Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ.

Київ — 2016

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. П. Петравчук,
д-р фіз.-мат. наук, проф. І. О. Парасюк,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. О. Пришляк

Упорядники:
С. В. Білун,
І. М. Циганівська

Збірник завдань до практичних занять з диференціальної геометрії. Теорія поверхонь. Київ — 2016. — 32 с.

Посібник розраховано на проведення дев'яти занять з теорії поврехонь. Посібник призначений для студентів механіко-математичного факультету.

Зміст

Передмова

Даний посібник призначений для студентів математичних факультетів університетів, а також може бути використаний іншими навчальними закладами, у яких вивчається дисципліна «Диференціальна геометрія». Він містить задачі з тих розділів, які входять до типової програми з диференціальної геометрії.

Диференціальна геометрія вивчає властивості ліній і поверхонь в околі кожної точки. Даний посібник присвячений вивченню поверхонь та кривих на поверхнях. Вивчення цієї теми розбито на дев'ять практичних занять. Для зручності перед практичними заняттями наведено короткі теоретичні відомості, в яких студент легко може знайти усі необхідні формули для розв'язання наведених нижче завдань. Після кожного практичного заняття наведено домашнє завдання, яке містить завдання аналогічні до аудиторних. Ці завдання студент повинен опрацьовувати самостійно для закріплення вивченого матеріалу.

Посібник складається з двох розділів: «Поверхні», «Лінії на поверхнях». Кожен розділ розбито на декілька підрозділів. Навчальний посібник містить понад 140 завдань різної складності, до переважної більшості яких наведено відповіді та вказівки, що дозволяє забезпечити отримання необхідних знань з кожної наведеної теми.

1. ПОВЕРХНІ

1.1. Поверхні та їх параметризації. Дотична поверхня і нормаль поверхні.

Поверхню Φ можна задавати різними способами:

1. векторно-параметричним рівнянням
$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v);$$
2. параметричними рівняннями у координатній формі:
$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v);$$
3. рівнянням в симетричній формі: $F(x,y,z) = 0$;
4. рівнянням в несиметричному вигляді: $z = f(x,y)$.

Для кожного типу рівнянь, які задають поверхню, можна записати рівняння дотичної площини:
$$(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v) = 0;$$
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0;$$
$$F_x(X-x) + F_y(Y-y) + F_z(Z-z) = 0.$$

Пряма, яка проходить через точку $P \in \Phi$ перпендикулярно до дотичної площини в цій точці, називається *нормаллю* до поверхні. Одиничний вектор нормалі можна знайти за формулою :
$$\overrightarrow{m} = \pm\frac{[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v]}{|[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v]|}.$$

Рівняння нормалі
$$\frac{X-x}{y_u z_v - z_u y_v} = \frac{Y-y}{z_u x_v - x_u z_v} = \frac{Z-z}{x_u y_v - y_u x_v}$$
або
$$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y} = \frac{Z-z}{F_z}.$$

Практичне заняття 1.

1. Скласти параметричні рівняння еліпсоїда, гіперболоїдів і еліптичного параболоїда.

2. Скласти рівняння однопорожнинного гіперболоїда і гіперболічного параболоїда, взявши за координатні лінії його прямолінійні твірні.

3. Коло $(x-a)^2+z^2=r^2,\ y=0(a>r)$ обертається навколо осі OZ. Скласти параметричні рівняння поверхні обертання (тора).

4. Крива

$$x=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{z^2}} \text{ при } z\neq 0\ , \\ 1 \text{ при } z=0, \end{cases} \quad y=0,$$

обертається навколо осі OZ. Написати рівняння отриманої поверхні обертання.

5. Скласти параметричні рівняння циліндра з напрямною $x^2+y^2=$ $=a^2, z=0$ і твірними паралельними до осі OZ.

6. Скласти рівняння циліндричної поверхні з напрямною $x^2+2y^2=$ $=z,\ x-y+z-2=0$ і твірними паралельними до вектора $\overrightarrow{u}=\{1,-1,2\}$.

7. Чи будуть рівняння $\overrightarrow{r}=\{u\cos v, u\sin v, u^2\}$ і $\overrightarrow{r}=$ $=\{\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, \frac{1}{u^2+v^2}\}$ задавати одну і ту саму поверхню?

8. Записати рівняння поверхні, утвореної дотичними до лінії $y^2=$ $=x, x^2=z$.

9. Коло радіуса a переміщується так що його центр рухається по заданій лінії $\overrightarrow{\rho}=\overrightarrow{\rho}(s)$, а площина, в якій воно розташоване, є в кожний момент нормальною площиною до заданої лінії. Скласти рівняння поверхні, яку описує коло.

10. Скласти рівняння поверхні, утвореної бінормалями до лінії $\overrightarrow{r}=$ $=\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$.

11. Пряма рухається поступально з постійною швидкістю, перетинаючи іншу пряму під прямим кутом, і одночасно обертається рівномірно навколо цієї прямої. Отримана таким шляхом поверхня називається *прямим гелікоїдом.* Скласти рівняння прямого гелікоїда. З яких ліній складається координатна сітка на прямому гелікоїді?

12. Гелікоїдом загального вигляду називається поверхня, утворена деякою лінією, яка обертається навколо осі і одночасно рухається в напрямку цієї осі, причому швидкості цих рухів пропорційні. Скласти рівняння гелікоїда загального вигляду.

13. Скласти рівняння циліндра, описаного навколо двох сфер

$$x^2+y^2+(z-1)^2=25, (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=25.$$

Домашнє завдання.

14. Написати рівняння тора отриманого обертанням кола $y^2 + z^2 - 10z + 24 = 0,\ x = 0$ навколо осі OY.

15. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої $x = az,\ y = 0$ навколо осі OZ.

16. Показати, що рівняння $\overrightarrow{r} = \{a(u + \frac{1}{u}), b(u - \frac{1}{u}), v\}$ задає циліндричну поверхню.

17. Скласти рівняння поверхні, яка утворена дотичними до даної лінії $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(u)$.

18. Скласти рівняння поверхні утвореної бінормалями до гвинтової лінії.

19. Скласти рівняння поверхні утвореної головними нормалями до гвинтової лінії.

20. Написати рівняння конуса з вершиною в точці $P(4, -1, 3)$, твірні якого дотикаються до еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$.

Практичне заняття 2.

21. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до наступних поверхонь в заданих точка:

а) $z = x^3 + y^3$ в точці $M(1, 2, 9)$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці $M(3, 4, 12)$.

22. Скласти рівняння дотичної площини до сфери радіуса a, центр якої співпадає з початком координат, в точці $(0, 0, a)$.

23. Скласти рівняння нормалі до псевдосфери

$$x = a \sin u \cos v,\ y = a \sin u \sin v,\ z = a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + a \cos u$$

в довільній точці і знайти орт нормалі.

24. Скласти рівняння дотичної площини поверхні $xy^2 + z^2 = 8$ в точці $(1, 2, 2)$. Визначити орт нормалі в цій точці.

