\overrightarrow{r}'}{\lvert\overrightarrow{r}'\rvert}$	*Дотична* напрямний вектор: $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{r}' = \{\overrightarrow{x}'(t), \overrightarrow{y}'(t), \overrightarrow{z}'(t)\}$ $\dfrac{X - x(t)}{\overrightarrow{x}'(t)} = \dfrac{Y - y(t)}{\overrightarrow{y}'(t)} = \dfrac{Z - z(t)}{\overrightarrow{z}'(t)}$ $\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t) = \lambda \overrightarrow{r}'(t)$	*Нормальна площи* $\overrightarrow{x}'(t)\,(X - x(t)) + \overrightarrow{y}'(t)\,(Y$ $+\overrightarrow{z}'(t)\,(Z - z(t)) =$ $\left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t), \overrightarrow{r}'(t)\right)$
орт бінормалі $\overrightarrow{\beta} = \dfrac{[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']}{\lvert[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']\rvert}$	*Бінормаль* напрямний вектор: $\overrightarrow{u_1} = [\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}''] = \{l_1, m_1, n_1\}$ $\dfrac{X - x(t)}{l_1} = \dfrac{Y - y(t)}{m_1} = \dfrac{Z - z(t)}{n_1}$ $\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t) = \lambda[\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t)]$	*Стична площина* $l_1\,(X - x(t)) + m_1\,(Y -$ $+n_1\,(Z - z(t)) =$ $\left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t), \overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t\right.$ $\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - \\ \overrightarrow{x}'(t) & \overrightarrow{y}'(t) & \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{x}''(t) & \overrightarrow{y}''(t) & \overrightarrow{z} \end{vmatrix}$
орт головної нормалі $\overrightarrow{\nu} = [\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\tau}] =$ $= \dfrac{[[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}''], \overrightarrow{r}']}{\lvert[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']\rvert\lvert\overrightarrow{r}'\rvert}$	*Головна нормаль* напрямний вектор: $\overrightarrow{u_1} = [[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}''], \overrightarrow{r}'] =$ $= \{l_2, m_2, n_2\}$ $\dfrac{X - x(t)}{l_2} = \dfrac{Y - y(t)}{m_2} = \dfrac{Z - z(t)}{n_2}$ $\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t) = \lambda[[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}''], \overrightarrow{r}']$	*Спрямна площин* $l_2\,(X - x(t)) + m_2\,(Y -$ $+n_2\,(Z - z(t)) =$ $\left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t), [\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t)],\right.$

Практичне заняття 2.

16. Довести, що крива $\overrightarrow{r} = \{e^{t/\sqrt{2}}\cos t, e^{t/\sqrt{2}}\sin t, e^{t/\sqrt{2}}\}$ лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$. Під яким кутом вона перетинає його прямолінійні твірні?

17. Записати рівняння дотичної до лінії $\overrightarrow{r} = \{\frac{t^4}{4},\ \frac{t^3}{3},\ \frac{t^2}{2}\}$ в точці $t = 2$.

18. Довести, що дотична до гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$ утворює з віссю OZ постійний кут.

19. Скласти рівняння дотичних до наступних ліній:

а) $\overrightarrow{r} = \{e^t,\ e^{-t},\ t^2\}$ при $t = 0$,

б) $\overrightarrow{r} = \{2\cos t,\ 2\sin t,\ t\}$ при $t = \pi$,

в) $\overrightarrow{r} = \{t,\ t^2,\ t^3\}$ при $t = 1$.

20. Знайти дотичну до лінії $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases}$

а) перпендикулярну до вектора $\vec{a} = \{3, 1, 1\}$,

б) паралельну до вектора $\vec{b} = \{1, 0, 1\}$.

21. Визначити довжину одного витка між двома точками перетину з площиною $y = 0$ лінії $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ z = 4a\cos\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

22. Довести, що замкнена лінія $\vec{r} = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$ має довжину $S = 10$.

23. Записати диференціал довжини дуги лінії в полярно-циліндричних координатах.

24. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівняннями $y = y(x),\ z = z(x)$ для $x \in [x_1; x_2]$

25. Записати натуральну параметризацію гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$.

