Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.Г. Ганюшкін, Є.А. Кочубінська, С.А. Овсієнко

АЛГОРИТМИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

для студентів механіко – математичного факультету

Київ
2015

О.Г.Ганюшкін, Є.А. Кочубінська, С.А. Овсієнко. Алгоритми лінійної алгебри: для студентів механіко – математичного факультету.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. М.Ф. Городній
канд. фіз.-мат. наук, доц. Є.В. Бондаренко

У посібнику наведено алгоритми розв'язання типових задач, які виникають у курсі лінійної алгебри, що читається у першому та другому семестрах на механіко–математичному факультеті.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 10 від 14 квітня 2015 року)

Зміст

Передмова **4**

1 Алгоритм Ґауса **5**

2 Знаходження максимальної лінійно незалежної системи векторів **14**

3 Знаходження фундаментальної системи розв'язків **19**

4 Дії над матрицями **23**

5 Дії з підпросторами **26**

6 Лінійні відображення та дії над ними **31**

7 Знаходження власних чисел та векторів **38**

Література **43**

Передмова

У посібнику наведено базові алгоритми, які виникають у курсі лінійної алгебри, і які дозволяють розв'язувати типові задачі з курсу. Увагу приділено саме стандартним задачам, бо досконале володіння технічним апаратом дозволяє розв'язувати складніші задачі, зосереджуючись на їхній змістовній частині і не зупиняючись на технічних деталях. В жодному разі не можна вважати цей посібник заміною підручникам або лекціям, це лише доповнення (сподіваємося, що корисне) до книжок та конспектів. Припускається, що читач знайомий з лекційним матеріалом, тому автори свідомо опускають доведення теорем та тверджень, а наводять лише їхні формулювання. Також випущений розділ про жорданову нормальну форму матриці, бо існує чудовий посібник [6], у якому дуже детально описані алгоритми відшукання ЖНФ матриці, а також алгоритми розв'язання задач, пов'язаних з ЖНФ.

1 Алгоритм Ґауса

Почнемо з базового алгоритму лінійної алгебри, який допомагає розв'язувати величезну кількість задач.

Нагадаємо, що у загальному випадку *система лінійних рівнянь* (коротко: СЛР) має вигляд

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,, \end{array} \tag{1}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — це невідомі, а a_{ij} — коефіцієнти при невідомих.

Як відомо, кожній СЛР можна зіставити її матрицю, а потім працювати саме з нею:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Матрицю (2) називають *основною матрицею* або просто *матрицею* СЛР (1).

Поруч із матрицею (2) для системи (1) розглядають і *розширену матрицю*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{3}$$

яка одержується з (2) приєднанням стовпця вільних членів (щоб не сплутати вільні члени з коефіцієнтами при невідомих, стовпець вільних членів відділяють вертикальною рискою).

Всі коефіцієнти СЛР (1) є елементами деякого поля P. *Розв'язком* цієї системи у полі P називається такий набір $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ із n елементів a_1, a_2, …, a_n поля P, що після підстановки в систему (1) цих елементів відповідно замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отримаємо правильні рівності.

В залежності від кількості розв'язків СЛР поділяються на три типи. Якщо СЛР (1) має хоча б один розв'язок, вона називається *сумісною*. У противному разі СЛР називається *несумісною*. Сумісна СЛР, яка має рівно один розв'язок, називається *визначеною*. Якщо ж сумісна СЛР має більше одного розв'язку, то вона називається *невизначеною*.

Дві СЛР з одними і тими ж невідомими називаються *рівносильними* або *еквівалентними*, якщо їхні множини розв'язків збігаються.

Елементарними перетвореннями рядків (стовпців) матриці (2) називаються такі її перетворення:

1) перестановка двох рядків (стовпців) матриці;

2) множення одного з рядків (стовців) матриці на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до одного з рядків (стовців) матриці іншого її рядка (стовпця), помноженого на деяке число λ.

Теорема 1.1 (Алгоритм Ґауса)**.** *Елементарними перетвореннями рядків та перестановками стовпців довільну ненульову матрицю A розміру $m \times n$ можна звести до наступного вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,r+1} & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f_{2,r+1} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{r,r+1} & \dots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $0 < r \leqslant \min(m, n)$.

Прямий хід алгоритму Ґауса.

1.
   - За потреби перейменувавши змінні та переставивши рядки, прийти до матриці $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, в якій $\tilde{a_{11}} \neq 0$.
   - Розділити перше рядок на $\tilde{a}_{11}$.
   - Для кожного k $(k = 2, 3, \dots, m)$ від k–го рядка відняти перший, помножений на $\tilde{a}_{k1}$.

   У результаті прийдемо до матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

2. Якщо матриця B містить ненульові елементи лише в першому рядку, то вона вже має шуканий вигляд. У противному разі серед елементів b_{ij}, де $i, j \geqslant 2$, є ненульовий.

- Перестановкою стовпців (відмінних від першого) і рядків (відмінних від першого) з матриці B можна прийти до матриці

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ 0 & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{b}_{m2} & \dots & \tilde{b}_{mn} \end{pmatrix},$$

  в якій $\tilde{b}_{22} \neq 0$.
- Поділити другий рядок матриці $\widetilde{B}$ на $\tilde{b}_{22}$.
- Для кожного l $(l = 3, \dots, m)$ від l–го рядка відняти другий рядок, помножений на $\tilde{b}_{l2}$.

3. Одержимо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{3m} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Якщо серед елементів c_{ij}, де $i, j \geqslant 3$, є ненульові, то продовжуємо аналогічні перетворення далі (тільки вже працюємо з рядками і стовпцями з номерами $\geqslant 3$). І так далі. Через скінченну кількість кроків прийдемо до матриці вигляду

$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1,r-1} & d_{1r} & d_{1,r+1} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2,r-1} & d_{2r} & d_{2,r+1} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{r-1,r} & d_{r-1,r+1} & \dots & d_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{r,r+1} & \dots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Зворотний хід алгоритму Ґауса.

1. Для кожного l $(l = 1, 2, \dots, r-1)$ від l–го рядка матриці D відняти

r–й рядок, помножений на d_{lr}. Одержимо матрицю

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1,r-1} & 0 & d'_{1,r+1} & \dots & d'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2,r-1} & 0 & d'_{2,r+1} & \dots & d'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & d'_{r-1,r+1} & \dots & d'_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{r,r+1} & \dots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Для кожного l ($l = 1, 2, \dots, r-1$) від l–го рядка матриці D' відняти $(r-1)$–й рядок, помножений на $d_{l,r-1}$.

3. Зробивши аналогічні перетворення над рештою рядків $l = 1, \dots, r-2$, прийдемо до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_{1,r+1} & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & f_{2,r+1} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & f_{r-1,r+1} & \dots & f_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & f_{r,r+1} & \dots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

яка вже має потрібний вигляд.

Метод Ґауса розв'язування СЛР.

Прямий хід методу Ґауса.

1. Якщо всі коефіцієнти a_{ij} основної матриці СЛР (1) є нулями, то кожне з рівнянь системи має вигляд $0 = b_i$. Тоді

   (a) якщо серед вільних членів b_i є хоча б один ненульовий, то СЛР є несумісною;

   (b) якщо $b_i = 0$ для всіх i, то будь–який вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є розв'язком і СЛР є невизначеною.

2. Якщо серед коефіцієнтів основної матриці є ненульові, то перейменувавши, в разі потреби, змінні і переставивши рівняння, можна вважати, що $a_{11} \neq 0$. Далі діємо наступним чином.