25. Довести, що поверхні

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x, x^2 + y^2 + z^2 = \beta y,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \gamma z$$

попарно ортогональні.

26. Довести, що нормаль поверхні обертання перетинає вісь обертання.

27. Довести, що всі дотичні площини поверхні $z = x\varphi(\frac{y}{x})$ проходять через початок координат.

28. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі поверхні, утвореної бінормалями кривої $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$.

29. Скласти рівняння поверхні, яка утворена головними нормалями лінії γ. Довести, що в точках лінії γ дотична площина до поверхні співпадає з стичною площиною лінії γ.

30. Написати рівняння дотичної площини тора $x = (3 + 2\cos u)\cos v, y = (3 + 2\cos u)\sin v, z = 2\sin u$, яка паралельна до площини $x + y + \sqrt{2}z + 5 = 0$.

31. Скласти рівняння нормалі поверхні $z = x^4 - 2xy^3$ в точці $M(0, -1, 0)$.

Домашнє завдання.

32. Знайти рівняння дотичної площини в довільній точці прямого гелікоїда, заданого рівнянням $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin, hv\}$.

33. Визначити орт нормалі прямого гелікоїда $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin, hv\}$.

34. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі поверхні, утвореної головними нормалями кривої $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$.

35. Поверхня утворена бінормалями лінії γ. Довести, що в точках лінії γ дотична площина до поверхні співпадає зі спрямною площиною лінії γ, а нормаллю до поверхні є головна нормаль лінії γ.

36. Знайти точки на торі

$$\overrightarrow{\rho} = \{(R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\},$$

в яких його нормаль паралельна до вектора $\overrightarrow{a} = (l, m, n)$.

37. Знайти дотичні площини поверхні $z = x^4 - 2xy^3$, перпендикулярні до вектора $\overrightarrow{a} = \{-2, 6, 1\}$. Визначити точки дотику.

1.2. Внутрішня геометрія і зовнішня форма поверхні.

Нехай поверхня $\Phi \in C^1$ і $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$-її гладка параметризація. Квадрат диференціала

$$ds^2 = \overrightarrow{dr}^2 = (\overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv)^2 = \overrightarrow{r}_u^2 + 2(\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v) du dv + \overrightarrow{r}_v^2 dv^2$$

є квадратичною формою, яка задана на сукупності векторів $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv$ в дотичній площині поверхні, і називається *першою квадратичною формою поверхні.* Коефіцієнти цієї форми позначаються відповідно

$$\overrightarrow{r}_u^2 = E,\ (\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v) = F,\ \overrightarrow{r}_v^2 = G.$$

Перша квадратична форма поверхні є додатньо визначеною квадратичною формою.

Довжина дуги гладкої лінії $u = u(t), v = v(t)$, яка розташована на поверхні Φ, обчислюється за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt.$$

Якщо дві лінії на Φ перетинаються в деякій точці P і мають в цій точці напрямки (du, dv) і $(\delta u, \delta v)$, то кут φ між ними можна знайти за формулою

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

Координатна сітка (u,v) на поверхні ортогональна тоді і тільки тоді, коли $F(u,v) = 0$.

Площа замкненої області $G \in \Phi$ обчислюється за формулою

$$S = \int\int_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

де D-праобраз області G на площини (u,v).

Якщо поверхня задана рівнянням $z = z(x,y)$, то $E = 1 + z_x^2,\ F = z_x z_y,\ G = 1 + z_y^2$, а площа області $\widetilde{G}$ обчислюється за формулою

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx\,dy.$$

Внутрішня геометрія поверхні визначається її першою квадратичною формою.

Другою квадратичною формою поверхні називають вираз

$$(d^2\overrightarrow{r}, \overrightarrow{m}) = L\,du^2 + 2M du\,dv + N dv^2,$$

де

$$L = (\overrightarrow{r}_{uu}, \overrightarrow{m}),\ M = (\overrightarrow{r}_{uv}, \overrightarrow{m}),\ N = (\overrightarrow{r}_{vv}, \overrightarrow{m}),$$

а $\overrightarrow{m}(u, v)$-нормаль до поверхні. Врахувавши, що

$$\overrightarrow{m} = \frac{[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v]}{|[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v]|},$$

отримуємо

$$L = \frac{(\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{(\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}},\ N = \frac{(\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v, \overrightarrow{r}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = z(x, y)$, то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Нормальним перерізом поверхні Φ в точці P називають лінію перетину поверхні з площиною, яка проходить через нормаль поверхні в цій точці.

Кривина нормального перерізу в точці P називається *нормальною кривиною* поверхні в цій точці в напрямку, який є дотичним до нормального перерізу. Нормальна кривина обчислюється за формулою

$$k_{н} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Для довільної точки поверхні або існує два взаємно перпендикулярних напрямки, які називають головними, в яких $k_{н}$ набуває найбільшого і найменшого значень k_1 і k_2, або кривина всіх нормальних перерізів однакова, тобто $k_{н} = k_1 = k_2$. В останньому випадку точка називається *сферичною* при $k_{н} \neq \neq 0$ і *точкою сплощення* при $k_{н} = 0$. Всі напрямки в сферичних точках та у точках сплощення вважаються головними. Величини k_1 і k_2 називають *головними кривинами* поверхні в точці.

Гаусовою кривиною поверхні називається величина

$$K = k_1 k_2.$$

Середньою кривиною називається величина

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

В залежності від значень $K(u, v)$ і $H(u, v)$ точки поверхні класифікуються наступним чином:

1. точка називається *еліптичною*, якщо в ній $K > 0$;
2. точка називається *гіперболічною*, якщо $K < 0$;
3. точка називається *параболічною*, якщо $K = 0, H \neq 0$;
4. точка називається *точкою сплощення*, якщо $K = H = 0$.

Гаусову та середню кривину можна легко обчислити знаючи коефіцієнти першої та другої квадратичних форм за формулами:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)}.$$

З наведених вище формул неважко отримати формулу для обчислення головних кривин за допомогою коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм:

$$(EG - F^2)k^2 + (EN + GL - 2MF)k + LN - M^2 = 0.$$

Практичне заняття 3.

38. Знайти першу квадратичну форму поверхонь:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;
б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
в) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) + v\overrightarrow{e}, \ \overrightarrow{e} = const$ (циліндр);
г) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s)v$ (конус);
д) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) + v\overrightarrow{\tau}(s)$;
е) $x = a\,\mathrm{ch}(\frac{u}{a})\cos v, \ y = a\,\mathrm{ch}(\frac{u}{a})\sin v, \ z = u$ (катеноїд).
є) $x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = ku \ (u \neq 0)$ (круговий циліндр без вершини).

39. Вкажіть, яка з наведених квадратичних форм не може бути першою квадратичною формою деякої поверхні:
а) $ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2$;
б) $ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2$;
в) $ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2$;
г) $ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2$;

40. Довести, що меридіани і паралелі поверхні обертання утворюють на ній ортогональну сітку.

41. Знайти кут між координатними лініями $x = x_0, \ y = y_0$ на поверхні $z = axy$.