Домашнє завдання.

26. Знайти кут, утворений віссю OZ і дотичною до лінії $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ z = 4a\cos\dfrac{t}{2}; \end{cases}$ в точці, де $t = \frac{\pi}{2}$.

27. Довести, що дотичні до гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$ нахилені до площини XOY під однаковим кутом.

28. Скласти рівняння дотичної до лінії $\overrightarrow{r} = \{t^2, t, e^t\}$, яка паралельна до площини $x + 4y + 1 = 0$.

29. Знайти довжину дуги гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{3a\cos t, 3a\sin t, 4at\}$ від точки її перетину з площиною XOY до точки $M(t_0)$, де $t_0 = 2$.

30. Знайти довжину гіперболічної гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{a\,ch\,s,\ a\,sh\,t, at\}$ між точками, де $t = 0$ і $t = t_0$.

31. Записати диференціал довжини дуги лінії в сферичних координатах.

Практичне заняття 3.

32. Знайти рівняння ребер і граней тригранника Френе для кривих:

а) $\overrightarrow{r} = \{t, t^3, t^2 + 4\}$ при $t = 1$;

б) $\overrightarrow{r} = \{\sin t,\ \cos t,\ tg\,t\}$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

33. Знайти одиничні вектори дотичної, бінормалі і головної нормалі для кривих

а) $\overrightarrow{r} = \{t, t^2, t^3\}$ в довільній точці;

б) $\overrightarrow{r} = \{a(t - \sin\ t),\ a(1 - \cos\ t),\ 4a\ \cos\frac{t}{2}\}$ в довільній точці.

34. Довести, що всі нормальні площини кривої $\overrightarrow{r} = \{a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t\}$ проходять через початок координат.

35. Знайти рівняння ребер і граней тригранника Френе, а також одиничні вектори дотичної, бінормалі і головної нормалі для кривих:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ в точці $M(1; 1; 1)$;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x; \end{cases}$ в точці $M(0; 0; 1)$

36. Скласти параметричні рівняння дотичної до лінії
$\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ x=y; \end{cases}$ в точці $M(x_0;y_0;z_0)$.

Домашнє завдання.

37. Знайти ребра і грані тригранника Френе, а також одиничні вектори дотичної, бінормалі і головної нормалі для кривих:
а) $\overrightarrow{r}=\{\sin t,\cos t,\operatorname{tg} t\}$ при $t=\frac{\pi}{4}$.
б) $\begin{cases} y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ в точці $M(1;3;4)$.

38. Скласти параметричні рівняння дотичної до лінії
$\begin{cases} y^2=x, \\ x^2=z; \end{cases}$ в точці $M(1;1;1)$.

39. Скласти параметричні рівняння головної нормалі і бінормалі лінії:
$\begin{cases} y^2=x, \\ x^2=z; \end{cases}$ в точці $M(1;1;1)$.

Практичне заняття 4.

40. Довести, що головна нормаль гвинтової лінії $\overrightarrow{r}=\{a\cos t,a\sin t,ht\}$ перетинає вісь під прямим кутом.

41. Скласти рівняння нормальної площини лінії $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2-z^2=1; \end{cases}$ в точці $M(x_0;y_0;z_0)$.

42. Знайти стичну площину кривої $\overrightarrow{r}=\{t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{3}\}$, яка проходить через точку $M(0;0;9)$.

43. Знайти головну нормаль кривої $\overrightarrow{r}=\{a\cos t,a\sin t,t\}$, перпендикулярну до вектора $\vec{a}=\{1;-1;3\}$.

44. Від кожної точки гвинтової лінії $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$ на головній її нормалі відкладено відрізок довжини 2. Скласти рівняння

ребер тригранника Френе для лінії, яка буде геометричним місцем кінців цих відрізків.

45. Довести, що лінія $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = 2t$ розташована на поверхні $x^2 + y^2 = e^z$ і її стична площина співпадає з дотичною площиною поверхні.

