КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
2014

Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу
Укладачі О. Ю. Константінов, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. –
41 с.

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. М.Ф. Городній

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.А. Михайлець

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасний курс функціонального аналізу, що читається для студентів спеціальностей "Математика", "Прикладна математика", "Статистика", "Системний аналіз та керування" та інших математичних спеціальностей є одним з найбільш абстрактних і важких для засвоєння дисциплін. Разом з тим елементи функціонального аналізу застосовуються в теорії ймовірностей та випадкових процесів, фінанасовій математиці, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, гармонічному та вейвлет-аналізі та інших дисциплінах. Тому кожний кваліфікований математик обов'язково повинен оволодіти основними поняттями функціонального аналізу.

Ці навчальні завдання є результатом багаторічного досвіду викладання функціонального аналізу викладачами кафедри математичного аналізу. Вони охоплюють теми курса функціонального аналізу, що читаються на механіко-математичного факультеті в VI семестрі.

Кожне заняття передбачає такі елементи:

1) підготовку студентами відповідей на контрольні питання з теми заняття (ці відповіді повинні містити основний теоретичний матеріал, необхідний для виконання запропонованих завдань);

2) розв'язування біля дошки під керівництвом викладача 3-5 основних задач, які в тексті відмічені літерою О (у коментарях до розв'язування викладач звертає увагу на типові способи і методи розв'язування задач);

3) самостійне розв'язування студентами 3-5 задач, дещо простіших, ніж у пункті 2), і відмічених літерою С (у разі необхідності викладач надає студентам відповідну допомогу);

4) виконання студентами домашнього завдання, що складається з обов'язкової частини (задачі з літерою О) та індивідуальної (задачі з літерою І).

До складу завдань для кожного заняття включені також додаткові задачі, що відмічені літерою Д. Вони містять матеріал підвищеної складності і можуть пропонуватися студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань.

Більшість наведених тут задач запозичена з відомої навчальної та монографічної літератури. Студентам, що бажають поглибити свої знання, розв'язуючи більш складні задачі пропонується в першу чергу:

Збірник задач з функціонального аналізу (розділи: "Банахові простори", "Гільбертові простори", "Спряжені простори", "Теорія операторів"). – К.:, ВПЦ "Київський університет", 2004.

Заняття 1
ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ЗБІЖНІСТЬ В ЛІНІЙНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

Контрольні запитання

1. Означення банахового простору.

2. Означення норм у просторах $C([a,b]), L_p(X,\lambda), 1 \le p < +\infty$, $l_p, 1 \le p \le +\infty$.

3. Означення лінійної оболонки(л.о.), замкненої лінійної оболонки (з.л.о.), тотальної множини.

4. Означення підпростору.

5. Теорема про ізоморфізм скінченновимірних ЛНП.

6. Еквівалентні норми.

A1

O1. Чи є нормами на відповідних просторах наведені функції:

1) $X = C([a,b]),\ \varphi(x) = \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b) \le t \le b} |x(t)|$;

2) $X = C^1([a,b]),\ \varphi(x) = |x(a)| + \int\limits_a^b |x'(t)|dt$;

C1. Знайти норму елемента в заданому просторі:

1) $x = (1+i, 2-3i, ...)$ в $l_p, 1 \le p < +\infty$;

2) $x(t) = \exp(it)$ в $L_3(([0,1])$.

O2. Чи збігається у просторі $l_p,\ 1 \le p \le +\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x^{(n)} = (0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$; 3) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$;

2) $x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$;

C2. Чи збігаються у просторі $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p < +\infty$ задані послідовності елементів:

1) $x_n(t) = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n^2}]}(t)$; 2) $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}} \cdot \chi_{[n, +\infty)}(t)$?

O3. Довести, що:

1) система функцій $\{1, t, t^2, ...\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b])$, $1 \le p < +\infty$;
2) система функцій $\left\{t^{2k}\ :\ k \ge 0\right\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b])$, $1 \le p < +\infty$ при $a \ge 0$;
3) Довести щільність в $L_p([a,b]),\ 1 \le p < +\infty$ множини неперервних функцій x таких, що $x(a) = x(b) = 0$;

О4. Довести, що простір $C([a,b])$ з нормою $||x||_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$ не є банаховим.

О5. Довести, що для довільного $m \in \mathbf{N}$ множина многочленів степеня не вище m є підпростором в $L_p([-1,1]), 1 \le p < +\infty,$

С3. Довести, що норми $||x||_\infty = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$ та $||x||_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$ $1 \le p < +\infty,$ в $C([a,b])$ не еквівалентні.

Д1.Знайти необхідну й достатню умову на послідовність $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset [0,+\infty),$ щоб функція $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2 \right)^{1/2}$ була нормою на l_2.

Д2. Нехай X – лінійний метричний простір з метрикою ρ, яка має властивості: (i) $\{x,y,z\} \subset X \ : \ \rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$; (ii) $\forall x \in X$ $\forall \lambda \in \mathbf{C} \ : \ \rho(0, \lambda x) = |\lambda| \rho(0,x)$.

1) Показати, що X – ЛНП з нормою $||x|| = \rho(0,x)$.

2)* Навести приклад метрики на $\mathbf{R}$, що не має жодної з властивостей (i), (ii).

Д3. Довести, що ЛНП несепарабельний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує незліченна кількість куль деякого фіксованого радіуса $r > 0$, що попарно не перетинаються. (Вказівка. Застосувати лему Цорна.)

Д4.Довести, що 1) $L_\infty([a,b])$ несепарабельний простір;

2) $L_\infty(T)$ або скінченновимірний або несепарабельний простір;

3) $C([a,b]) \subset L_\infty([a,b])$, причому $||x||_\infty = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|, x \in C([a,b]),$ але $C([a,b])$ не є скрізь щільною множиною в $L_\infty([a,b])$;

4) $L_\infty(T) \subset L_p(T), 1 \le p < +\infty,$ причому $||x||_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} ||x||_p,$ $x \in L_\infty(T)$.

Д5. Коли досягається рівність у нерівності: 1) Гельдера; 2) Мінковського?

Д6. Довести, що простір $BV([a,b])$ функцій обмеженої варіації на $[a,b]$ з нормою $||x|| = |x(a)| + \mathrm{Var}\,(x,[a,b])$ – банахів. Чи є він сепарабельним?

Д7. Нехай $x \in L_1([a,b])$. Довести, що $\lim\limits_{h \to 0+} \int\limits_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|dt = 0.$

Д8. Довести, що ЛНП X банахів $\Leftrightarrow$ будь-який ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, для якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < +\infty,$ збігається в X.

Д9. Лінійно незалежна система $\{x_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ елементів лінійного простору X називається *базисом Гамеля*, якщо л.о.$\{x_\alpha \ : \ \alpha \in A\} = X$. Довести, що:

1) у кожному просторі існує базис Гамеля (Вказівка. Застосувати лему Цорна до сукупності $\{\chi_A\}$ усіх систем лінійно незалежних елементів в X, ввівши на ній частковий порядок за включенням);

2) кожен елемент простору X однозначно зображується у вигляді лінійної комбінації деяких елементів з базису Гамеля простору X;

3)* у нескінченновимірному банаховому просторі не існує зліченного базису Гамеля (Вказівка. Якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – зліченний базис Гамеля в банаховому просторі X, L_n :=л.о.($\{e_1, ..., e_n\}$), $n \geq 1$, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Далі застосувати теорему Бера про категорії.);

4) у п.3) повнота простору істотна.

B1

I1. Чи є нормами на відповідних просторах наведені функції:

1) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + |x(b)|$;

2) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \left(\int\limits_a^b \alpha(t)|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha \in C([a,b])$, $\alpha(t) > 0$, $t \in [a,b]$;

3) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + \int\limits_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} |x(t)| dt$?

4) $X = \mathbf{R}^3$, $\varphi(x) = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$;

5) $X = \mathbf{R}^3$, $\varphi(x) = 4|x_1| + |x_3|$?

O1 Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою, $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. Довести, що:

1) $L_{p_1}(T,\mu) \supset L_{p_2}(T,\mu)$;

2) зі збіжності послідовності в $L_{p_2}(T,\mu)$ випливає її збіжність в $L_{p_1}(T,\mu)$;

3) простори $L_{p_1}(\mathbf{R})$ та $L_{p_2}(\mathbf{R})$ не вкладаються один в інший ні при яких $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$;

4) $l_{p_1} \subset l_{p_2}$.

I2. Чи збігається у просторі $C([0,1])$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;

2) $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;

3) $x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;

4) $x_n(t) = nte^{-nt}$;

5) $x_n(t) = n \ln(1 + \frac{t}{n})$;

6) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;

7) $x_n(t) = \varphi(t + \frac{1}{n})$, $\varphi \in C(\mathbf{R})$ – фіксована функція;

I3 Послідовності з задачі I2 дослідити на збіжність в $L_p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$.

I4. Чи збігається у просторі l_p, $1 \leq p \leq +\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x^{(n)} = (1, 0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;

2) $x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

3) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...)$;

4) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;

5) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{\ln n}, ..., \tfrac{1}{\ln n}}_{n}, 0, ...)$;

6) $x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n}, 0, ...)$;

7) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1, 0, ...)$;

8) $x^{(n)} = (\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{2}, ..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$;

9) $x^{(n)} = (\underbrace{(\tfrac{1}{2})^n, (\tfrac{2}{3})^n, ..., (\tfrac{n}{n+1})^n}_{n}, 0, 0, ...)$.