42. Покажіть, що при відповідному виборі криволінійних координат на поверхні обертання її перша квадратична форма може бути приведена до вигляду

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2.$$

43. На поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 u dv^2$ знайти довжину дуги кривої $2u = v$ між точками $P_1(u_1, v_1)$ і $P_2(u_2, v_2)$.

44. На псевдосфері

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$$

задано дві сім'ї ліній: $v = \pm a\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + C$. Довести, що довжини дуг всіх ліній однієї сім'ї між двома фіксованими лініями другої сім'ї однакові.

45. На гелікоїді $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin v, hv\}$ знайти довжину гвинтової лінії $u = a$ між двома точками $P_1(u_1, v_1)$ і $P_2(u_2, v_2)$.

46. На поверхні з лінійним елементом $ds^2 = du^2 + dv^2$ знайти кут між лініями $2u = v$ і $2u = -v$.

47. На катеноїді $x = \operatorname{ch} u\cos v,\ y = \operatorname{ch} u\sin v,\ z = u$ знайти кут між лініями $u + v = 0$ і $u - v = 0$ в їх спільній точці.

Домашнє завдання.

48. Знайти першу квадратичну форму поверхонь:
а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$;
б) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$;
в) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) + v\overrightarrow{\nu}(s)$;

49. Довести, що на поверхні

$$x = u(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3},\ y = v(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}),\ z = 2uv$$

координатні лінії ортогональні.

50. Обчислити довжину $v = \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, яка лежить на поверхні

$$x = \sin u\cos v,\ y = \sin u\sin v,\ z = \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u$$

між точками $P_1(u_1, v_1)$ і $P_2(u_2, v_2)$.

51. На косому гелікоїді $\overrightarrow{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v\}$ знайти кут між лініями $u+v=0,\ u=\operatorname{tg} v$ в їх спільній точці.

Практичне заняття 4.

52. Покажіть, що площі областей на параболоїдах $z = a(x^2+y^2)/2$ і $z = axy$, які проектуються на одну і ту саму область площини XOY, рівні.

53. Знайдіть рівняння ліній, які перетинають меридіани поверхні обертання під постійним кутом α (локсодроми).

54. Знайдіть рівняння локсодром на сфері.

55. Знайдіть ортогональні траєкторії прямолінійних твірних конуса.

56. Поверхня S є частиною фігури, утвореної дотичними до деякої лінії. Знайдіть ортогональні траєкторії прямолінійних твірних поверхні S.

57. Записати диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї ліній $\varphi(u,v) = const$ на поверхні з першою квадратичною формою

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

58. На прямому гелікоїді $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin v, hv\}$ знайти лінії, які ділять навпіл кути між координатними лініями.

59. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, розташованого на поверхні з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$ і обмеженого лініями $u = \pm av,\ v = 1$.

60. Обчислити площу чотирикутника, який лежить на гелікоїді $\overrightarrow{r} = \{au\cos v, au\sin v, hv\}$ і обмеженого кривими $u=0,\ u=\frac{h}{a},\ v=0,\ v=1$.

61. Знайти другу квадратичну форму поверхонь:

а) $\overrightarrow{r} = \{r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v\}$;

б) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) + \lambda\overrightarrow{e},\ \overrightarrow{e} = const$;

в) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

Домашнє завдання.

62. Поверхня S є частиною фігури, утвореної дотичними до деякої лінії. Запишіть диференціальне рівняння ліній, які перетинають прямолінійні твірні поверхні S під постійним кутом α.

63. Знайдіть ортогональні траєкторії сім'ї ліній $u = Ce^v$, які лежать на косому гелікоїді $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$.

64. Запишіть рівняння косого гелікоїда $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$, прийнявши лінії $v = const$ і їх ортогональні траєкторії за координатні лінії.

65. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, обмеженого лініями $u = \pm v^2$, $v = 2$ на поверхні $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin v, 2v\}$.

66. Знайти площу поверхні тора, який задано рівняннями :

$$x = (R + r\cos u)\cos v,\ y = (R + r\cos u)\sin v,\ z = r\sin u,\ 0 \leqslant u, v \leqslant 2\pi.$$

67. Знайти другу квадратичну форму поверхонь:

а) $\overrightarrow{r} = \{v\cos u, v\sin u, ku\}$;

б) $\overrightarrow{r} = v\overrightarrow{\rho}(s)$;

в) $y^2 = 2px$.

Практичне заняття 5.

68. Знайти нормальну кривину параболоїда $z = ax^2 - by^2$ в точці $P(0;0)$ у напрямку $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

69. Довести, що при довільній параметризації площини її друга квадратична форма тотожньо дорівнює нулю.

70. Знайти середню та гаусову кривини поверхні $z = axy$ в точці $x = y = 0$.

71. Визначити головні кривини поверхні $z = a(x^2 + y^2)$ в точці $(0, 0, 0)$.

72. Обчислити головні кривини в вершинах двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

73. Визначити тип точок:

а) еліпсоїда;

б) гіперболоїдів;

в) параболоїдів.

74. Визначити тип точок тора.

75. Визначити тип точок на поверхні $z = a^2x^4 + b^2y^4$.

76. Обчислити середню та гаусову кривини для поверхні, яка утворена дотичними до лінії $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$.

77. Обчислити середню та гаусову кривини для поверхні, яка утворена головними нормалями до лінії $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$.

78. Для того, щоб точка на поверхні була сферичною, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $K \neq 0, K = H^2$. Довести це.

79. Знайти повну та середню кривини довільної поверхні обертання.

Домашнє завдання.

80. Довести, що при довільній параметризації сфери її перша квадратична форма пропорційна другій.

81. Визначити тип точок:

а) циліндрів;

б) конусів.

82. Визначити тип точок на поверхні $y = x^4$.

83. Обчислити середню та гаусову кривини для поверхні, яка утворена бінормалями до лінії $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$.

84. Знайдіть головні напрямки і головні кривини прямого гелікоїда $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$.

85. Обчисліть головні кривини поверхні

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

в точці $M(0, 0, 0)$.

86. Знайти повну та середню кривини еліптичного параболоїда.

1.3. Внутрішня геометрія і згинання поверхні. Символи Кристофеля, рівняння Гауса, рівняння Петерсона-Кодаці.

Дві поверхні називаються *ізометричними*, якщо між ними можна встановити такий гомеоморфізм, при якому відповідні лінії мають однакові довжини. Сама відповідність між поверхнями називається *ізометрією.* На ізометричних поверхнях у точках, які є відповідними відносно ізометрії, рівні гаусові кривини (теорема Гауса). Гаусову кривину можна виразити тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх похідні:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} -$$
$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

Розгляд ізометричних поверхонь вказує на доцільність вивчення властивостей поверхні і фігур на ній, які визначаються тільки її першою квадратичною формою і утворюють внутрішню геометрію поверхні. Із цього слідує, що ізометричні поверхні мають однакову внутрішню геометрію, і що гаусова кривина є об'єктом внутрішньої геометрії. Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні утворюють двохвалентний коваріантний симетричний тензор, тому їх часто позначають через g_{ij}, а саме:

$$g_{11}=E,\ \ g_{12}=g_{21}=F,\ \ g_{22}=G.$$

По цьому тензору можна побудувати двічі контраваріантний метричний тензор g^{ij}, поклавши

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні утворюють другий основний тензор поверхні і позначаються через b_{ij} ($b_{11}=L,\ b_{12}=b_{21}=$ $=M,\ b_{22}=N$).