46. Від кожної точки лінії $\overrightarrow{r} = \{a(t - \sin t,\ a(1 - \cos t),\ 4a \sin \frac{t}{2}\}$ на головних нормалях відкладаються відрізки довжини $a\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}$. Скласти рівняння геометричного місця кінців цих відрізків.

Домашнє завдання.

47. Довести, що нормальні площини кривої

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin \alpha \sin t, \\ z = a \cos \alpha \sin t; \end{cases}$$

проходять через пряму

$$\begin{cases} x = 0, \\ z + y \tan \alpha = 0. \end{cases}$$

48. Скласти рівняння нормальних площин кривої $\overrightarrow{r} = \{t, t^2, t^3\}$, які проходять через точку $M(0; 3; 0)$.

49. На бінормалях гвинтової лінії $\overrightarrow{r} = \{a \cos t, a \sin t, ht\}$ відкладається відрізок постійної довжини 5. Скласти рівняння геометричного місця кінців цих відрізків.

50. Скласти рівняння головної нормалі до кривої

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ xy = z^2; \end{cases}$$

в точці $M(1; 1; 1)$.

1.3. Формули Сере-Френе для кривої. Кривина. Скрут.

Якщо крива $\gamma \in C^2$, то визначена її кривина - модуль швидкості обертання дотичної по відношенню до довжини дуги. Кривина кривої $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$обчислюється за формулою

$$k = \frac{|[\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t)]|}{|\overrightarrow{r}'(t)|^3}.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, то

$$k = \frac{\sqrt{(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}$$

Для плоскої кривої, заданої параметризацією $x = x(t), y = y(t)$, її кривина

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

У такому випадку зручно розглядати її "орієнтовану"кривину за формулою

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для кривої, заданої рівнянням $y = y(x)$, кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Якщо крива $\gamma \in C^3$ і кривина її $k \neq 0$, то визначено скрут кривої (швидкість обертання стичної площини навколо дотичної), який позначають через $\varkappa$.

Скрут кривої обчислюється за формулою

$$\varkappa = \frac{(\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}''')}{[\overrightarrow{r}', \overrightarrow{r}'']^2}.$$

Рівність нулю скрута кривої в усіх точках є необхідною і достатньою умовою того, щоб крива була плоскою. Точки, в яких $\varkappa = 0$, називаються точками сплощення кривої.

Система $\begin{cases} k = k(s), \\ \varkappa = \varkappa(s); \end{cases}$ називається натуральними рівняннями кривої.

Для кривої $\gamma \in C^3$ справедливі формули Сере-Френе:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = k\vec{\nu},\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta},\ \frac{\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{\nu}.$$

Практичне заняття 5.

51. Визначити кривизну і скрут в довільній точці таких ліній:
а) $\overrightarrow{r} = \{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$,
б) $\overrightarrow{r} = \{2t, ln\ t, t^2\}$,
в) $\overrightarrow{r} = \{e^t \sin t, e^t \cos t, e^t\}$,
г) $y = a\ ch\ \frac{x}{a}$,
д) $y = sin\ x$,
е) $y = -ln\ cos\ x$
є) $\rho = a\varphi$ (спіраль Архімеда).

52. Знайти кривизну і скрут кривої $\begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 1, \\ y^2 - 2x + z = 0; \end{cases}$ в точці $M(1;1;1)$.

53. Довести, що лінія є прямою тоді і тільки тоді, коли кривизна її дорівнює нулю.

54. Визначити, при якому значенні h гвинтова лінія $\overrightarrow{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$ має найбільший скрут.

55. Довести, що коли між точками двох кривих γ_1 і γ_2 можна встановити таку відповідність, при якій у відповідних точках цих кривих дотичні паралельні, то головні нормалі та бінормалі цих кривих теж паралельні.

56. Довести, що коли всі стичні площини кривої проходять через одну і ту саму точку, то така крива плоска.

57. Довести, що якщо між точками двох кривих γ і $\gamma*$ встановлено взаємно однозначну відповідність, при якій бінормалі кривої у відповідних точках співпадають, то криві плоскі.

58. Між точками ліній γ і $\gamma*$ можна встановити таке співвідношення, при якому дотичні у відповідних точках паралельні. Довести, що відношення скрута до кривизни в цих точках кривих γ і $\gamma*$ рівні за абсолютною величиною.