(a) Поділити перше рівняння на a_{11} та для кожного k $(k = 2,3, \ldots, m)$ від k–го рівняння відняти перше рівняння, помножене на a_{k1}. У результаті одержимо СЛР, у якій з усіх рівнянь, крім першого, виключена змінна x_1:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & b'_1\,, \\ & & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & = & b'_2\,, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & b_{m2}x_2 & + & \cdots & + & b_{mn}x_n & = & b'_m\,. \end{array} \tag{8}$$

Зауважимо, що основною матрицею цієї системи є матриця (5).

Останні $m-1$ рівнянь цієї системи утворюють СЛР, яка містить уже на одну невідому менше — лише $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

(b) Перейменувавши, в разі потреби, змінні і переставивши рівняння, можна вважати, що $b_{22} \neq 0$.

- Розділити друге рівняння на b_{22}
- Для кожного k $(k = 3, 4, \ldots, m)$ від k–го рівняння відняти друге, помножене на b_{k2}.

(c) Продовжуємо робити аналогічні перетворення з іншими рядками. На кожному кроці алгоритму Ґауса виключаємо одну невідому (у разі потреби перенумерувавши невідомі). Тому на k–му кроці з системи виключається x_k.

Коли процес закінчиться? Наступний крок не можна виконати тільки в двох випадках: або вже не залишилось рівнянь, або в рівняннях, що залишились, усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють 0. Якщо таке трапилося після r кроків, то одержана система буде мати вигляд

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & d_{12}x_2 & +\cdots+ & d_{1r}x_r & + & d_{1,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & d_{1n}x_n & = b''_1, \\ & & x_2 & +\cdots+ & d_{2r}x_r & + & d_{2,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & d_{2n}x_n & = b''_2, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & x_r & + & d_{r,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & d_{rn}x_n & = b''_r, \\ & & & & & & & & 0 & = b''_{r+1}, \\ & & & & & & & & \ldots & \ldots \\ & & & & & & & & 0 & = b''_m. \end{array} \tag{9}$$

Перехід від системи (1) до системи (9) і називається *прямим ходом* методу Ґауса.

Якщо $r < m$, то система (9) містить рівняння вигляду $0 = b''_t$, $t = r+1, \ldots, m$. Якщо серед вільних членів $b''_{r+1}, \ldots, b''_m$ є хоча б один ненульовий, то система (9) (а тому і початкова СЛР) є несумісною. Тому на цьому процес її розв'язання завершується.

Якщо ж $r = m$ або всі коефіцієнти $b''_{r+1}, \ldots, b''_m$ дорівнюють 0, то перетворення системи можна продовжити далі.

Зворотний хід методу Ґауса.

Виконуючи такі самі перетворення, як у зворотному ході алгоритму Ґауса, систему (9) можна звести до вигляду

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & & + f_{1,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & f_{1n}x_n & = & h_1, \\ & x_2 & & + f_{2,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & f_{2n}x_n & = & h_2, \\ & \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ & & x_r & + f_{r,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & f_{rn}x_n & = & h_r, \\ & & & & & 0 & = & 0, \\ & & & & & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ & & & & & 0 & = & 0. \end{array} \tag{10}$$

Основною матрицею цієї СЛР буде матриця (16).

Лишилося з'ясувати, як записати розв'язки. Можливі два випадки (зауважимо, що рівняння вигляду $0 = 0$ можна відкинути).

Випадок 1. $r = n$. У цьому випадку система (10) має вигляд

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & h_1, \\ x_2 & = & h_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ x_n & = & h_n. \end{array} \tag{11}$$

Тоді ця СЛР є сумісною, а її єдиним розв'язком є набір $(h_1, \ldots, h_n)$. Тобто СЛР є визначеною.

Випадок 2. $r < n$. У цьому випадку систему (10) можна переписати у вигляді

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & = & h_1 & - f_{1,r+1}x_{r+1} & - \cdots - & f_{1n}x_n\,, \\ x_2 & = & h_2 & - f_{2,r+1}x_{r+1} & - \cdots - & f_{2n}x_n\,, \\ & & & & & \\ x_r & = & h_r & - f_{r,r+1}x_{r+1} & - \cdots - & f_{rn}x_n\,, \end{array} \tag{12}$$

де $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — це *вільні* змінні, яким можна надавати довільних значень: $x_{r+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-r}$. Якщо значення вільних невідомих вибрані, то *головні* невідомі вже визначаються однозначно:

$$\begin{array}{lcllllllll} x_1 & = & h_1 & - & f_{1,r+1}t_1 & - & f_{1,r+2}t_2 & - \cdots - & f_{1n}t_{n-r}\,, \\ x_2 & = & h_2 & - & f_{2,r+1}t_1 & - & f_{2,r+2}t_2 & - \cdots - & f_{2n}t_{n-r}\,, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ x_r & = & h_r & - & f_{r,r+1}t_1 & - & f_{r,r+1}t_2 & - \cdots - & f_{rn}t_{n-r}\,. \end{array} \tag{13}$$

Таким чином, розв'язком є кожен набір вигляду

$$(h_1 - f_{1,r+1}t_1 - \cdots - f_{1n}t_{n-r}, \ldots, h_r - f_{r,r+1}t_1 - \cdots - f_{rn}t_{n-r}, t_1, \ldots, t_{n-r})\,, \tag{14}$$

де замість параметрів $t_1, \ldots, t_{n-r}$ можна підставляти довільні значення. У цьому випадку СЛР є невизначеною.

Висновок.

1. СЛР (1) є сумісною тоді й лише тоді, коли після прямого ходу методу Ґауса вона зводиться до вигляду (9), причому $b''_{r+1} = \cdots = b''_m = 0$.
2. Якщо СЛР (1) сумісна, то зворотним ходом методу Ґауса її можна звести до квазірівносильної їй СЛР вигляду (10). Якщо $r = n$, то СЛР буде визначеною, а якщо $r < n$ — то невизначеною. Розв'язками СЛР (10) будуть усі набори вигляду (14) і тільки вони.

Зауважимо, що при застосуванні методу Ґауса на практиці замість елементарних перетворень рівнянь системи виконують відповідні перетворення рядків її розширеної матриці.

Отже, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою методу Ґауса, потрібно

- виписати розширену матрицю системи лінійних рівнянь;
- за допомогою алгоритму Ґауса звести матрицю до вигляду (4);
- з'ясувати, чи є система сумісною чи несумісною. У випадку сумісної системи описати розв'язки відповідно до висновку.

Приклади

Приклад 1.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 15, \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 25. \end{array}$$

Розв'язання. 1. Випишемо розширену матрицю цієї системи лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 25 \end{array}\right).$$

2. Виконаємо прямий хід алгоритму Ґауса.

Спочатку віднімемо від другого і третього рядків перший, помножений відповідно на 4 і 7. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & -17 \end{array}\right).$$

Тепер від третього рядка віднімемо подвоєний другий. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, третє рівняння системи набуло вигляду

$$0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + 0{\cdot}tx_3 = 1.$$

Оскільки воно не має розв'язків, то дана СЛР є несумісною.

□

Приклад 1.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 15, \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & = & 25 \end{array}$$

Розв'язання. 1. Випишемо розширену матрицю цієї системи лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 10 & 25 \end{array}\right).$$

2. Виконаємо прямий хід алгоритму Ґауса.

