Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Безущак О.О., Ганюшкін О.Г., Кочубінська Є.А.

ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

для студентів механіко – математичного факультету

Київ
Видавничо–поліграфічний центр
“Київський університет“
2016

Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 255 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Ф. Городній,
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с. О.А. Капустян

Наведено завдання для практичних занять з лінійної алгебри у другому семестрі в обсязі, передбаченому планами механіко-математичного факультету. Посібник містить завдання для аудиторної роботи і задачі для домашніх завдань. Наявність великої кількості задач різної складності дозволяє використовувати посібник як збірник задач. Для студентів математичних спеціальностей університетів.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 1 від 31 серпня 2015 року)

Зміст

Передмова

Навчальні завдання повністю охоплюють теми практичних занять, що проводяться в першому семестрі при вивченні на механіко–математичному факультеті нормативної дисципліни "Лінійна алгебра".

Кожне заняття складається з чотирьох частин. У першій частині наведено короткий виклад необхідного теоретичного матеріалу та приклади розв'язання типових задач. Друга та третя частини містять задачі, що розглядаються на практичних заняттях. Задачі другої частини є стандартними, а третьої — розраховані на сильніших студентів. Четверта частина — це задачі для домашнього завдання. Важкі задачі позначено зірочками, причому кількість зірочок є мірилом складності задачі. До задач наведено відповіді, а для багатьох із них — вказівки до розв'язання.

При посиланні на задачу використовується подвійна нумерація: перша цифра — номер заняття, друга цифра — номер задачі.

Після кожного заняття наведено посилання на найбільш доступні підручники, у яких можна знайти необхідний теоретичний матеріал.

Перелік позначень

НСД$(f(x), g(x))$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$;
НСК$(f(x), g(x))$ — найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$;
$|A|$ — визначник матриці A;
$\arg z$ — аргумент комплексного числа z;
A^* — приєднана матриця до матриці A;
A_{ij} — алгебричне доповнення елемента a_{ij};
$a \equiv b \pmod n$ — числа a та b конгруентні (порівняльні) за модулем числа n;
$\mathbb{C}_n$ — множина всіх комплексних коренів n–го степеня з 1;
$\deg f(x)$ — степінь многочлена $f(x)$;
$\det A$ — визначник матриці A;
E_{ij}, $E_{ij}(a)$, $E_i(a)$ — елементарні матриці;
$f(x) \sim g(x)$ — многочлени $f(x)$ і $g(x)$ асоційовані;
$g(x) \mid f(x)$ — многочлен $g(x)$ ділить многочлен $f(x)$;
$\operatorname{Im} z$ — уявна частина b комплексного числа $z = a + bi$;
$\operatorname{Im} \varphi$ — образ лінійного відображення φ;
$\operatorname{Ker} \varphi$ — ядро лінійного відображення φ;
$K[x]$ — множина всіх многочленів із коефіцієнтами з кільця K;
$M_{\{i_1,\dots,i_k\}}^{\{j_1,\dots,j_k\}}$ — мінор порядку k, утворений рядками $i_1, \dots, i_k$ і стовпцями $j_1, \dots, j_k$;
$\overline{M}_i^j$ — доповняльний мінор елемента a_{ij} матриці;
$M/\sim$ — фактор-множина множини M за відношенням еквівалентності $\sim$;
$N(\pi)$ — кількість інверсій у підстановці π;
$P[x]$ — множина всіх многочленів із коефіцієнтами з поля P;
$P(x)$ — множина всіх раціональних функцій із коефіцієнтами з поля P:
$\operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ або $r(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ — ранг системи векторів $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$;
$\operatorname{Re} z$ — дійсна частина a комплексного числа $z = a + bi$;
$r_{\min}(A)$ — мінорний ранг матриці A;
S_n — множина всіх підстановок на множині $\{1, 2, \dots, n\}$ перших n натуральних чисел;
$\operatorname{sp} A$, $\operatorname{tr} A$ — слід (сума діагональних елементів) матриці A;
$|z|$ — модуль комплексного числа z;
$\mathbb{Z}_n$ — кільце класів лишків за модулем числа n;
$|\pi|$ — порядок підстановки π;
$[\varphi]$ — матриця лінійного відображення φ.

Заняття 1. Комплексні числа. Алгебрична форма запису комплексних чисел

Необхідні поняття. Поле комплексних чисел — це множина

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ де } i^2 = -1,$$

разом з діями додавання та множення, які визначені правилами:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i;\\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned} \tag{1}$$

Зображення комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ у вигляді

$$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},$$

називається *алгебричною формою* його запису. При цьому a називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Re} z$, а b — *уявною частиною* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Im} z$. Комплексні числа вигляду bi, $b \in \mathbb{R}$, називаються *чисто уявними*.

Комплексно спряженим до числа $z = a + bi$ називається число

$$\overline{z} = a - bi.$$

Дії віднімання та ділення комплексних чисел є похідними від дій додавання та множення і визначаються правилами:

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i;\\ \frac{(a + bi)}{(c + di)} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i.\end{aligned} \tag{2}$$

Комплексні числа можна зображувати точками або векторами на площині, а саме: число $z = a + bi$ зображується точкою або вектором з декартовими координатами (a, b). При зображенні комплексних чисел точками поле $\mathbb{C}$ природно ототожнюється з множиною точок площини (яку називають *комплексною площиною*). При цьому вісь абсцис називають *дійсною* віссю, а вісь ординат — *уявною*.

При зображенні комплексних чисел векторами додаванню комплексних чисел відповідає звичайне додавання векторів за правилом паралелограма. Довжина вектора, яким зображується число $z = a + bi$, називається *модулем* числа z і позначається $|z|$. Очевидно, що $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Необхідні твердження. **1.** *Властивості модуля комплексного числа*:

a) $|z| \ge 0$, причому $|z| = 0$ тоді й лише тоді, коли $z = 0$;
b) $|z| \ge |\operatorname{Re} z| \ge \operatorname{Re} z$, $|z| \ge |\operatorname{Im} z| \ge \operatorname{Im} z$;
c) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$;
d) якщо $|z| \ne 0$, то $|z^n| = |z|^n$ для довільного $n \in \mathbb{Z}$;
e) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (нерівність трикутника).

2. *Властивості спряжених чисел*:

a) $\overline{\overline{z}} = z$, $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$;
b) спряження зберігає арифметичні операції:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},\ \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \ \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1},\ \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}\,;$$

c) $\overline{z} = z$ тоді й лише тоді, коли z є дійсним; $\overline{z} = -z$ тоді й лише тоді, коли z є чисто уявним;

d) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ і $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ для кожного ненульового числа z.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть вираз* $\dfrac{(3+2i)(7+i)}{1+i}$.

Розв'язання. Використовуючи правила дій над комплексними числами, маємо:

$$\frac{(3+2i)(7+i)}{1+i} = \frac{21-2+3i+14i}{1+i} = \frac{19+17i}{1+i} = \frac{(19+17i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$
$$= \frac{19+17-19i+17i}{1+1+i-i} = \frac{36-2i}{2} = 18-i. \qquad \square$$

Задача 2. *Розв'яжіть рівняння* $(2i-1)x^2 - (1+5i)x + (2+2i) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант цього рівняння:

$$D = (1+5i)^2 - 4(2i-1)(2i+2) = 2i.$$

Обчислимо тепер $\sqrt{D}$. Нехай $\sqrt{D} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді

$$a^2 + 2abi - b^2 = 2i. \tag{3}$$

Прирівнявши дійсні та уявні частини обох частин рівняння (3), отримуємо дійсну систему рівнянь:

$$a^2 - b^2 = 0, \quad ab = 1. \tag{4}$$

Із другого рівняння системи (4) маємо: $b = 1/a$. Підставляючи це в перше рівняння, отримуємо $a^2 - 1/a^2 = 0$, звідки $a^4 = 1$ і $a = \pm 1$. Отже, система (4) має два розв'язки: $a = b = 1$ і $a = b = -1$. Тому $\sqrt{D} = \pm(1+i)$, а розв'язками початкового рівняння є

$$x_{1,2} = \frac{(1+5i) \pm (1+i)}{2(2i-1)} = \begin{cases} 1-i; \\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i. \end{cases}$$ □

Задача 3. *Розв'яжіть систему рівнянь:*

$$\begin{array}{rcrcl} 2z_1 & - & (2+i)z_2 & = & -i, \\ (4-2i)z_1 & - & 4z_2 & = & 1+i. \end{array}$$

Розв'язання. Розв'язуємо систему методом виключення невідомих. Для цього з першого рівняння виражаємо z_1 через z_2:

$$z_1 = \frac{1}{2}((2+i)z_2 - i),$$

і підставляємо в друге рівняння:

$$(2-i)((2+i)z_2 - i) - 4z_2 = 1+i.$$

Після очевидних перетворень одержуємо: $z_2 = 2+3i$. Далі знаходимо z_1:

$$z_1 = \frac{1}{2}((2+i)(2+3i) - i) = \frac{1}{2}(1+7i) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Отже, розв'язком системи рівнянь є $z_1 = (1+7i)/2$, $z_2 = 2+3i$. □

Задача 4. *Розв'яжіть рівняння* $|x| - x = 1 + 2i$.

Розв'язання. Нехай $x = a + bi$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді

$$\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1 + 2i.$$

Порівнюючи дійсні та уявні частини обох частин отриманого рівняння, дістанемо дійсну систему рівнянь:

$$\sqrt{a^2+b^2} - a = 1, \quad -b = 2.$$

Із другого рівняння одразу знаходимо $b = -2$, а потім з першого, після піднесення обох його частин до квадрата, знаходимо $a = 3/2$. Отже, розв'язком початкового рівняння є число $z = 3/2 - 2i$. □

Зауваження. При піднесенні до квадрата могли з'явитися сторонні розв'язки. Однак перевірка показує, що $z = 3/2 - 2i$ справді є розв'язком початкового рівняння.

Задача 5. *Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють умову $|z - 3 + 2i| = 2$.*

Розв'язання. Із рис. 1 видно, що число $|v - u|$ має дуже простий геометричний зміст — *це відстань від точки u до точки v*. $z - 3 + 2i$ можна переписати у вигляді $z - (3 - 2i)$. Тому точки z, які задовольняють умову $|z - 3 + 2i| = 2$, — це точки комплексної площини, які знаходяться на віддалі 2 від точки $3 - 2i$.

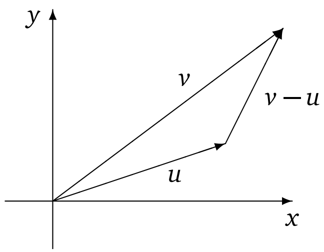

Рис. 1

Таким чином, множина всіх точок z, які задовольняють умову $|z - 3 + 2i| = 2$, — це коло радіусом 2 з центром у точці $(3, -2)$. □

Задача 6. *Нехай комплексні числа z_1, z_2, z_3 відповідають вершинам паралелограма A_1, A_2, A_3. Знайдіть число, яке відповідає вершині A_4, що лежить напроти A_2.*

Розв'язання. Нехай вершині A_4 відповідає комплексне число z_1. Діагоналі паралелограма у точці перетину діляться навпіл. Тому середина відрізка A_1A_3 має збігатися із серединою відрізка A_2A_4. Середині відрізка A_1A_3 відповідає число $\frac{1}{2}(z_1 + z_3)$, а середині відрізка A_2A_4 — число $\frac{1}{2}(z_2 + z)$. Із рівняння

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_3) = \frac{1}{2}(z_2 + z)$$

знаходимо: $z = z_1 + z_3 - z_2$. □

Задача 7. *Знайдіть найбільше й найменше значення, яких може набувати вираз $|2 + i - z|$ за умови, що $|z| \le 1$.*

Розв'язання. Як уже зазначалося при розв'язанні зад. 5, $|2+i-z|$ — це відстань від точки z до точки $2+i$. Тому нам треба знайти найбільшу й найменшу відстань від точки $2+i$ до точки, що належать кругу $|z| \le 1$. Із геометричних міркувань зрозуміло, що екстремальні значення досягаються на прямій, що з'єднує точку $2+i$ із центром круга (див. рис. 2). Позаяк віддаль від точки $2+i$ до центра круга

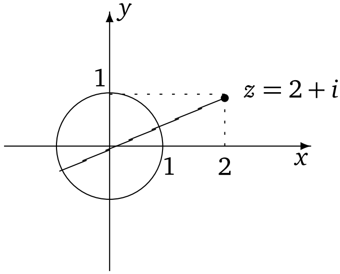

Рис. 2

дорівнює $\sqrt{5}$, а радіус круга дорівнює 1, то $\max|2+i-z| = \sqrt{5}+1$, $\min|2+i-z| = \sqrt{5}-1$. □

Основні задачі

8. Обчисліть вирази:

a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; b) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; c) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$;

d) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; e) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$; f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

9. Обчисліть: a) i^{2015}; b) i^{-2015}; c) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{100}$.

10. Знайдіть дійсні числа x та y, які задовольняють рівняння

$$(2+i)x+(1+2i)y = 1-4i.$$

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

a) $\begin{array}{rcrcl} (1+i)z_1 & + & (1-i)z_2 & = & 1+i, \\ (1-i)z_1 & + & (1+i)z_2 & = & 1+3i; \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcl} (2+i)z_1 & + & (2-i)z_2 & = & 6, \\ (3+2i)z_1 & + & (3-2i)z_2 & = & 8. \end{array}$

12. Доведіть, що сума z_1+z_2 і добуток $z_1 \cdot z_2$ двох комплексних чисел z_1 і z_2 будуть дійсними тоді й лише тоді, коли або обидва числа дійсні, або $z_2 = \overline{z_2}$.

13. Розв'яжіть рівняння:

a) $x^2 = 3-4i$;
b) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;
c) $x^2+(2i-7)x+(13-i)=0$;
d) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

14. Розв'яжіть рівняння:

a) $|z|+z = 8+4i$; b) $|z|+3z = 14-12i$.

15. Знайдіть комплексні числа, які відповідають:

a) вершинам квадрата зі стороною 2, центр якого збігається з початком координат, а сторони паралельні осям;

b) вершинам правильного шестикутника зі стороною 1, центр якого збігається з початком координат, а одна з вершин лежить на дійсній осі.

16. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють умову: a) $|z|=1$; b) $|z|<2$; c) $\operatorname{Re} z \leqslant 1$; d) $|\operatorname{Im} z| = 1$.

17. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють умову: a) $|z-1-i|<1$; b) $|1+z|<|1-z|$.

18. Знайдіть: a) $\min|3+2i-z|$ при $|z| \le 1$; b) $\max|1+4i-z|$ при $|z-10i+2| \le 2$.

19. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють співвідношення $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=0$.

20. Як розташовані на площині точки, які відповідають комплексним числам z_1, z_2, z_3, z_4, якщо

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0 \quad \text{і} \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4| \neq 0\,?$$

21. Доведіть, що вектори z і cz комплексної площини будуть ортогональними тоді й лише тоді, коли c — чисто уявне число.