Домашнє завдання.

59. Визначити кривизну і скрут в довільній точці таких ліній:
а) $\overrightarrow{r} = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$;
б) $\rho = a^{\varphi}$ в точці $\varphi = 0$.

60. Визначити кривизну і скрут кривої $\begin{cases} x + \operatorname{sh} x = \sin y + y, \\ z + e^z = x + \ln(1+x) + 1; \end{cases}$ в точці $M(0;0;0)$.

61. Довести, що для того, щоб лінія була плоскою, необхідно і достатньо, щоб її скрут був рівним нулю.

62. Для кривої $\gamma \in C^3$ існує така лінія γ^*, що головні нормалі γ є бінормалями γ^* у відповідних точках. Довести, що кривина і скрут лінії γ задовольняють співвідношенню $k = \lambda(k^2 + \varphi^2)$, де $\lambda = const$.

Практичне заняття 6.

63. На бінормалях плоскої лінії $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$ в одному напрямку відкладаються відрізки MP, пропорційні дузі $M_0M = s$. Скласти рівняння лінії γ, описаної точкою P, знайти її кривизну і скрут.

64. Обчислити $(\overrightarrow{\beta}', \overrightarrow{\beta}'', \overrightarrow{\beta}''')$.

65. Скласти натуральні рівняння наступних ліній:
а) $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2}$;
б) $x = a\operatorname{ch} t,\ y = a\operatorname{sh} t,\ z = at$;
в) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$;
г) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

66. Написати параметричні рівняння плоских ліній, заданих натуральними рівняннями:
а) $k = c,\ c = const$;
б) $k = \frac{a}{a^2+s^2}$.

67. Довести, що крива

$$x = a\int \sin\alpha(t)dt, \quad y = a\int \cos\alpha(t)dt, \quad z = ht$$

є лінією укосу.

68. Довести, що для того щоб крива класу C^5 була лінією укосу, необхідно і достатньо, щоб $(\overrightarrow{\beta}', \overrightarrow{\beta}'', \overrightarrow{\beta}''') = 0$

Домашнє завдання.

69. Обчислити $(\vec{\tau}', \vec{\tau}'', \vec{\tau}''')$.

70. Скласти натуральні рівняння ліній:

а) $\vec{r} = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\}$;

б) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht$.

71. Написати параметричні рівняння плоских ліній, заданих натуральними рівняннями:

а) $k = \frac{1}{as}$;

б) $2ask^2 = 1$.

72. Довести, що крива $x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ є лінією укосу.

73. Довести, що для того щоб крива класу C^4 була лінією укосу, необхідно і достатньо, щоб $(\vec{\tau}', \vec{\tau}'', \vec{\tau}''') = 0$

1.4. Дотик кривих. Дотик лінії з поверхнею. Стична сфера.

Дві лінії задані параметризаціями $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(s)$і $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(s)$, мають в їх спільній точці при $s = s_0$ *дотик* порядка n, якщо в цій точці $\vec{r}_1(s_0)' = \vec{r}_2(s_0)'$, $\vec{r}_1(s_0)'' = \vec{r}_2(s_0)''$, $\ldots$, $\vec{r}_1(s_0)^{(n)} = \vec{r}_2(s_0)^{(n)}$, а $\vec{r}_1(s_0)^{(n+1)} \neq \vec{r}_2(s_0)^{(n+1)}$.

Стичним колом кривої γ в даній точці P називають коло, яке має з кривою γ в цій точці дотик не нижче другого порядку. Стичне коло кривої лежить в її стичній площині, центр кола співпадає з центром кривини кривої, а радіус- з радіусом кривини кривої в точці P.

Нехай лінія $\gamma \in C^{n+1}$ задана рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

і має з поверхнею , яка задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і належить до того ж класу регулярності, спільну точку $P(t_0)$.