I5. Чи збігається у просторі $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p < +\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|+1}} \chi_{[n,2n]}(t)$;

2) $x_n(t) = ne^{-n|t|}$;

3) $x_n(t) = 1 - \frac{t}{n}$;

4) $x_n(t) = (\sqrt{n} - n\sqrt{n}t)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$.

I6. Довести, що:

1) система функцій $\{1, \cos nt, \sin nt\ :\ n \ge 1\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$, $1 \le p < +\infty$;
2) система функцій $\{e^{int}\ :\ n \in \mathbf{Z}\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$;
3) система функцій $\{e^{int}\ :\ n \in \mathbf{Z}\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < 2\pi$;
4) система функцій $\{1, \sin nt\ :\ n \ge 1\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < \pi$;
5) система функцій $\{1, \cos nt\ :\ n \ge 1\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < \pi$;
6) система елементів $\{e_n = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, ...)\ :\ n \ge 1\}$ тотальна в $l_p,\ 1 \le p < +\infty$.

I7. Чи є щільними в $L_p([a, b]),\ 1 \le p < +\infty$ множини:

1) простих функцій;
2) східчастих функцій;
3) характеристичних функцій;
4) неперервних функцій;
5) парних неперервних функцій при $[a, b] = [-1, 1]$;
6) многочленів;
7) многочленів з раціональними коефіцієнтами;
8) многочленів з нульовою сумою коефіцієнтів;
9) парних многочленів, якщо $a \ge 0$;
10) неперервних функцій x таких, що $x(a) = x(b) = 0$;
11) многочленів від $(t - \frac{a+b}{2})^2$;
12) многочленів від e^t.

I8. Чи є підпросторами в $C([-1, 1])$ такі підмножини:

1) монотонні функції;
2) неспадні функції;
3) парні функції;
4) непарні функції;
5) многочлени;
6) многочлени степеня $\leq m$ ($m \in \mathbf{N}$ – фіксоване);
7) кусково-гладкі функції;
8) неперервно диференційовні функції;
9) неперервні функції обмеженої варіації;
10) функції x, для яких $x(0) = 0$;
11) функції x, для яких $\int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0$;
12) функції, що задовольняють умову Ліпшиця.

Примітка. Кусково-гладкими називають неперервні функції, що мають неперервну похідну в усіх точках, крім скінченного числа.

Заняття 2
ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення скалярного добутку; його властивості.
2. Означення гільбертового простору.
3. Рівність паралелограма та поляризаційна тотожність.
3. Ортогональне доповнення множини у гільбертовому просторі. Теорема про розклад гільбертового простору.
4. Означення ортогональної, ортонормованої, повної системи, ортонормованого базису.

А2

О1. Довести, що в просторі $C([0,1])$ норма не породжується скалярним добутком.

О2. Нехай L і M – деякі ортогональні множини в гільбертовому просторі H, такі, що $H = L + M$. Довести, що $M^{\perp} = L$.

О3. Довести, що множина парних функцій в $L_2([-1,1])$ є підпростором. Знайти його ортогональне доповнення.

С1. Нехай $L \subset H$. Довести, що $L^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow L$ – тотальна в H.

О4. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $C([0,1])$; 2) $\left\{t^k \mid k \geq 0\right\}$; 3) $\left\{t^k \mid k \geq 10\right\}$;

О5. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин:

1) $\{\sin kt \mid k \geq 1\}$; 2) $\left\{e^{ikt} \mid k \geq 5\right\}$; 3) $\left\{t^{2k} \mid k \geq 0\right\}$.

С2. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин:
$1)\{(1,1,0,...)\};\ 2)\{e_k,\ 1 \leq k \leq n\},\ n \in \mathbf{N};\ 3)\{e_{2k} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

Д1. Розглянемо простір $H := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \mid \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}$ – не більш ніж злічення множина, $\sum\limits_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|^2 < +\infty\}$. Довести, що H – несепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(f,g) = \sum\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)g(x),\ f,g \in H$.

Д2. Довести, що система функцій Хаара $\{x_{kn} \mid 1 \leq k \leq 2^n,\ n \geq 0\} \cup \{x_0\}$, де
$$x_{kn}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & t \in [\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k}{2^n}), \\ 0, & t \in [0,1] \backslash [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}], \end{cases} \qquad x_0(t) = 1,\ t \in [0,1],$$
є ортонормованим базисом у просторі $L_2([0,1])$.

Д3. Перевірити ортогональність у H таких систем:

1) $x_n(t) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^m, & t \in [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}),\ m = 0, 1, ..., 2^n - 1, \\ -1, & t = 1; \end{cases}$
$n \geq 1,$ – функції Радемахера, $H = L_2([0,1])$;
2) $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n,\ n \geq 0$ – многочлени Лежандра, $H = L_2([-1,1])$;
3) $H_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2},\ n \geq 0$ – функції Ерміта, $H = L_2(\mathbf{R})$;
4) $x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t-a)(t-b)]^n,\ n \geq 0$, $H = L_2([a,b])$;
5) $x_n(t) = e^{\frac{t}{2}} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}),\ n \geq 0,$ – функції Лагерра, $H = L_2([0,+\infty))$.

Показати, що системи з у п.п. 2,4 є ортогональними базисами у відповідних просторах. У п. 1 перевірити, що функція $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ ортогональна до всіх x_n (звідси випливає, що система з п. 1 не є ортонормованим базисом).

Д4. Нехай L – лінійна оболонка множини $\left\{e^{i\lambda t} \mid \lambda \in \mathbf{R}\right\}$, в якій визначений скалярний добуток $(x,y) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}dt,\ \{x,y\} \subset L$. Довести, що:

1) $(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) = \delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu, \end{cases} \quad \{\lambda,\mu\} \subset \mathbf{R};$

2) поповнення множини L несепарабельне.

Д5. Нехай M, N – підпростори гільбертового простору H і $\forall x \in H$ $\exists! x_1 \in M\ \exists! x_2 \in N\ :\ x = x_1 + x_2$. Чи правильно, що $N = M^\perp$?

Д6. Нехай $\{x_n\ :\ n \geq 1\}$ – довільна злічення система функцій з $L_2([a.b])$, $c > b$. Довести, що функції x_n можна так продовжити на відрізок $[b,c]$, щоб отримати ортогональну систему на $L_2([a,c])$.

Д7. Нехай M і N – підпростори в гільбертовому просторі H. Довести, що: 1) не обов'язково $M + N$ – підпростір в H (розглянути випадок $H = l_2$, $N = \{(x_1, 0, x_3, 0, ...) \mid x \in l_2\}$, $M = \left\{(x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, ...) \mid x \in l_2\right\}$ і встановити, що $M + N$ скрізь щільна в l_2, але $M + N \neq l_2$); 2) $M + N$ – підпростір в H, якщо $M \perp N$.

Д8. Довести, що система $\{t^n,\ t \in [0,1]\ :\ n \geq 0\}$ – лінійно незалежна, її замкнена лінійна оболонка дорівнює $L_2([0,1])$, але вона не є базисом в $L_2([0,1])$, тобто не для всіх $x \in L_2([0,1])$ існують коефіцієнти $\{c_n\ :\ n \geq 0\}$ такі, що $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ в $L_2([0,1])$ (збіжність розуміти, як збіжність в $L_2([0,1])$). Чи немає тут суперечності? Чому?

Д9*. Довести, що в ЛНП $(X, ||\cdot||)$ можна ввести скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, для якого $||x||^2 = (x,x),\ x \in X$, тоді й тільки тоді, коли для всіх $\{x,y\} \subset X$ виконується рівність паралелограма.

I1. З'ясувати, чи визначає скалярний добуток в $\mathbf{R}^2$ функція $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, якщо:

1) $\varphi(x,y) = x_1 + x_2$;
2) $\varphi(x,y) = x_2 y_2$;
3) $\varphi(x,y) = 3x_1x_2 + 2y_1y_2$;
4) $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$;
5) $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_2y_2$,

де $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$.

O1. Нехай p – вимірна за Лебегом функція на (a,b) така, що $p(t) > 0$ для майже всіх $t \in (a,b)$, і $L_{2,p}([a,b]) = \big\{x \mid \sqrt{p}\,x \in L_2([a,b])\big\}$. 1) Довести, що $L_{2,p}([a,b])$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком: $(x,y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}p(t)dt$.

2)* Довести,що включення $L_{2,p}([a,b]) \subset L_2([a,b])$ справджується тоді й лише тоді, коли $\exists \varepsilon > 0 \ : \ p(t) \geq \varepsilon > 0 (\operatorname{mod} \mathrm{m})$.

I2. Довести, що в гільбертовому просторі над числовим полем $\mathbf{K}$ елементи x і y ортогональні тоді й тільки тоді, коли:

1) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ при $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;

2) $||\lambda x + \mu y||^2 = ||\lambda x||^2 + ||\mu y||^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

O2. Нехай $\{x_k : k \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в H тоді й лише тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2 < \infty$.

O3. Довести, що в лінійних нормованих просторах $c_0,\ l_p,\ L_p([a,b]),\ p \neq 2$, норма не породжується скалярним добутком.