22. Доведіть, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

23. Знайдіть геометричний образ співвідношення $z\bar{z}-z\bar{z}_0-\bar{z}z_0=c$, де комплексне число z_0 і дійсне число c — фіксовані.

Додаткові задачі

24. З'ясуйте, для яких дійсних чисел a і b рівняння $|z| - z = a + bi$ має розв'язок.

25. Доведіть, що коли для даних натуральних чисел a, b і n число $(\sqrt{a} + \sqrt{b}i)^n$ є дійсним, то дійсним буде й кожне з чисел вигляду $(\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b}i)^n$.

26. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють умову: a) $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1$; b) $|z-1|+|z+1| = 3$; c) $|z-2|-|z+2| = 3$.

27. Доведіть, що коли $|z| < 1/2$, то $|(1+i)z^3 + iz| < 3/4$.

28. Обчислення добутку комплексних чисел $u = a + bi$ та $v = c + di$ за формулою $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$ вимагає чотирьох множень і двох додавань дійсних чисел. Запропонуйте алгоритм обчислення добутку комплексних чисел $u = a + bi$ і $v = c + di$, який вимагає лише трьох множень дійсних чисел (кількість додавань може зрости).

Домашнє завдання

29. Обисліть вирази:
a) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; b) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; c) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

30. Розв'яжіть рівняння:
a) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$;
b) $(2-i)x^2 + (i-5)x + (2+2i) = 0$.

31. Розв'яжіть систему рівнянь:
a) $\begin{array}{rcl} iz_1 + (1+i)z_2 & = & 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 & = & 5+3i. \end{array}$ b) $\begin{array}{rcl} (1-i)z_1 - 3z_2 & = & -i, \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 & = & 3-i. \end{array}$

32. Розв'яжіть рівняння $|z| - z = 8 + 12i$.

33. Знайдіть комплексні числа, які відповідають вершинам правильного шестикутника з центром у точці $2 + i\sqrt{3}$, стороною, паралельною осі абсцис і радіусом описаного кола, який дорівнює 2.

34. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які задовольняють умову: a) $|z+3+4i| \le 5$; b) $1 \le |z-2i| < 2$, c) $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$.

35. Доведіть тотожність $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ і вкажіть її геометричний зміст.

Література. [4, глава II, §1–2; 5, розділ VI, §1; 13, глава I, § 1].

Заняття 2. Тригонометрична форма запису комплексних чисел

Необхідні поняття. Модулем $|z|$ комплексного числа $z = a + bi$ називається довжина вектора, яким зображується це число. Очевидно, що $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Кут між цим вектором і додатним напрямком осі Ox називається *аргументом* числа z і позначається $\arg z$. Аргумент комплексного числа визначений із точністю до доданка, який є цілим кратним повного кута 2π. Аргумент числа 0 не визначений (див. рис. 3).

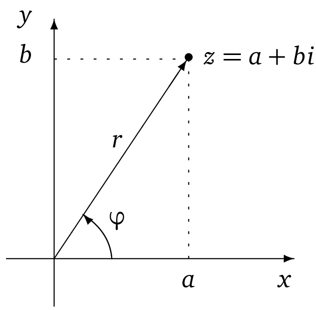

Рис. 3

Якщо модуль і аргумент числа $z = a + bi$ дорівнюють відповідно r і φ, то з рис. 3 одразу видно, що $a = r\cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Тому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{5}$$

Запис комплексного числа у вигляді (5) називається *тригонометричною формою* запису.

Комплексне число u називається *коренем n-го степеня* з комплексного числа z, якщо $u^n = z$.

Необхідні твердження. **1.** Для переходу від алгебричної форми запису комплексного числа $z = a + bi$ до тригонометричної використовують співвідношення

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

2. Для комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі, виконуються такі рівності:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big);$$
$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^{-1} = r^{-1}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big);$$
$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

3. *Формула Муавра*: для кожного цілого числа n виконується рівність $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

4. Кожне ненульове комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ має рівно n різних коренів n-го степеня. Ці корені мають вигляд

$$\sqrt{r}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (6)$$

5. Корені n-го степеня з комплексного числа z розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом $\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Запишіть у тригонометричній формі число:*
a) $-1 + i\sqrt{3}$; b) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, де $-\pi < \varphi < \pi$.

Розв'язання. a) Знайдемо модуль та аргумент числа $z = -1 + i\sqrt{3}$. Для цього обчислимо:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси знаходимо $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Отже, $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

b) Використовуючи відомі тригонометричні тотожності, маємо:

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi =$$
$$= \Big(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big) + \Big(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big) + i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$
$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\Big).$$

Оскільки $-\pi < \varphi < \pi$, то $\cos\dfrac{\varphi}{2} > 0$. Тому отриманий результат і є тригонометричною формою числа $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$. □

Задача 2. *Обчисліть* $(1+i\sqrt{3})^{120}$.

Розв'язання. Для обчислення степенів дуже зручною є формула Муавра, та щоб нею скористатись, треба спочатку записати число $1+$ $+i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі. Для цього обчислимо його модуль та аргумент: $r=\sqrt{1+3}=2$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Отже, $1+i\sqrt{3}=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$. Далі за формулою Муавра отримуємо:

$$(1+i\sqrt{3})^{120}=\left(2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right)^{120}=2^{120}(\cos 120\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 120\frac{\pi}{3})=$$
$$=2^{120}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{120}.$$ □

Задача 3. *Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які належать множині*:

a) $\{z \mid z=(2+i)\cdot u$, де u є точкою квадрата з вершинами $\pm 1\pm i\}$;
b) $\{z \mid z=u^2$ та $|u|\le 3\}$.

Розв'язання. a) Перетворення комплексної площини $z\mapsto v\cdot z$, де число $v=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — фіксоване, можна розкласти в композицію двох перетворень: спочатку кожне комплексне число z переходить у $r\cdot z$ (тобто модуль кожного числа збільшується в r разів; геометрично це гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом r), а потім кожне комплексне число множиться на $\cos\varphi+i\sin\varphi$ (геометрично це поворот навколо початку координат на кут φ). Наша множина є образом квадрата з вершинами $\{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$ при перетворенні $u\mapsto(2+i)\cdot u$. Зрозуміло, що і при гомотетії, і при повороті квадрат переходить у квадрат. Тому наша множина — це квадрат із вершинами

$$(2+i)\cdot(1+i)=1+3i,\quad (2+i)\cdot(1-i)=3-i,$$
$$(2+i)\cdot(-1+i)=-3+i,\quad (2+i)\cdot(-1-i)=-1-3i.$$

b) Нехай $u=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тоді за умовою $r\le 3$, а φ — довільне. При перетворенні $u\mapsto u^2$ точка u переходить у точку $u^2=$ $=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$, яка належить кругові радіусом 9 з центром у початку координат. З іншого боку, при такому перетворенні кожна точка $q(\cos\psi+i\sin\psi)$ такого круга має прообраз — точку $v=$ $=\sqrt{q}(\cos\psi/2+i\sin\psi/2)$, яка задовольняє умову $|v|\le 3$. Отже, наша множина — це круг радіусом 9 з центром у початку координат. □

Задача 4. *Запишіть у вигляді многочлена від* $\sin x$ *і* $\cos x$ *функцію:*
a) $\cos 4x$; b) $\sin 4x$.

Розв'язання. Обчислимо четвертий степінь числа $z = \cos x + i \sin x$ двома способами: за допомогою формули бінома Ньютона та за допомогою формули Муавра. Першим способом отримуємо

$$
\begin{gathered}
(\cos x + i \sin x)^4 = \\
= \cos^4 x + 4\cos^3 x \cdot i \sin x + 6\cos^2 x \cdot i^2 \sin^2 x + 4\cos x \cdot i^3 \sin^3 x + i^4 \sin^4 x = \\
= (\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x),
\end{gathered}
$$

а другим —

$$(\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x.$$

Прирівнюючи окремо дійсні, а окремо — уявні частини в правих частинах отриманих виразів, одержимо:

$$
\begin{gathered}
\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x, \\
\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x.
\end{gathered}
$$

□

Задача 5. *Запишіть у вигляді лінійної комбінації синусів і косинусів кратних кутів функцію*: a) $\cos^4 x$; b) $\sin^4 x$.

Розв'язання. Розглянемо число $z = \cos x + i \sin x$. Тоді

$$z^{-1} \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Отже, $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$ і $z - z^{-1} = 2i \sin\varphi$, звідки $\cos\varphi = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ і $\sin\varphi = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$. Тому можемо записати:

$$
\begin{gathered}
\cos^4 x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(z^4 + 4z^3 z^{-1} + 6z^2 z^{-2} + 4zz^{-3} + z^{-4}\right) = \\
= \frac{1}{16}\left(z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4}\right).
\end{gathered}
$$

За формулою Муавра $z^k = \cos kx + i \sin kx$. Тому

$$
\begin{gathered}
z^4 + 4z^2 + 6 + 4z^{-2} + z^{-4} = \cos 4x + i \sin 4x + 4(\cos 2x + i \sin 2x) + \\
+ 6 + 4(\cos(-2x) + i \sin(-2x)) + \cos(-4x) + i \sin(-4x) = \\
= 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6.
\end{gathered}
$$

Отже,

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6) = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}.$$

Аналогічно

$$\sin^4 x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16i^4}\left(z^4 - 4z^3z^{-1} + 6z^2z^{-2} - 4zz^{-3} + z^{-4}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left((z^4 + z^{-4}) - 4(z^2 + z^{-2}) + 6\right) = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}. \qquad \square$$

Задача 6. *Доведіть, що для довільного натурального числа n з рівності $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$ випливає рівність $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$.*

Розв'язання. Якщо $z+z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^2 - 2\cos\varphi\, z + 1 = 0$. Розв'язками цього квадратного рівняння є два взаємно обернені числа $\cos\varphi + i\sin\varphi$ і $\cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$. Отже,

$$\{z, z^{-1}\} = \{\cos\varphi + i\sin\varphi,\ \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\}.$$

Однак тоді з формули Муавра випливає, що

$$\{z^n, z^{-n}\} = \{\cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\}.$$

Тому

$$z^n + z^{-n} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + (\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = 2\cos n\varphi. \quad \square$$

Задача 7. *Знайдіть корені шостого степеня з числа* $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Щоб скористатися формулою (6) для коренів з комплексного числа, запишемо $\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ у тригонометричній формі:

$$\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}{2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Тоді за формулою (6) усі корені шостого степеня з цього числа мають вигляд

$$\sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{12} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{12} + 2\pi k}{6}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{7\pi + 24\pi k}{72} + i\sin\frac{7\pi + 24\pi k}{72}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Наприклад, для $k = 2$ матимемо $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{55}{72} + i\sin\dfrac{55}{72}\right)$. $\square$

Задача 8. *Розв'яжіть рівняння* $\overline{z} = z^n$, $n > 1$.

Розв'язання. Очевидно, що одним із розв'язків цього рівняння є $z = 0$. Нехай тепер $z \neq 0$. Оскільки $|\overline{z}| = |z|$ і $|z^n| = |z|^n$, то для модуля числа z виконується рівність $|z| = |z|^n$. Однак тоді $1 = |z|^{n-1}$, $|z| = 1$ і $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$. Тому початкове рівняння можна переписати у вигляді $z^{-1} = z^n$ або в рівносильному вигляді $z^{n+1} = 1$. Розв'язками останнього рівняння є $n+1$ коренів степеня $n+1$ з 1:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Таким чином, рівняння $\overline{z} = z^n$ має $n+2$ розв'язків, а саме: $n+1$ розв'язків вигляду (7) і 0. □

Задача 9. *Розв'яжіть рівняння* $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що $z = 1$ не є коренем рівняння, тому $z-1 \neq 0$ і обидві частини рівняння можна розділити на $(z-1)^n$. Після цього рівняння набуває вигляду $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$. Отже, $\dfrac{z+1}{z-1}$ має бути одним із коренів степеня n з 1. Нехай ε — один із таких коренів. Рівняння $\dfrac{z+1}{z-1} = \varepsilon$ рівносильне рівнянню

$$(\varepsilon - 1)z = \varepsilon + 1, \tag{8}$$

з якого видно, що $\varepsilon \neq 1$. Тому ε — це одне з чисел

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Із рівняння (8) тепер знаходимо $n-1$ розв'язків початкового рівняння:

$$z_k = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Виразу для z_k можна надати кращого вигляду. Справді,

$$\frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1} = \frac{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} + 1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} - 1} =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} + 1)\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1 - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}} =$$

$$= \frac{-2i\sin\frac{2k\pi}{n}}{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)} = -i\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n}. \qquad \square$$

Задача 10. *Зобразіть на площині множину точок, які відповідають комплексним числам* $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, *де* t *— дійсне число.*

Розв'язання. Покладемо $t = \operatorname{tg}\varphi$, де $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, і перетворимо вираз:

$$\frac{1+ti}{1-ti} = \frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi} = \frac{(1+i\operatorname{tg}\varphi)^2}{(1-i\operatorname{tg}\varphi)(1+i\operatorname{tg}\varphi)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi+2i\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} + i\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Якщо $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, то $2\varphi \in (-\pi, \pi)$. Тому комплексні числа, які задовольняють умову $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, де $t \in \mathbb{R}$, — це всі комплексні числа, модуль яких дорівнює 1, за винятком числа $z = -1$. Отже, шуканою множиною є коло радіусом 1 із центром у початку координат, за винятком точки $z = -1$. $\square$

Основні задачі

11. Запишіть у тригонометричній формі число:
a) i; b) $1+i$; c) $1-i$; d) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; e) $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

12. Запишіть у тригонометричній формі число: a) $2+\sqrt{3}+i$; b) z^2+z, де $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

13. Обчисліть:
a) $(1+i)^{100}$; b) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$; c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$; d) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

14. Обчисліть $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

15. Запишіть у вигляді многочлена від $\sin x$ і $\cos x$ функцію:
a) $\sin 5x$; b) $\cos 5x$.

16. Виразіть $\operatorname{ctg} 5x$ через $\operatorname{tg} x$.

17. Доведіть рівності:

a) $\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x;$

b) $\sin nx = \sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x.$

18. Запишіть у вигляді лінійної комбінації синусів і косинусів кратних кутів функцію: a) $\sin^5 x$; b) $\cos^5 x$.

19. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які належать множині:

a) $\{z \mid z = (1+i)\cdot u$ та $\operatorname{Re} u < 1\}$;
b) $\{z \mid z = 2 + (1+i)\cdot u$ та $|u| \le 1\}$;
c) $\{z \mid z = (2-i)\cdot u$ та u є точкою квадрата з вершинами $1, i, -1, -i\}$;
d) $\{z \mid z = \frac{2+3i}{u}$ та $|u| \ge 1\}$.