Якщо з цією матрицею виконати такі ж перетворення, як у попередньому прикладі, то отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

3. Виконаємо зворотний хід алгоритму Ґауса.

Розділимо другий рядок на -3, а потім віднімемо від першого і другого рядків третій, помножений відповідно на 3 і 2. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Віднімемо від першого рядка подвоєний другий:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, система набула вигляду

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1, \\ x_2 & = & 1, \\ x_3 & = & 1. \end{array}$$

Отже, дана СЛР є визначеною, а її єдиним розв'язком є набір $(1, 1, 1)$.

$\square$

Приклад 1.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 15, \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 24 \end{array}$$

Розв'язання. 1. Випишемо розширену матрицю цієї системи лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right).$$

2. Виконаємо прямий хід алгоритму Ґауса. Якщо з цією матрицею виконати такі ж перетворення, як у першому прикладі, то отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Розділимо другий рядок на -3, отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3. Виконаємо зворотний хід алгоритму Ґауса. Віднімемо від першого рядка подвоєний другий. Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, система набула вигляду

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_3 & = & 0, \\ x_2 & + & 2x_3 & = & 3, \\ & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Виключимо останнє рівняння, яке є тотожно істинним, і перенесемо члени з x_3 у праву частину:

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & x_3, \\ x_2 & = & 3 - 2x_3. \end{array}$$

Таким чином, невідомому x_3 можна надавати довільного значення t, після чого x_1 і x_2 визначаються однозначно: $x_1 = t,\ x_2 = 3 - t$. Отже, дана СЛР є невизначеною, а множина її розв'язків має вигляд

$$\{(t, 3 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

□

2 Знаходження максимальної лінійно незалежної системи векторів

Нехай P — деяке поле. Нагадаємо, що *арифметичним векторним простором* розмірності n над полем P називається множина

$$P^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in P\}$$

(елементи якої називаються *векторами*) разом із операціями *додавання* векторів і *множення* векторів на елементи поля P, визначеними наступним чином:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\,,$$

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)\,.$$

Система векторів $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_m$ називається *лінійно незалежною* (позначатимемо коротко ЛНЗ), якщо $k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$ тоді й лише тоді, коли $k_1 = 0, \ldots, k_m = 0$. В іншому разі система векторів називається *лінійно залежною.*

Максимальна лінійно незалежна підсистема векторів векторного простору — це та лінійно незалежна підсистема, яка не містяться в жодній більшій лінійно незалежній підсистемі. Максимальні лінійно незалежні підсистеми коротко будемо називати *МЛНЗ-підсистемами.* Кількість векторів у МЛНЗ-підсистемі даної системи векторів S називається *рангом* цієї системи векторів і позначається $\operatorname{rank}(S)$. Якщо система S є скінченною і складається з векторів $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, то використовують також позначення $\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$.

Типовими задачами є задачі з'ясування, чи є система векторів арифметичного векторного простору лінійно незалежною, задача знаходження максимальної лінійно незалежної підсистеми системи векторів, знаходження рангу системи векторів, знаходження базису та розмірності простору, породженого системою векторів. З технічного погляду всі ці задачі схожим чином.

Правило 2.1. Щоб з'ясувати, чи є система векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно залежною/незалежною, потрібно

- скласти матрицю, стовпцями якої є вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$;
- за допомогою прямого ходу алгоритму Ґауса звести одержану матрицю до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \ldots & d_{1,r-1} & d_{1,r} & d_{1,r+1} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & d_{2,r-1} & d_{2,r} & d_{2,r+1} & \ldots & d_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & d_{r-1,r} & d_{r-1,r+1} & \ldots & d_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & d_{r,r+1} & \ldots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \qquad (15)$$

- якщо $k = r$, то система векторів лінійно незалежна; якщо $k < r$, система векторів лінійно залежна.

Правило 2.2. Щоб знайти МЛНЗ підсистему системи векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, потрібно

- скласти матрицю, стовпцями якої є вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$;
- за допомогою методу Ґауса звести одержану матрицю до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_{1,r+1} & \ldots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & f_{2,r+1} & \ldots & f_{2n} \\ \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & f_{r-1,r+1} & \ldots & f_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & f_{r,r+1} & \ldots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

- вектори, на місця яких утворилася одинична матриця, і є векторами МЛНЗ підсистеми.

Зауваження 1. МЛНЗ підсистема системи векторів визначається не єдиним чином! Проте кількість векторів у МЛНЗ не залежить від способу знаходження МЛНЗ.

Правило 2.3. Щоб знайти ранг системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, треба

- скласти матрицю, стовпцями якої є вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$;
- за допомогою прямого алгоритму Ґауса звести одержану матрицю до вигляду (16);
- число r дорівнює рангу системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Оскільки базис векторного простору, породженого системою векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, є МЛНЗ підсистемою цієї системи векторів, а розмірність цього простору дорівнює рангу системи векторів, то для знаходження базису можна застосовувати правило 2.2, а для знаходження розмірності — правило 2.3. Зауважимо, що базис простору визначається не однозначно.

Приклади

Приклад 2.1. З'ясувати, чи буде лінійно незалежною система векторів:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (4,\ -5,\ 2,\ 6)\,, \\ \mathbf{v}_2 &= (2,\ -2,\ 1,\ 3)\,, \\ \mathbf{v}_3 &= (6,\ -3,\ 3,\ 9)\,, \\ \mathbf{v}_4 &= (4,\ -1,\ 5,\ 6)\,; \end{aligned}$$

Розв'язання. 1. Складемо матрицю, стовпцями якої є вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Зведемо її до вигляду (16) за допомогою прямого ходу алгоритму Ґауса

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість ненульових рядків менша за кількість векторів, то система векторів $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ лінійно залежна.

□

Приклад 2.2. Знайти ранг системи векторів

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (4,\ -5,\ 2,\ 6)\,, \\ \mathbf{v}_2 &= (2,\ -2,\ 1,\ 3)\,, \\ \mathbf{v}_3 &= (6,\ -3,\ 3,\ 9)\,, \\ \mathbf{v}_4 &= (4,\ -1,\ 5,\ 6)\,; \end{aligned}$$

Розв'язання. 1. Складемо матрицю, стовпцями якої є вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Одержана матриця буде така сама, як і у попередньому прикладі, тому виписувати її не будемо.

2. Після застосування прямого ходу алгоритму Ґауса одержимо

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг системи векторів дорівнює 3. □

Приклад 2.3. Знайти МЛНЗ-підсистему для системи векторів $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, 5, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (0, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -4, 4, 5)$, та виразити через цю МЛНЗ-підсистему інші вектори системи.

Розв'язання. 1. Складемо матрицю, стовпцями якої є вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

2. За допомогою алгоритму Ґауса зведемо матрицю до вигляду (16):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ і $\boldsymbol{a}_3$ утворюють МЛНЗ-підсистему.

3. Залишилося виразити вектори $\boldsymbol{a}_4$ та $\boldsymbol{a}_5$ через вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ і $\boldsymbol{a}_3$. Векторам $\boldsymbol{a}_4$ та $\boldsymbol{a}_5$ відповідають четверти та п'ятий стовці матриці (17), а тому і стовці зведеної матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З останньої матриці видно, що четвертий стовпець є сумою другого та третього стовпців, а п'тий є сумою потроєного першого, подвоєного другого та третього, отже,

$$\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{a}_5 = 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$$

□

Знаходження рангу матриці

Із кожною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

мможна пов'язати дві системи векторів: систему її стовпців і систему її рядків. Ранг системи вектор–стовпців називається *стовпцевим* рангом матриці A і позначається $r_{\text{ст.}}(A)$, а ранг системи вектор–рядків називається *рядковим* рангом матриці A і позначається $r_{\text{ряд.}}(A)$.