Розглянемо функцію $\varphi(t) = F(x(t), y(t), z(t))$. В точці $t = t_0$ $\varphi(t_0) = 0$, але $\varphi(t)$ при $t \neq 0$, взагалі кажучи, не дорівнює нулю. Якщо точка $P(t)$ прямує по заданій лінії до точки $P(t_0)$, то $\varphi(t)$ є нескінченно малою величиною.

Якщо порядок малості цієї величини відносно $t - t_0$ дорівнює $n + 1$, то говорять, що лінія γ має з поверхнею дотик n-го порядку.

Сфера, яка має з лінією в даній точці дотик порядка не нижче третього, називається *стичною сферою* лінії в цій точці.

Практичне заняття 7.

74. Знайти стичне коло кривої:
а) $\overrightarrow{r} = \{t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ \sin t\}$ при $t = 0$;
б) $\overrightarrow{r} = \{2t,\ \ln t,\ t^2\},\ \ t > 0$, при $t = 1$.

75. Знайти радіус стичної сфери лінії $\overrightarrow{r} = \{t, t^2, t^3\}$ в точці, де $t = 0$.

76. Знайти радіус стичної сфери в довільній точці для наступних кривих:
а) $\overrightarrow{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$;
б) $\overrightarrow{r} = \{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$;

77. Визначити порядок дотику лінії $z = axy,\ axz = y+1$ з поверхнею $ax = zy$ в точці $M(0; -1; 0)$.

78. Довести, що лінія $\overrightarrow{r} = \{t^3, t^3 + 2t, t\}$ дотикається до поверхні $x^2 + y^2 = x(y + z)$ в початку координат.

79. Показати, що крива, яка задається параметризацією

$$x = \sin 2\varphi,\ y = 1 - \cos 2\varphi,\ z = 2\cos\varphi,$$

лежить на сфері.

80. Покажіть, що у випадку дотику двох ліній не нижче третього порядку дотику скрути в їх спільній точці рівні.

81. Знайти порядок дотику наступних пар кривих:
а) $y = x^2 + 4x^3$ і $y = 3x^2 - 2x^4$ в точці $O(0; 0)$;
б) $y = \cos x - 1$ і $y = x^2$ в точці $O(0; 0)$;
в) $x = t, y = t^2$ і $x^2 = 4y - 2y^2$ в точці $O(0; 0)$.

82. Знайти порядок дотику кола $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$ і параболи $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ в точці $(1; 1)$.

83. Знайти рівняння параболи вигляду $y = x^2 + ax + b$, яка дотикається кола $x^2 + y^2 = 2$ в точці $(1; 1)$.

84. Скласти рівняння кола, яке має з параболою $y = 2(x - 1)^2$ в її вершині дотик другого порядку.

Домашнє завдання.

85. Знайти радіус стичної сфери в довільній точці для кривої $\overrightarrow{r} = \{e^t \sin t, e^t \cos t, e^t\}$.

86. Визначити порядок дотику прямої $x = -3 + 4t,\ y = 0,\ z = 2t$ з поверхнею $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xz - yz + 4xy + 3x - 5y = 0$ в точці $(-3; 0; 0)$.

87. Показати, що пряма $x = 2t, y = 3t, z = 4 + t$ лежить на поверхні

$$9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12y - 36z = 0.$$

88. Знайти порядок дотику наступних кривих:
а) $x = \sin t, y = t^2$ і $x^2 = 2y + y^2$ в точці $O(0; 0)$;
б) $y = \sin x$ і $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$ в точці $O(0; 0)$.

89. Ліва вершина еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ співпадає з правою вершиною гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 4\frac{x}{a} + 3 = 0$. Знайти порядок дотику кривих.

90. Знайти стичне коло гіперболи $x^2 - y^2 = 2$, яке має найменший радіус.

2. ПЛОСКІ КРИВІ

2.1. Дотична і нормаль. Особливі точки.

Теорію плоских кривих можна побудувати незалежно від теорії кривих в просторі.

Криву на площині можна задати рівняннями різного вигляду, найбільш поширеними з яких є наступні:

1. Векторне рівняння: $f(\overrightarrow{r}) = 0$.
2. Векторно-параметричне рівняння: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$.
3. Координатно-параметричне рівняння: $x = x(t), y = y(t)$.
4. Рівняння в несиметричній формі: $y = f(x)$.
5. Рівняння в симетричній формі: $F(x, y) = 0$.