20. Обчисліть (відповідь запишіть у тригонометричній та алгебричній формах):

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[4]{-4}$; c) $\sqrt[6]{-8}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{2+i}{54i-27}}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{8i-24}{1+3i}}$.

21. Обчисліть (відповідь запишіть у тригонометричній формі):

a) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{27-54i}{2+i}}$; c) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

22. Для яких n і $z \ne 0$ множина $\sqrt[n]{z}$ містить хоча б одне дійсне число?

23. Доведіть, що коли $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\bar{z}} = \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n\}$.

24. Які з наведених рівностей є правильними:

a) $\sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}$; b) $\sqrt[n]{-z^n w} = -z\sqrt[n]{w}$; c) $\sqrt[nk]{z^k} = \sqrt[n]{z}$?

25. Розв'яжіть рівняння a) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$; b) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

Додаткові задачі

26. Доведіть, що коли $|z| \le 2$, то $1 \le |z^2 - 5| \le 9$.

27. Обчисліть $(2+\sqrt{3}+i)^{12}$.

28. Знайдіть усі комплексні числа z, $|z| = 1$, для яких значення виразу $z^2 + (1+i)z$ є чисто уявним числом.

29. Доведіть рівності:

a) $\sin^{2n} x = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dbinom{2n}{k}\cos(2n-2k)x + \dfrac{(-1)^n}{2}\dbinom{2n}{n}\right);$

b) $\sin^{2n+1} x = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{2n+1}{k}\sin(2n+1-2k)x;$

c) $\cos^{2n} x = \dfrac{1}{2^{2n-1}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dbinom{2n}{k}\cos(2n-2k)x + \dfrac{1}{2}\dbinom{2n}{n}\right);$

d) $\cos^{2n+1} x = \dfrac{1}{2^{2n}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{2n+1}{k}\cos(2n+1-2k)x\right).$

30. Обчисліть вираз $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$, де $n\in\mathbb{Z}$.

31. Доведіть нерівність

$$|z_1-z_2| \leqslant ||z_1|-|z_2|| + \min\big(|z_1|,|z_2|\big)\cdot|\arg z_1-\arg z_2|$$

і з'ясуйте, за яких умов вона стає рівністю.

32. Доведіть, що рівність $|z_2-z_1|^2 = |z_2-z_0|^2+|z_1-z_0|^2$ виконується тоді й лише тоді, коли для деякого дійсного числа γ виконується рівність $z_2-z_0=\gamma(z_1-z_0)i$.

33. Доведіть, що коли $|a|=1$, то всі корені рівняння $(1+ix)^n = a(1-ix)^n$ є дійсними й різними.

34. Знайдіть загальний член послідовності $(a_n)_{n\geq 0}$, якщо $a_0=a_1=1$ і $a_{n+1}=2a_n-2a_{n-1}$ для $n\geq 1$.

Домашнє завдання

35. Запишіть у тригонометричній формі число:

a) -2; b) $1+i\sqrt{3}$; c) $1-i\sqrt{3}$; d) $\sqrt{3}+i$.

36. Обчисліть вирази:

a) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; c) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$.

37. Запишіть у вигляді многочлена від $\sin x$ і $\cos x$ функцію:

a) $\sin 6x$; b) $\cos 6x$.

38. Зобразіть на площині множину всіх тих точок z, які належать множині:

a) $\{z \mid z = (1+i)\cdot u$ та $\operatorname{Im} u \leq 1\}$;
b) $\{z \mid z = u^3$ та $|u| \leq 2\}$;
c) $\{z \mid z = 2+(1-i)\cdot u$, u є точкою квадрата з вершинами $1, i, -1, -i\}$;
d) $\{z \mid z = \frac{3-4i}{u}$ та $|u| \geq 1\}$.

39. Обчисліть (відповідь запишіть у алгебричній формі):

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[4]{-9}$; c) $\sqrt[6]{-27}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{i-3}{8+24i}}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{27-54i}{2+i}}$.

40. Обчисліть (відповідь запишіть у тригонометричній формі):

a) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; c) $\sqrt[12]{\dfrac{1-2i}{54+27i}}$.

41. Розв'яжіть рівняння $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$.

Література. [4, глава II, §1–2; 5, розділ VI, §2; 13 глава I, §2].

Заняття 3. Корені з одиниці. Застосування комплексних чисел

Необхідні поняття. Корені степеня n з одиниці мають вигляд

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Множина всіх коренів степеня n з 1 позначається через $\mathbb{C}_n$. Ці корені розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом 1 з центром у початку координат, причому одна з вершин (яка відповідає кореню $\varepsilon_0 = 1$) лежить у точці $(1, 0)$.

Число ε називається *первісним* коренем n-го степеня з 1, якщо множина $\mathbb{C}_n$ усіх коренів n-го степеня з 1 збігається з множиною степенів $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ цього кореня.

Нехай ε є коренем якогось степеня з 1. Натуральне число n називається *порядком* кореня ε, якщо n є найменшим натуральним числом, для якого $\varepsilon^n = 1$.

Для натурального числа n функція Ойлера $\varphi(n)$ визначається як кількість менших на n натуральних чисел, які взаємно прості з числом n.

Необхідні твердження. **1.** $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

2. Якщо числа u та v належать $\mathbb{C}_n$, то кожне з чисел uv, u^{-1}, $\dfrac{u}{v}$ також належить $\mathbb{C}_n$.

3. Число ε є первісним коренем n-го степеня з 1 тоді й лише тоді, коли його порядок дорівнює n.

4. Число ε_k є первісним коренем n-го степеня з 1 тоді й лише тоді, коли k і n взаємно прості.

5. Кількість первісних коренів n-го степеня з 1 дорівнює $\varphi(n)$.

6. Якщо $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ — канонічний розклад числа n, то

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)\cdots(p_m - 1)p_1^{k_1-1}\cdots p_m^{k_m-1} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Запишіть у алгебричній формі корені степеня 6 з одиниці. Які з цих коренів будуть первісними?*

Розв'язання. Використовуючи формулу 10, виписуємо 6 коренів степеня 6 з одиниці:

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{0\cdot\pi}{6} + i\sin\frac{0\cdot\pi}{6} = 1\,,\ \ \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \ \varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1\,,$$
$$\varepsilon_4 = \cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \ \varepsilon_5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Корінь ε_k буде первісним тоді й лише тоді, коли k є взаємно простим із 6. Отже, первісними коренями будуть лише $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Задача 2. *Знайдіть кількість первісних коренів з 1 степеня 36.*

Розв'язання. Канонічний розклад числа 36 має вигляд $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Тому кількість первісних коренів з 1 степеня 36

$$\varphi(36) = \varphi(2^2\cdot 3^2) = (2-1)(3-1)2^{2-1}3^{2-1} = 12.$$ □

Задача 3. *Знайдіть суму всіх коренів степеня n з одиниці.*

Розв'язання. Якщо $n = 1$, то маємо лише один корінь 1, а тому в цьому випадку сума всіх коренів дорівнює 1. Нехай тепер $n > 1$. Далі можна міркувати по-різному.

Геометричний спосіб. Нехай

$$s = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} \tag{11}$$

— сума всіх коренів степеня n з одиниці. Ці корені можна розглядати як вектори, що з'єднують початок координат із вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом 1 із центром у початку координат. Якщо тепер n-кутник повернути на кут $2\pi/n$, то кожен із цих векторів повернеться на кут $2\pi/n$, а тому й сума s теж повернеться на цей кут. З іншого боку, при повороті на кут $2\pi/n$ вершини правильного n-кутника переставляються по циклу, а тому й доданки в правій частині (11) лише переставляться по циклу, тобто сума s не зміниться. Однак єдиний вектор, який не змінюється при повороті на кут $2\pi/n$, — це нульовий. Отже, $s = 0$.

Аналітичний спосіб. Ураховуючи рівність $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, суму (11) можна обчислити як суму геометричної прогресії:

$$s = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1} = \frac{1-\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1} = \frac{1-1}{1-\varepsilon_1} = 0. \qquad \square$$

Задача 4. *Знайдіть суму всіх первісних коренів з 1 степеня 12.*

Розв'язання. Зробимо спочатку два зауваження. По-перше, якщо $\varepsilon^k = 1$ і $k \mid n$, то $\varepsilon^n = 1$. По-друге, якщо ε є коренем з одиниці степеня n і має порядок k, то $k \mid n$. Справді, розділимо n на k з остачею: $n = qk+r$. Тоді $1 = \varepsilon^n = \varepsilon^{qk+r} = (\varepsilon^k)^q \cdot \varepsilon^r = \varepsilon^r$. Оскільки $r < k$, то $r = 0$.

Дільниками числа 12 є 12, 6, 4, 3, 2 і 1. Позначимо суму всіх коренів з 1 степеня d через $\sum_d$ (згідно із зад. 3 $\sum_d$ дорівнює 1 при $d = 1$ і 0 при $d > 1$). Щоб знайти суму всіх первісних коренів з 1 степеня 12, потрібно від $\sum_{12}$ відняти суму тих коренів, які не є первісними степеня 12. Насамперед відкинемо ті корені, які дають одиницю вже в степені 6 або 4, і розглянемо вираз $\sum_{12} - \sum_6 - \sum_4$. Оскільки корені степеня 3 одночасно є й коренями степеня 6, то їх ми теж виключили. З коренями степеня 2 ситуація трохи складніша: ми їх спочатку включили в $\sum_{12}$, а потім виключили двічі: і в $\sum_6$, і в $\sum_4$. Позаяк ці корені мають зустрічатися в нашій сумі з кратністю 0, то їх треба долучити.

Таким чином, сума всіх первісних коренів з 1 степеня 12 становить $\sum_{12} - \sum_6 - \sum_4 + \sum_2 = 0 - 0 - 0 + 0 = 0$. $\square$

Задача 5. *Обчисліть суму:*

a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$;

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

Розв'язання. Позначимо першу суму через A, а другу — через B. Обидві суми зручно обчислювати одночасно. Для цього розглянемо число $z = \cos x + i \sin x$. За формулою Муавра $z^k = \cos kx + i \sin kx$. Тому

$$\begin{aligned} A + iB &= (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = \\ &= z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1}. \end{aligned}$$

Отже, A дорівнює дійсній частині виразу $\dfrac{z^{n+1} - z}{z - 1}$, а B — уявній. Після очевидних перетворень отримуємо:

$$A+iB=\frac{z^{n+1}-z}{z-1}=$$
$$=\frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-\cos x-i\sin x}{\cos x+i\sin x-1}=$$
$$=\frac{(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-\cos x-i\sin x)(\cos x-1-i\sin x)}{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\cos(n+1)x\cos x+\sin(n+1)x\sin x-\cos(n+1)x+\cos x-1}{2(1-\cos^2 x)}+$$
$$+i\cdot\frac{\sin(n+1)x\cos x-\cos(n+1)x\sin x-\sin(n+1)x+\sin x}{2(1-\cos^2 x)}=$$
$$=\frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}+i\cdot\frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Таким чином, $A=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $B=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. $\square$

Задача 6. *Обчисліть суми*:

$$\text{a)}\ \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots;\quad \text{b)}\ \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots.$$

Розв'язання. Знову обидві суми зручно обчислювати одночасно. Для цього розглянемо комплексне число $z=1+i$ та обчислимо його n-й степінь двома способами: за формулою Муавра та за формулою бінома Ньютона. Легко переконатися, що тригонометричною формою числа $z=1+i$ є $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, тому за формулою Муавра

$$z^n=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

З іншого боку, за формулою бінома Ньютона

$$z^n=(1+i)^n=$$
$$=\binom{n}{0}+i\binom{n}{1}+i^2\binom{n}{2}+i^3\binom{n}{3}+i^4\binom{n}{4}+i^5\binom{n}{5}+i^6\binom{n}{6}+i^7\binom{n}{7}+\cdots=$$
$$=\binom{n}{0}+i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}-i\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+i\binom{n}{5}-\binom{n}{6}-i\binom{n}{7}+\cdots$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини обох виразів для z^n, отримуємо:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\dots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4};$$
$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\dots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}. \qquad \square$$

Основні задачі

7. Запишіть у алгебричній формі корені степеня: a) 3; b) 4; c) 8 з одиниці. Які з цих коренів будуть первісними?

8. Знайдіть кількість первісних коренів з 1 степеня: a) 24; b) 30; c) 72.

9. Доведіть, що коли ε є первісним коренем степеня n з 1, то $\overline{\varepsilon}$ також є первісним коренем степеня n з 1.

10. Доведіть, що коли $n > 2$, то кількість первісних коренів з 1 степеня n є парною.

11. Знайдіть суму k–х степенів усіх коренів степеня n з 1.

12. Знайдіть добуток: a) усіх коренів n-го степеня з 1; b) усіх первісних коренів n-го степеня з 1.

13. Знайдіть суму всіх первісних коренів з 1 степеня: a) 15; b) 16; c) 18; d) 30.

14. Нехай ε — первісний корінь степеня $n > 1$ з 1. Обчисліть суму $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1}$.

15. Обчисліть суму:

a) $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\dots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$;

c) $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{5\pi}{n}+\cos\frac{7\pi}{n}+\dots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}$;

d) $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}+\sin\frac{7\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$.

16. Обчисліть суму:

a) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\dots+n\cos nx$;

b) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\dots+n\sin nx$.

17. Обчисліть суму:

a) $\binom{n}{0}\cos x + \binom{n}{1}\cos 2x + \cdots + \binom{n}{n}\cos(n+1)x$;

b) $\binom{n}{0}\sin x + \binom{n}{1}\sin 2x + \cdots + \binom{n}{n}\sin(n+1)x$.

18. Обчисліть суму:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \cdots$;

b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \cdots$.

19. З'ясуйте, для яких комплексних чисел a відображення $z \mapsto z + az^2$ відображає круг $|z| \leq 1$ взаємно однозначно на себе.

20. Нехай z_1, z_2, z_3 — попарно різні комплексні числа. Який геометричний зміст має аргумент числа $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$?

21. Доведіть, що три різні точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій тоді й лише тоді, коли число $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ є дійсним.

Додаткові задачі

22.* Доведіть, що число $\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$ не є коренем з 1 жодного степеня.

23.* Нехай ε — первісний корінь степеня $n > 1$ з 1. Обчисліть модуль $|S|$ суми $S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \cdots + \varepsilon^{(n-1)^2}$.

24.* Розв'яжіть рівняння

$$\binom{n}{0}\cos(\varphi) + \binom{n}{1}\cos(\varphi + \alpha)x + \cdots + \binom{n}{n}\cos(\varphi + n\alpha)x^n = 0\,.$$

25. Обчисліть суму:

a) $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$;

b) $1 + a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \cdots + a^n\cos nx$.

26.** Доведіть, що для кожного непарного натурального числа n виконується рівність

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = (-4)^{(n-1)/2} \prod_{1 \leq i \leq (n-1)/2} \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi i}{n}\right).$$

27.* Доведіть, що:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

28. Доведіть, що три точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій тоді й лише тоді, коли існують такі три дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (не рівні одночасно 0), що $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ і $\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0$.