Означення 2.1. Спільне значення рядкового та стовпцевого рангів матриці A називається *рангом матриці* A і позначається $\operatorname{rank}(A)$.

Квадратна матриця порядку n називається *виродженою* (або *особливою*), якщо її ранг менший за n. У противному разі така матриця називається *невиродженою* (*неособливою*).

Правило 2.4. Щоб обчислити ранг матриці потрібно

- за допомогою алгоритму Ґауса звести матрицю до вигляду (16);
- порахувати кількість одиниць на головній діагоналі, це число і буде дорівнювати рангу матриці.

Приклад 2.4. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо прямий хід алгоритму Ґауса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що на цьому обчислення можна закінчити — зводити далі матрицю до вигляду (16) не потрібно. Справді, в останній матриці перші два рядки лінійно незалежні, а третій — нульовий. Тому її рядковий ранг дорівнює 2. Але тоді і $\operatorname{rank}(A)=2$.

□

3 Знаходження фундаментальної системи розв'язків

Означення 3.1. *Підпростором* простору P^n називається довільна непорожня підмножина $V \subseteq P^n$, яка замкнена відносно додавання векторів і множення векторів на скаляри, тобто:

1) для довільних $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ виконується $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$;

2) для довільних $\mathbf{a} \in V$ та $\alpha \in P$ виконується $\alpha \cdot \mathbf{a} \in V$.

Нагадаємо, що однорідна СЛР — це СЛР з нульовим вільним вектором–стовпцем.

Теорема 3.1. *Множина розв'язків однорідної СЛР з коефіцієнтами з поля P утворює підпростір простору P^n, де n — кількість невідомих.*

База цього підпростору називається *фундаментальною системою розв'язків* (або коротко — ФСР) цієї однорідної СЛР.

Теорема 3.2 (про будову множини розв'язків однорідної СЛР)**.** *Кожен розв'язок однорідної СЛР записується у вигляді лінійної комбінації розв'язків із ФСР, причому таке зображення однозначне.*

Наступна теорема дає спосіб побудови ФСР.

Теорема 3.3 (про "хвости")**.** *Якщо $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — це список усіх вільних невідомих однорідної СЛР, то ця система має ФСР вигляду*

$$\begin{array}{lcllllllll} \boldsymbol{f}_1 & = & (c_{11}, & \ldots, & c_{1r}, & 1, & 0, & \ldots, & 0) \\ \boldsymbol{f}_2 & = & (c_{21}, & \ldots, & c_{2r}, & 0, & 1, & \ldots, & 0) \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{f}_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, & \ldots, & c_{n-r,r}, & 0, & 0, & \ldots, & 1) \end{array} \tag{19}$$

(*у розв'язку f_i одиниця в "хвості" стоїть на $r + i$–му місці*).

Теорема 3.4 (про загальний розв'язок неоднорідної СЛР)**.** *Різниця довільних двох розв'язків неоднорідної СЛР S є розв'язком відповідної однорідної системи. Сума фіксованого розв'язку системи S і довільного розв'язку відповідної однорідної системи є розв'язком системи S, причому кожен розв'язок системи S можна одержати таким чином.*

Правило 3.1. Щоб знайти ФСР однорідної СЛР, потрібно

- скласти матрицю однорідної СЛР;
- звести її до вигляду (16);
- обрати вільні змінні та надати їм вільних значень;

- виписати вектори ФСР у відповідності до теореми 3.1.

Правило 3.2. Щоб знайти загальний розв'язок однорідної СЛР, потрібно

- скласти матрицю однорідної СЛР;
- знайти ФСР цієї однорідної СЛР;
- записати загальний розв'язок як лінійну комбінацію векторів з ФСР.

Правило 3.3. Щоб знайти загальний розв'язок неоднорідної СЛР, потрібно

- записати розширену матрицю неоднорідної СЛР;
- випивати матрицю відповідної однорідної СЛР;
- знайти ФСР однорідної СЛР;
- знайти деякий часковий розв'язок неоднорідної СЛР
- записати загальний розв'язок як суму часткового розв'язку та лінійної комбінації векторів з ФСР.

Приклади

Приклад 3.1. Знайти ФСР та загальний розв'язок ОСЛР

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0, \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 8x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0. \end{array}$$

Розв'язання. 1. Виписуємо матрицю однорідної СЛР:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 8 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

2. За допомогою алгоритму Ґауса зводимо матрицю системи до вигляду (16:)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&2&3&0&0\\2&6&5&8&-1&0\\3&9&5&7&1&0\\1&3&5&9&-3&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&2&3&0&0\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&-1&-2&1&0\\0&0&3&6&-3&0\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&2&3&0&0\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&0&-1&2&0\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

3. Із вигляду останньої матриці випливає, що в якості вільних невідомих можна взяти $x_2,\ x_4,\ x_5$. Решта невідомих виражається через них наступним чином

$$x_1 = -3x_2 + x_4 - 2x_5, \qquad x_3 = -2x_4 + x_5. \tag{20}$$

Складемо таблицю, стовпці якої нумеруються невідомими. Спочатку по черзі надаємо одному з вільних невідомих значення 1, а решті вільних невідомих — значення 0:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	1		0	0
	0		1	0
	0		0	1

.

4. З рівностей (20) обчислюємо значення решти невідомих:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	1	0	0	0
1	0	-2	1	0
-2	0	1	0	1

.

Виписуємо вектори ФСР:

$$\boldsymbol{f}_1 = (-3,1,0,0,0), \boldsymbol{f}_2 = (1,0,-2,1,0), \boldsymbol{f}_3 = (-2,0,1,0,1).$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд $t_1\boldsymbol{f}_1 + t_2\boldsymbol{f}_2 + t_3\boldsymbol{f}_3$, де $t_1,\ t_2,\ t_3$ — довільні. □

Приклад 3.2. Знайти загальний розв'язок СЛР

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}x_1&+&3x_2&+&2x_3&+&3x_4&&&=&3,\\2x_1&+&6x_2&+&5x_3&+&8x_4&-&x_5&=&8,\\3x_1&+&9x_2&+&5x_3&+&7x_4&+&x_5&=&5,\\x_1&+&3x_2&+&5x_3&+&9x_4&-&3x_5&=&9.\end{array}$$

Розв'язання. 1. Виписуємо матрицю СЛР

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 8 & -1 & 8 \\ 3 & 9 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

та матрицю відповідної однорідної СЛР

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 8 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

2. У попередньому прикладі вже знайдено вектори ФСР:

$$\boldsymbol{f}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0), \boldsymbol{f}_2 = (1, 0, -2, 1, 0), \boldsymbol{f}_3 = (-2, 0, 1, 0, 1).$$

3. Виконуючи ті самі елементарні перетворення над матрицею неоднорідної СЛР, що і при зведенні матриці однорідної СЛР, дійдемо до матриці

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З неї видно, що частковим розв'язком початкової СЛР є, наприклад, вектор $(-3, 0, 3, 0, 1)$.