I3. Нехай H – гільбертів простір і $\{x_n : n \geq 1\} \subset H, \{y_n : n \geq 1\} \subset H$, $||x_n|| = 1,\ ||y_n|| = 1,\ n \geq 1$. Довести правильність таких тверджень:

1) $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) $||x_n + y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

O4. Нехай $L = \{x \in L_2(\mathbf{R}) \mid x(t) = 0,\ t \geq 0 \ (\operatorname{mod} m)\}$. Довести, що L підпростір та знайти ортогональне доповнення до L

O5. 1) Довести, що для довільного $M \subset H$ ортогональне доповнення $M^{\perp}$ є підпростором.

2) Нехай $M \subset N \subset H$. Довести, що $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

3) Довести, що для довільного $M \subset H$ має місце $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

4) Рівність $M = (M^{\perp})^{\perp}$ має місце тоді й лише тоді, коли M – підпростір.

I4. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин:

1) $\{(2,0,3,0,0,...)\}$;
2) $\{e_{2k+1} \mid k \in \mathbf{N}\}$.
3) $\{x = \{\alpha^k \,:\, k \geq 0\} \mid \alpha \in [0,1)\}$;
4) $\left\{x = \left\{\frac{1}{(n+1)^k} \,:\, k \geq 0\right\} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

I5. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини:
1) $P([0,1])$ усіх многочленів, що розглядаються на $[0,1]$;
2) $\{x \mid x(t) = y(t^2),\ t \in [0,1],\ y \in P([0,1])\}$;
3) $\{x \in P([0,1]) \mid x(0) = 0\}$;
4) $\{e^{kt} \mid k \geq 0\}$;
5) $\{t^{2k} \mid k \geq 0\}$;
6) $\{t^{3k} \mid k \geq 4\}$.

I6. Знайти в $L_2([-1,1])$ ортогональне доповнення до множини:
1) $\{t^k \mid k \geq 13\}$;
2) $\{t^{2k} \mid k \geq 0\}$;
3) $\{t^{2k+1} \mid k \geq 0\}$;
4) $\{t^{2k} \mid k \geq 7\}$;
5) непарних функцій.

I7. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин:
1) $\{\cos kt \mid k \geq 1\}$;
2) $\{e^{-ikt} \mid k \geq 3\}$.

I8. У гільбертовому просторі H знайти відстань від елемента $y \in H$ до підпростору L, якщо:
1) $y(t) = e^t,\ L =$ л.о.$\{1, t, t^2\},\ H = L_2([-1,1])$;
2) $y(t) = t^3,\ L =$ л.о.$\{1, t, t^2\},\ H = L_2([0,1])$;
3) $y(t) = t,\ L =$ л.о.$\{\sin t, \cos t\},\ H = L_2([-\pi,\pi])$;
4) $y(t) = \sin 3t,\ L =$ л.о.$\{1, \cos t, \cos 2t\},\ H = L_2([-\pi,\pi])$;
5) $y(t) = 1,\ L =$ л.о.$\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\},\ H = L_2([0,5])$;
6) $y(t) = \chi_{[4,5]},\ L =$ л.о.$\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\},\ H = L_2([0,5])$.

I9. 1) Довести, що будь-яка ортонормована система в гільбертовому просторі є лінійно незалежною.

2) Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$, $\{e_n : n \geq 1\} \subset H$ – ортонормована система і $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, де $x_n \in \mathbf{K},\ n \geq 1$. Довести, що $x_n = (x, e_n),\ n \geq 1$.

3) Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – послідовність елементів гільбертового простору H така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n = 0$ для деякої послідовності $\{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. Чи правильно, що $c_n = 0,\ n \geq 1$, якщо: a) $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортогональна система? b) $\{e_n : n \geq 1\}$ – лінійно незалежна система?

4) Нехай $M \subset H$, де H – гільбертів простір. Чи завжди вірна формула $H = M \bigoplus M^{\perp}$?

5) Нехай L – одновимірний підпростір у гільбертовому просторі H, $a \in L,\ a \neq \overline{0}$. Довести, що $\forall x \in H\ :\ \rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x,a)|}{||a||}$.

6) Довести, що система функцій $\left\{e^{2\pi int} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ утворює ортонормований базис в $L_2([0,1])$.

7) Довести, що система функцій $\left\{e^{-int} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ повна в $L_2([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли $b - a \leq 2\pi$.

8) Довести, що одинична куля у нескінченновимірному гільбертовому просторі H містить безліч куль радіуса $\frac{1}{4}$, що попарно не перетинаються. (Вказівка: розглянути випадок $H = l_2$). Показати, що в H не існує ненульової міри (аналогічної мірі Лебега в $\mathbf{R}^m$), визначеної на борельових підмножинах H, інваріантної відносно паралельних перенесень і такої, що набуває скінченних значень на обмежених множинах.

Заняття 3
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Контрольні запитання

1. Неперервні та обмежені лінійні функціонали.

2. Означення норми лінійного неперервного функціонала(ЛНФ).

3. Теореми про загальний вигляд ЛНФ у гільбертовому просторі, $L_p(T,\mu),\ l_p,\ 1 \le p < +\infty.$

А3

О1. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0,2])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їх норми за означенням:

1) $f(x) = 2x(0) - x(1);$

2) $f(x) = x(0) - 3x(1) + 2x(2);$

3) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - \int\limits_1^2 x(t)dt;$

4) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - 2x(0).$

С1. Завдання О1 для функціоналів:

1) $f(x) = x(0);$

2) $f(x) = ||x||.$

О2. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n;$

2) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2;$

3) $X = l_1, l_2, l_\infty,\ f(x) = x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3;$

О3. Нехай $1 \le p \le +\infty$ фіксоване. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n};$

2) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}};$

3) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n x_n}{2^n};$

4) $X = L_p([1,4]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_1^2 tx(t)dt - 2i\int\limits_3^4 x(t)dt;$

С2. Нехай $1 \le p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^\alpha};$

2) $X = L_p([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha}dt;$

Д1. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що:

1) $||f|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} f(x)$, якщо простір X дійсний;

2) $||f|| = \sup\limits_{x \in M, x \ne 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$, де M – скрізь щільна множина в X.

Д2. Нехай X – ЛНП, f – лінійний функціонал на X. Довести, що

1) $\mathrm{Ker}\, f$ – лінійна множина;

2) якщо $z \in X \backslash \mathrm{Ker}\, f$, то $\forall x \in X\ \exists! y \in \mathrm{Ker}\, f\ \exists! \lambda \in \mathbf{K}\ :\ x = y + \lambda z$.

Д3. Лінійний функціонал $f : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ називають невід'ємним, якщо для довільного $x \in C([a,b]),\ x(t) \ge 0,\ t \in [a,b]$, виконується нерівність $f(x) \ge 0$. Довести, що невід'ємний функціонал неперервний, причому $||f|| = f(x_1)$, де $x_1(t) = 1, t \in [a,b]$.

Д4. Довести, що лінійний функціонал f в ЛНП X неперервний тоді й лише тоді, коли його ядро $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ замкнене в X.

Д5. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, f – лінійний функціонал на X. Довести, що кожна з наступних умов рівносильна неперервності f:

1) існує $R > 0$ таке, що множина $f(\overline{B}(0,R))$ обмежена;

2) для будь-якої збіжної до нуля послідовності $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ множина $\{f(x_n)\ :\ n \ge 1\}$ обмежена;

3) для довільного $c \in \mathbf{R}$ множина $\{x \mid f(x) < c\}$ відкрита, якщо $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;

4) $\exists C > 0\ :\ \{x \mid |f(x)| \le C\}$ має внутрішні точки.

Д6. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, $f, g \in X^*$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. Довести, що $\exists \alpha \in \mathbf{K}\ :\ g = \alpha f$.

Д7. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, f – ненульовий лінійний функціонал на X. Довести, що f – відкрите відображення, тобто образ довільної відкритої множини в X при відображенні f є відкритою множиною в $\mathbf{K}$.

В3

О1. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t-\frac{1}{2})dt;$

2) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \mathrm{sign}\,x(t)dt;$

3) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n};$

4) $X = L_p([0,2]),\ f(x) = i\int\limits_0^1 t^2 x(t)dt - \int\limits_1^2 x(t)dt.$

I1. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0,1])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їх норми за означенням:

1) $f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt;$

2) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\cos \pi t dt;$

3) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\cos \pi t dt;$

4) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - 3x(0) - x(1);$

5) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x(\frac{1}{2^n});$

6) $f(x) = \int\limits_0^1 t^3 x(t)dt - 4x(\frac{1}{2});$

I2. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$
де $y \in l_\infty$ – фіксований;

2) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n};$

3) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n)\frac{n-1}{n} x_n;$

4) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \mathrm{sign}(x_1);$

5) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = x_j,\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

6) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = x_j - x_{j+1},\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

7) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = (1+i)x_1 - ix_2.$

O2. Навести приклад лінійного неперервного функціонала f на $C([0,1])$, для якого: 1) не існує елемента $x_0 \in C([0,1]),\ ||x_0|| = 1,$ такого, що $|f(x_0)| = ||f||$; 2) існує безліч елементів $x_0 \in C([0,1]),\ ||x_0|| = 1,$ таких, що $f(x_0) = ||f||$; 3) існує єдиний елемент $x_0 \in C([0,1]),\ ||x_0|| = 1,$ такий, що $f(x_0) = ||f||$.