29. Доведіть, що коли $u=\sqrt{z_1 z_2}$, то $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}-u\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}+u\right|$.

30. Нехай комплексні числа z_1, z_2 і дійсне число $a>0$ — фіксовані. Зобразіть на комплексній площині множину всіх тих точок z, для яких $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a$.

31.* Знайдіть многочлен із цілими коефіцієнтами найменшого можливого степеня, коренем якого є довжина сторони правильного 14-кутника, вписаного в коло радіусом 1.

Домашнє завдання

32. Знайдіть кількість первісних коренів з 1 степеня: a) 48; b) 60.

33. Нехай ε — первісний корінь степеня $2n$ з 1. Обчисліть суму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^{n-1}$.

34. Знайдіть суму всіх первісних коренів з 1 степеня: a) 15; b) 24.

35. Нехай $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — усі відмінні від 1 корені n-го степеня з 1. Доведіть, що

$$\frac{1}{1-\varepsilon_1}+\frac{1}{1-\varepsilon_2}+\dots+\frac{1}{1-\varepsilon_{n-1}}=\frac{n-1}{2}.$$

36. Нехай ε — первісний корінь степеня n з 1. Доведіть, що $(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon^2)^n+\dots+(x+\varepsilon^n)^n=n(x^n+1)$.

37. Доведіть, що:

a) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\dots+\cos^2 nx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)x\ \sin nx}{2\sin x}$;

b) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\dots+\sin^2 nx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\ \sin nx}{2\sin x}$.

38. Обчисліть суму $\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \cdots + \sin^2(2n-1)x$.

39. Обчисліть суму $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \cdots$.

Література. [4, глава II, §1–2; 5, розділ VI, §3; 13, глава I, §§3–4].

Заняття 4. Системи лінійних рівнянь та метод Гаусса

Необхідні поняття. У загальному випадку *система лінійних рівнянь* (коротко СЛР) має вигляд

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,, \end{array} \tag{12}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — це невідомі, а символи a_{ij} позначають коефіцієнти при невідомих. За допомогою символу Σ систему (12) можна записати компактніше:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Коефіцієнт b_i системи (12) називається *вільним членом* (i–го рівняння). Якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю, то така СЛР називається *однорідною* (коротко ОСЛР). У протилежному випадку СЛР називається *неоднорідною*.

Нехай усі коефіцієнти та вільні члени СЛР (12) є елементами деякого поля P. *Розв'язком* цієї системи у полі P називається такий набір $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ із n елементів a_1, a_2, $\ldots$, a_n поля P, що після підстановки в систему (12) цих елементів відповідно замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отримаємо правильні рівності.

Якщо СЛР (12) має хоча б один розв'язок, то вона називається *сумісною*. У протилежному випадку СЛР називається *несумісною*. Сумісна СЛР, яка має рівно один розв'язок, називається *визначеною*. Якщо ж сумісна СЛР має більше одного розв'язку, то вона називається *невизначеною*.

Дві СЛР із тими самими невідомими називаються *рівносильними*, якщо вони мають однакові множини розв'язків. Якщо в одній із систем можна перейменувати невідомі так, щоб отримати рівносильні системи, то такі СЛР називатимемо *квазірівносильними*.

Елементарними перетвореннями СЛР (12) називаються такі її перетворення:

1) перестановка двох рівнянь системи;

2) множення одного з рівнянь системи на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до одного з рівнянь системи іншого її рівняння, помноженого на деяке число λ.

Таблиця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

називається *матрицею коефіцієнтів* (коротко *матрицею*) або *основною матрицею* СЛР (12), а таблиця

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

— *розширеною матрицею* СЛР (12).

Елементарними перетвореннями рядків (стовпців) матриці (13) називаються такі її перетворення:

1) перестановка двох рядків (стовпців) матриці;

2) множення одного з рядків (стовпців) матриці на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до одного з рядків (стовпців) матриці іншого її рядка (стовпця), помноженого на деяке число λ.

Якщо матриця B отримана з матриці A за допомогою скінченного ланцюга елементарних перетворень, то такі матриці називатимемо *еквівалентними* і записуватимемо як $A \sim B$.

Необхідні твердження. **1.** Однорідна СЛР завжди є сумісною, оскільки має *тривіальний* або *нульовий* розв'язок $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

2. Над нескінченним полем кожна невизначена СЛР має безліч розв'язків.

3. Якщо від однієї СЛР до іншої можна перейти за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень, то такі дві СЛР є рівносильними.

4. *Алгоритм Гаусса*. Елементарними перетвореннями рядків та перестановками стовпців довільну ненульову матрицю A розміром $m \times n$ можна звести до спеціального трапецієподібного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,r+1} & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f_{2,r+1} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{r,r+1} & \dots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $0 < r \leq \min(m, n)$.

5. *Теорема Гаусса.* Кожна СРЛ квазірівносильна спеціальній трапецієподібній СЛР вигляду

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & & & f_{1,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{1n}x_n & = & h_1, f \\ & & x_2 & + & f_{2,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{2n}x_n & = & h_2, \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ & & & x_r & + \ f_{r,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{rn}x_n & = & h_r, \\ & & & & & & & & 0 & = & h_{r+1}. \end{array}$$

СЛР буде сумісною тоді й лише тоді, коли $h_{r+1} = 0$. Сумісна СЛР буде визначеною, якщо $r = n$, і невизначеною, якщо $r < n$.

6. *Теорема про невизначеність однорідних СЛР.* Якщо в однорідній СЛР кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, то ця СЛР є невизначеною.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Дослідіть на сумісність і знайдіть загальний розв'язок системи рівнянь:*

a) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & + & 14x_2 & + & 20x_3 & + & 27x_4 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 16x_3 & + & 19x_4 & = & -2, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 13x_4 & = & 5; \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & ix_2 & - & 2x_3 & = & 10, \\ x_1 & - & x_2 & + & 2ix_3 & = & 20, \\ ix_1 & + & 3ix_2 & - & (1+i)x_3 & = & 30; \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1, \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12; \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5. \end{array}$

Розв'язання. Розв'язуємо системи методом Гаусса. Для цього спочатку записуємо розширену матрицю нашої СЛР і застосовуємо до неї прямий хід методу Гаусса, тобто елементарними перетвореннями рядків та перестановками стовпців (окрім стовпця вільних членів) зводимо її до спеціального трапецієподібного вигляду. Якщо СЛР виявляється сумісною, то для знаходження загального розв'язку системи застосовуємо зворотний хід методу Гаусса.

а) Записуємо розширену матрицю даної СЛР і спочатку робимо в першому стовпці нулі під діагоналлю. Для цього додамо до другого рядка перший, помножений на -7, до третього — перший, помножений на -5, до четвертого — перший, помножений на -3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Далі множимо четвертий рядок на -1, а потім переставляємо другий та четвертий рядки:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Далі до четвертого рядка додаємо третій і отриманий четвертий рядок ділимо на -2 :

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

На цьому прямий хід методу Гаусса завершено. Із вигляду отриманої матриці бачимо, що СЛР є сумісною і визначеною.

Для знаходження розв'язку застосовуємо зворотний хід методу Гаусса. Спочатку робимо нулі над діагоналлю в останньому стовпці основної матриці. Для цього до другого і третього рядків додаємо четвертий, а до першого — четвертий, помножений на -4. Отримуємо:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Продовжуємо робити нулі над діагоналлю — до першого та другого рядків додаємо третій, помножений на -3 :

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Нарешті до першого рядка додаємо другий, помножений на -2 :

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, ми звели початкову СЛР до рівносильної їй системи

$$\begin{aligned} x_1 &= 1\,, \\ x_2 &= -1\,, \\ x_3 &= -1\,, \\ x_4 &= 1\,, \end{aligned}$$

єдиним розв'язком якої є набір $(1, -1, -1, 1)$.

b) Запишемо розширену матрицю даної СЛР і зробимо в першому стовпці нулі під діагоналлю, для чого від другого стовпця віднімемо перший, а від третього — перший, помножений на i :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -2 & 10 \\ 1 & -1 & 2i & 20 \\ i & 3i & -(1+i) & 30 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & i & -2 & 10 \\ 0 & -1-i & 2+2i & 10 \\ 0 & 1+3i & -1+i & 30-10i \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Далі другий рядок розділимо на $-1-i$, потім від третього рядка віднімемо утворений другий, помножений на $1+3i$, і, нарешті, розділимо утворений третій рядок на $1+7i$:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & i & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -5+5i \\ 0 & 0 & 1 & 1-7i \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Прямий хід методу Гаусса завершено. Із вигляду отриманої матриці випливає, що СЛР є сумісною і визначеною. Тому переходимо до зворотного ходу методу Гаусса. Щоб зробити нулі над діагоналлю основної матриці, спочатку до першого і другого рядків додаємо третій, помножений на 2, а потім від першого рядка віднімаємо другий, помножений на i :

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & 12-14i \\ 0 & 1 & 0 & -3-9i \\ 0 & 0 & 1 & 1-7i \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3-11i \\ 0 & 1 & 0 & -3-9i \\ 0 & 0 & 1 & 1-7i \end{array}\right).$$

Отже, наша СЛР рівносильна системі

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & 3-11i\,, \\ x_2 & = & -3-9i\,, \\ x_3 & = & 1-7i\,, \end{array}$$

єдиним розв'язком якої є набір $(3-11i, -3-9i, 1-7i)$.

c) Спочатку для зручності в розширеній матриці даної системи переставимо перший і другий рядки, а потім робимо в першому стовпці нулі під діагоналлю, для чого від кожного рядка, починаючи з другого, віднімаємо відповідне кратне першого рядка:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Продовжуємо робити нулі під діагоналлю, для чого від третього і четвертого рядків віднімаємо відповідні кратні другого рядка:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

На цьому прямий хід методу Гаусса завершується. Із вигляду отриманої матриці видно, що наша СЛР є сумісною й невизначеною. Для знаходження загального розв'язку переходимо до зворотного ходу методу Гаусса. У нашому випадку він вимагає лише одного кроку — від першого рядка треба відняти другий, помножений на 3 :

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримана трапецієподібна матриця відповідає СЛР

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 26x_3 & - & 17x_4 & = & 6\,, \\ & x_2 & - \ \ 7x_3 & + & 5x_4 & = & -1\,, \end{array}$$

яку зручно переписати у вигляді

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 6 & - & 26x_3 & + & 17x_4\,, \\ x_2 & = & -1 & + & 7x_3 & - & 5x_4\,. \end{array}$$

Невідомі x_3 та x_4 тут є вільними, а невідомі x_1 та x_2 — головними. Тому загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$(6-26x_3+17x_4,\, -1+7x_3-5x_4,\, x_3,\, x_4),$$

де x_3 та x_4 набувають довільних значень.

d) Записуємо розширену матрицю даної СЛР, а потім робимо в першому стовпці нулі під діагоналлю (віднімаючи від кожного рядка, починаючи з другого, відповідне кратне першого рядка):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Оскільки у другому стовпці також отримали нулі, то далі робимо нулі у третьому стовпці. Для цього до третього рядка додаємо, а від четвертого рядка — другий рядок:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Третьому рядку отриманої матриці відповідає рівняння $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -6$ (тобто $0 = -6$). Тому за теоремою Гаусса дана система лінійних рівнянь є несумісною. $\square$

Задача 2. *Знайдіть многочлен $f(x)$ третього степеня з дійсними коефіцієнтами, для якого* $f(-1)=0, f(1)=4, f(2)=3, f(3)=16$.

Розв'язання. Запишемо наш многочлен із невизначеними коефіцієнтами:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Тоді умови $f(-1)=0$, $f(1)=4$, $f(2)=3$, $f(3)=16$ набувають, відповідно, вигляду

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -a & + & b & - & c & + & d & = & 0, \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 4, \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 3, \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 16. \end{array}$$

Таким чином, ми одержали систему лінійних рівнянь відносно невідомих a, b, c та d. Записуємо її розширену матрицю й робимо в першому стовпці нулі під діагоналлю, додаючи до кожного рядка відповідне кратне першого рядка:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 36 & 24 & 28 & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Спочатку розділимо кожен із отриманих рядків відповідно на -1, 2, 3 і 4, а потім зробимо нулі в другому стовпці, віднімаючи від третього й четвертого рядків відповідні кратні другого рядка:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & 7 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Розділимо третій рядок на -1, потім до четвертого додамо третій, помножений на 8, і розділимо отриманий четвертий рядок на 6:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 42 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Прямий хід методу Гаусса завершено. Із вигляду отриманої матриці бачимо, що наша СЛР є визначеною. Починаємо робити нулі над діагоналлю. Для цього спочатку до першого рядка додамо другий, а потім від другого і третього рядків віднімемо четвертий:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Щоб завершити зворотний хід, залишилося третій рядок розділити на 2, а потім від першого рядка відняти третій:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Отже, $a = 2$, $b = -5$, $c = 0$, $d = 7$, а многочлен $f(x)$ має вигляд $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$. □

Задача 3. *Розв'яжіть систему рівнянь*

$$\begin{array}{rcl} x_1 x_2^2 x_3^2 & = & 2, \\ x_1^2 x_2^3 x_3^4 & = & 4, \\ x_1^2 x_2 x_3 & = & 2. \end{array}$$

Розв'язання. Легко бачити, що $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Тому наша система рівносильна системі

$$\begin{array}{rcl} \log_2(x_1 x_2^2 x_3^2) & = & \log_2 2, \\ \log_2(x_1^2 x_2^3 x_3^4) & = & \log_2 4, \\ \log_2(x_1^2 x_2 x_3) & = & \log_2 2. \end{array} \qquad (15)$$

Позначимо $y_1 = \log_2 x_1$, $y_2 = \log_2 x_2$, $y_3 = \log_2 x_3$. Використовуючи властивості логарифмів, від системи (15) можна перейти до системи лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & = & 1, \\ 2y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & = & 2, \\ 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 1 \end{array}$$

відносно невідомих y_1, y_2, y_3. Розв'яжемо її:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким чином, $\log_2 x_1 = 0$, $\log_2 x_2 = 2$, $\log_2 x_3 = -1$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1/2$. □

Задача 4. *Дослідіть СЛР на сумісність залежно від значення параметра λ і знайдіть загальний розв'язок у тих випадках, коли СЛР сумісна*:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\,, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 1\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Розв'язання. У розширеній матриці нашої СЛР додамо до першого рядка два інші:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right).$$

Легко бачити, що коли $\lambda = -2$, то СЛР буде несумісною. Нехай тепер $\lambda \neq -2$. Розділимо перший рядок на $\lambda+2$, а потім віднімемо його від другого і третього рядків:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \end{array}\right).$$

Якщо $\lambda = 1$, то одержуємо СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, СЛР є невизначеною, а її загальний розв'язок має вигляд $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)$.