Криволінійні координати (u,v) позначаються через (u^1,u^2).

Аналогом формул Серре-Френе для кривих є дериваційні рівняння поверхні, які виражають похідні від векторів $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$ і $\overrightarrow{m}$ через ці вектори:

$$\overrightarrow{r}_{ij}=\Gamma^k_{ij}\overrightarrow{r}_k+b_{ij}\overrightarrow{m},\ \ \overrightarrow{m}_i=-b_{ik}g^{kj}\overrightarrow{r}_j.$$

Коефіцієнти розкладу Γ_{ij}^k (*символи Кристофеля другого роду*) виражаються через коефіцієнти першої квадратичної форми наступним чином:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{lk}\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}).$$

Вирази $\Gamma_{l,ij}$ називаються *символами Кристофеля першого роду*. Вони обчислюються за формулами:

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}).$$

Поверхня повністю визначається (з точністю до руху в просторі) коефіцієнтами її першої і другої квадратичної форм. При цьому g_{ij} і b_{ij} не можуть бути довільними функціями, оскільки дериваційні рівняння повинні бути інтегровані. Умова інтегрованості дериваційних рівнянь задається співвідношеннями:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^s - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^s + (b_{ik}b_{jp} - b_{ij}b_{kp})g^{ps} = 0$$

(рівняння Гауса),

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_{is}}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k b_{ks} - \Gamma_{is}^k b_{kj} = 0, \ s = 1, 2$$

(рівняння Петерсона-Кодацці).

Практичне заняття 6.

87. Нехай Φ_1 і Φ_2-гладкі поверхні, P_1 і P_2-точки на них, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_1(u, v)$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_2(u, v)$-гладкі параметризації поверхонь в околах точок P_1 і P_2 відповідно. Припустимо, що перші квадратичні форми поверхонь, які відповідають цим параметризаціям, однакові. Тоді відображення околу точки $P_1 \in \Phi_1$ на окіл точки $P_2 \in \Phi_2$, при якому у відповідність ставляться точки з однаковими криволінійними координатами, є ізометрією. Довести це.

88. Довести, що ізометричні поверхні класу C^1 мають однакову внутрішню геометрію.

89. Знайти гаусову кривину поверхні з лінійним елементом

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

90. Визначити гаусову кривину псевдосфери

$$\overrightarrow{r} = \{a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2})\},$$

використовуючи формулу, яка виражає гаусову кривину поверхні через коефіцієнти її метричної форми.

91. Знайти гаусову кривину метрики $ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{v^2}$, яку задано на напівплощині $v > 0$.

92. Знайти символи Кристофеля другого роду для поверхні з метричною формою $ds^2 = du^2 + Gdv^2$.

93. Довести, що сферу навіть локально не можна відобразити на площину.

94. Поверхні Φ і $\Phi*$ ізометричні і їх асимптотичні лінії є відповідними при ізометрії. Довести, що Φ і $\Phi*$ рівні (з точністю до положення в просторі) або симетричні.

95. Довести, що існує ізометричне відображення гелікоїда

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = kv$$

на катеноїд

$$x = k \operatorname{ch} \frac{\alpha}{k} \cos \beta,\ y = k \operatorname{ch} \frac{\alpha}{k} \sin \beta,\ z = \alpha,$$

при якому прямолінійним твірним гелікоїда відповідають меридіани катеноїда.

Домашнє завдання.

96. Довести, що поверхня з лінійним елементом

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2},\ c \neq 0,$$

мають постійну гаусову кривину.

97. Знайти гаусову кривину поверхні з лінійним елементом

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2.$$

98. Знайти символи Кристофеля гелікоїда $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$.

99. Покажіть, що поверхня

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$$

(коноїд) ізометрична гіперболоїду обертання

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

2. ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНЯХ

2.1. Асимптотичні лінії.

Напрямок на поверхні в даній точці називається *асимптотичним*, якщо він співпадає з асимптотичним напрямком індикатриси Дюпена в цій точці.

Асимптотичні напрямки $(du : dv)$ визначаються з квадратного рівняння

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

Звідси випливає, що в еліптичній точці $(LN - M^2 > 0)$ поверхні не існує дійсних асимптотичних напрямків; в гіперболічній точці $(LN - M^2 < 0)$ існує два асимптотичних напрямки; в параболічній точці $(LN - M^2 = 0,\ L^2 + M^2 + N^2 \neq 0)$-один асимптотичний напрямок; в точці сплощення $(L = M = N = 0)$ довільний напрямок є асимптотичним.

Асимптотичні напрямки на поверхні в данній її точці характеризуються тим, що нормальна кривизна поверхні в цих напрямках дорівнює нулю.

Крива на поверхні називається *асимптотичною лінією*, якщо її напрямок в кожній точці є асимптотичним.

Звідси випливає, що рівняння

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

є диференціальним рівнянням асимптотичних ліній.

Нормальна кривина поверхні вздовж асимптотичних ліній дорівнює нулю. Дотична площина поверхні в кожній точці асимптотичної лінії є стичною площиною цієї лінії.

Якщо координатна сітка на поверхні складається із асимптотичних ліній, то друга квадратична форма поверхні має вигляд

$$\varphi_2 = 2Mdudv.$$

Практичне заняття 7.

100. Знайти диференціальне рівняння асимптотичних ліній поверхні

$$z = y\varphi(x) + \psi(x).$$

101. Знайти асимптотичні лінії однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

102. Знайти асимптотичні лінії поверхні

$$z = xy^3 - yx^3,$$

які проходять через точку $M_0(1, 2, 6)$.

103. Показати, що на прямому гелікоїді одна сім'я асимптотичних ліній складається з прямих, а друга із гвинтових ліній.

104. Довести, що:

а) координатні лінії $u = const$ є асимптотичними лініями поверхні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $N(u, v)$ другої квадратичної форми дорівнює нулю ($N(u, v) \equiv 0$);

б) координатні лінії $v = const$ є асимптотичними лініями поверхні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $L(u, v)$ другої квадратичної форми дорівнює нулю ($L(u, v) \equiv 0$);

в) для того, щоб координатна сітка на поверхні складалась із асимптотичних ліній, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти $L(u, v)$ і $N(u, v)$ другої квадратичної форми дорівнювали нулю ($L(u, v) = N(u, v) \equiv 0$).

105. Визначити асимптотичні лінії поверхні, яку утворено обертанням кривої $x = \operatorname{ch} u,\ y = 0,\ z = u$ навколо осі OZ.

106. Параметризувати поверхню

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

так, щоб координатна сітка на поверхні складалась із асимптотичних ліній.