   Симетрія розглядається лише в тому сенсі, що жодній з координат не надано переваги перед іншою.

Для кожного виду рівняння кривої запишемо відповідне рівняння дотичної:

1. $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} + \lambda\overrightarrow{r'}$ (для кривої заданої векторно-параметричним рівнянням);
2. $X = x + \lambda x', Y = y + \lambda y'$ (для кривої заданої координатно-параметричними рівняннями);
3. $Y - y = f'(X - x)$ (для кривої заданої рівнянням $y = f(x)$);
4. $F_x(X - x) + F_y(Y - y) = 0$ (для кривої заданої рівнянням $F(x, y) = 0$).

Рівняння нормалі мають вигляд:

1. $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} + \lambda(\frac{\overrightarrow{r'}}{|\overrightarrow{r'}|})$.
2. $X = x + (\frac{x'}{|\overrightarrow{r'}|}), Y = y + (\frac{y'}{|\overrightarrow{r'}|})$.
3. $Y - y = -\frac{1}{f'}(X - x)$.
4. $F_y(X - x) - F_x(Y - y) = 0$.

Особливі точки кривої $F(x, y) = 0$ є розв'язками системи: $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F = 0 \end{cases}$.

Щоб дослідити, якого типу буде особлива точка, розглянемо $\Delta = F^0_{xx}F^0_{yy} - (F^0_{xy})^2$. Отримаємо, що:

при $\Delta < 0$ маємо точку самоперетину або вузол;

при $\Delta > 0$ — ізольовану особливу точку;

при $\Delta = 0$ — точку з подвійною дотичною.

Рівняння дотичної в особливій точці містить в якості кутових коефіцієнтів корені рівняння:

$F^0_{yy}k^2 + 2F^0_{xy}k + F^0_{xx} = 0$.

Практичне заняття 8.

91. Знайти дотичну і нормаль до плоскої кривої, яка задана параметричними рівняннями:

а) $\overrightarrow{r} = t^2\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}$, де $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$-одиничні взаємно перпендикулярні координатні вектори;

б) $\overrightarrow{r} = \sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}$ при $t = \frac{\pi}{2}$;

в) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 + \cos t)$ при $\frac{t}{2}$.

92. Знайти дотичну і нормаль до цисоїди Діоклеса:

$$x = \frac{a}{t^2 + 1},\ y = \frac{a}{t(t^2 + 1)}$$

в довільній точці.

93. Знайти дотичну до листа Декарта

$$x = \frac{at}{1 + t^3}, y = \frac{at^2}{1 + t^3},$$

яка паралельна до прямої $x + y = 0$.

94. Знайти дотичну і нормаль до циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ в довільній точці.

95. Довести, що якщо всі нормалі кривої проходять через одну точку, то ця крива-коло або його частина.

96. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$ утворює з віссю OX кут $45°$.

97. Дослідити характер особливих точок і написати рівняння дотичних в них для кривих:

а) $y^2 = bx^3 + ax^2$;

б) $\rho = a \sin 2\varphi$;

в) $x^6 - 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$;

г) $(x^2 + y^2)(y - a)^2 = y^2$.

Домашнє завдання.

98. Знайти дотичну і нормаль до плоскої кривої, яка задана параметричними рівняннями:

а) $\overrightarrow{r} = e^t \overrightarrow{i} + e^{-t} \overrightarrow{j}$ при $t = 0$;

б) $x = a \cos^2 t,\ y = bsin^2 t + \sin t$ при $t = \pi$.

99. Чи може кут нахилу дотичної в деякій точці лінії $y = x^3$ до осі OX дорівнювати $\frac{3\pi}{4}$?

100. Знайдіть дотичну до параболи $y = x^2$, яка паралельна до прямої $y = 4x - 5$.

101. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 6x + 5$ перпендикулярна до прямої $x - 2y + 8 = 0$?