I3. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \operatorname{arctg} n;$

2) $X = l_{\frac{7}{5}},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_{3n}}{\sqrt[7]{k^4}};$

3) $X = l_p,\ f(x) = 2x_1 + 4x_2;$

4) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n};$

5) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t) \operatorname{arctg}(t+1) dt;$

6) $X = L_p([-1,3]),\ f(x) = \int\limits_0^2 e^t x(t) dt - \int\limits_2^3 x(t) dt;$

7) $X = L_p(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-t^2} x(t) dt;$

8) $X = L_\infty([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} x(t) dt;$

9) $X = L_\infty([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} x(t) dt.$

I4. Нехай $1 \leq p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n((n+1)^\alpha - n^\alpha);$

2) $X = L_p([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} x(t) dt;$

3) $X = L_p([1,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x(t)}{t^\alpha} dt;$

4) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n x_n.$

Заняття 4
СПРЯЖЕНІ ПРОСТОРИ. ТЕОРЕМА ГАНА – БАНАХА.

Контрольні запитання

1. Теорема про загальний вигляд ЛНФ в $C([a,b])$.
2. Теорема Гана – Банаха. Її наслідки.

А4

О1. *Користуючись описом спряженого простору довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними на $C([-1,1])$ та знайти їх норми:*

1) $f(x) = 3x(0) - 2x(-1) - x(1);$

2) $f(x) = x(0) - \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt;$

3) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt.$

С1. *Задача О1 для функціоналів в просторі $C([0,1])$:*

1) $f(x) = 3x(0) - x(1);$

2) $f(x) = 2x(0) - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt.$

О2. *Довести, що функціонал $f(x) = \int\limits_{a}^{b} p(t)x(t)dt,\ x \in C([a,b])$, є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо:*

1) $p \in C([a,b])$ – фіксована функція;

2) $p \in L_1([a,b])$ – фіксована функція.*

О3. *Довести, що $l_1^* = l_\infty$.*

О4. *Нехай G – підпростір гільбертового простору H і $f \in G^*$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?*

С2. *Нехай X – ЛНП, A – деяка множина індексів. Системи $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X,\ \{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ називають біортогональними, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in A$, де $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta,\ \delta_{\alpha\alpha} = 1$).*

Нехай $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система. Довести, що існує біортогональна до неї система.

С3. *Нехай X – ЛНП, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система і $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$. Довести існування функціонала $f \in X^*$ такого, що $f(x_k) = c_k,\ k = 1, ..., n$.*

Д1. *Довести, що* $c_0^* = l_1$*, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на* c_0 *задається формулою* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n,$ $x \in c_0,$ *де* $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ *– фіксований елемент,* $||f|| = ||a||_1.$

Д2. *Довести, що* $c^* = l_1$*, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на* c *задається формулою* $f(x) = a_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x \in c,$ *де* $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ *– фіксований елемент,* $||f|| = ||a||_1.$

Д3. *Знайти загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в банаховому просторі* $C^1([a, b]).$

Д4*. *Нехай* X *– ЛНП,* $f \in X^*$*. 1) Довести, що для того, щоб існував елемент* $z_0 \in \overline{B}(0, 1)$ *такий, що* $|f(z_0)| = ||f||,$ *необхідно, щоб для будь-якого* $x_0 \in X,$ *і достатньо, щоб для деякого* $x_0 \in X \backslash \mathrm{Ker}\, f$ *існував елемент* $y_0 \in \mathrm{Ker}\, f$ *такий, що* $\rho(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = ||x_0 - y_0||$ *(тобто елемент найкращого наближення для елемента* x_0 *в* $\mathrm{Ker}\, f$*).*

2) За якої умови на функціонал f *для кожного елемента* $x_0 \in X$ *існує не більше одного елемента найкращого наближення в* $\mathrm{Ker}\, f$*?*

Д5. *Довести, що для кожного функціонала* $f \in (C([a, b]))^*$ *існують невід'ємні функціонали* f_1 *і* f_2 *такі, що* $f = f_1 - f_2.$

Д6. *Довести, що в нескінченновимірному ЛНП існують лінійні розривні функціонали.*

Д7. *Розглянемо* c_0 *як підпростір простору* c*. Описати всі лінійні неперервні продовження функціонала* $f \in c_0^*$ *на* c*. Які з них зберігають норму?*

Д8. *1) Довести, що існує функціонал* $F \in l_\infty^*$ *такий, що* $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x \in c$*; 2) Довести, що включення* $l_1 \subset l_\infty^*$ *строге.*

Д9. *Нехай* X *– ЛНП,* A *– деяка множина індексів. Системи* $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X,\ \{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ *називають біортогональними, якщо* $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in A,$ *де* $\delta_{\alpha\beta}$ *– символ Кронекера* $(\delta_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta,\ \delta_{\alpha\alpha} = 1).$

1) За якої умови на лінійно незалежну систему* $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$ *існує біортогональна до неї система?*

2) Нехай* $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*$ *– лінійно незалежна система. Довести, що в* X *існує біортогональна до неї система.*

Д10. *Нехай* X *– ЛНП,* $\{x_n : n \geq 1\} \subset X, \{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}, M > 0.$
Довести, що для існування функціонала $f \in X^*$*, який задовольняє умови* $f(x_n) = c_n,\ n \geq 1$ *і* $||f|| \leq M,$ *необхідно і достатньо, щоб для довільної скінченної системи* $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subset \mathbf{R}$ *виконувалась нерівність* $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k c_k\right| \leq M \left|\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right|\right|.$

O1. *Довести, що* $l_1 \subset (l_\infty)^*$, *тобто що для довільного елемента* $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ *функціонал* $f_a(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n, x=(x_1, ..., x_n, ...) \in l_\infty$, *є лінійним неперервним функціоналом на* l_∞ *і* $||f_a|| = ||a||_1$.

O2. *Довести, що* $L_1(T, \mathfrak{F}, \mu) \subset (L_\infty(T, \mathfrak{F}, \mu))^*$, *тобто що для довільного елемента* $h \in L_1(T, \mathfrak{F}, \mu)$ *функціонал* $f(x) := \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t)$, $x \in L_\infty(T, \mathfrak{F}, \mu)$, *є лінійним неперервним функціоналом на* $L_\infty(T, \mathfrak{F}, \mu)$ *і* $||f|| = ||h||_1$.

O3. *Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів в просторі* X:

1) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt - x(0);$

2) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(\frac{a+b}{2}) - \int\limits_{a}^{b} x(t)dt;$

3) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x_k + x_{k+1});$

4) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k};$

5) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x(t)dt.$

I1. *Користуючись описом спряженого простору* $(C([a,b]))^*$, *довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними на* $C([a,b])$ *і знайти їх норми:*

1) $X = C([a,b]),\ f(x) = \frac{1}{2}(x(a) - x(b));$

2) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{1} tx(t)dt - x(0) - 2x(2);$

3) $X = C([0,3]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{1} x(t)dt - \int\limits_{2}^{3} tx(t)dt;$

4) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{1} (1-2t)x(t)dt - x(0) + 2x(2);$

5) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{\pi} x(t)\cos t dt - 2x(0);$

6) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{\pi} x(t)|\cos t|dt - 4x(1);$

7) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^{\pi} x(t)\sin t dt - 5x(\pi);$

8) $X = C([-1,2]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} |t|x(t)dt + 3\int\limits_{1}^{2} x(t)dt - 2x(0);$

9) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x(\frac{1}{n});$

10) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x(1-\frac{1}{n});$

11) $X = C([a,b]),\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x(t_k)$, *де* $t_1,...,t_n$ *– набір різних точок з* $[a,b],\ \lambda_1,...,\lambda_n$ *– набір дійсних чисел;*

12) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt.$

I2. *Нехай* X *– ЛНП. 1) Чи може існувати функціонал* $f \in X^*$, *для якого* $\exists! x_0 \in \overline{B}(0,1)\ :\ a)|f(x_0)| = ||f||?\ b) f(x_0) = ||f||?$

2) Нехай $f \in X^*$. *Чи правильно, що: a) якщо* $x \in X,\ |f(x)| = ||f||$, *то* $||x|| = 1?$ *b) якщо* $x \in \overline{B}(0,1),\ |f(x)| = ||f||$, *то* $||x|| = 1?$

3) Нехай $f \in X^*$. *Розглянемо твердження: a)* $\exists x \in X,\ x \neq 0\ :\ |f(x)| = ||f|| \cdot ||x||$; *b)* $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ |f(x)| = ||f||$; *c)* $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ f(x) = ||f||$. *Які з цих тверджень є еквівалентними?*

4) Нехай X_1, X_2 *– ЛНП такі, що* $X_1 \subset X_2$ *і зі збіжності* $x_n \to x$ *в* X_1 *випливає збіжність* $x_n \to x$ *в* X_2. *Довести, що* $X_1^* \supset X_2^*$.