Нехай тепер $\lambda \neq -2$ та $\lambda \neq 1$. Тоді можна другий і третій рядки розділити на $\lambda-1$ і зробити нулі над діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{3}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right).$$

Отже, у цьому випадку СЛР є визначеною і має єдиний розв'язок $\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)$. □

Задача 5. *Доведіть, що коли дві сумісні СЛР є рівносильними, то відповідні до них однорідні СЛР також є рівносильними.*

Розв'язання. Нехай сумісні СЛР (S_1) та (S_2) — рівносильні. Тоді кожну з них елементарними перетвореннями можна звести до того самого трапецієподібного вигляду

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & f_{1,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{1n}x_n & = & h_1, \\ & x_2 & + & f_{2,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{2n}x_n & = & h_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & x_r & + f_{r,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{rn}x_n & = & h_r. \end{array}$$

Якщо тепер ті самі елементарні перетворення застосувати до відповідних однорідних СЛР (S_1^*) та (S_2^*), то кожна з них зведеться до того самого трапецієподібного вигляду

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & f_{1,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{1n}x_n & = & 0, \\ & x_2 & + & f_{2,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{2n}x_n & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & x_r & + f_{r,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & f_{rn}x_n & = & 0. \end{array}$$

Отже, відповідні однорідні СЛР також будуть еквівалентними. □

Основні задачі

6. Дослідіть на сумісність і знайдіть загальний розв'язок системи лінійних рівнянь:

a) $\begin{array}{l} 3x_1-2x_2-5x_3+\ \ x_4=3\,, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3+5x_4=-3\,, \\ \ \ x_1+2x_2 \qquad\quad -\ \ x_4=3\,, \\ \ \ x_1-\ \ x_2-4x_3+9x_4=22\,; \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x_1+\ \ x_2-6x_3-4x_4=6\,, \\ 3x_1-\ \ x_2-6x_3-4x_4=2\,, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6\,, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7\,; \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=1\,, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2\,, \\ 5x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+2x_4=-1\,, \\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3-3x_4=4\,; \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\,, \\ \qquad\ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=-3\,, \\ x_1+3x_2 \qquad\quad -3x_4=1\,, \\ \quad -7x_2+3x_3+\ \ x_4=-3\,; \end{array}$

e) $\begin{array}{l} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1\,, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+\ \ x_4+2x_5=3\,, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 \qquad\ =-7\,, \\ 9x_1+6x_2+\ \ x_3+3x_4+2x_5=2\,. \end{array}$

7. Дослідіть на сумісність і знайдіть загальний розв'язок системи лінійних рівнянь:

a) $$\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8\,,\\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3\,,\\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1\,,\\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1\,,\\ - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3\,; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1\,,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4\,,\\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3\,,\\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2\,,\\ x_4 + x_5 &= -1\,; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\,,\\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2,\\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1\,,\\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2\,; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1\,,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1\,,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1\,,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1\,,\\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

8. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 &= 5\,,\\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 &= 8\,,\\ 500x_1 + 0{,}0007x_2 - 0{,}08x_3 + 8x_4 &= 1{,}3\,,\\ 60000x_1 + 0{,}09x_2 - 9x_3 + 1300x_4 &= 190\,. \end{aligned}$$

9. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь:

a) $$\begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 0\,,\\ x_1 & & & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1\,,\\ \multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_{n-1} & & & = & n-1\,. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_{2n} & = & a_1\,,\\ -x_1 & & & + & x_3 & + & \cdots & + & x_{2n} & = & a_2\,,\\ \multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ -x_1 & - & x_2 & - & \cdots & - & x_{2n-1} & & & = & a_{2n}\,. \end{array}$$

10. Чи можуть формули

$$\begin{aligned} x_1 &= x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8\,,\\ x_2 &= 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8\,,\\ x_3 &= x_5 + x_6 + x_7 - x_8\,,\\ x_4 &= x_5 - 2x_7 - 6x_8 \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} x_5 &= 21x_1 - 6x_2 - 26x_3 + 17x_4\,,\\ x_6 &= -17x_1 + 5x_2 + 20x_3 - 13x_4\,,\\ x_7 &= -x_1 + 2x_3 - x_4\,,\\ x_8 &= 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

описувати загальний розв'язок тієї самої СЛР із вісьмома невідомими?

11. Дослідіть СЛР на сумісність залежно від значення параметра λ і знайдіть загальний розв'язок у тих випадках, коли СЛР сумісна:

a) $\begin{aligned} 3x_1+2x_2+\ \ x_3&=-1\,,\\ 7x_1+6x_2+5x_3&=\lambda\,,\\ 5x_1+4x_2+3x_3&=2\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \lambda x_1+\ \ x_2+\ \ x_3&=0\,,\\ 5x_1+\ \ x_2-2x_3&=2\,,\\ -2x_1-2x_2+\ \ x_3&=-3\,. \end{aligned}$

12. Дослідіть СЛР на сумісність залежно від значення параметра λ і знайдіть загальний розв'язок у тих випадках, коли СЛР сумісна:

a) $\begin{aligned} -6x_1+8x_2-\ \ 5x_3-\ \ x_4&=9\,,\\ -2x_1+4x_2+\ \ 7x_3+3x_4&=1\,,\\ -3x_1+5x_2+\ \ 4x_3+2x_4&=3\,,\\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4&=\lambda\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1-\ \ x_2+3x_3+\ \ 4x_4&=5\,,\\ 4x_1-2x_2+5x_3+\ \ 6x_4&=7\,,\\ 6x_1-3x_2+7x_3+\ \ 8x_4&=9\,,\\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4&=11\,; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} (5-\lambda)x_1-\qquad 2x_2-\qquad\quad x_3&=1\,,\\ -2x_1+(2-\lambda)x_2-\qquad 2x_3&=2\,,\\ -x_1-\qquad 2x_2+(5-\lambda)x_3&=1\,. \end{aligned}$

13. Знайдіть розв'язок СЛР залежно від значення параметра λ:

a) $\begin{aligned} 2x_1+\ \ 5x_2+\ \ x_3+3x_4&=2\,,\\ 4x_1+\ \ 6x_2+3x_3+5x_4&=4\,,\\ 4x_1+14x_2+\ \ x_3+7x_4&=4\,,\\ 2x_1-\ \ 3x_2+3x_3+\lambda x_4&=7\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1+\ \ 3x_2+\ \ x_3+2x_4&=3\,,\\ 4x_1+\ \ 6x_2+3x_3+4x_4&=5\,,\\ 6x_1+\ \ 9x_2+5x_3+6x_4&=7\,,\\ 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4&=9\,. \end{aligned}$

14. Чи будуть еквівалентними дві СЛР, якщо одна з них одержується з другої перенумерацією невідомих?

15. Знайдіть необхідну й достатню умову того, щоб сума якихось двох розв'язків невизначеної СЛР знову була розв'язком цієї СЛР.

16. Як змінюється множина розв'язків СЛР при елементарному перетворенні стовпців її основної матриці?

17. Нехай A та B — матриці однакових розмірів, причому однорідні СЛР із матрицями коефіцієнтів A та B рівносильні. Доведіть, що від A до B можна перейти елементарними перетвореннями рядків.

Додаткові задачі

18. Доведіть, що перестановку двох рядків матриці можна здійснити за допомогою послідовного виконання кількох елементарних перетворень рядків інших типів.

19. Доведіть, що за допомогою елементарних перетворень рядків кожну матрицю можна звести до трикутного вигляду, причому наперед вибравши, де робити нулі — під чи над головною діагоналлю.

20. Дослідіть СЛР на сумісність і знайдіть загальний розв'язок системи рівнянь залежно від значень параметрів:

a) $\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 4\,, \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 3\,, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 &= 4\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1\,, \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b\,, \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1\,. \end{aligned}$

21. Знайдіть усі цілочислові розв'язки системи рівнянь:

a) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5\,;$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1\,, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2\,, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1\,. \end{aligned}$

22*. Знайдіть необхідні й достатні умови сумісності СЛР

$$\begin{aligned} - a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1\,, \\ a_3x_1 - a_1x_3 &= b_2\,, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 &= b_3\,, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= c\,. \end{aligned}$$

23*. Доведіть, що СЛР

$$\begin{aligned} x &= by + cz + du + ev\,, \\ y &= cz + du + ev + ax\,, \\ z &= du + ev + ax + by\,, \\ u &= ev + ax + by + cz\,, \\ v &= ax + by + cz + du \end{aligned}$$

буде невизначеною тоді й лише тоді, коли або принаймні два з чисел a, b, c, d, e дорівнюють -1, або всі ті числа відмінні від -1 і

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1\,.$$

24. Нехай A — матриця із цілими коефіцієнтами і d — найменше значення модулів ненульових елементів матриці A. Припустимо, що при цілочислових елементарних перетвореннях рядків і стовпців матриці A значення d не зменшується. Доведіть, що всі елементи матриці A діляться на d.

Домашнє завдання

25. За допомогою методу Гаусса знайдіть загальний розв'язок і один частковий розв'язок системи лінійних рівнянь:

a) $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 &= 10\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4\,, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 2\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 7\,, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5\,, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3\,. \end{aligned}$

26. Знайдіть многочлен $f(x)$ із дійсними коефіцієнтами:

a) другого степеня, для якого $f(-1) = 2$, $f(1) = 8$, $f(2) = 14$;

b) третього степеня, для якого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$;

c) четвертого степеня, для якого $f(1) = -3$, $f'(1) = -3$, $f''(1) = 12$, $f'''(1) = 42$, $f(-1) = 3$.

27. Дослідіть на сумісність і знайдіть загальний розв'язок системи рівнянь залежно від значення параметра λ:

a) $\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 \quad &= \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 \quad &= \lambda^2; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\,, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1\,, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1\,; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 + 3\lambda\,, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2\,, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^4 + 3\lambda^3\,. \end{aligned}$

Література. [1, глава 2, §1; 4, глава I, §§1, 11; 5, розділ I; 7, розділ 1, §2; 12, глава 1].

Заняття 5. Арифметичні векторні простори: лінійна залежність та незалежність векторів

Необхідні поняття. Арифметичним векторним простором розмірності n над полем P називається множина

$$P^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in P\}$$

разом з операціями *додавання* векторів і *множення* векторів на елементи поля P, визначеними таким чином:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Елементи простору P^n називаються *векторами*, а елементи поля P — *скалярами*.

Лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_m$ з коефіцієнтами $k_1 \ldots, k_m$ з поля P називається вектор

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m .$$

Якщо вектор $\boldsymbol{u}$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$, то кажуть, що $\boldsymbol{u}$ *лінійно виражається* через ці вектори.

Лінійна комбінація

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_m$$

називається *нетривіальною*, якщо серед коефіцієнтів $k_1 \ldots, k_m$ є принаймні один ненульовий. У протилежному випадку лінійна комбінація називається *тривіальною*.

Система векторів $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ називається *лінійно залежною*, якщо принаймні одна нетривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору. У протилежному випадку система векторів називається *лінійно незалежною*.

Необхідні твердження. **1.** Лінійна незалежність системи векторів $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ означає, що рівність $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$ можлива тоді й лише тоді, коли $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$.

2. *Властивості лінійно* (*не*)*залежних систем векторів*:

a) надсистема лінійно залежної системи лінійно залежна;

b) підсистема лінійно незалежної системи лінійно незалежна;

c) (*транзитивність властивості “лінійно виражатися”*) якщо вектори $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно виражаються через вектори $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$, а кожен з векторів $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$, у свою чергу, лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{c}_1 \ldots, \boldsymbol{c}_m$, то вектори $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно виражаються через вектори $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$;

d) якщо система векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно незалежна, а система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{u}$ — лінійно залежна, то вектор $\boldsymbol{u}$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, причому коефіцієнти $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ лінійної комбінації $\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k$ визначені однозначно.

3. *Критерій лінійної залежності*. Система векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ $(k > 1)$ буде лінійно залежною тоді й лише тоді, коли хоча б один із векторів цієї системи лінійно виражається через інші.

4. *Теорема про лінійну залежність*. Якщо кожний вектор системи $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ і $k > l$, то система векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \ldots, \boldsymbol{a}_k$ є лінійно залежною.

5. В арифметичному векторному просторі P^n будь–які $n+1$ векторів є лінійно залежними.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Доведіть, що коли вектор $\boldsymbol{u}$ єдиним способом лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, то система векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ — лінійно незалежна.*

Розв'язання. Нехай

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + u_n \boldsymbol{v}_n$$

— зображення вектора $\boldsymbol{u}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Припустимо, що вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ — лінійно залежні. Тоді існують такі числа $k_1, \ldots, k_n$, не всі з яких дорівнюють нулю, що

$$\mathbf{0} = k_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n \boldsymbol{v}_n.$$

Якщо додати ці дві рівності, то одержимо ще одне зображення

$$\boldsymbol{u} = (u_1 + k_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (u_n + k_n)\boldsymbol{v}_n$$

вектора $\boldsymbol{u}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Отже, припущення про лінійну залежність векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ приводить до суперечності з єдиністю зображення вектора $\boldsymbol{u}$ у вигляді такої лінійної комбінації. □

Задача 2. *Нехай $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ — лінійно незалежні вектори. З'ясуйте, чи будуть лінійно незалежними вектори $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.*

Розв'язання. Розглянемо лінійну комбінацію векторів $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ з довільними коефіцієнтами x_1, x_2, x_3:

$$x_1\boldsymbol{u}+x_2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+x_3(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{u}+(x_2+x_3)\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}.$$

Оскільки вектори $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ — лінійно незалежні, то ця лінійна комбінація буде дорівнювати нульовому вектору лише тоді, коли всі коефіцієнти в правій частині дорівнюватимуть 0. Це дає систему рівнянь

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\,, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0\,, \\ & & & & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Легко бачити, що ця система має єдиний розв'язок $x_1=x_2=x_3=0$. Тому вектори $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ — лінійно незалежні. □

Задача 3. *З'ясуйте, чи буде лінійно незалежною система векторів:*

a) $\begin{array}{rcl} \boldsymbol{v}_1 & = & (4,\ -5,\ 2,\ 6)\,, \\ \boldsymbol{v}_2 & = & (2,\ -2,\ 1,\ 3)\,, \\ \boldsymbol{v}_3 & = & (6,\ -3,\ 3,\ 9)\,, \\ \boldsymbol{v}_4 & = & (4,\ -1,\ 5,\ 6)\,; \end{array}$ b) $\begin{array}{rcl} \boldsymbol{v}_1 & = & (1,i,2-i,3+i)\,, \\ \boldsymbol{v}_2 & = & (1+i,-i,0,1)\,, \\ \boldsymbol{v}_3 & = & (1-i,1+i,1-3i,0)\,. \end{array}$

Розв'язання. У цій задачі вектори зручно розглядати як вектори-стовпці. Нагадаємо, що система векторів $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ є лінійно залежною тоді й лише тоді, коли векторне рівняння