107. Довести, що обидві сім'ї ліній

$$\left\{\begin{array}{l} \text{x=a;} \\ \text{y=t;} \\ z = \frac{(a^2-1)t}{1+a^2}. \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} x = t; \\ y = \frac{b(1+t^2)}{\sqrt{|t|}}; \\ z = \frac{b(t^2-1)}{\sqrt{|t|}}., \end{array}\right.$$

де a і b- довільні сталі, є асимптотичними лініями поверхні

$$z = \frac{y(x^2-1)}{1+x^2}.$$

108. Знайти асимптотичні лінії поверхні

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3u + 3v; \\ y = 3u^2 + 3v^2; \\ z = 2u^3 + 2v^2. \end{array} \right.$$

109. Дослідити асимптотичні лінії тора.

110. На поверхні, яка утворена головними нормалями до деякої кривої γ, знайти рівняння асимптотичних ліній. Довести, що крива γ на отриманій поверхні є асимптотичною лінією.

111. Знайти асимптотичні лінії поверхні

$$\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin v, a\cos nv\},$$

де a і n-сталі.

Домашнє завдання.

112. Знайти асимптотичні лінії поверхні

$$zx^2 = ay^2, \; a = const.$$

113. Довести, що на площині довільна лінія є асимптотичною, і навпаки, поверхня на якій довільна лінія є асимптотичною, є площина або область на площині.

114. Знайти асимптотичні лінії поверхні, яку утворено обертанням кривої $x = u, \; y = 0, \; z = \frac{6}{u}$ навколо осі OZ.

115. Довести, що обидві сім'ї ліній

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{x=t;} \\ \text{y=a;} \\ z = a^2 t. \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} x = t; \\ y = \frac{b}{t^2}; \\ z = \frac{b^2}{t^3}., \end{array} \right.$$

де a і b- довільні сталі, є асимптотичними лініями поверхні

$$z = xy^2.$$

116. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = y\cos x$.
117. Знайти асимптотичні лінії поверхні

$$\begin{cases} x = \frac{v}{\operatorname{ch} u}; \\ y = \frac{uv}{\operatorname{ch} u}; \\ z = \operatorname{arctg} v. \end{cases}$$

2.2. Лінії кривини.

Напрямок на поверхні в даній точці називається *головним*, якщо він співпадає з головним напрямком індикатриси Дюпена, яку побудовано в цій точці. Звідси випливає, що в кожній точці поверхні у загальному випадку є два головних напрямки.

Для того, щоб напрямок $(du : dv)$ був головним на поверхні, необхідно і достатньо, щоб для нього виконувалась рівність:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Головні напрямки не визначені в двох випадках, а саме, в точках сплощення ($L = M = N \equiv 0$) і в сферичних точках (коли коефіцієнти першої і другої квадратичних форм пропорційні). В цих точках довільний напрямок вважають головним.

Головний напрямок на поверхні характеризується тим, що нормальна кривина поверхні в цьому напрямку набуває екстремального значення.

Нормальні кривини поверхні, які відповідають головним напрямкам, називаються головними кривинами поверхні.

Лінія на поверхні називається *лінією кривини*, якщо її напрямок в кожній точці співпадає з головним напрямком.

Звідси випливає, що наведена вище рівність є диференціальним рівнянням ліній кривини.

З рівняння випливає, що координатні лінії на поверхні є лініями кривини тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти F і M першої і відповідно другої квадратичних форм дорівнюють нулю.

Практичне заняття 8.

118. Довести, що якщо за координатні лінії на поверхні, яка не містить сферичних точок і точок сплощення, взяти лінії кривини, то коефіцієнти F і M першої і відповідно другої квадратичних форм поверхні дорівнюють нулю; і навпаки, якщо на поверхні $F = M \equiv 0$, то координатна сітка на поверхні складається з ліній кривини.

119. Знайти лінії кривини на довільній циліндричній поверхні.

120. Знайти лінії кривини поверхні, яка утворена дотичними до деякої неплоскої кривої.

121. Знайти лінії кривини довільної поверхні обертання.

122. Знайти параметричні рівняння ліній кривини і асимптотичних ліній поверхні, яка задана рівняннями

$$\begin{cases} x = u(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}; \\ y = v(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}; \\ z = 2uv, \end{cases}$$

які проходять через точку $M_0(0,0)$. Записати рівняння поверхні, прийнявши за координатні лінії на поверхні лінії кривини. Знайти повну і середню кривини поверхні в довільній точці.

123. Знайти лінії кривини поверхні

$$e^{-z} = \cos x \cos y.$$

124. Довести, що якщо координатна сітка на поверхні складається із ліній кривини, то формули, які задають головні кривини поверхні, мають вигляд

$$k_1 = \frac{L}{E},\ k_2 = \frac{N}{G}.$$

125. Знайти лінії кривини еліптичного параболоїда.

Домашнє завдання.

126. Знайти лінії кривини довільної конічної поверхні.

127. Знайти лінії кривини поверхні, яка утворена бінормалями до деякої неплоскої кривої.

128. Знайти лінії кривини гіперболічного параболоїда, заданого рівнянням

$$\overrightarrow{r} = \{\sqrt{p}(u+v),\ \sqrt{q}(u-v),\ 2uv\}.$$

129. Довести, що лінії кривини поверхні

$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3; \\ y = 3v + 3u^2v - v^3; \\ z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases}$$

є плоскими кривими, які лежать в площинах, що паралельні до осей OX іOY.

130. Знайти лінії кривини гелікоїда, заданого рівнянням

$$\overrightarrow{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}.$$

Записати рівняння гелікоїда, обравши за координатні лінії на гелікоїді лінії кривини.

131. Довести, що на площині і на сфері довільна гладка лінія є лінією кривини і навпаки, якщо на деякій поверхні довільна лінія є лінією кривини, то така поверхня є площиною або сферою (або їх частиною).

2.3. Геодезичні лінії, геодезична кривина.

Геодезичні лінії на поверхні є природнім узагальненням прямих на площині.

Нехай ми маємо деяку лінію γ на поверхні σ. Спроектуємо ортогонально криву γ на дотичну площину поверхні σ. Отримаємо плоску криву $\gamma*$ з кривиною k_g, яку називають *геодезичною кривиною* кривої γ. Лінію γ назвемо *геодезичною*, якщо в кожній її точці $k_g = 0$.

Рівняння для знаходження геодезичних кривих мають вигляд:

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0\ (g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 1).$$

Цю систему можна переписати у наступному вигляді:

$$2\frac{d}{ds}(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}) = E_u(\frac{du}{ds})^2 + 2F_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G_u(\frac{dv}{ds})^2,$$

$$2\frac{d}{ds}(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}) = E_v(\frac{du}{ds})^2 + 2F_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G_v(\frac{dv}{ds})^2,$$

$$E(\frac{du}{ds})^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G(\frac{dv}{ds})^2.$$

Запишемо тепер рівняння для знаходження геодезичної кривини:

$$k_g = \frac{1}{|\overrightarrow{r}'|^3}(\overrightarrow{r}'', \overrightarrow{r}', \overrightarrow{n});$$

$$k_g = |\frac{du^1}{ds}(\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^2}{ds^2}) - \frac{du^2}{ds}(\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^1}{ds^2})|\sqrt{EG - F^2}.$$

Практичне заняття 9.