5) В яких ЛНП X *існує функціонал* $f \in X^*$ *такий, що: a)* $|f(x)| = ||f|| \cdot ||x||,\ x \in X?$ *b)* $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}?$

6)Нехай $f \in X^* \backslash \{0\},\ L := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. *Довести, що* $\frac{1}{||f||} = \inf\limits_{x \in L} ||x||.$

I3. *Нехай* G *– підпростір гільбертового простору* H *і* $f \in G^*$. *Описати всі лінійні неперервні продовження* F *функціонала* f *на* H. *Які з них зберігають норму?*

1) $G = \{x \in H \mid (x,h) = 0\},\ f(x) = (x,a), x \in G$, *де* $a, h \in H$ *– фіксовані елементи.*

2) $G = \{x \in H \mid (x,h_i) = 0,\ 1 \leq i \leq n\},\ f(x) = (x,a),\ x \in G$, *де* $a \in H$ *– фіксований елемент,* $\{h_i\ :\ 1 \leq i \leq n\} \subset H$ *– ортонормована система.*

I4. *1) Нехай* $G = \left\{ x \in C([0,1]) \mid \int\limits_0^1 x(t)dt = 0,\ x(1) = 0 \right\}$. *Побудувати функціонал* $f \in (C([0,1]))^*$ *такий, що* $f(x) = 0,\ x \in G$, $f(x_1) = f(x_2) = 1$, *де* $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = 1-t,\ t \in [0,1].$

2) Нехай $\alpha > 0$ *– задане,* $G := \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2,\ f((x,x)) = \alpha x,\ (x,x) \in G$. *Описати всі лінійні продовження* F *функціонала* f *на* $\mathbf{R}^2$. *Для яких із цих продовжень* $||F|| = ||f||$, *якщо* $\mathbf{R}^2$ *розглядати з нормою* $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? *В яких випадках таке продовження єдине?*

3) У просторі $\mathbf{R}^3$ *на підпросторі* $G = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ *задано функціонал* $f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, x = (x_1, x_2, 0) \in G$, *де* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *– фіксовані. Описати всі лінійні продовження* F *функціонала* f *на* $\mathbf{R}^3$. *Для яких із цих продовжень* $||F|| = ||f||$, *якщо* $\mathbf{R}^3$ *розглядати з нормою* $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? *У яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?*

Заняття 5
СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ

Контрольні запитання

1. Означення сильної, слабкої збіжності.
2. Критерії слабкої збіжності в довільному ЛНП, у просторах $l_p, L_p(\mathbf{R})$, $1 < p < +\infty,\ C([a,b])$.
3. Означення рефлексивного простору.

А5

О1. *Довести, що послідовність функціоналів* $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ *є слабко збіжною, якщо:*

1) $X = L_p([0,2\pi]),\ 1 < p < +\infty,\ f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin^2 nt dt;$

2) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t)dt.$

С1. *Задача О4 для послідовності функціоналів*

$$f_n(x) = \int\limits_a^b tx(t)\exp(int)dt.$$

в просторі $L_p([a,b])$.

О2. *Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП* X *(для збіжних послідовностей знайти границі):*

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0,...,0,\frac{n}{n+1}}_{n},0,...);$

2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,...);$

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p \leq +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} n, & t \in [0,\frac{1}{n^2}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{n^2},1]; \end{cases}$

4) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin^2 nt,\ t \in [0,1];$

5) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^n - t^{2n},\ t \in [0,1];$

6) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1];$

7) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 < p < +\infty,\ \ x_n(t) = \frac{1}{1+(t-n)^2},\ t \in \mathbf{R}.$

О3. *Нехай* H *– гільбертів простір,* $x, x_n \in H,\ n \geq 1$. *Довести, що: 1) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля; 2)* $x_n \to x$ *за нормою, якщо* $x_n \xrightarrow{w} x$ *і виконується умова* $||x_n|| \to ||x||$.

С2. *Нехай* X *– ЛНП. Множину* $M \subset X$ *називають слабко замкненою, якщо для кожного* $x \in X$ *з того, що* $x_n \xrightarrow{w} x$, *де* $\{x_n : n \geq 1\} \subset M$ *– деяка послідовність, випливає, що* $x \in M$. *Довести, що: 1) кожна слабко замкнена множина в* X *є сильно замкненою; 2) твердження, обернене до твердження п.1, хибне; 3) підпростір в* X *є слабко замкненою множиною;*

Д1. *Дослідити наведені послідовності* $\{x_n : n \geq 1\}$ *на слабку та сильну збіжність у ЛНП* X, *якщо:*

1) $X = L_2([0,1]),\ x_n(t) = \sin(nt^2)$;
2) $X = L_2([0,1]),\ x_n(t) = \sin(ne^t)$;
3) $X = L_p([0,+\infty)),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = x_0(2^n t)$, *де* $x_0(t) = (-1)^k,\ x \in [k, k+1),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;
4) $X = L_1(\mathbf{R}),\ x_n(t) = \chi_{[n,n+1]}(t)$;
5) $X = l_1,\ x_n = e_n$.

Д2. *Сформулювати і довести критерії слабкої збіжності у просторах: 1)* c_0; *2)* c.

Д3. *Довести, що скінченновимірний ЛНП є рефлексивним.*

Д4. *Знайти образ* $\varphi(y) \in l_\infty$ *елемента* $y \in c$ *при канонічному вкладенні* $\varphi : c \to c^{**} = l_\infty$.

Д5. *Довести нерефлексивність просторів* c *і* c_0.

Д6*. *Довести, що підпростір рефлексивного простору рефлексивний.*

Д7*. *Довести, що банахів простір* X *рефлексивний тоді й тільки тоді, коли рефлексивним є спряжений до нього простір* X^*.

Д8*. *Нехай* X *– банахів простір, простір* X^* *сепарабельний. Довести, що простір* X *сепарабельний. Чи правильне обернене твердження? Зробити висновок про нерефлексивність просторів* $l_1, C([a,b])$.

Д9. *Довести, що функціонал* $F(g) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dg(t),\ g \in BV_0([0,1])$, *є лінійним і неперервним на* $(C([0,1]))^*$. *Вивести звідси нерефлексивність простору* $C([0,1])$.

Д10. *Довести, що наведені банахові простори не повні відносно слабкої збіжності: 1)* $C([0,1])$; *2)* c_0; *3)* c.

Д11*. (Шур). *Довести, що слабка збіжність у просторі* l_1 *рівносильна збіжності за нормою.*

B5

I1. *Довести, що послідовність функціоналів* $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ *є слабко збіжною, і з'ясувати, чи збігається вона сильно (за нормою), якщо:*

1) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 \cos 2\pi n t x(t) dt;$

2) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i n t} x(t) dt;$

3) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - 2nt) x(t) dt;$

4) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n \int\limits_0^1 x(t) t^n dt;$

5) $X = C^1([-1,1]),\ f_n(x) = \frac{n}{2}(x(\frac{1}{n}) - x(-\frac{1}{n})).$

O1. *Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП* X *(для збіжних послідовностей знайти границі):*

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...);$

2) $X = L_p([0,1]),\ 1 \leq p < +\infty,\ x_n(t) = t^n;$

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 \leq p \leq +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases};$

4) $x_n(t) = t^n - t^{3n};$

I2. *Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП* X *(для збіжних послідовностей знайти границі):*

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...);$

2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...);$

3) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...);$

4) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1+n}{1+n}, ..., \frac{1+n}{1+kn}, ...);$

5) $X = l_p, 1 \leq p < +\infty, x^{(n)} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, ..., \frac{n}{2^n}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}, ...);$

6) $X = l_p,\ 1 \leq p < +\infty,$
$x^{(n)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, ..., 0, \frac{1}{(2n-1)^2}, \frac{1}{(2n)^2}, \frac{1}{(2n+1)^2}, ...);$

7) $X = l_\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \ln n, 0, 0, ...);$

8) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = e^{int}$;
9) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t \cdot \ln n)$;
10) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \cos(n^2 t)$;
11) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(2^n t)$;
12) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}t, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;
13) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;
14) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t^n)$;
15) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \sqrt[4]{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}(t)$;
16) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \chi_{[n,n+1]}(t)$;
17) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[n,2n]}(t)$.

13. *Дослідити наведені послідовності в $C([0,1])$ на слабку та сильну збіжність:*

1) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;
2) $x_n(t) = e^{-nt}$;
3) $x_n(t) = te^{-nt}$;
4) $x_n(t) = nte^{-nt}$;
5) $x_n(t) = \frac{n^2 t}{1+n^4 t^2}$;
6) $x_n(t) = \frac{n^3 t^2}{1+4n^4 t^4}$.

14. *1) Нехай X – ЛНП, $x \in X$. Довести, що $||x|| = \max\{|f(x)| \mid f \in X^*,\ ||f|| = 1\}$.*

2) Нехай X – рефлексивний банахів простір. Довести, що модуль кожного лінійного неперервного функціонала досягає на $\overline{B}(0,1)$ свого найбільшого значення.

3) Нехай H – гільбертів простір, $x, x_n \in H,\ n \ge 1$. Довести, що: a) $x_n \xrightarrow{w} x$ тоді й тільки тоді, коли $(x_n, a) \to (x, a), n \to \infty$, для всіх $a \in H$; b) якщо $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \to y$ за нормою, то $(x_n, y_n) \to (x, y),\ n \to \infty$; c) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля; d) $x_n \to x$ за нормою, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ і виконується одна з таких умов: а)$||x_n|| \to ||x||$; б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, ||x_n|| \le ||x||$.