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{v}_m=\mathbf{0} \tag{16}$$

має лише тривіальний розв'язок $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$.

a) У цьому випадку рівняння (16) набуває вигляду

$$x_1\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\6\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}6\\-3\\3\\9\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}4\\-1\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Розписуючи цю рівність покоординатно, одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0\,, \\ -5x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0\,, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 0\,, \\ 6x_1 & + & 3x_3 & + & 9x_3 & + & 6x_4 & = & 0\,. \end{array}$$

Вектори будуть лінійно залежними тоді й лише тоді, коли ця однорідна СЛР має ненульовий розв'язок. Щоб це з'ясувати, достатньо використати лише прямий хід методу Гаусса (звертаємо увагу, що стовпцями основної матриці є вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки ненульових рівнянь залишилося менше, ніж невідомих, то процес обчислень можна завершувати: така СЛР завжди має ненульовий розв'язок. Отже, вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ є лінійно залежними.

b) Міркуючи як у попередньому пункті, одержимо однорідну СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ i & -i & 1+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1-3i & 0 \\ 3+i & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

причому знову треба з'ясувати, чи має ця СЛР ненульовий розв'язок. Знову застосовуємо прямий хід методу Гаусса, але спочатку трохи спростимо перший стовпець. Для цього другий рядок додамо до третього й віднімемо від четвертого, а потім другий рядок помножимо на $-i$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ i & -i & 1+i & 0 \\ 2-i & 0 & 1-3i & 0 \\ 3+i & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & 0 \\ 2 & -i & 2-2i & 0 \\ 3 & 1+i & -1-i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Щоб зробити нулі під діагоналлю, спочатку від кожного рядка віднімаємо відповідне кратне першого рядка, а а потім від третього й четвертого рядків — відповідні кратні другого:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & -2-i & 0 & 0 \\ 0 & -2-3i & 0 & 0 \\ 0 & -2-2i & -4+2i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & -2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4+2i & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & -2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки основна матриця звелася до трикутного вигляду, то СЛР є визначеною, а тому має лише нульовий розв'язок. Отже, вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ є лінійно незалежними. □

Задача 4. *Знайдіть усі λ, при яких вектор* $\boldsymbol{b}$ *лінійно виражається через вектори* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, *якщо*:

a) $\mathbf{a}_1 = (3,2,5)$, $\mathbf{a}_2 = (2,4,7)$, $\mathbf{a}_3 = (5,6,\lambda)$, $\mathbf{b} = (1,3,5)$;
b) $\mathbf{a}_1 = (3,2,6)$, $\mathbf{a}_2 = (5,1,3)$, $\mathbf{a}_3 = (7,3,9)$, $\mathbf{b} = (\lambda,2,5)$;
c) $\mathbf{a}_1 = (3,4,2)$, $\mathbf{a}_2 = (6,8,7)$, $\mathbf{a}_3 = (15,20,11)$, $\mathbf{b} = (9,12,\lambda)$.

Розв'язання. У цій задачі вектори також зручно розглядати як вектори-стовпці. Нагадаємо, що вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, коли знайдуться такі x_1, x_2, x_3, що

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3. \tag{18}$$

a) Якщо для даних векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$ векторне рівняння (18) розписати покоординатно, то одержимо СЛР

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 3, \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & \lambda x_3 & = & 5. \end{array}$$

Потрібно з'ясувати, для яких λ ця СЛР буде сумісною. Застосовуючи метод Гаусса, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 17 & \lambda+5 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7/8 \\ 0 & 0 & \lambda-12 & 1/8 \end{array}\right).$$

Із вигляду останньої матриці легко бачити, що при $\lambda = 12$ СЛР буде несумісною, а при $\lambda \neq 12$ — визначеною. Отже, $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, якщо $\lambda \neq 12$.

b) Аналогічно попередньому пункту одержуємо СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & \lambda \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Якщо від третього рядка відняти потроєний другий, то одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & \lambda \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отже, наша СЛР несумісна, а тому при жодному λ вектор $\boldsymbol{b}$ не виражається лінійно через вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

c) Аналогічно попередньому одержуємо СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 15 & 9 \\ 4 & 8 & 20 & 12 \\ 2 & 7 & 11 & \lambda \end{array}\right).$$

Дослідимо її на сумісність:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 15 & 9 \\ 4 & 8 & 20 & 12 \\ 2 & 7 & 11 & \lambda \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \lambda-6 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13 & 0 & -5\lambda+33 \\ 0 & 3 & 1 & \lambda-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, наша СЛР є невизначеною для всіх λ. Тоді при довільному λ вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. □

Задача 5. *Нехай вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — лінійно незалежні. З'ясуйте, чи будуть лінійно незалежними вектори $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\ldots, \boldsymbol{b}_{k-1} = \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_1$.*

Розв'язання. Розглянемо лінійну комбінацію векторів $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ з невизначеними коефіцієнтами $x_1, \ldots, x_k$ і прирівняємо її до нульового вектора $\mathbf{0}$:

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{b}_k =$$
$$= x_1(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + x_2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) + \cdots + x_k(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_1) =$$
$$= (x_1 + x_k)\boldsymbol{a}_1 + (x_1 + x_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (x_{k-2} + x_{k-1})\boldsymbol{a}_{k-1} + (x_{k-1} + x_k)\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}.$$

Позаяк вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — лінійно незалежні, то всі коефіцієнти в останній сумі мають дорівнювати нулю. Це дає СЛР

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_k & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & = & 0, \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_{k-2} & + & x_{k-1} & = & 0, \\ x_{k-1} & + & x_k & = & 0 \end{array}$$

із матрицею

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

З'ясуємо, чи має ця ОСЛР ненульовий розв'язок. Спочатку всі рядки додамо до першого:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Далі від першого рядка віднімемо всі рядки з парними номерами. Результат буде залежати від парності числа k. Якщо число k — парне, то отримаємо однорідну СЛР з матрицею

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки в цьому випадку число $k-1$ ненульових рівнянь менше за число k невідомих, то ця ОСЛР має ненульовий розв'язок. Отже, при парному k вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ будуть лінійно залежними.

Якщо ж число k — непарне, то отримаємо однорідну СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

У цьому випадку СЛР має лише нульовий розв'язок, тому при непарному k вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ будуть лінійно незалежними. □

Задача 6. *Нехай дано вектори*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \\ \boldsymbol{v}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

де $m \leqslant n$. Доведіть, що коли для кожного $k = 1, \ldots, m$ виконується нерівність $|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ik}|$, то ці вектори є лінійно незалежними.

Розв'язання. Припустимо, що вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ — лінійно залежні. Тоді знайдуться такі $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, які не всі дорівнюють нулю, що

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}. \tag{19}$$

Виберемо серед коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ той, який найбільший за модулем. Нехай це буде λ_j (зауважимо, що $\lambda_j \neq 0$). Із рівняння (19) випливає, що

$$\lambda_1 a_{1j} + \cdots + \lambda_j a_{jj} + \cdots + \lambda_m a_{mj} = 0,$$

звідки

$$|\lambda_j| \cdot |a_{jj}| = |\lambda_j a_{jj}| = \left| \sum_{i \neq j} \lambda_i a_{ij} \right|. \tag{20}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \neq j} \lambda_i a_{ij} \right| &\leq \sum_{i \neq j} |\lambda_i a_{ij}| = \sum_{i \neq j} |\lambda_i| \cdot |a_{ij}| \leq \\ &\leq \sum_{i \neq j} |\lambda_j| \cdot |a_{ij}| = |\lambda_j| \sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |\lambda_j| \cdot |a_{jj}|. \end{aligned} \tag{21}$$

Оскільки нерівність (21) суперечить рівнянню (20), то припущення про лінійну залежність векторів $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ є хибним. Отже, ці вектори є лінійно незалежними. □

Основні задачі

7. Дано вектори $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_4 = (0,5,-1,-1)$. Знайдіть лінійну комбінацію: a) $-2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_4$; b) $3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4$.

8. Доведіть, що система векторів S буде лінійно залежною, якщо:
a) S містить нульовий вектор;
b) S містить два пропорційні вектори;
c) S містить лінійно залежну підсистему.

9. Доведіть, що кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів також буде лінійно незалежною.

10. Доведіть, що коли вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно незалежні та лінійно виражаються через $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, то $k \le m$.

11. Якщо з кожного вектора із системи векторів S вилучити координату з тим самим номером, то нова система векторів S' називатиметься вкороченням системи S. Доведіть, що:

a) коли початкова система векторів S лінійно залежна, то кожне її вкорочення S' — також лінійно залежна система;

b) коли якесь вкорочення S' — лінійно незалежна система, то й початкова система S — лінійно незалежна.

12. З'ясуйте, чи буде лінійно незалежною система векторів:

a) $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,\ -3,\ 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,\ -1,\ 5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1,\ -4,\ 3); \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1,\ -1,\ -1,\ 1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1,\ -1,\ 1,\ -1), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1,\ 1,\ -1,\ -1); \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, i, 2-i, 3+i), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i); \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,\ -3,\ 2,\ 1,\ 10), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (-1,\ 8,\ 1,\ -4,\ 7), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2,\ 1,\ 9,\ -3,\ 6), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1,\ 3,\ -5,\ 9,\ 11). \end{aligned}$

13. Нехай $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — лінійно незалежні вектори. Чи будуть лінійно незалежними вектори: a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$; b) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$?

14. Нехай $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ — лінійно незалежні вектори. Чи будуть лінійно незалежними вектори $\boldsymbol{u}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4$, $\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4$?

15. Доведіть, що для довільних векторів $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ і чисел α, β, γ вектори $\alpha\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{v}$, $\gamma\boldsymbol{v}-\alpha\boldsymbol{w}$, $\beta\boldsymbol{w}-\gamma\boldsymbol{u}$ є лінійно залежними.

16. Знайдіть усі λ, при яких вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

a) $\boldsymbol{a}_1=(2,3,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,7,8)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-6,1)$, $\boldsymbol{b}=(7,-2,\lambda)$;

b) $\boldsymbol{a}_1=(4,4,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(7,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(4,1,6)$, $\boldsymbol{b}=(5,9,\lambda)$.

17. Нехай вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — лінійно незалежні. З'ясуйте, чи будуть лінійно незалежними вектори:

a) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k$;

b) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k\boldsymbol{a}_k$;

c) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_{k-1}=\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1$.

Додаткові задачі

18. Нехай вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ із цілими координатами лінійно залежні над полем $\mathbb{R}$. Доведіть, що:

a) ці вектори лінійно залежні над полем $\mathbb{Q}$;

b) існує нетривіальна лінійна комбінація $\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n$ із цілими коефіцієнтами $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$, яка дорівнює $\mathbf{0}$.

19. Доведіть, що коли до лінійно незалежної системи векторів $\boldsymbol{v}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{v}_n$ дописати спереду ще один вектор $\boldsymbol{u}$, то в новій системі щонайбільше один вектор буде лінійно виражатися через попередні.

20. Нехай числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — фіксовані.

a) За яких умов на числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ лінійна комбінація $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k$ даного набору розв'язків деякої неоднорідної СЛР знову буде розв'язком цієї СЛР?

b) Чи можна в попередньому пункті слово "даного" замінити словом "довільного"?

21. Які лінійні комбінації розв'язків даної неоднорідної СЛР можуть бути розв'язками відповідної однорідної СЛР?

22. Доведіть, що коли кожне з рівнянь СЛР S_2 є лінійною комбінацією рівнянь СЛР S_1, то множина розв'язків СЛР S_2 містить множину розв'язків СЛР S_1.

23*. Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ — непорожні підмножини n–елементної множини M. Доведіть, що існують такі непорожні множини $I, J \subset \{1,2,\ldots,n+1\}$, що

$$I\cap J=\varnothing \text{ та } \bigcup_{i\in I} M_i=\bigcup_{j\in J} M_j.$$

Домашнє завдання

24. Знайдіть вектор $\boldsymbol{x}$ із рівняння $3(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}) = 5(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{x})$, де $\boldsymbol{a}_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (10, 1, 5, 10)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, -1, 1)$.

25. Нехай вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через лінійно залежну систему векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Доведіть, що вектор $\boldsymbol{b}$ має нескінченно багато різних зображень у вигляді лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k$.

26. Знайдіть усі λ, при яких вектор $\boldsymbol{b} = (2 - i, 2 - 3i, \lambda)$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_1 = (1, -i, 2 - i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-i, 1 - i, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -1)$.

27. З'ясуйте, чи буде лінійно незалежною система векторів:

$$a)\ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{v}_1 &=& (5,\ 4,\ 3), \\ \boldsymbol{v}_2 &=& (3,\ 3,\ 2), \\ \boldsymbol{v}_3 &=& (8,\ 1,\ 3); \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{v}_1 &=& (1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 5), \\ \boldsymbol{v}_2 &=& (0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4), \\ \boldsymbol{v}_3 &=& (0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 7), \\ \boldsymbol{v}_4 &=& (2,\ -3,\ 4,\ 11,\ 12). \end{array}$$

28. Нехай задана система векторів $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $\boldsymbol{a}_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Чи існують такі числа c_{ij}, що вектори

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{5} c_{ij} \boldsymbol{a}_j, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

утворюють лінійно незалежну систему?

29. Доведіть, що коли вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ лінійно залежні й вектор $\boldsymbol{a}_3$ не виражається лінійно через вектори $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$, то $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$ є колінеарними.

Література. [1, глава 2, §1; 2, глава 2, §§13–16; 4, глава I, §§1, 11; 5, розділ IX, §§1–2; 7, розділ 1, §3; 12, глава 1; 13, глава IV, §4].

Заняття 6. Ранг

Необхідні поняття. Множину всіх векторів, що лінійно виражаються через вектори $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$, називають *лінійною оболонкою*, натягнутою на систему $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ (або породженою системою $\boldsymbol{v}_1,, \ldots, \boldsymbol{v}_m$), і позначають $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ або $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.

Системи векторів $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ та $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ називаються *еквівалентними*, якщо збігаються лінійні оболонки, що на них натягнуті, тобто $\mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = \mathscr{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l)$.

Лінійно незалежна підсистема даної системи векторів називається *максимальною лінійно незалежною підсистемою* (або МЛНЗ-підсистемою), якщо, приєднуючи до неї довільний вектор системи, будемо діставати лінійно залежну систему векторів.

Кількість векторів у МЛНЗ-підсистемі даної системи векторів S називається *рангом* цієї системи векторів і позначається $\operatorname{rank}(S)$ або $r(S)$. Якщо система S є скінченною і складається з векторів $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, то використовують також позначення $\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ або $r(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$.

За аналогією з елементарними перетвореннями рівнянь СЛР чи рядків і стовпців матриці визначимо *елементарні перетворення* системи векторів. Такими перетвореннями є:

1) перестановка двох векторів системи;

2) множення одного з векторів системи на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до одного з векторів системи іншого її вектора, помноженого на деяке число λ.