132. При згинанні поверхні геодезичні лінії переходять в геодезичні. Чому?

133. Скласти диференціальне рівняння геодезичних ліній на прямому гелікоїді.

134. Визначити геодезичну кривину паралелей і меридіанів поверхні обертання, яку задано рівнянням:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \{f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ u\}.$$

135. Знайти геодезичну кривину гвинтової лінії $\overrightarrow{r}(v) = \{a\cos v, a\sin v, hv\}$:

а) на гелікоїді $x = bu\cos v,\ y = bu\sin v,\ z = hv$;

б) на циліндрі $x = a\cos v,\ y = a\sin v,\ z = u$.

136. Знайти геодезичні кривини координатних ліній поверхні з лінійним елементом $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$.

137. Поверхня σ утворена дотичними до лінії $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(s)$ з кривиною $k(s)$. На дотичних від точок дотику по обидва боки відкладено відрізки довжини l. Визначити геодезичну кривину ліній, які описані кінцями відкладених відрізків на поверхні σ.

138. На поверхні з метрикою

$$ds^2 = (u^2 + \cos v + 2)(du^2 + dv^2)$$

знайти геодезичну кривину лінії $v = \pi$.

139. Знайти геодезичні лінії і гаусову кривину півплощини Пуанкаре, тобто півплощини $v > 0$ з метрикою

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

Домашнє завдання.

140. Обчислити геодезичну кривину лінії

$$u = \mathrm{sh},\ 0 \leqslant v \leqslant v_0,$$

на гелікоїді $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v.$

141. Визначити геодезичну кривину координатних ліній довільної поверхні.

142. На поверхні з метрикою $ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\, u dv^2$ знайти геодезичну кривину лінії $v = \ln \mathrm{ch}\, u$.

143. Знайти геодезичні лінії поверхні $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$, перша квадратична форма якої має вигляд $ds^2 = du^2 + B^2(u)dv^2$.

Відповіді

3. $x=(a+r\cos u)\cos v,\ y=(a+r\cos u)\sin v,\ z=r\sin u$. **5.** $x=a\cos u,\ y=a\sin u,\ z=v$. **8.** $x=u^2+\frac{2vu}{\sqrt{1+4u^2+16u^6}},\ y=u+\frac{v}{\sqrt{1+4u^2+16u^6}},\ z=u^4+\frac{4vu^3}{\sqrt{1+4u^2+16u^6}}$ **9.** $\overrightarrow{r}(s,\varphi)=\overrightarrow{\rho}(s)+(\overrightarrow{\nu}(s)\cos\varphi+\overrightarrow{\beta}(s)\sin\varphi)a$. **10.** $x=e^t-\frac{e^{-t}}{e^{-t}+e^t}v,\ y=e^{-t}+\frac{e^t}{e^{-t}+e^t}v,\ z=t\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{e^{-t}+e^t}v$. **11.** $\overrightarrow{r}=\{u\cos v, u\sin v, hv\}$. **12.** Якщо криву, яка рухається задати рівняннями $x=u, y=0, z=f(u)$, а за вісь обертання взяти вісь OZ, то рівняння поверхні мають вигляд $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=f(u)+av$, де a-відношення швидкості поступального руху до кутової швидкості. **14.** Параметричні рівняння кола: $x=0,\ y=\cos u,\ z=\sin u+5$. Звідси отримуємо рівняння тора: $x=(\sin u+5)\cos v,\ y=\cos u,\ z=(\sin u+5)\sin v$. **15.** $x=au\cos v,\ y=au\sin v,\ z=u$. **17.** $\overrightarrow{r}(u,v)=\overrightarrow{\rho}(u)+v\overrightarrow{\rho}'$ **19.** $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{\rho}+\lambda\overrightarrow{\nu}=\{(a-\lambda)\cos u,\ (a-\lambda)\sin u,\ hu\}$. **21.** а) $3x+12y-z-18=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-9}{-1}$ б) $3x+4y+12z-169=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ **22.** $z=a$ **23.** $\frac{x-a\sin u\cos v}{\operatorname{ctg} u\cos v}=\frac{y-a\sin u\sin v}{\operatorname{ctg} u\sin v}=\frac{z-a\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}-a\cos u}{-1}$; $\overrightarrow{m}=\pm\{\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u\}$. **24.** $x+y+z=5$, $\overrightarrow{m}=\pm\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$
28. Поверхня: $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{\rho}(s)+\lambda\overrightarrow{\beta}(s)$. Дотична площина: $(\overrightarrow{R}-\overrightarrow{\rho},\overrightarrow{\nu}+\lambda\varkappa\overrightarrow{\tau})=0$. Нормаль: $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{\rho}+\lambda\overrightarrow{\beta}+\lambda_1(\overrightarrow{\nu}+\lambda\varkappa\overrightarrow{\tau})$. **30.** $x+y+\sqrt{2}z-(4+3\sqrt{2})=0$ **31.** $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}$ **32.** $h\sin vX-h\cos vY+uZ-huv=0$ **37.** $2x-6y-z+3=0$. Точка дотику $(1,1,-1)$. **38.** а) Параметризація сфери: $x=r\ \cos u\cos v,\ y=\cos u\sin v,\ z=r\sin u$; $ds^2=r^2du^2+r^2\cos^2 udv^2$. в) $\widetilde{ds^2}=ds^2+2(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{e})dsdv+dv^2$. г) $\widetilde{ds^2}=v^2ds^2+2v(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\rho})dsdv+\rho^2dv^2$. д) $\widetilde{ds^2}=(1+v^2k^2)ds^2+2dsdv+dv^2$. е) $ds^2=\operatorname{ch}^2(\frac{u}{a})du^2+a^2\operatorname{ch}^2(\frac{u}{a})dv^2$. є) $ds^2=(1+k^2)du^2+u^2dv^2$. **39.** а) Не може, оскільки перша квадратична форма завжди додатньо визначена. б) Не може. в) Може. г) Не може. **41.** $\varphi=\arccos\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$. **43.** $s=|\operatorname{sh}u_2-\operatorname{sh}u_1|$. **46.** $\varphi=\arccos(-\frac{3}{5})$. **47.** $\frac{\pi}{2}$.
48. б) $ds^2=(1+\frac{x^2}{p^2})dx^2-2\frac{xy}{pq}dxdy+(1+\frac{y^2}{q^2})dy^2$. в) $\widetilde{ds^2}=((1-vk)^2+\varkappa^2v^2)ds^2+dv^2$. **50.** $|v_2-v_1|$. **51.** $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **54.** Взявши першу квадратичну форму сфери у вигляді: $ds^2=du^2+R^2\cos^2(u/R)dv^2$, отримаємо $v\operatorname{ctg}\alpha=\pm\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2R})$. **55.** Записавши рівняння конуса у вигляді $\overrightarrow{r}=v\overrightarrow{e}(u), |\overrightarrow{e}(u)|=1$, отримуємо : $\operatorname{tg}\alpha\ln v=\int|\overrightarrow{e}'(u)|du+C$. **56.** Якщо рівняння поверхні взяти у вигляді $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{r}(u)+v\overrightarrow{t}(u)$, отримаємо $u+v=const$. **57.** $(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u})du+(F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u})dv=0$ **58.** $v\pm\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})=const$. **60.** $\frac{h^2}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.
61. а) Якщо $\overrightarrow{m}=\frac{[\overrightarrow{r}_v,\overrightarrow{r}_u]}{|[\overrightarrow{r}_v,\overrightarrow{r}_u]|}$, то $\varphi_2=r(\cos^2 vdu^2+dv^2)$ б) $\varphi_2=\pm\frac{k(\overrightarrow{\nu},\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{e})}{|[\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{e}]|}ds^2$,