4) Нехай H – гільбертів простір. Побудувати приклади послідовностей $\{x_n : n \ge 1\} \subset H,\ \{y_n : n \ge 1\} \subset H$ таких, що: a) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H$; але $(x_n, y_n) \not\to (x, y)$. b) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H,\ x_n \not\to x,\ y_n \not\to y$ в H; але $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

5) Нехай $\{x_n : n \ge 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести еквівалентність таких тверджень: a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається сильно; b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається слабко; c) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ збігається.

б) Довести, що коли послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, *де* X *– ЛНП, слабко збігається до* $f \in X^*$ *як послідовність елементів ЛНП* X^*, *то вона слабко збігається до цього ж елемента і як послідовність функціоналів на* X. *Довести, що обернене твердження хибне. (Вказівка. Розглянути функціонали* $f(x) = 0, f_n(x) = x_n, c \in c_0, n \in \mathbf{N}$.*)*

Заняття 6
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного оператора.
2. Означення неперервного і обмеженого оператора та їх зв'язок.
3. Означення норми лінійного неперервного оператора(ЛНО).

А6

О1. *1) Знайти загальний вигляд лінійного оператора* $A : \mathbf{C}_1^m \to \mathbf{C}_1^n$ *і обчислити його норму. Тут* $\mathbf{C}_1^m$ *– простір* $\mathbf{C}^m$ *з нормою* $||x||_1 := \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|$.

О2. *Нехай* $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ *– обмежена послідовність. Довести, що для довільного* $m \in \mathbf{Z}$ *оператор* $A_m x = (\alpha_1 x_{m+1}, \alpha_2 x_{m+2}, ..., \alpha_k x_{m+k}, ...)$ *в* l_p $(1 \leq p \leq \infty)$ *є лінійним і неперервним і знайти його норму.*

О3. *Нехай* $X = L_2(T, \mu),\ a \in L_\infty(T, \mu),\ \mu - \sigma$*-скінченна. Довести, що оператор множення на* a*:* $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ *належить до* $\mathcal{L}(X)$ *та знайти його норму.*

С1. *Нехай* $\alpha = \alpha(t)$ *– фіксована функція з* $C([a, b])$*, оператор* $(Ax)(t) := \alpha(t)x(b - t)$*. Довести, що* A*–лінійний неперервний оператор в* $C([a, b])$ *і знайти норму його норму.*

С2. *Нехай* X *– банахів простір,* $A \in \mathcal{L}(X)$*. Чи будуть нормами в* X *: 1)* $||x||_1 = ||Ax||$*? 2)* $||x||_2 = ||x|| + ||Ax||$*? Чи буде* X *у нормі* $||\cdot||_2$ *банаховим простором?*

О4. *1)Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора* A *з неперервним ядром* K*, тобто оператора* $A : C([a, b]) \to C([a, b])$*, що діє за формулою* $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds,\ t \in [a, b],\ K \in C([a, b]^2)$.

2) Довести, що* $||A|| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t, s)|ds$.

О5. *Нехай ядро* $K \in C([a, b]^2),\ \alpha < 1$*. Довести, що інтегральний оператор* $A : C([a, b]) \to C([a, b])$*, де* $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds$, $t \in [a, b]$*, – лінійний та неперервний.*

Д1. *Знайти норму оператора вкладення* $Ax = x$*, який діє:*
а) з $C^1([a, b])$ *в* $C([a, b])$;
б) з $L_p([a, b])$ *в* $L_q([a, b]),\ p \geq q$.

Д2. *1) Довести, що ядро* $\operatorname{Ker} A$ *будь-якого лінійного неперервного оператора* $A : X \to Y$*, де* X, Y *– ЛНП, є підпростором в* X*.*

2) Нехай $A : X \to Y$ – лінійний оператор, $\operatorname{Ker} A$ – підпростір в X. Чи випливає звідси, що A – обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, в якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

Д3. *Нехай A – лінійний оператор у ЛНО X. Довести, що A неперервний тоді й лише тоді, коли множина $\{x \in X \mid ||Ax|| < 1\}$ має хоча б одну внутрішню точки.*

Д4. *Нехай A – лінійний оператор у банаховому просторі, який переводить всяку сильно збіжну послідовність у слабко збіжну. Довести, що A – неперервний.*

Д5. *1) Нехай оператор A – це інтегральний оператор з вимірним ядром K, $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s),\ t \in T,\ x \in L_2(T,\mu)$ причому*

$$a_1 = \operatorname*{esssup}_{t \in T} \int\limits_T |K(t,s)|d\mu(s) < \infty,\ a_2 = \operatorname*{esssup}_{s \in T} \int\limits_T |K(t,s)|d\mu(t) < \infty.$$

Довести, що оператор $A \in \mathfrak{L}(L_2(T,\mu))$ і $||A|| \le (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}$.

2) Нехай ядро $K \in L_\infty([a,b]^2),\ \alpha < 1$. Довести, що оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, де $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha}x(s)ds,\ t \in [a,b]$, – лінійний та неперервний.

3) Нехай $p \in L_1(\mathbf{R})$. Довести, що інтегральний оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} p(t-s)x(s)ds,\ t \in \mathbf{R}$, (оператор згортки з функцією p) є лінійним і неперервним.

В6

О1. *1) Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : \mathbf{C}^m_\infty \to \mathbf{C}^n_\infty$ і обчислити його норму. Тут $\mathbf{C}^m_\infty$ – простір $\mathbf{C}^m$ з нормою $||x||_\infty := \max\limits_{1 \le k \le m} |x_k|$.*

О2. *Знайти норму оператора $A : \mathbf{C}^m \to l_2$, якщо $Ax = (x_1, ..., x_m, \frac{x_1}{2}, ..., \frac{x_m}{2}, \frac{x_1}{3}, ..., \frac{x_m}{3}, ...),\ x = (x_1, ...x_m) \in \mathbf{C}^m$ (у $\mathbf{C}^m$ розглядається евклідова норма).*

О3. *Нехай $a, b \in \mathbf{C}$. Довести, що оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$, що визначається формулою $(Ax)(t) := ax(t) + bx(-t),\ t \in \mathbf{R}$, є лінійним, неперервним та знайти його норму.*

О4. *Нехай H – гільбертів простір, $G \subset H$ – підпростір, $Px = \operatorname{pr}_G x$. Довести, що оператор проектування P є лінійним і неперервним. Знайти норму P.*

І1. *1) Довести, що лінійний неперервний оператор $A : X \to Y$ залишається неперервним, якщо в X і Y замінити норми на еквівалентні.*

2) Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора Вольтерри

A з неперервним ядром K, тобто $A : C([a, b]) \to C([a, b])$ і визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t, s)x(s)ds, \quad t \in [a, b]$, де $K \in C(\{(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le s \le t,\ a \le t \le b\})$.

3) Довести, що в ЛНП X такі умови рівносильні: а) $|| \cdot ||_1, || \cdot ||_2$ – еквівалентні норми на X; б) довільна послідовність $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ збігається до $x \in X$ в $(X, || \cdot ||_1)$ тоді й тільки тоді, коли $x_n \to x$ в $(X, || \cdot ||_2)$. Вказівка: Розглянути одиничний оператор $I : (X, || \cdot ||_1) \to (X, || \cdot ||_2)$.

12. *Довести, що наведені оператори $A : l_2 \to l_2$ є лінійними, неперервними і знайти їх норми:*

1) $Ax = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k}, x_1, x_2, ...)$;
2) $Ax = (x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$;
3) $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$;
4) $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, ...)$;
5) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, ...)$;
6) $Ax = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, ...)$.

13. *Які з наведених операторів лінійні? неперервні? Для лінійних і неперервних визначити їх норму.*

1) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = x^2(t)$;
2) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \sin x^2(t)$;
3) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$;
4) $X = C([0, 2]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 tx(s)ds$;
5) $X = C([-1, 1]),\ (Ax)(t) = (e^t - 1)x(t)$;
6) $X = L_3(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = x(t + 1)$;
7) $X = L_4(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = (\operatorname{arctg} t)x(t)$;
8) $X = L_4(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \operatorname{arctg}(tx(t))$;
9) $X = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = (e^{-|t|})x(t)$;
10) $X = L_1(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \chi_{[0,4]}(t)x(t - 1)$;
11) $X = L_1(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = 3\chi_{[0,1]}(t)x(t) - 5\chi_{[3,6]}(t)x(t - 2)$.

Заняття 7
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ)

А7

О1. *Нехай* X, Y *– ЛНП,* $f \in X^*,\ y \in Y,\ Ax = f(x)y,\ x \in X.$ *Довести, що* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *і знайти* $||A||$.

С1. *Нехай* H *– гільбертів простір,* $y, z \in H,\ Ax = (x, y)z,\ x \in H.$ *Довести, що* $A \in \mathcal{L}(H)$ *і знайти* $||A||$.

С2. *Нехай* $p, q \in C([a, b])$ *і* $(Ax)(t) = \int\limits_a^b p(t)q(s)x(s)ds$. *Довести, що* $A \in \mathcal{L}(X)$ *та знайти норму* $||A||$. *Розглянути випадки: 1)* $X = L_p([a, b])$; *2)* $X = C([a, b])$.