4. Запишемо загальний розв'язок як суму часткового розв'язку та лінійної комбінації векторів ФСР:

$$(-3, 0, 3, 0, 1) + t_1\boldsymbol{f}_1 + t_2\boldsymbol{f}_2 + t_3\boldsymbol{f}_3,$$

де t_1, t_2, t_3 — довільні. □

4 Дії над матрицями

Пригадаємо, як визначаються сума, добуток матриці на скаляр та добуток матриць. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ — матриці однакового розміру, то їх *сумою* $A + B$ називається матриця $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Додавати можна лише матриці однакового розміру.

Добутком $c \cdot A$ матриці $A = (a_{ij})$ на скаляр c називається матриця $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{n\times k}$ (розмірів $m \times n$ і $n \times k$ відповідно) називається матриця $AB = (r_{ij})$ розміру $m \times k$, де

$$r_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Перемножити дві матриці можна тоді й лише тоді, коли кількість стовпців першого множника дорівнює кількості рядків другого.

Транспонованою до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається матриця

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця B називається *оберненою* до матриці A, якщо $BA = AB = E$, де E позначає одиничну матрицю. Матриця, для якої існує обернена, називається *оборотною*.

Правила додавання матриць, множення матриці на скаляр та множення двох матриць випливає безпосередньо з означення. Опишемо лише спосіб знаходження оберненої матриці.

Правило 4.1. Для того, щоб знайти матрицю, обернену до матриці A, потрібно

- до матриці A дописати справа одиничну матрицю E такого самого порядку;
- за допомогою елементарних перетворень рядків матриці $(A|E)$ звести її до вигляду $(E|\widetilde{A})$;
- матриця $\widetilde{A}$ і буде матрицею, оберненою до A, тобто $\widetilde{A} = A^{-1}$.

Приклади

Приклад 4.1. Обчислити суму матриць $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 29 & 11 \\ 2 & 18 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 29 & 11 \\ 2 & 18 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3+3 & -4+29 & 5+11 \\ 2+2 & -3+18 & 1-3 \\ 3+0 & -5-3 & -1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 25 & 16 \\ 4 & 15 & -2 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$ □

Приклад 4.2. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-4)\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot 29+(-4)\cdot 18+5\cdot(-3) \\ 2\cdot 3+(-3)\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 29+(-3)\cdot 18+1\cdot(-3) \\ 3\cdot 3+(-5)\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 29+(-5)\cdot 18+(-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$
□

Приклад 4.3. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. 1. До матриці A дописуємо справа одиничну матрицю E такого ж порядку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. За допомогою елементарних перетворень зводимо ліву частину до одиничної матриці. Спочатку від третього рядка віднімемо другий:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Потім від першого рядка віднаміємо третій, а від другого рядка віднімаємо подвоєний третій та переставляємо рядки:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Решта перетворень рядків зрозумілі з вигляду лівої частини матриці:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 41 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -38 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 41 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}$. □

5 Дії з підпросторами

Сумою $U + W$ підпросторів U і W простору V називається множина всіх векторів вигляду $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, де $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$, тобто $U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$. Аналогічно визначається сума $V_1 + \cdots + V_k$ довільної кількості підпросторів. *Перетин* підпросторів визначається як звичайний теоретико–множинний перетин.

Сума $V_1 + \cdots + V_k$ називається *прямою* (і позначається $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$), якщо кожний вектор $\boldsymbol{v}$ із $V_1 + \cdots + V_k$ може бути поданий у вигляді $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$, де $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, єдиним чином.

Теорема 5.1 (Формула Ґрасмана)**.** *Якщо V_1 і V_2 — підпростори скінченновимірного простору V, то*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Позначимо через

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P\}$$

множину всіх лінійних комбінацій векторів $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Неважко переконатися, що ця множина є векторним простором над полем P.

Типовими задачами є відшукання бази суми та перетину підпросторів, а також відповідних розмірностей.

З означення суми підпросторів випливає, що системою твірних суми $U+W$ підпросторів U та W, є об'єднання систем твірних просторів U та W. Це дає наступне правило знаходження базису суми підпросторів.

Правило 5.1. Нехай $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — підпростори n–вимірного векторного простору V. Для того, щоб знайти розмірність суми $U+W$ підпросторів U та W, потрібно

- скласти матрицю, стовпцями (або рядками) якої є вектори $u_1, \ldots, u_k$, $w_1, \ldots, w_m$;
- знайти ранг утвореної матриці;
- розмірність суми підпросторів і дорівнюватиме обчисленому у попередньому пункті рангу.

Правило 5.2. Нехай $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — підпростори n–вимірного векторного простору V. Для того, щоб знайти базу суми $U+W$ підпросторів U та W, потрібно

- скласти матрицю, стовпцями (або рядками) якої є вектори $u_1, \ldots, u_k$, $w_1, \ldots, w_m$;
- знайти МЛНЗ підсистему векторів–стовпців (або векторів–рядків) утвореної матриці;
- вектори з цієї МЛНЗ і будуть базисом суми підпросторів U та W.

Розглянемо тепер спосіб знаходження бази перетину. Візьмемо вектор $\boldsymbol{v}$ з перетину $U \cap W$. Його можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{w}_m\,. \tag{21}$$

Перепишемо рівність у вигляді

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k - \beta_1 \boldsymbol{w}_1 - \cdots - \beta_m \boldsymbol{w}_m = 0\,.$$

Розпишемо ліву рівність останнього співвідношення покоординатно, отримаємо однорідну систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Нехай $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_k^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_m^{(i)})$, $i = 1, \ldots, r$, — фундаментальна система розв'язків отриманої системи. Тоді вектори

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1^{(1)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(1)} \boldsymbol{u}_k,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_r = \alpha_1^{(r)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(r)} \boldsymbol{u}_k$$

утворюють базу перетину $U \cap W$. З рівності (21) випливає, що всі ці вектори належать перетину $U \cap W$. Оскільки фундаментальна система розв'язків породжує всю множину розв'язків системи рівнянь, то вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ є системою твірних перетину $U \cap W$.

Якщо $\gamma_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \gamma_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$, то з (21) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i (\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_k^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_m^{(i)}) = (0, \ldots, 0)\,.$$

Розв'язки з ФСР лінійно незалежні, тому $\gamma_1 = \cdots = \gamma_r = 0$. Отже, вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ — лінійно незалежні.

З (21) випливає, що вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ можна визначати також рівностями

$$\boldsymbol{v}_1 = \beta_1^{(1)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_k^{(1)} \boldsymbol{w}_k,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_r = \beta_1^{(r)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_k^{(r)} \boldsymbol{w}_k\,.$$

Підсумовуючи написане вище, одержимо наступне правило знаходження бази перетину підпросторів.

Правило 5.3. Нехай $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — підпростори n–вимірного векторного простору V. Для того, щоб знайти базу перетину $U \cap W$ підпросторів U та W, потрібно

- скласти матрицю однорідної СЛР, стовпцями основної матриці якої є вектори $u_1, \ldots, u_k$, $-w_1, \ldots, -w_m$;
- знайти ФСР цієї однорідної СЛР;
- якщо $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_k^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_m^{(i)})$, $i = 1, \ldots, r$, — вектори ФСР, то виписати базис перетину за правилом

  $$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1^{(1)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(1)} \boldsymbol{u}_k,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_r = \alpha_1^{(r)} \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k^{(r)} \boldsymbol{u}_k$$

  або

  $$\boldsymbol{v}_1 = \beta_1^{(1)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_k^{(1)} \boldsymbol{w}_k,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_r = \beta_1^{(r)} \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_k^{(r)} \boldsymbol{w}_k\,.$$

Правило 5.4. Нехай $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — підпростори n–вимірного векторного простору V. Для того, щоб знайти розмірність перетину $U \cap W$ підпросторів U та W, потрібно

- скласти матрицю однорідної СЛР, стовпцями основної матриці якої є вектори $u_1, \ldots, u_k$, $-w_1, \ldots, -w_m$;

- знайти ФСР цієї однорідної СЛР;
- кількість векторів у ФСР дорівнює розмірності $U \cap W$.