63. $u^2+u+1=C_1e^{-v}$ $(C_1=const)$. **64.** $X=\frac{U-V}{2}\cos V,\ Y=\frac{U-V}{2}\sin V,\ Z=\frac{U-V}{2}$, де $U=2u+v,\ V=v$. **66.** $4\pi^2 rR$. **67.** а) $\varphi_2=\frac{2k}{\sqrt{k^2+v^2}}dudv$. б) $\varphi_2=\pm\frac{vk(\overrightarrow{\nu},\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\rho})}{|[\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\rho}]|}ds^2$. **68.** $\frac{2}{5}(4a-b)$. **70.** $H=0,\ K=-a^2$. **71.** $k_1=k_2=2a$. **72.** $k_1=\frac{a}{b^2},\ k_2=\frac{a}{c^2}$. **73.** а) Еліптичні. б) Точки однопорожнинного гіперболоїда гіперболічні, а точки двопорожнинного гіперболоїда еліптичні. в) Еліптичний параболоїд складається з еліптичних точок, гіперболічний параболоїд складається з гіперболічних точок. **74.** Верхня та нижня паралелі тора-це параболічні лінії, які відділяють еліптичні точки зовнішньої сторони тора від гіперболічних точок на внутрішній частині. **75.** При $x\neq 0, y\neq 0$ маємо еліптичні точки; при $x=0, y=0$-точки сплощення; при $x=0, y\neq 0$ або $x\neq 0, y=0$ -параболічні точки. **76.** $K=0,\ H=-\frac{\varkappa}{2vk}$. **81.** а) Параболічні. б) Параболічні. **82.** При $x=0$ маємо точки сплощення; інші точки є параболічними. **83.** $K=-\frac{\varkappa^2}{(1+v^2\varkappa^2)^2};\ H=\frac{k+k\varkappa^2v^2-v\varkappa'}{(1+v^2\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}}$. **84.** $\frac{du}{dv}=\pm\sqrt{u^2+a^2};\ k_1=-k_2=\frac{a}{u^2+a^2}$. **85.** $k_1=\frac{1}{p},\ k_2=\frac{1}{q}$. **87.** Якщо крива $\gamma_1\in\Phi_1$ задається рівняннями $u=u(t), v=v(t)$, то відповідна їй крива $\gamma_2\in\Phi_2$ при вказаному відображенні задається тими ж рівняннями $u=u(t), v=v(t)$. Потім треба використати формулу для обчислення довжини дуги. **88.** Досить довести, що ізометричні поверхні можна параметризувати так, що їх перші квадратичні форми, які відповідають цим параметризаціям, мають однаковий вигляд. **89.** $K=-\frac{1}{2\lambda}(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln\lambda+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\ln\lambda)$. **90.** $K=-\frac{1}{a^2}$. **91.** $K=-1$. **92.** $\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{11}=0,\ \Gamma^2_{12}=\frac{G_u}{2G},\ \Gamma^1_{22}=-\frac{G_u}{2},\ \Gamma^2_{22}=\frac{G_v}{2G}$. **93.** Врахувати, що гаусова кривина поверхні інваріантна відносно згинання поверхні. **94.** Якщо асимптотичні лінії взяти за координатні, то $L=N=0,\ L*=N*=0$. Оскільки гаусові кривини рівні, то отримаємо, що $M*=\pm M$. **95.** Перша квадратична форма гелікоїда має вигляд $ds^2=du^2+(u^2+k^2)dv^2$, катеноїда-$ds*^2=\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{k}(d\alpha^2+k^2d\beta^2)$. Якщо покласти $u=k\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k},\ v=\beta$, то $ds^2=\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{k}(d\alpha^2+k^2d\beta^2)$ і наведені співвідношення задають ізометрію. Прямолінійним твірним гелікоїда $v=const$ відповідають меридіани катеноїда $\beta=const$. **97.** $K=-\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}$. **98.** $\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=0,\ \Gamma^1_{22}=-u,\ \Gamma^2_{12}=\frac{u}{u^2+h^2}$. **100.** $y\varphi''(x)+\psi''(x))dx^2+2\varphi'(x)dxdy=0$ **101.** Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд $y^2-2xy\frac{dy}{dx}+x^2(\frac{dy}{dx})^2=b^2+a^2(\frac{dy}{dx})^2$. Звідси $y=x\frac{dx}{dy}\pm\sqrt{b^2+a^2(\frac{dy}{dx})^2}$. Отримали рівняння Клеро, розв'язуючи яке, знаходимо $y_1=C_1x+\sqrt{b^2+a^2C_1^2},\ y_2=C_2x-\sqrt{b^2+a^2C_2^2}$, де C_1, C_2-довільні сталі. Асимптотичними лініями є прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда. **102.** $x^2-y^2=C_1,\ \ xy=C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **105.** $u+v=C_1,\ u-v=C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **106.** Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд $\frac{dx^2}{a^2}-\frac{dy^2}{b^2}=0$. Разв'язавши це рівняння отримаємо $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\alpha,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\beta$, де α,β- довільні сталі. Тоді параметричні рівняння гіперболічного параболоїда, віднесеного до асимптотичних ліній, як до координатних, запишуться наступним чином: $x = \frac{a}{2}(\alpha + \beta),\ y = \frac{b}{2}(\alpha - \beta),\ z = \frac{1}{2}\alpha\beta$. **107.** Спочатку перевіряємо, що обидві сім'ї ліній належать поверхні. Диференціальне рівняння асимптотичних ліній заданої поверхні має вигляд $2xdxdy + \frac{y(1-3x^2)}{1+x^2}dx^2 = 0. \quad (*)$ Рівняння заданих сімейств ліній в криволінійних координатах x і y можна записати відповідно так: $x = a,\ y = \frac{b(1+x^2)}{\sqrt{|x|}}$. Перевіркою неважко переконатися, що ці рівняння є розв'язками диференціального рівняння (*) **108.** $u + v = C_1,\ u - v = C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **109.** Якщо взяти рівняння тора у вигляді $x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u$, то диференціальне рівняння асимптотичних ліній буде $bdu^2 + \cos u(a + b\cos u)dv^2 = 0$. Воно має загальний розв'язок $v + C = \pm\int \frac{\sqrt{b}du}{\sqrt{-\cos(a+b\cos u)}}$ при $\pi/2 < u < 3\pi/2$. Лінії $u = \pi/2,\ u = 3\pi/2$, очевидно також є розв'язками диференціального рівняння (його особливі розв'язки). Вони огинають сімейства асимптотичних ліній, які розташовані на внутрішній частині тора. **111.** $v = C_1,\ u^2 = C_2 \sin nv$, де C_1, C_2-довільні сталі. **112.** $y = C_1x^3,\ y = C_2x$, де C_1, C_2-довільні сталі. **113.