О2. *Оператор* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *називають скінченновимірним, якщо* $\dim(R(A)) < \infty$. *Довести, що* A *– скінченновимірний тоді й лише тоді, коли існують* $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*,\ \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ *такі, що* $Ax = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)y_k,\ x \in X.$

О3. *Нехай* $\{y_k \mid 1 \le k \le n\}$ *і* $\{z_k \mid 1 \le k \le n\}$ *– ортонормовані системи в гільбертовому просторі* H, $\{c_k \mid 1 \le k \le n\} \subset \mathbf{C}$. *Для оператора* $Ax = \sum\limits_{k=1}^n c_k(x, y_k)z_k,\ x \in H,$ *довести, що* $||A|| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |c_k|$.

С3. *Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їх норми.*

1) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha \ge 0, \beta > -1;$

2) $X = L_2([0, 2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos(t - s)x(s)ds;$

3) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = (2x(0) - \int\limits_0^1 sx(s)ds) \cos t;$

4) $X = L_2([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 stx(s)ds;$

5) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds.$

Д1. *Довести, що наведений інтегральний оператор* $A : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ *є лінійним, неперервним, знайти його норму:* $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \sin \pi(t - s)x(s)ds.$

Д2. *Довести, що оператор* $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, *де* $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [a,b]$ *з областю визначення* $D(A) = C^1([a,b])$ *є щільно визначеним (тобто* $\overline{D(A)} = C([a,b])$*), замкненим (тобто коли* $x_n \to x$, $n \to \infty$, *у* $C([a,b])$ *і* $\{Ax_n : n \geq 1\}$ *– збіжна в* $C([a,b])$, *то* $x \in D(A)$ *і* $Ax_n \to Ax$, $n \to \infty$, *у* $C([a,b])$*), але не є неперервним.*

Д3*. *Нехай* X, Y *– ЛНП,* $A : X \to Y$ *– лінійний оператор, причому* $\dim R(A) < +\infty$, *а* $\operatorname{Ker} A$ *– замкнена множина в* X. *Довести, що* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Д4. *Нехай* A *– лінійний оператор у ЛНП, який будь-яку сильно збіжну послідовність переводить у слабко збіжну. Довести, що* A *– обмежений оператор.*

Д5. *1) Нехай* $X = l_2$. *Довести, що простір* $\mathcal{L}(X)$ *– несепарабельний.*

2) Знайти необхідну і достатню умову на лінійний нормований простір* X, *щоб простір* $\mathcal{L}(X)$ *був сепарабельним.*

В7

О1. *Довести, що оператор* $A : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, *де* $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [a,b]$ *є лінійним і неперервним. Знайти його норму.*

02. *Довести, що оператор множення на вимірну за Лебегом функцію* a *в* $L_p([a,b])$, $1 \leq p \leq +\infty$ *обмежений тоді й лише тоді, коли функція* a *істотно обмежена.*

І1. *Довести, що наведені оператори є лінійними, неперервними та знайти їх норми.*

1) $X = C([-1,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} tsx(s)ds$;

2) $X = L_2([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{\pi} \cos t \sin s x(s)ds$;

3) $X = L_2([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{1} t^{\alpha} s^{\beta} x(s)ds$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$;

4) $X = L_2([0,2\pi])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds$;

5) $X = L_2([0,\pi])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(t+2s)x(s)ds$;

6) $X = C([0,1])$, $(Ax)(t) = t\int\limits_{0}^{1} x(s)ds - x(0)$.

І2. *1) Перевірити, що оператори* A, B *де* $(Ax)(t) = tx(t), (Bx)(t) = \int\limits_{0}^{t} x(s)ds, t \in [0,1]$, *є лінійними і неперервними в* $L_2([0,1])$, *але не є переставними.*

2) Знайти n-й степінь оператора A, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds, t \in [0,1]$, і діє в $C([0,1])$.

13. *1) Довести, що ядро $\mathrm{Ker}\, A$ будь-якого лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$, де X, Y – ЛНП, є підпростором в X.*

2) Нехай $A : X \to Y$ – лінійний оператор, $\mathrm{Ker}\, A$ – підпростір в X. Чи випливає звідси, що A – обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, в якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

4) Нехай X – банахів простір, $A \in L(X)$ – такий оператор, що $\exists C > 0 \ : \ ||Ax|| \geq C||x||, \ x \in X$. Довести, що: а) $R(A)$ – підпростір в X; б) $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

5) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (x_2, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

6) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (0, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

7) Довести, що оператори $(Ax)(t) = tx(t), \ (Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$, $t \in [0,1]$, є лінійними, неперервними в $L_2([0,1])$ і не комутують.

8) Нехай X – ЛНП, Y – банахів простір, лінійна множина $M \subset X$ є скрізь щільною в X, оператор $A \in \mathfrak{L}(M, Y)$. Довести, що A допускає єдине лінійне неперервне продовження $\tilde{A}$ на X. Більше того, $||\tilde{A}|| = ||A||$.

9) Нехай H – гільбертів простір, $A : H \to H$ – лінійний оператор. Довести, що $A \in \mathfrak{L}(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\exists C > 0 \ \forall x, y \in H \ : |(Ax, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||$. Більш того, $||A|| = \sup\limits_{||x||=1, ||y||=1} |(Ax, y)|$.

Заняття 8
РІВНОМІРНА, СИЛЬНА, СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ. ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення рівномірної, сильної, слабкої збіжності операторів.
2. Принцип рівномірної обмеженості.

А8

О1. *Дослідити послідовність операторів* $A_n : X \to X,\ n \geq 1,$ *на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:*

1) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = \left(0, ..., 0, \dfrac{x_n}{n}, \dfrac{x_{n+1}}{n+1}, ..., \dfrac{x_{2n}}{2n}, 0, 0, ...\right);$
2) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...);$
3) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (0, ..., 0, \underbrace{x_1}_{n}, 0, 0, ...);$
4) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}}\, x(s) ds;$
5) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^n x(s) ds;$
6) $X = L_3(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = \begin{cases} x(t-n), & t \geq n, \\ 0, & t < n; \end{cases}$
7) $X = L_2(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = e^{-(t-n)^2} x(t).$

О2. *Нехай* $\{p_n : n \geq 1\} \subset C([a,b])$ *– фіксована послідовність,* $(A_n x)(t) := p_n(t) x(t),\ t \in [a,b],\ x \in C([a,b])$. *За яких умов на послідовність* $\{p_n : n \geq 1\}$ *послідовність операторів* $\{A_n : n \geq 1\}$ *збігається: 1) рівномірно; 2) сильно; 3) слабко? Визначити вигляд граничного оператора.*

О3. *Нехай* X *– банахів простір і* $\{A, B, A_n, B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$. *Довести, що:*

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ B_n \xrightarrow{s} B \ \Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{s} AB;$
2) $A_n \rightrightarrows A,\ B_n \rightrightarrows B \ \Rightarrow\ A_n B_n \rightrightarrows AB;$
3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ B_n \xrightarrow{w} B \ \not\Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{w} AB.$

О4. *Нехай X – ЛНП простір. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко обмежена (тобто для кожного $f \in X^*$ числова послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена) тоді й тільки тоді, коли вона обмежена в X.*

С1. *Нехай X, Y – банахові простори, $\{A, A_n : n \geq 1\} \subset \mathfrak{L}(X, Y)$, $A_n \xrightarrow{s} A$ і K – компакт у просторі X. Довести, що $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається до A рівномірно на K.*

Д1. *Нехай X – простір $C^1([0,1])$ з нормою $||x|| := \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $x \in C^1([0,1])$. Визначимо оператор $A_n : X \to C([0,1])$ формулою $(A_n x)(t) = n(x(t + \frac{1}{n}) - x(t)),\ t \in [0,1],\ x \in X,\ n \geq 1$ (якщо $t > 1$, то покладемо $x(t) := x(1) + x'_-(1)(t-1)$.) Довести, що:*

1) для кожного $x \in X$ послідовність $\{A_n x : n \geq 1\}$ збігається за нормою в $C([0,1])$;

2) $\{||A_n|| : n \geq 1\}$ не обмежена;

3) простір $\mathfrak{L}(X, C([0,1]))$ не є повним відносно сильної операторної збіжності. Як узгоджуються ці твердження з принципом рівномірної обмеженості?