Зауваження 2. Знаючи розмірності просторів U, W та $U+W$, розмірність $U \cap W$ можна знайти за формулою Ґрасмана.

Приклади

Приклад 5.1. Знайти розмірності $\dim(U+W)$ і $\dim(U \cap W)$, якщо
$U = \mathcal{L}\big((2,-5,3,4),\ (1,2,0,-7),(3,-6,2,5)\big)$,
$W = \mathcal{L}\big((2,0,-4,6),(1,1,1,1),(3,3,1,5)\big)$.

Розв'язання. 1. Знайдемо розмірність простору U. Для цього складемо матрицю, рядками якої є вектори $(2,-5,3,4),(1,2,0,-7),(3,-6,2,5)$, та знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

Два останні рядки непропорційні, тому ранг матриці дорівнює 3 і $\dim U = 3$.

2. Знайдемо розмірність простору W. Для цього складемо матрицю, рядками якої є вектори $(2,0,-4,6),(1,1,1,1),(3,3,1,5)$, та знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці також дорівнює 3, тому $\dim W = 3$.

3. Знайдемо розмірність суми $U+W$. Складемо матрицю, рядками якої є вектори $(2,-5,3,4),(1,2,0,-7),(3,-6,2,5)$, $(2,0,-4,6)$, $(1,1,1,1)$, $(3,3,1,5)$ та знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 38 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранг матриці дорівнює 4, то $\dim(U + W) = 4$.

Для знаходження розмірності перетину $U \cap W$ скористаємося формулою Ґрасмана:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 3 - 4 = 2\,. \qquad \square$$

Приклад 5.2. Знайти бази перетину $U \cap W$ та суми $U + W$ підпросторів U та W, якщо

$$U = \mathcal{L}\big((1,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,1,1)\big),$$
$$W = \mathcal{L}\big((1,0,1,0),\ (0,2,1,1),\ (1,2,1,2)\big).$$

Розв'язання. 1. Для простоти обчислень знайдемо спочатку бази просторів U та W. Для цього знайдемо МЛНЗ систем твірних кожного з просторів. Для цього складемо матриці, стовпцями яких є вектори з систем твірних просторів U та W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що ранги обох матриць дорівнюють 3, тобто дані системи твірних із самого початку вже є базами. Позначимо $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,2,1,2)$.

2. Знайдемо базу суми $U + W$. Складемо матрицю, стовпцями якої є вектори $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За допомогою алгоритму Ґауса зведемо її до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, МЛНЗ підсистемою векторів $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, а, отже, і базою простору $U + W$, є $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1$.

3. Знайдемо базу перетину $U \cap W$.

(a) Складемо однорідну СЛР, стовпцями основної матриці якої є вектори $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, -\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2, -\boldsymbol{v}_3$ та запишемо її розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

(b) Знайдемо ФСР цієї матриці за правилом 3.1:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, ФСР містить 2 розв'язки: $(2, 0, 2, 1, 0, 1)$ та $(1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Це дає нам базу перетину з 2 векторів:

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3 = (2, 2, 2, 2)\,,$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (1, 2, 2, 1)\,.$$

$\square$

6 Лінійні відображення та дії над ними

Нехай V — векторний простір над полем P. Якщо $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — база простору V, то коефіцієнти розкладу $\boldsymbol{u} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n$

вектора $\boldsymbol{u}$ за векторами цієї бази визначені однозначно і називаються *координатами* вектора $\boldsymbol{u}$ у цій базі. У цьому випадку писатимемо $\boldsymbol{u} = (a_1, \dots, a_n)$.

Нехай $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ і $\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ — дві бази простору V (які умовно називають *старою* і *новою*). Коефіцієнти розкладів

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{e}'_1 & = & t_{11}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{21}\boldsymbol{e}_2 & + \cdots + & t_{n1}\boldsymbol{e}_n \ , \\ \boldsymbol{e}'_2 & = & t_{12}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{22}\boldsymbol{e}_2 & + \cdots + & t_{n2}\boldsymbol{e}_n \ , \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{e}'_n & = & t_{1n}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{2n}\boldsymbol{e}_2 & + \cdots + & t_{nn}\boldsymbol{e}_n \ . \end{array}$$

утворюють матрицю

$$T_{(\boldsymbol{e})\to(\boldsymbol{e}')} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

яка називається *матрицею переходу* від бази $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ до бази $(\boldsymbol{e}') = (\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n)$.

Правило 6.1. Для того, щоб знайти матрицю переходу від старої бази до нової, потрібно

- знайти розклад векторів $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ старої бази за векторами $\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ нової бази;
- скласти матрицю, j–м стовпцем якої є коефіцієнти розкладу j–го вектора нової бази за векторами старої бази.

Зауважимо, що з технічного погляду матрицю лінійного відображення часто легше знаходити таким чином.

Правило 6.2. Для того, щоб знайти матрицю переходу від бази $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ до бази $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$, потрібно

- скласти матрицю $(A \mid B)$, де стопцями матриці A є координати векторів $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ у стандартному базисі простору V, а стовпцями матриці B є координати векторів $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ у стандартному базисі простору V;
- ща допомогою елементарних перетворень звести матрицю $(A \mid B)$ до матриці $(E \mid S)$. Матриця S буде матрицею переходу від бази $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ до бази $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$.

Нехай V і W — векторні простори над полем P.

Відображення $\varphi\colon V \to W$ називається *лінійним*, якщо:

1) $\varphi(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) + \varphi(\boldsymbol{v}_2)$ для довільних векторів $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$;

2) $\varphi(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{v})$ для довільних вектора $\boldsymbol{v} \in V$ і скаляра $\lambda \in P$.

Множину всіх лінійних відображень $\varphi : V \to W$ часто позначають $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Лінійне відображення простору V в себе часто називають ще *лінійним перетворенням* простору V або *лінійним оператором* у просторі V.

Ядром лінійного відображення $\varphi : V \to W$ називається множина

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Образом лінійного відображення $\varphi : V \to W$ називається множина

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{існує такий } \boldsymbol{v} \in V, \text{ що } \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}.$$

Розмірність образу називається *рангом* лінійного відображення φ (позначається $\mathrm{rank}(\varphi)$), а розмірність ядра — *дефектом* цього відображення (позначається $\mathrm{def}(\varphi)$).

Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ і $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Якщо образи векторів першої бази розкласти за векторами бази простору W:

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & = & t_{11}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{21}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{m1}\boldsymbol{f}_m & , \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) & = & t_{12}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{22}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{m2}\boldsymbol{f}_m & , \\ \multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \varphi(\boldsymbol{e}_n) & = & t_{1n}\boldsymbol{f}_1 & + & t_{2n}\boldsymbol{f}_2 & + \cdots + & t_{mn}\boldsymbol{f}_m & , \end{array} \tag{22}$$

то матриця

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

з коефіцієнтів цих розкладів називається *матрицею лінійного відображення* у базах $(\boldsymbol{e})$ і $(\boldsymbol{f})$ та позначається $[\varphi]_{(\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})}$ (або $[\varphi]$ або A_φ).