Із кожною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

пов’язуються дві системи векторів: система

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

її стовпців і система

$$\boldsymbol{b}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

її рядків. Ранг системи вектор–стовпців називається *стовпцевим* рангом матриці A й позначається $r_{\text{ст.}}(A)$, а ранг системи вектор–рядків називається *рядковим* рангом матриці A й позначається $r_{\text{ряд.}}(A)$.

Спільне значення рядкового та стовпцевого рангів матриці A називається *рангом матриці* та позначається $r(A)$ (або $\operatorname{rank}(A)$).

Квадратна матриця порядку n називається *виродженою* (або *особливою*), якщо її ранг менший за n. У протилежному випадку така матриця називається *невиродженою* (*неособливою*).

Необхідні твердження. **1.** Довільний вектор системи векторів лінійно виражається через вектори її МЛНЗ-підсистеми.

2. Кожна МЛНЗ-підсистема системи векторів $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ буде також МЛНЗ-підсистемою її лінійної оболонки $\mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$.

3. Будь–які дві максимальні лінійно незалежні підсистеми даної системи векторів складаються з однакової кількості векторів.

4. Еквівалентні системи векторів мають однакові ранги.

5. Система векторів є лінійно незалежною тоді й лише тоді, коли її ранг дорівнює кількості векторів у ній.

6. Якщо до системи векторів долучити лінійну комбінацію векторів із цієї системи, то ранг системи не зміниться.

7. Якщо $r(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$, то $\boldsymbol{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

8. Якщо кожен з векторів $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{w}_1 \ldots, \boldsymbol{w}_m$, то $r(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \le r(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$.

9. Ранг системи векторів не змінюється при елементарних перетвореннях векторів цієї системи.

10. При елементарних перетвореннях рядків матриці зберігаються всі лінійні співвідношення між її стовпцями.

11. *Теорема про ранг матриці.* Рядковий ранг $r_{\text{ряд.}}(A)$ і стовпцевий ранг $r_{\text{ст.}}(A)$ матриці A збігаються.

12. *Теорема про знаходження рангу матриці.* Елементарними перетвореннями рядків та стовпчиків довільну матрицю можна звести до вигляду

$$\begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0}_{k\times l} \\ \mathbf{0}_{s\times k} & \mathbf{0}_{s\times l} \end{pmatrix}.$$

Тоді ранг початкової матриці дорівнює k.

13. Ранг системи векторів $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ простору P^n дорівнює рангу матриці, вектор–стовпцями якої є ці вектори (і рангу матриці, вектор–рядками якої є ці самі вектори).

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть яку–небудь максимальну лінійно незалежну підсистему системи векторів* $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3,-4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,-4,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,-5,8,-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5,26,-9,-12)$, $\boldsymbol{a}_5 = (3,-4,1,2)$ *і виразіть через неї решту векторів системи.*

Розв'язання. Запишемо матрицю, стовпцями якої є дані вектори, і скористаємося тим, що при елементарних перетвореннях рядків матриці зберігаються усі лінійні співвідношення між її стовпцями. Елементарними перетвореннями рядків зводимо цю матрицю до спеціального трапецієподібного вигляду (14):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 16 & -10 \\ 0 & -10 & 2 & -24 & -8 \\ 0 & 9 & 5 & 8 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 92 & -184 & 92 \\ 0 & 0 & -76 & 152 & -76 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці перші три стовпці є лінійно незалежними. Тому вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ та $\boldsymbol{a}_3$ будуть утворювати максимальну лінійно незалежну підсистему даної системи векторів. Два останні стовпці дають коефіцієнти відповідних лінійних комбінацій для вираження векторів $\boldsymbol{a}_4$ та $\boldsymbol{a}_5$ через отриману МЛНЗ-підсистему:

$$\boldsymbol{a}_4 = 5\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_5 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$$

Зауважимо, що відповідь легко перевірити безпосередньо. $\square$

Задача 2. *Знайдіть усі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів* $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,4,5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,4,5,6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4,5,6,7)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо яку-небудь МЛНЗ-підсистему. Шукатимемо її аналогічно тому, як це робилося в попередній задачі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектори $\boldsymbol{a}_1$ та $\boldsymbol{a}_2$ утворюють максимальну лінійно незалежну підсистему. Оскільки всі МЛНЗ-підсистеми рівнопотужні, то будь-які два лінійно незалежні вектори даної системи векторів будуть утворювати МЛНЗ-підсистему. Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони пропорційні. Однак серед даних векторів пропорційних немає. Тому будь-які два вектори утворюватимуть МЛНЗ-підсистему. Усього будемо мати $\binom{4}{2} = 6$ МЛНЗ-підсистем. □

Задача 3. *У системі $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ утворюють максимальну лінійно незалежну підсистему, а ненульовий вектор $\boldsymbol{a}$ системи в цю підсистему не входить.*

a) Доведіть, що знайдеться такий вектор $\mathbf{b}_i$, що після заміни його в підсистемі вектором $\mathbf{a}$ знову отримаємо максимальну лінійно незалежну підсистему.

b) Чи буде такий вектор $\mathbf{b}_i$ єдиним?

Розв'язання. а) Вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ утворюють максимальну лінійно незалежну підсистему (позначимо її символом S_1), тому кожен вектор усієї системи буде їх лінійною комбінацією. Зокрема, матимемо: $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{b}_m$. Оскільки вектор $\boldsymbol{a}$ — ненульовий, то знайдеться таке i ($1 \le i \le m$), що $\alpha_i \ne 0$. Покажемо, що вектори $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{i-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ (позначимо систему цих векторів через S_2) також утворюють МЛНЗ-підсистему. Справді, згідно з твердженням 3 усі МЛНЗ-підсистеми даної системи векторів складаються з однакової кількості векторів. Підсистеми S_1 і S_2 складаються з однакової кількості векторів. Тому достатньо показати, що вектор $\boldsymbol{b}_i$ можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів підсистеми S_2. А це справді так, оскільки

$$\boldsymbol{b}_i = \frac{1}{\alpha_i}\boldsymbol{a} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}\boldsymbol{b}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\boldsymbol{b}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\boldsymbol{b}_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i}\boldsymbol{b}_m.$$

b) Із міркувань при розв'язанні першої частини задачі випливає, що вектором $\boldsymbol{a}$ можна замінити довільний вектор $\boldsymbol{b}_i$, коефіцієнт при якому в зображенні $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{b}_m$ є ненульовим. Тому варіантів вибору вектора $\boldsymbol{b}_i$ буде стільки, скільки є ненульових коефіцієнтів у цьому зображенні вектора $\boldsymbol{a}$. $\square$

Задача 4. *Обчисліть ранг матриці*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Із теореми про знаходження рангу матриці (твердження 12) випливає, що елементарними перетвореннями рядків та стовпців треба звести матрицю до вигляду

$$\begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0}_{k\times l} \\ \mathbf{0}_{s\times k} & \mathbf{0}_{s\times l} \end{pmatrix},$$

а потім підрахувати кількість одиниць на діагоналі. Спочатку переставимо перший і третій рядки, а потім за допомогою першого рядка зробимо нулі в першому стовпці:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 48 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Далі за допомогою першого стовпця зробимо нулі в першому рядка, а потім за допомогою другого рядка — нулі в другому стовпці:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Нарешті, за допомогою четвертого стовпця робимо нулі в другому рядку, а потім переставляємо в потрібному порядку рядки і стовпці:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На діагоналі отримали 3 одиниці, тому ранг матриці дорівнює 3. □

Задача 5. *Знайдіть ранг системи векторів* $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1,1)$*,* $\boldsymbol{v}_2 = (1,i,-1,-i,1)$*,* $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,1,-1,1)$*,* $\boldsymbol{v}_4 = (1,-i,-1,i,1)$.

Розв'язання. Ранг системи векторів дорівнює рангові матриці, рядками якої є дані вектори. Тому виписуємо матрицю, рядками якої є вектори $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$, і далі діємо так, як у попередній задачі. Спочатку робимо нулі в першому стовпці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Далі ділимо третій рядок на -2 і за його допомогою робимо нулі в другому стовпці:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i-1 & -2 & i-1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2i & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Тепер за допомогою першого стовпця робимо нулі в першому рядку, а за допомогою другого — у четвертому рядку:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2i & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2i & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Заключні перетворення зрозумілі з вигляду матриць:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4i & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ранг матриці дорівнює 4, то ранг початкової системи векторів також дорівнює 4. □

Задача 6. *Доведіть, що коли система векторів $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t$ отримується за допомогою елементарних перетворень системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_t$, то ці дві системи еквівалентні.*

Розв'язання. Для доведення еквівалентності цих систем векторів потрібно показати, що $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_t) = \mathscr{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$. Достатньо показати, що лінійна оболонка не змінюється, якщо виконати одне елементарне перетворення. Очевидно, що перестановка двох векторів системи на лінійну оболонку не впливає. Також незмінною вона залишається при множенні довільного вектора системи на число, відмінне від нуля, оскільки $\alpha\boldsymbol{f}_i = 0 \cdot \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha\boldsymbol{f}_i + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{f}_t$, і навпаки, $\boldsymbol{f}_i = 0 \cdot \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{f}_i) + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{f}_t$. Нарешті, якщо друга система відрізняється від першої одним вектором, отриманим додаванням до вектора $\boldsymbol{f}_i$ першої системи лінійної комбінації інших векторів цієї системи (а саме вектором $\tilde{\boldsymbol{f}}_i := \boldsymbol{f}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \boldsymbol{f}_j$), то з рівності $\boldsymbol{f}_i = \tilde{\boldsymbol{f}}_i + \sum_{j \neq i}(-\alpha_j)\boldsymbol{f}_j$ випливає, що й у цьому випадку лінійна оболонка не зміниться. Отже, $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_t) = \mathscr{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_t)$ і системи — еквівалентні. □

Задача 7. *Доведіть, що ранг матриці $(A \mid B)$, отриманої приписуванням до матриці A матриці B, не перевищує суми рангів матриць A та B.*

Розв'язання. Застосовуючи елементарні перетворення до рядків матриці $(A \mid B)$ та стовпців матриці A, можна звести матрицю $(A \mid B)$ до вигляду

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{array}\right), \tag{22}$$

причому $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(B)$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(E)$. Далі, віднімаючи від стовпців матриці $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ відповідні лінійні комбінації стовпців

$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, ми можемо замінити нулями всі коефіцієнти матриці B_1 (матриця B_2 при цьому не зміниться, оскільки від її стовпців лінійні комбінації стовпців нульової матриці). Після цього матриця (22) зведеться до вигляду

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{array}\right).$$

Ранг матриці $(A \mid B)$ при цих перетвореннях не змінювався. Тому

$$\operatorname{rank}(A \mid B) = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc|c} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{array}\right) = \operatorname{rank}(E) + \operatorname{rank}(B_2) \leq$$

$$\leq \operatorname{rank}(E) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$ □

Задача 8. *Доведіть, що в невиродженій квадратній матриці порядку n ранг будь–якої квадратної підматриці порядку $n-1$ не менший ніж $n-2$.*

Розв'язання. Нехай A — невироджена квадратна матриця порядку n, а C — її підматриця порядку $n-1$. C можна одержати з A за два кроки: спочатку викреслюємо рядок матриці A та одержуємо проміжну матрицю B, а потім викреслюємо стовпець матриці B. Нехай S — МЛНЗ-підсистема векторів-рядків матриці A. При переході від A до B у S міг викреслитися щонайбільше один рядок. При цьому нова система S' векторів-рядків залишиться лінійно незалежною, хоча, можливо, й перестане бути максимальною. Тому $\operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(A)-1$. Міркуючи аналогічно щодо стовпців матриці B, одержимо нерівність $\operatorname{rank}(C) \geq \operatorname{rank}(B)-1$. Отже, $\operatorname{rank}(C) \geq \operatorname{rank}(A)-2$. □

Основні задачі

9. Опишіть лінійну оболонку даної системи векторів:
a) $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0,0,0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,0,1,0,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,0,0,1)$;
b) $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0,0,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,0,1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,0,0)$;
c) $\boldsymbol{u}_1=(1,0,0,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_2=(0,1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_3=(0,0,1,0,-1)$, $\boldsymbol{u}_4=(0,0,0,1,-1)$.

10. Знайдіть яку–небудь максимальну лінійно незалежну підсистему системи векторів:
a) $\boldsymbol{a}_1=(-1,4,-3,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,-7,5,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-2,1,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(-4,1,0,1)$;
b) $\boldsymbol{a}_1 = (3-i, 1-2i, -7+5i, 4+3i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1+3i, 1+i, -6-7i, 4i)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,1,1,-3)$.

11. Знайдіть усі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів:
a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,2,3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4,3,4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (1,1,1)$;
b) $\boldsymbol{a}_1 = (1+i, 1-i, 2+3i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (i,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1-i, -1-i, 3-2i)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, -4i, 10+2i)$;
c) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,-3,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,2,-6,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6,3,-9,3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,1,1,1)$.

12. Знайдіть яку–небудь максимальну лінійно незалежну підсистему системи векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ і виразіть через неї решту векторів системи:
a) $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,5,-4,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,2,3,5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,7,8,-11,-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,-1,1,-2,3)$;
b) $\boldsymbol{a}_1 = (2,-1,3,4,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,-3,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5,-5,12,11,-5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,-3,6,3,-3)$;
c) $\boldsymbol{a}_1 = (4,3,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,-3,2,-5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-3,0,1,-2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,5,2,-2,6)$.

13. Доведіть, що кожний ненульовий вектор даної системи векторів входить до складу деякої максимальної лінійно незалежної підсистеми.

14. Що можна сказати про систему векторів рангу r, якщо вона містить:
a) єдину максимальну лінійно незалежну підсистему;
b) рівно дві такі підсистеми;
c) рівно три такі підсистеми?

15. Нехай вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно незалежні. Знайдіть усі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1} = \boldsymbol{a}_{k-1} - \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_1$.

16. Знайдіть ранг системи векторів:
a) $\boldsymbol{v}_1 = (1+i, 1-i, 2+2i)$, $\boldsymbol{v}_2 = (i,1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1-i, -1-i, 3-2i)$, $\boldsymbol{v}_4 = (4, -4i, 10+2i)$;
b) $\boldsymbol{v}_1 = (-1+3i, 4-2i, -3+i, -2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,-7,5,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-4,1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (3-4i, -2+i, 1, i)$;
c) $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_5 = (7,-3,-4,5)$.

17. Як може змінитися ранг матриці, якщо з неї викреслити:
a) один рядок;
b) один рядок і один стовпчик?

18. Обчисліть ранг матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{pmatrix}$.

19. Обчисліть ранг матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 77 & 32 & 6 & 5 & 3 \\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Обчисліть ранг матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3-i & 1-2i & -7+5i & 4+3i \\ 1+3i & 1+i & -6-7i & 4i \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

21. Обчисліть ранг матриці залежно від значення параметра λ:

a) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Доведіть, що дописування до матриці одного рядка (або одного стовпця) не змінює її рангу тоді й лише тоді, коли дописаний рядок (стовпець) є лінійною комбінацією рядків (стовпців) початкової матриці.