Д2. *Нехай X_1, X_2 -- банахові простори. 1) Довести, що простір $\mathfrak{L}(X_1, X_2)$ повний відносно сильної збіжності операторів, тобто довільна послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathfrak{L}(X_1, X_2)$, для якої $\forall x \in X_1\ :\ \{A_n x : n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність елементів з X_2, сильно збігається до деякого оператора $A \in \mathfrak{L}(X_1, X_2)$; 2) За якої умови на банахові простори X_1 та X_2 простір $\mathfrak{L}(X_1, X_2)$ буде повним відносно слабкої збіжності?*

Д3. *За яких умов на число $\alpha \in \mathbf{C}$ послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (\alpha^n x_1,\ \alpha^{n-1} x_2, ..., \alpha x_n, 0, 0, ...)$, збігається рівномірно, слабко, сильно?*

Д4. *Знайти необхідні та достатні умови на послідовність $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$, за яких послідовність операторів $\{A_n : l_p \to l_p : n \geq 1\}$, $1 \leq p \leq +\infty$, збігається рівномірно, сильно, слабко, якщо:*

1) $A_n x = (\alpha_n x_1, 0, 0, ...)$;

2) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \alpha_n x_1, 0, 0, ...)$;

3) $A_n x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...)$;

4) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_n x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...)$;

Д5. *Нехай $1 \leq p \leq +\infty$, q – спряжений індекс до p. 1) Нехай послідовність $a = \{a_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ збігається для довільного $x \in l_p$. Довести, що $a \in l_q$. 2) Нехай вимірна функція h така, що функціонал $f(x) = \int\limits_a^b h(t)x(t)dt$ визначений для кожного $x \in L_p([a,b])$. Довести, що $h \in L_q([a,b])$.*

Д6. *Довести, що послідовність функціоналів* $\{f_n : n \geq 1\} \subset (C([0,1]))^*$, *де* $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x(\frac{k}{n}),\ x \in C([0,1]),\ n \geq 1$, $*$*-слабко збіжна та знайти її границю. Чи збігається вона за нормою?*

Д7. *Нехай* $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk}x(t_{nk}),\ x \in C([a,b])$, *де* $a \leq t_{n1} \leq \ldots \leq t_{nn} \leq b,\ n \geq 1,\ \{A_{nk} \mid 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. *Довести, що* $f_n(x) \to \int\limits_a^b x(t)dt,\ n \to \infty$, *для всіх* $x \in C([a,b])$ *тоді й тільки тоді, коли: 1)* $\sup\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{k=1}^{n} |A_{nk}| < +\infty$; *2)* $f_n(p) \to \int\limits_a^b p(t)dx(t),\ n \to \infty$ *для кожного многочлена* p.

Перевірити, що умова 1) випливає з умови 2), якщо для всіх $n \geq 1$ *і* $1 \leq k \leq n$ *маємо* $A_{nk} \geq 0$.

Д8. *Нехай* $f_n(x) = \int\limits_a^b x(t)dF_n(t),\ x \in C([a,b]),\ F_n \in BV_0([a,b])$, $n \geq 0$. *Довести, що* $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$ *тоді й тільки тоді, коли* $\sup\limits_{n\geq 1} V(F_n,[a,b]) < +\infty$, $F_n(t) \to F_0(t),\ n \to \infty$ *у точках неперервності* $F_0,\ F_n(a) \to F_0(a),\ n \to \infty$, *і* $F_n(b) \to F_0(b),\ n \to \infty$.

Д9. (Тепліц) *Нехай задано нескінченний набір чисел* $\{a_{nk} : k \geq 1,\ n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. *Довести, що для кожної збіжної послідовності* $x = \{x_n : n \geq 1\}$ *послідовність* $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ *збігається до границі послідовності* x *тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

1) $\forall k \geq 1\ :\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$;

3) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$.

В8

О1. *Якого вигляду набуває рівномірна, сильна та слабка операторні збіжності для операторів із* $\mathcal{L}(X,\mathbf{C})$, *де* X *– лінійний нормований простір, тобто для лінійних неперервних функціоналів?*

І1. *Дослідити послідовність операторів* $A_n : l_p \to l_p,\ n \geq 1,\ 1 < p < +\infty$ *на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:*

1) $A_nx = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$;

2) $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$;

3) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, 0, 0, ...)$;

4) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...)$;

5) $A_n x = (x_n, x_{n-1}, x_2, ...x_1, 0, 0, ...)$;

6) $A_n x = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n-1}, ..., \frac{x_n}{1}, 0, 0, ...)$;

7) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \sqrt{n}\, x_{2n}, 0, 0, ...)$;

8) $A_n x = (\sum\limits_{m=1}^{n} x_m, 0, 0, ...),\ p = 1$;

9) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n}x_1, \frac{1+n}{1+2n}x_2, \frac{1+n}{1+3n}x_3, ..., \frac{1+n}{1+n^2}x_n, 0, 0, ...)$;

10) $A_n x = (\sqrt[n]{n}x_1, \sqrt[n]{n}x_2, ..., \sqrt[n]{n}x_n, ...)$;

11) $A_n x = (\sqrt[n]{n}x_1, \sqrt[n]{n}x_2, ..., \sqrt[n]{n}x_n, 0, 0, ...)$;

12) $A_n x = (\frac{x_n}{2n}, \frac{x_{n+1}}{2n+1}, ..., \frac{x_{2n}}{3n}, 0, 0, ...)$;

13) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n}x_1, \frac{1+n}{1+2n}x_2, \frac{1+n}{1+3n}x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn}x_k, ...)$;

14) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n}x_1, \frac{1+n}{1+2n}x_2, \frac{1+n}{1+3n}x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn}x_k, 0, 0, ...)$, *де* $k \in \mathbf{N}$ *– фіксоване.*

I2. *Дослідити послідовність операторів* $A_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ *на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:*

1) $(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t)$;

2) $(A_n x)(t) = t^n x(t)$;

3) $(A_n x)(t) = e^{-nt}x(t)$;

4) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin nt$;

5) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 (t^n + s^n)x(s)ds$;

6) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin \frac{t}{n}$;

7) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3} x(s)ds$;

8) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3^n} x(s)ds$;

9) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) x(s)ds$;

*10)** $(A_n x)(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$;

11) $(A_n x)(t) = (t^{10n} - t^{2n})x(t)$;

12) $(A_n x)(t) = t\int\limits_0^1 x\left(\sin^n \frac{\pi}{2}s\right) ds$;

13) $(A_n x)(t) = t\int\limits_0^1 x(s)\sin^n \frac{\pi}{2}s ds$;

14) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t\frac{1+(2s)^n}{1+(2s)^{2n}} x(s)ds$;

15) $(A_n x)(t) = \frac{\ln(1+nt)}{1+nt} x(t)$;

16) $(A_n x)(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+nt} x(t)$;

17) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^2\frac{\ln(1+ns)}{1+ns} x(s)ds$;

18) $(A_nx)(t) = \int\limits_0^{\frac{t^n}{2^n}} x(s)ds;$

19) $(A_nx)(t) = \int\limits_0^{t^n} x(s)ds;$

20) $(A_nx)(t) = (1-t)^n \int\limits_0^{t^n} x(s)ds;$

21) $(A_nx)(t) = n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds$, *де* $x(s) := x(1),\ s > 1.$

I3. *Дослідити послідовність операторів* $A_n : L_p(T) \to L_p(T),\ 1 < p < +\infty$ *на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:*

1) $T = \mathbf{R},\ (A_nx)(t) = x(t+n);$

2) $T = \mathbf{R},\ (A_nx)(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq n, \\ 0, & t < n; \end{cases}$

3) $T = \mathbf{R},\ (A_nx)(t) = \frac{1}{1+|t-n|}x(t);$

4) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = t^n \int\limits_0^1 s^n x(s)ds;$

5) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = x(t)\cos nt,\ p = 2;$

6) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = x(t)\cos e^n t,\ p = 2;$

7) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = x(t)\cos ne^t,\ p = 2;$

*8)** $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = x(t)\cos e^{nt},\ p = 2;$

9) $T = \mathbf{R},\ (A_nx)(t) = x(t) \cdot \chi_{[\ln n, 2\ln n]}(t);$

10) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = \sqrt[n]{t}x(t),\ p = 1;$

11) $T = [0,1],\ (A_nx)(t) = \int\limits_0^1 t^2(s^n - s^{2n})x(s)ds.$

O2. *В* $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty,$ *при фіксованому* $s \in \mathbf{R}$ *визначимо оператор зсуву за правилом* $(A_sx)(t) := x(t+s),\ t \in \mathbf{R},\ x \in L_p(\mathbf{R}),\ s \in \mathbf{R}.$ *Нехай* $s_n \to s,\ n \to \infty.$ *Довести, що* $A_{s_n} \xrightarrow{s} A_s,$ *але, узагалі кажучи,* $A_{s_n} \not\rightrightarrows A_s.$

I4. *Нехай* X *– банахів простір,* $\{x, x_n : n \geq 1\} \subset X,$ $\{A, A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X).$ *Довести, що:*

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \to x \ \Rightarrow\ A_nx_n \to Ax;$

2) $x_n \xrightarrow{w} x,\ A_n \rightrightarrows A \ \Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax;$

3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ x_n \to x \ \Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax;$

4) $x_n \xrightarrow{w} x \ \Rightarrow\ Ax_n \xrightarrow{w} Ax;$

*5)** $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \xrightarrow{w} x \ \not\Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax.$

I5*. *Зробити I1 при $p = 1$ (пп 1-14) та при $p = +\infty$ (пп 2,5,7,9,10,12-14).*

O3. *Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в $\mathcal{L}(X)$ тоді й тільки тоді, коли для деякого $k \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $||A^k|| < 1$.*

ЛІТЕРАТУРА

1) *Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск, 1978.*
2) *Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анадиз и интегральные уравнения. – Минск, 1984.*
3) *Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. В 2 т. – Х., 1977-78.*
4) *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К., 1990.*
5) *Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. – М., 1969.*
6) *Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К., 1990.*
7) *Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. У 2 ч. – К., 1997.*
8) *Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. – Т.1. Общая теория. – М., 1962.*
9) *Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1984.*
10) *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., 1988.*
11) *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989.*
12) *Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М., 1984.*
13) *Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т.1. Функциональный анализ. – М., 1977.*
14) *Рудин У. Функциональный анализ. – М., 1975.*
15) *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., 1984.*
16) *Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М., 1970.*