Теорема 6.1 (Теорема про зміну матриці лінійного відображення при переході до нових баз.)**.** *Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, $(\mathbf{e})$ і $(\mathbf{f})$ — старі, а $(\mathbf{e}')$ і $(\mathbf{f}')$ — нові бази просторів V і W відповідно, S і T — матриці переходу від $(\mathbf{e})$ до $(\mathbf{e}')$ та від $(\mathbf{f})$ до $(\mathbf{f}')$ відповідно. Позначимо $[\varphi] = [\varphi]_{(\mathbf{e},\mathbf{f})}$, $[\varphi]' = [\varphi]_{(\mathbf{e}',\mathbf{f}')}$. Тоді* $[\varphi]' = T^{-1} \cdot [\varphi] \cdot S$.

На множині $\mathrm{Hom}(V, W)$ всіх лінійних відображень $\varphi : V \to W$ природним чином визначаються додавання і множення на скаляри:

$$(\varphi + \psi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \psi(\boldsymbol{v}), \qquad (\lambda \cdot \varphi)(\boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \varphi(\boldsymbol{v}).$$

Відносно цих дій множина $\mathrm{Hom}(V, W)$ утворює векторний простір.

Добуток (або *композиція*) $\varphi\psi$ лінійних відображень $\varphi : V \to U$ і $\psi : U \to W$ визначаються, як звичайно: $(\varphi\psi)(\boldsymbol{v}) := \psi(\varphi(\boldsymbol{v}))$. Добуток відображень дозволяє визначити довільний натуральний степінь φ^n лінійного перетворення $\varphi : V \to V$.

Твердження 6.1. $[\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi]$, $[\lambda \cdot \varphi] = \lambda[\varphi]$, $[\varphi\psi] = [\psi][\varphi]$.

Твердження 6.2. *Якщо лінійне перетворення φ — невироджене, то* $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$.

Типовими задачами є знаходження матриці лінійного відображення у заданому базисі, знаходження ядра та образу лінійного відображення, знаходження матриці лінійного відображення у новому базисі, якщо відома матриця лінійного відображення у старом базисі.

Правило 6.3. Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Для того, щоб знайти матрицю лінійного відображення, потрібно

- знайти образи базисних векторів $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$;
- розкласти їх за базисом простору W;
- скласти матрицю, j-м, $j = 1, 2, \ldots, m$, стовпцем якої будуть координати вектора $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$ у базі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$.

Правило 6.4. Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Для того, щоб знайти базу ядра лінійного відображення, потрібно

- знайти матрицю лінійного відображення;
- знайти ФСР однорідної СЛР, основна матриця якої дорівнює матриці лінійного відображення — ці вектори і дадуть базу ядра лінійного відображення;
- дефект матриці лінійного відображення дорівнює розмірності ядра цього відображення.

Правило 6.5. Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Для того, щоб знайти базу образу лінійного відображення, потрібно

- знайти матрицю лінійного відображення;
- знайти МЛНЗ систему векторів–стовпців матриці лінійного відображення — ці вектори і дадуть базу образу лінійного відображення;
- ранг матриці лінійного відображення дорівнює розмірності образу цього відображення.

Правило 6.6. Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ та $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ — бази просторів V і W відповідно. Для того, щоб знайти базис ядра лінійного відображення, потрібно

- знайти матрицю лінійного відображення;
- знайти ФСР однорідної СЛР, основна матриця якої дорівнює матриці лінійного відображення — ці вектори і дадуть базу ядра лінійного відображення;
- дефект матриці лінійного відображення дорівнює розмірності ядра цього відображення.

Правило 6.7. Нехай $\varphi : V \to W$ — лінійне відображення, $(\boldsymbol{e})$ і $(\boldsymbol{f})$ — старі, а $(\boldsymbol{e}')$ і $(\boldsymbol{f}')$ — нові бази просторів V і W відповідно. Для того, щоб знайти матрицю лінійного відображення $\varphi : V \to W$, яке в базисах $(\boldsymbol{e})$ і $(\boldsymbol{f})$ задане матрицею A, потрібно

- знайти матрицю S переходу від $(\boldsymbol{e})$ до $(\boldsymbol{e}')$;
- знайти матрицю переходу від $(\boldsymbol{f})$ до $(\boldsymbol{f}')$;
- обчислити добуток матриць $B = T^{-1} A\, S$. Матриця B буде матрицею лінійного відображення φ у базах $(\boldsymbol{e}')$ і $(\boldsymbol{f}')$.

Приклади

Приклад 6.1. Лінійне перетворення $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задане правилом

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)\,.$$

Знайти матрицю цього перетворення і бази його ядра та образу.

Розв'язання. 1. Знайдемо образ кожного з базових векторів $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \varphi\big((1,0,0)\big) = (2,1,1),$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \varphi\big((0,1,0)\big) = (-1,-2,1),$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_3) = \varphi\big((0,0,1)\big) = (-1,1,-2).$$

2. Складемо матрицю, стовпцями якої є образи базових векторів:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Базою образу є будь–яка МЛНЗ система стовпців матриці A_φ. Знайдемо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 2. Тому в якості бази образу можна взяти будь–які 2 стовпці матриці $[\varphi]$, бо всі вони попарно незалежні.

3. Базою ядра є ФСР однорідної СЛР з матрицею $(A_\varphi \,|\, 0)$. Оскільки $\operatorname{rank}(A_\varphi) = 2$, то $\operatorname{def}(A_\varphi) = 1$. Отже, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$. Тому ФСР складатиметься з одного вектора. Знайдемо цей вектор:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Покладемо $x_3 = 1$, знайдемо розв'язок $(1,1,1)$, який і є базою ядра. $\square$

Приклад 6.2. Нехай лінійне перетворення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ у базі $\mathbf{a}_1 = (8,-6,7)$, $\mathbf{a}_2 = (-16,7,-13)$, $\mathbf{a}_3 = (9,-3,7)$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього перетворення в базі $\mathbf{b}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{b}_2 = (3,-1,2)$, $\mathbf{b}_3 = (2,1,2)$.

Розв'язання. Помітимо, що у цій задачі $V = W = \mathbb{R}^3$.

1. Знайдемо матрицю переходу $S_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$ за правилом 6.2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -16 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 7 & -13 & 7 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & 9 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right).$$

2. Знайдемо $S^{-1}_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

3. Знайдемо матрицю відображення φ у базисі $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{b})} = S^{-1}_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})}[\varphi]_{(\boldsymbol{a})}S_{(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{b})} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 6.3. Перетворення φ простору $\mathbb{R}^3$ у стандартній базі має матрицю $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, а перетворення ψ у стандартній базі має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матриці перетворень $\varphi + \psi$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$.

Розв'язання. Обчислимо матриці відображень $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$:

$$[\varphi+\psi] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix};$$

$$[\varphi\psi] = [\psi][\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -20 & -24 \\ 43 & -15 & -10 \\ -10 & 25 & 53 \end{pmatrix};$$

$$[\psi\varphi] = [\varphi][\psi] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 7 \\ -17 & 14 & -65 \\ 17 & 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

□

7 Знаходження власних чисел та векторів

Власний вектор — це ненульовий вектор, для якого існує таке $\lambda \in P$, що $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Скаляр λ називається *власним числом* перетворення φ, що відповідає власному вектору $\boldsymbol{v}$. Також кажуть, що власний вектор $\boldsymbol{v}$ відповідає власному числу λ.