102. Дослідити характер особливих точок і написати рівняння дотичних в цих точках для кривих:

а) $x^3 + y^3 = xy$;

б) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

2.2. Еволюти і евольвенти. Радіус кривини.

Еволютою плоскої кривої γ називають обвідну сім'ї її нормалей.

Якщо крива задана рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, то рівняння еволюти в прямокутних декартових координатах має вигляд:

$$X = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''},\ Y = y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}.$$

Величина $\frac{1}{k}$ є радіус кривини кривої. Радіус кривизни кривої можна знайти за формулою

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Крива γ називається евольвентою своєї еволюти. Відповідно, евольвента-це ортогональна траекторія сімейства дотичних до кривої γ. Відмітимо, що еволюта у кривої одна, а евольвент безліч.

Евольвенту кривої в прямокутних декартових координатах можна знайти з формул:

$$X = x + (-s(t) + c)\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},\ Y = y + (-s(t) + c)\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

Практичне заняття 9.

103. Знайти еволюту, евольвенти і радіус кривизни наступних кривих:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $x^2 - 2py = 0$;

в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

г) $\rho = \lambda\varphi$.

д) $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

104. Знайти еволюту логарифмічної спіралі $\rho = a^{\varphi}$. Довести, що це є та ж спіраль, але повернута навколо полюса на деякий кут.

105. Знайти особливі точки еволюти еліпса. Скільки нормалей до еліпса можна провести через довільну точку площини?

106. Знайти евольвенти кола.

107. Знайти еволюту астроїди

$$x = \frac{3}{4}R\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}R\cos\frac{3t}{4},$$
$$y = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4} - \frac{1}{4}R\sin\frac{3t}{4}.$$

Довести, що еволютою є також астроїда, подібна до заданої астроїди, з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2, і повернута відносно заданої астроїди на кут $\frac{\pi}{4}$.

108. Знайти кривину тієї плоскої кривої, у якої ця кривина дорівнює кривині її евольвенти у відповідній точці.

Домашнє завдання.

109. Знайти еволюту, евольвенту і радіус кривизни наступних кривих:

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\rho = a\operatorname{ctg}\varphi$;

в) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$;

г) $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

110. Довести, що еволюта кривої Штейнера, заданої рівняннями

$$x = 2r\cos\frac{t}{3} + r\cos\frac{2t}{3},\ y = 2r\sin\frac{t}{3} - r\sin\frac{2t}{3}$$

є такою ж кривою Штейнера, подібною до даної кривої з коефіцієнтом подібності 3. Показати, що еволюта повернута відносно самої кривої на кут $\pi/3$.

111. Знайти радіус кривини кривої Штейнера, рівняння якої задано в попередній задачі.

2.3. Дискримінантна крива.

Нехай $F(x, y, c) = 0$ — рівняння однопараметричної сім'ї кривих. Розглянемо криву γ, яка в кожній своїй точці дотикається відповідної кривої заданого сімейства. Крива γ називається дискримінантною кривою. Її координати задовольняють наступну систему:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ F_c(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи $\begin{cases} x = x(c), \\ y = y(c); \end{cases}$ буде геометричним місцем особливих точок, якщо

$$\begin{cases} F_x(x(c), y(c)) = 0, \\ F_y(x(c), y(c)) = 0. \end{cases}$$

В іншому випадку отримаємо обвідну.

Практичне заняття 10.

112. Знайти дискримінантну криву сім'ї ліній:
а) $(x-c)^3 = (y+c^2)^2$;
б) $y - c = (x-c^2)^3$;
в) $ax + y + b = 0,\ a^2 - b = 1$.

113. Знайти обвідну сім'ї кривих:
а) $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, де a — параметр;
б) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ ab = c = const$;
в) $(x-a)^2 + (y-a^2)^2 = 1$.

114. Знайти обвідну сім'ї кіл, побудованих на паралельних хордах деякого кола, як на діаметрах.

115. Знайти обвідну сім'ї прямих, які утворюють з осями координат трикутники сталої площі S.

116. Знайти обвідну сім'ї кіл, діаметрами яких є хорди гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, паралельні осі абсцис.