** Використати те, що для площини при довільній параметризації $L = M = N \equiv 0$, і те, що площина-єдина поверхня всі точки якої є точками сплощення. **114.** $u = C_1 e^{\frac{v}{\sqrt{2}}},\ u = C_2 e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}}$, де C_1, C_2-довільні сталі. **115.** Перевіряємо, що обидві сім'ї ліній лежать на вказаній поверхні. Диференціальне рівняння асимптотичних ліній поверхні $z = xy^2$ має вигляд $(2ydx + xdy)dy = 0$. Лінії сім'ї в криволінійних координатах x, y можна записати наступним чином: $y = a,\ x^2y = b$. **116.** $x = C_1,\ y^2 \sin x = C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **117.** Диференціальне рівняння асимптотичних ліній має вигляд $(1 + v^2)du^2 - 2dv^2 = 0$. Розв'язуючи це рівняння знаходимо $v = \mathrm{sh}(C_1 + \frac{u}{\sqrt{2}}),\ v = \mathrm{sh}(C_2 - \frac{u}{\sqrt{2}})$, де C_1, C_2-довільні сталі. **120.** $s = C_1,\ s + v = C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **121.** Лініями кривини на довільній поверхні обертання, окрім сфери і площини, є паралелі і меридіани. **122.** Рівняння ліній кривини в криволінійних координатах мають вигляд $u + v = C_1,\ u - v = C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. Параметричні рівняння ліній кривини, які проходять через точку M_0, мають вигляд $x = t(2t^2 - \frac{1}{3}),\ y = -t(2t^2 - \frac{1}{3}),\ z = -2t^2$ і $x = t(2t^2 - \frac{1}{3}),\ y = t(2t^2 - \frac{1}{3}),\ z = 2t^2$. Якщо за координатні лінії на поверхні взяти лінії кривини, то рівняння поверхні можна записати у вигляді $x = (\alpha + \beta)(2\alpha^2 + 2\beta^2 - 8\alpha\beta - \frac{1}{3}),\ y = (\alpha - \beta)(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\alpha\beta - \frac{1}{3}),\ z = 2(\alpha^2 - \beta^2)$. Асимптотичними лініями поверхні є координатні лінії $u = const,\ v = const$. Рівняння асимптотичних ліній, які проходять через точку $M_0(0, 0)$, в криволінійних координатах запишеться наступним чином: $u = 0,\ v = 0$. Параметричні рівняння цих ліній мають вигляд: $x = 0,\ y = t,\ z = 0$ і $x = t, y = 0, z = 0$. Повна кривина поверхні в довільній точці дорівнює $K = -\frac{4}{(3u^2+3v^2+\frac{1}{3})^4}$, середня кривина поверхні $H = 0$. **123.** Диференціальне рівняння ліній кривини має вигляд $\frac{dx^2}{\cos^2 x} - \frac{dy^2}{\cos^2 y} = 0$. В результаті інтегрування отримуємо $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}) = C_1 \,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$, $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}) = C_1 \,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$. **124.** В рівняннях для визначення головних кривин покласти $F = M \equiv 0$. **125.** Рівняння еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$. **128.** Диференціальне рівняння ліній кривини має вигляд $\frac{du^2}{p+q+4u^2} - \frac{dv^2}{p+q+4v^2} = 0$. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $\frac{2u+\sqrt{p+q+4u^2}}{2v+\sqrt{p+q+4v^2}} = C_1$, $(2u + \sqrt{p+q+4u^2})(2v + \sqrt{p+q+4v^2}) = C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі. **129.** Лініями кривини даної поверхні є координатні лінії $u = C_1$, $v = C_2$. Далі записуємо параметричні рівняння ліній кривини, використовуючи рівняння поверхні. Позбувшись параметра, отримуємо, що лінії кривини лежать у площинах $x + C_1 z - 3C_1 - 2C_1^3 = 0$ і $y - C_2 z - 3C_2 - 2C_2^3 = 0$, які паралельні до осей OY і OX відповідно. **130.** Рівняння ліній кривини мають вигляд: $u = C_1 - \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$, $v = C_2 + \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$, де C_1, C_2-довільні сталі. Рівняння гелікоїда віднесеного до ліній кривини, мають вигляд: $x = a\,\mathrm{sh}(\alpha - \beta)\cos(\alpha+\beta)$, $y = a\,\mathrm{sh}(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$, $z = a(\alpha+\beta)$. **134.** Для паралелей $k_g = \frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{1+f'^2(u)}}$. Для меридіанів $k_g = 0$. **135.** а) $k_g = \frac{a}{a^2+h^2}$. б) $k^g = 0$. **136.** При $v = const$ $k_g = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$, при $u = const$ $k_g = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$. **137.** Лінії, які розглядаються в умові задачі, є координатними лініями $v = \pm l$, тому $k_g = \frac{\Gamma_{11}^2\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}} = -\frac{lk'\pm k\pm l^2k^3}{(1+l^2k^2)^{\frac{3}{2}}}$. **138.** $k_g = 0$. **139.** $v^2 + (u-u_0)^2 = a^2$, $u = u_0$. $K = -1$. **140.** $k_g = \frac{\mathrm{sh}\, v}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2 v}$. **141.** Вказівка: підставити в формулу спочатку $u = const$, потім $v = const$. **142.** $k_g = 1$. **143.** $v = \pm\int\limits_0^u \frac{du}{B(u)\sqrt{C_1^2B^2(u)-1}} + C_2$, де C_1, C_2-довільні сталі.

Список літератури

1. Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. *Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ.*— К.: Выща шк., 1989.

2.Боровец А.Н., Петкевич Н.Ю. *Контрольные работы и методические указания к курсу "Дифференциальная геометрия".* — К.: КГУ, 1985.

3.Боровец А.Н., Зражевская А.М., Петкевич Н.Ю. *Методические указания к практическим занятиям по дифференциальной геометрии.* — К.: КГУ, 1985.

4. Белько И.В., Ведерников В.I., Воднев В.Т., Гусак А.А., Нахимовская А.И., Рябушко А.П., Тутаев Л.К., Феденко А.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии.* — М.: Наука, 1979.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Упорядники: **БІЛУН** Світлана Володимирівна
ЦИГАНІВСЬКА Ірина Миколаївна

Друкується за авторською редакцією