Власні вектори, що відповідають різним власним числам лінійного перетворення, лінійно незалежні. База простору, що складається з власних векторів лінійного перетворення, називається *власною базою цього перетворення.*

Нехай лінійне перетворення φ простору V в деякій базі $(\boldsymbol{e})$ задане матрицею A. Многочлен $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ називається *характеристичним многочленом* матриці A. Тоді рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ є *характеристичним рівнянням* матриці A.

Якщо T — невироджена матриця, то характеристичні многочлени матриць A та $B = T^{-1}AT$, тобто $\chi_A(\lambda) = \chi_{T^{-1}AT}(\lambda)$. Тому можна говорити не про характеристичний многочлен матриці лінійного перетворення φ в деякій базі, а про *характеристичний многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ лінійного перетворення φ.*

Теорема 7.1. *Число μ буде власним числом матриці A тоді й лише тоді, коли μ є коренем її характеристичного многочлена $\chi_A(\lambda)$.*

Множина $V_A^{(\mu)}$ всіх власних векторів матриці A, що відповідають фіксованому власному числу μ, поповнена нульовим вектором, утворює підпростір простору V, який називається *власним підпростором.* Розмірність власного підпростору $V_A^{(\mu)}$ дорівнює

$$\dim V_A^{(\mu)} = \operatorname{def}(A - \mu E) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \mu E).$$

Базою підпростору $V_A^{(\mu)}$ є фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею $A - \mu E$.

Для лінійного перетворення φ кількість лінійно незалежних власних векторів з власним числом μ не перевищує кратності μ як кореня характеристичного многочлена перетворення φ.

Лінійне перетворення φ векторного простору V називається *діагоналізованим*, якщо існує база цього простору, в якій матриця перетворення φ має діагональний вигляд.

Твердження 7.1. *Лінійне перетворення n–вимірного векторного простору є діагоналізованим тоді й лише тоді, коли існує власна база цього перетворення.*

Правило 7.1. Для того, щоб знайти власні числа матриці A, потрібно

- скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$;
- знайти корені характеристичного многочлена
- знайдені корені і будуть власними числами матриці A.

Правило 7.2. Для того, щоб знайти власні вектори матриці A, треба

- скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$;
- знайти власні числа матриці A;
- для кожного власного числа μ знайти ФСР однорідної СЛР з основною матрицею $A - \mu E$;
- знайдені вектори і будуть власними векторами, що відповідають власним числам μ.

Правило 7.3. Для того, щоб з'ясувати, чи є матриця діагоналізованою, потрібно

- скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$;
- знайти власні числа матриці і власні вектори матриці A;
- якщо кількість коренів дорівнює порядку матриці і всі власні числа різні, то одразу зробити висновок, що матриця діагоналізується;
- якщо кількість коренів дорівнює порядку матриці, але серед коренів є кратні, то
  - якщо кожному власному числу кратності k відповідає k власних векторів, то матриця діагоналізується;
  - якщо хоча б для одного власного числа кількість власних векторів, що йому відповідає, менша за кратність власного числа як кореня характеристичного рівняння, то матриця не діагоналізується.

Приклади

Приклад 7.1. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1. Складемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)(\lambda+1)\begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 5+\lambda & 4 \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} -3+\lambda & -3+\lambda \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+1) = (\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0.$$

2. Знайдемо корені характеристичного рівняння. Очевидно, ними будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

3. Знайдемо власні числа матриці A.

Для власного числа $\lambda_{1,2} = -1$ знайдемо ФСР однорідної СЛР з матрицею $(A + E \,|\, 0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Візьмемо в якості вільної змінну x_3. Одержимо $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3$. Надамо x_3 значення $x_3 = 1$. Отже, власному числу $\lambda_{1,2} = 1$ кратності 2 відповідає власний вектор $(1, 2, 1)$.

Для власного числа $\lambda_3 = 3$ знайдемо ФСР однорідної СЛР з матрицею $(A - 3E \,|\, 0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 8 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Візьмемо в якості вільної змінну x_3. Одержимо $x_1 = \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = x_3$. Надамо x_3 значення $x_3 = 2$. Отже, власному числу $\lambda_3 = 3$ відповідає власний вектор $(1, 2, 2)$. □

Приклад 7.2. З'ясувати, чи діагоналізуються лінійні перетворення простору $\mathbb{R}^3$, які в стандартній базі задаються матрицями:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 15 \\ 10 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Якщо так, то вказати відповідний діагональний вигляд та базис, в якому матриця лінійного перетворення має такий вигляд.

Розв'язання. a) Матриця A — це матриця з попереднього прикладу. Ми бачили, що для неї власному числу -1 кратності 2 відповідає один власний вектор. Отже, ця матриця не діагоналізується.

b) Спочатку скаладемо та розв'яжемо характеристичне рівняння для матриці B:

$$\det(B-\lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & 15 \\ 10 & -8-\lambda & 15 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 \\ 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3+\lambda \\ 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2(\lambda-2) = 0.$$

Одразу видно, що $\lambda_{1,2} = -3$ — це корінь кратності 2, а $\lambda_3 = 2$ — це корінь кратності 1.

З'ясуємо, скільки ЛНЗ власних векторів відповідає власному числу -3. Для цього знайдемо кількість векторів у ФСР однорідної СЛР з матрицею $(B + 3E \,|\, 0)$.

$$(B + 3E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & 15 & 0 \\ 10 & -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, дефект матриці дорівнює $\operatorname{def}(B+3E) = 3 - \operatorname{rank}(B+3E) = 2$. Тому власному числу кратності 2 відповідає 2 власні вектори. Отже, можемо зробити висновок, що матриця B діагоналізується.

Базисом, в якому матриця лінійного перетворення має діагональний вигляд, є базис, що складається з власних векторів. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу -3. Візьмемо в якості вільних змінних x_2 та x_3. Тоді $x_1 = \frac{x_2 - 3x_3}{2}$. Складемо таблицю

x_1	x_2	x_3
1	2	0
-3	0	2

.

Отже, власними векторами є $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 0)$ та $\boldsymbol{v}_2 = (-3, 0, 2)$.

Знайдемо тепер власний вектор, що відповідає власному числу 2. Для цього знайдемо ФСР однорідної СЛР з матрицею $(B-2E\,|\,0)$:

$$(B-2E\,|\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 15 & 0\\ 10 & -10 & 15 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Візьмемо в якості вільної змінної змінну x_2 та надамо їй значення $x_2=1$. Тоді $x_1=x_2=1$, $x_3=0$. Отже, відповідним власним вектором є $\boldsymbol{v}_3=(1,1,0)$.

Таким чином базисом, в якому матриця B має діагональний вигляд є $\boldsymbol{v}_1=(1,2,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(-3,0,2)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,1,0)$, а відповідним діагональним виглядом є

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Зверніть увагу, що розташування власних чисел на діагоналі повинно бути узгодженим з базисом. Наприклад, у базисі $\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1$ відповідним діагональним виглядом буде

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

□

Література

1. *Ганюшкін О.Г.*, *Безущак О.О.* Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори). — К.: ВПЦ Київський університет, 2009.

2. *Завало С.Т.* Курс алгебри. — К.: Вища щкола, 1985.

3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. I: Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2001.

5. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. III: Основные структуры. — М.: Физматлит, 2001.

6. *Мазорчук В.С.* Жорданова нормальна форма. — К., 1998.

7. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.