117. Знайти обвідну сім'ї кіл, діаметрами яких є хорди еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, паралельні до осі OY.

118. Знайти обвідну сім'ї нормалей параболи $y^2 = 4x$.

119. Знайти обвідну сім'ї нормалей еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

120. Знайти обвідну сім'ї нормалей спіралі Архімеда $\rho = \lambda\theta$ ($\lambda = const$).

Домашнє завдання.

121. Знайти дискримінантну криву сім'ї ліній:
а) $(x+c^2)^3 = (y-c)^2$;
б) $a^2x + b^2y = 1,\ ab = 1$.

122. Знайти обвідну сім'ї кривих:
а) $(x-a)^2 - (y-a^2)^2 = 1$;
б) $ay^2 = 2p(x-a)$, де a — параметр, $p < 0$;
в) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ a^2 + b^2 = r^2 = const$.

123. Відрізок постійної довжини a їздить своїми краями по двом взаємно перпендикулярним прямим. Прийнявши ці самі прямі за осі координат, знайти обвідну сім'ї прямих, які містять відрізок.

124. Знайти обвідну сім'ї нормалей циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

125. Знайти обвідну сім'ї нормалей гіперболи $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t$.

Відповіді

1. Обернене твердження не завжди вірне. **4.** Оскільки $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}) = const$, **5.** Обравши вісь OZ за вісь обертання, знайдемо рівняння **7.** а) $x = \frac{2a}{1+k^2}$, $y = \frac{2ak}{1+k^2}$ б) $x = a + a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ **13.** *Вказівка.* Представити $\overrightarrow{r}(t)$ у **14.** Не завжди, наприклад, якщо $\overrightarrow{r}(t) = \{\cos t, 16.\ \pi_{\frac{}{4}}$ **17.** $\frac{x-4}{4} = \frac{y-\frac{8}{3}}{2} = z - 2.$ **19.** а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$ б) $\frac{x+2}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z-\pi}{1}$ в) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ **20.** а) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-12}{4} = \frac{z-14}{5}$,) x$\frac{}{1=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}}$ **21.** $8a\sqrt{2}$ **23.** $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. **24.** $s(x_1, x_2) = \int 25.$ x=a $\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $y = a\sin 26.\ \pi_{\frac{}{4}}$ **28.** $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-e^{-2}}{e^{-2}}$ **29.** $10a$ **30.** $a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t_0$. **31.** $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Theta^2 + \rho^2 \sin\Theta 32.$) :x-1$\frac{}{1=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{2}}$; б) Дотична: **51.** а) $k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$, $\varkappa 64.\ \varkappa^5(\frac{k}{\varkappa})'$ **67.** Вказівка: необхідно показати, що $\frac{k}{\varkappa} = 69.$ k$^5(\frac{\varkappa}{k})'$ **74.** а) $(y-1)^2 + z^2 = 1,\ x = 0.$ б) $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = \frac{81}{4}, 75.\ 1_{\frac{}{2}}$ **76.** а) $\frac{a^2+h^2}{a}$ б) $(e^t + e^{-t})^2\sqrt{\frac{1}{2} + (e^t - e^{-t})^2} 77.$ 285. $3\sqrt{2}e^t$ **96.** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **99.** ні **100.** $y = 4x - 4$ **101.** $(2, -3)$

Список літератури

1. Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. *Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ.*— К.: Выща шк., 1989.

2.Боровец А.Н., Петкевич Н.Ю. *Контрольные работы и методические указания к курсу "Дифференциальная геометрия".* — К.: КГУ, 1985.

3.Боровец А.Н., Зражевская А.М., Петкевич Н.Ю. *Методические указания к практическим занятиям по дифференциальной геометрии.* — К.: КГУ, 1985.

4. Белько И.В., Ведерников В.I., Воднев В.Т., Гусак А.А., Нахимовская А.И., Рябушко А.П., Тутаев Л.К., Феденко А.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии.* — М.: Наука, 1979.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ТЕОРІЯ КРИВИХ

Упорядники: **БІЛУН** Світлана Володимирівна

ЦИГАНІВСЬКА Ірина Миколаївна

Друкується за авторською редакцією