23. Доведіть, що коли кожен із векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, то ранг системи $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ дорівнює рангу системи $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$.

Додаткові задачі

24. Система із $k+1$ векторів має ранг k і містить ненульові пропорційні вектори. Скільки різних максимальних лінійно незалежних підсистем містить ця система?

25. Обчисліть ранг матриці залежно від значення параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ 2 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ 2 & 2 & 1 & \dots & \lambda^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

26. Доведіть, що коли матриця рангу r має m рядків, то довільні k її рядків утворюють матрицю, ранг якої не менший ніж $r+k-m$.

27. Нехай $A=(a_{ij})$ — матриця розміром $m \times n$. Доведіть, що $\operatorname{rank} A \le 1$ тоді й лише тоді, коли існують такі числа $b_1, \dots, b_m$ і $c_1, \dots, c_n$, що $a_{ij} = b_i c_j$ для всіх i, j.

28. Доведіть, що довільну матрицю рангу r можна записати у вигляді суми r матриць рангу 1, але не можна записати у вигляді суми меншої кількості таких матриць.

29*. Доведіть, що ранг кососиметричної матриці є парним числом.

Домашнє завдання

30. Знайдіть усі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів $\boldsymbol{a}_1 = (4,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (8,-2,6,-4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,-1,4,-2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (6,-2,8,-4)$.

31. Знайдіть яку-небудь МЛНЗ-підсистему системи векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ і виразіть через неї решту векторів системи:

a) $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,5,-4,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,2,3,5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,7,8,-11,-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,-1,1,-2,3)$;

b) $\boldsymbol{a}_1 = (2,-1,3,4,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,-3,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5,-5,12,11,-5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,-3,6,3,-3)$.

32. Обчисліть ранг матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1+i & i & 1-i & 4 \\ 1-i & 1 & -1-i & -4i \\ 2+3i & 2 & 3-2i & 10+2i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

33. Обчисліть ранг матриці залежно від значення параметра λ:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} \lambda-3 & \lambda & \lambda-1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \lambda-3 & \lambda-2 & \lambda-1 & 1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda & \lambda-2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{b)}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}.$$

34. Доведіть, що коли ранг матриці A не змінюється при приписуванні до неї будь–якого стовпчика матриці B із такою самою кількістю рядків, то він не зміниться і при приписуванні до A всіх стовпчиків матриці B.

35. Доведіть, що:

a) еквівалентні системи векторів мають однаковий ранг;

b) твердження, зворотне до a), є хибним;

c) якщо дві системи векторів мають однаковий ранг і одна з них лінійно виражається через іншу, то ці системи еквівалентні.

36. У якому випадку система векторів має єдину базу?

Література. [2, глава 2, §§13–16; 5, розділ IX, §5; 7, розділ 1, §5].

Заняття 7. Арифметичні векторні простори: підпростори, множини розв'язків систем лінійних рівнянь

Необхідні поняття. Підпростором простору P^n називається довільна непорожня підмножина $V \subseteq P^n$, замкнена відносно додавання векторів і множення векторів на скаляри. Весь простір P^n і підпростір, що складається лише з нульового вектора, називаються *тривіальними*.

Система векторів S називається *системою твірних* підпростору V, якщо лінійна оболонка системи S збігається з V (тобто якщо $\mathscr{L}(S) = V$).

Лінійно незалежна система твірних векторного підпростору називається його *базою*. Кількість векторів у базі підпростору V називається *розмірністю* підпростору V і позначається $\dim V$. Підпростір розмірністю n також називають *n-вимірним*.

База простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається *фундаментальною системою розв'язків* (коротко — ФСР) цієї системи.

Лінійним многовидом із представником $\boldsymbol{v} \in P^n$ і напрямним підпростором $U \subseteq P^n$ називається множина $\boldsymbol{v} + U := \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u} \in U\}$.

Необхідні твердження. **1.** Для кожної непорожньої підмножини $S \subseteq P^n$ її лінійна оболонка $\mathscr{L}(S)$ є підпростором простору P^n.

2. Множина розв'язків однорідної СЛР із коефіцієнтами з поля P утворює підпростір простору P^n, де n — кількість невідомих. Розмірність цього підпростору дорівнює $n-r$, де r — ранг матриці системи. Навпаки, довільний підпростір V арифметичного векторного простору P^n є множиною розв'язків деякої однорідної СЛР.

3. Кожен вектор підпростору $V \subseteq P^n$ лінійно виражається через вектори бази підпростору V, причому тільки одним способом.

4. Будь–які дві бази підпростору $V \subseteq P^n$ складаються з однакової кількості векторів.

5. Система векторів підпростору $V \subseteq P^n$ є його базою тоді й лише тоді, коли вона є його максимальною лінійно незалежною підсистемою.

6. Будь–яку лінійно незалежну систему векторів підпростору $V \subseteq P^n$ можна доповнити до бази підпростору V.

7. *Теорема про базу арифметичного векторного простору.*
а) Бази в арифметичному векторному просторі P^n існують.

b) Кожна база простору P^n містить n векторів.
c) Кожна система з n лінійно незалежних векторів є базою простору P^n.
d) Кожна система твірних простору P^n містить підсистему, яка є базою P^n.
e) Кожну лінійно незалежну підсистему простору P^n можна доповнити до бази простору P^n.

8. Фундаментальна система розв'язків однорідної СЛР складається з $n-r$ розв'язків, де n — кількість невідомих, а r — ранг матриці системи.

9. *Теорема про хвости*. Якщо $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — список усіх вільних невідомих однорідної СЛР, то ця система має ФСР вигляду

$$\begin{array}{lcllllllll} \boldsymbol{f}_1 & = & (c_{11}, & \ldots, & c_{1r}, & 1, & 0, & \ldots, & 0) \\ \boldsymbol{f}_2 & = & (c_{21}, & \ldots, & c_{2r}, & 0, & 1, & \ldots, & 0) \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{f}_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, & \ldots, & c_{n-r,r}, & 0, & 0, & \ldots, & 1) \end{array}$$

(у розв'язку f_i одиниця у хвості стоїть на $r+i$–му місці).

10. *Теорема про загальний розв'язок неоднорідної СЛР*. Різниця довільних двох розв'язків неоднорідної СЛР S є розв'язком відповідної однорідної системи. Навпаки, сума фіксованого розв'язку системи S і довільного розв'язку відповідної однорідної системи буде розв'язком системи S, причому кожен розв'язок системи S можна одержати таким чином.

11. Множина розв'язків СЛР із n невідомими утворює лінійний многовид простору P^n, представником якого є фіксований розв'язок системи, а напрямним підпростором — підпростір розв'язків відповідної однорідної СЛР. Навпаки, довільний лінійний многовид арифметичного векторного простору P^n є множиною розв'язків деякої системи лінійних рівнянь із n невідомими.

12. *Перша теорема Кронекера – Капеллі — критерій сумісності СЛР.* Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці

13. *Друга теорема Кронекера – Капеллі — критерій визначеності СЛР.* Система лінійних рівнянь визначена тоді й тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці та дорівнює кількості невідомих.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *За яких умов у всіх розв'язках сумісної системи лінійних рівнянь невідома x_k має те саме значення?*

Розв'язання. Нехай S — сумісна СЛР. Запишемо її у векторному вигляді:

$$x_1\boldsymbol{a}_1+\dots+x_k\boldsymbol{a}_k+\dots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}. \tag{23}$$

Припустимо, що ця система має два розв'язки: $(x_1',\dots,x_k',\dots,x_n')$ та $(x_1'',\dots,x_k'',\dots,x_n'')$, такі, що $x_k'\neq x_k''$. Тоді

$$x_1'\boldsymbol{a}_1+\dots+x_k'\boldsymbol{a}_k+\dots+x_n'\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}, \tag{24}$$

$$x_1''\boldsymbol{a}_1+\dots+x_k''\boldsymbol{a}_k+\dots+x_n''\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}. \tag{25}$$

Віднімемо від другої з цих рівностей першу:

$$(x_1''-x_1')\boldsymbol{a}_1+\dots+(x_k''-x_k')\boldsymbol{a}_k+\dots+(x_n''-x_n')\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}.$$

Оскільки $x_k''-x_k'\neq 0$, то

$$\boldsymbol{a}_k=\frac{x_1''-x_1'}{x_k'-x_k''}\boldsymbol{a}_1+\dots+\frac{x_{k-1}''-x_{k-1}'}{x_k'-x_k''}\boldsymbol{a}_{k-1}+\frac{x_{k+1}''-x_{k+1}'}{x_k'-x_k''}\boldsymbol{a}_{k+1}+\dots+\frac{x_n''-x_n'}{x_k'-x_k''}\boldsymbol{a}_n.$$

Отже, $\boldsymbol{a}_k$ лінійно виражається через $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{k_1},\boldsymbol{a}_{k+1},\dots,\boldsymbol{a}_n$ і

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{a}_{k+1},\dots,\boldsymbol{a}_k)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k,\dots,\boldsymbol{a}_k). \tag{26}$$

Таким чином, якщо існують два розв'язки, які розрізняються k–ю компонентою, то k–й стовпець основної матриці лінійно виражається через інші її стовпці та виконується рівність (26).

Навпаки, нехай $(x_1',\dots,x_k',\dots,x_n')$ є розв'язком СЛР (23) і k–й стовпець основної матриці лінійно виражається через інші її стовпці:

$$\boldsymbol{a}_k=c_1\boldsymbol{a}_1+\dots+c_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}+c_{k+1}\boldsymbol{a}_{k+1}+\dots+c_n\boldsymbol{a}_n.$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$c_1\boldsymbol{a}_1+\dots+c_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k++c_{k+1}\boldsymbol{a}_{k+1}+\dots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}_k$$

і додамо її до (24):

$$(x_1'+c_1)\boldsymbol{a}_1+\dots+(x_k'-1)\boldsymbol{a}_k+\dots+(x_n'+c_n)\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}.$$

Отже, СЛР (23) має ще розв'язок $(x_1'+c_1,\dots,x_k'-1,\dots,x_n'+c_n)$, який відрізняється від $(x_1',\dots,x_k',\dots,x_n')$ k–ю компонентою.

Таким чином, для того, щоб сумісна СЛР мала два розв'язки, які розрізняються k–ю компонентою, необхідно й достатньо, щоб k–й стовпець основної матриці лінійно виражався через інші її стовпці.

Тому в усіх розв'язках сумісної СЛР невідома x_k має те саме значення тоді й лише тоді, коли k–й стовпець основної матриці не виражається лінійно через інші її стовпці. Ця умова рівносильна виконанню нерівності

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{a}_k) \neq \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_k).$$

Останнє, у свою чергу, рівносильне тому, що ранг основної матриці зменшується на одиницю при викреслюванні k–го стовпця. □

Задача 2. *Знайдіть підпростір розв'язків однорідної СЛР*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

Розв'язання. Виконуючи елементарні перетворення рядків матриці нашої системи, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, наша система рівносильна системі

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 2x_1 - 8x_4\,, \\ x_3 & = & -3x_4\,. \end{array}$$

Невідомим x_1 та x_4 можна надавати довільних значень. Тому підпростором розв'язків буде множина

$$U = \{(t_1, 2t_1 - 8t_2, -3t_2, t_2) \mid t_1, t_2 \in P\} \subseteq P^4. \qquad \square$$

Задача 3. *Знайдіть загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь*:

$$\text{а)}\ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 0\,, \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0\,, \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 9x_5 & = & 0\,, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 0\,; \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{array}$$

c) $\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_n = 0$;

d) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0, \\ x_{n-1} & + & x_n & & & = & 0. \end{array}$$

Розв'язання. Для знаходження ФСР скористаємося теоремою про хвости (твердження 9). Для цього елементарними перетвореннями рядків зводимо матрицю системи до трапецієподібного вигляду. Спочатку за допомогою першого рядка робимо нулі в першому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Далі за допомогою другого рядка робимо нулі в третьому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг останньої матриці дорівнює 2, тому ФСР міститиме $n - r = 5 - 2 = 3$ розв'язки. Головними невідомими зручно вибрати x_2 та x_3, а вільними — x_1, x_4 і x_5. Тоді з вигляду останньої матриці отримуємо, що

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 - 2x_4 - 4x_5, \qquad x_3 = x_4 + 3x_5. \tag{27}$$

ФСР спочатку виписуємо у вигляді таблиці, стовпці якої нумеруються невідомими. Спочатку по черзі надаємо одному з вільних невідомих значення 1, а решті вільних невідомих — значення 0:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1			0	0
0			1	0
0			0	1

.

Потім з рівностей (27) обчислюємо значення решти невідомих:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	$-3/2$	0	0	0
0	-2	1	1	0
0	-4	3	0	1

.

Розв'язкам із фундаментальної системи відповідають рядки таблиці: $\boldsymbol{f}_1 = (1, -3/2, 0, 0, 0), \boldsymbol{f}_2 = (0, -2, 1, 1, 0), \boldsymbol{f}_3 = (0, -4, 3, 0, 1)$. Тому загальний розв'язок має вигляд $t_1\boldsymbol{f}_1 + t_2\boldsymbol{f}_2 + t_3\boldsymbol{f}_3$, де t_1, t_2, t_3 — довільні.

b) Аналогічно попередньому пункту елементарними перетвореннями рядків зводимо матрицю системи до трапецієподібного вигляду. Спочатку від першого рядка віднімаємо подвоєний другий, а потім за допомогою першого рядка робимо нулі в першому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Далі за допомогою другого рядка робимо нулі в другому стовпці, а потім третій рядок ділимо на -6 і з його допомогою робимо нулі в четвертому стовпці:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матриці дорівнює 3, тому ФСР міститиме $n - r = 5 - 3 = 2$ розв'язки. Головними невідомими зручно взяти x_1, x_3 та x_4, а вільними — x_2 та x_5. Крім того, наші рівняння набули вигляду

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 3x_2 + 2x_5, \quad x_4 = 0.$$

Як і в попередньому пункті, у таблиці для знаходження ФСР спочатку по черзі надаємо одному з вільних невідомих значення 1, а решті вільних невідомих — значення 0:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	1			0
	0			1

.

Далі обчислюємо значення головних невідомих (фактично треба обчислювати лише x_3, оскільки $x_1 = x_4 = 0$):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	3	0	0
0	0	2	0	1

Отже, ФСР складається з векторів $\boldsymbol{f}_1 = (0,1,3,0,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,0,2,0,1)$, а загальний розв'язок має вигляд $t_1\boldsymbol{f}_1 + t_2\boldsymbol{f}_2$, де t_1 і t_2 — довільні.

c) Матриця

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

уже має спеціальний трапецієподібний вигляд. Тому можна зразу переходити до виписування ФСР. Ранг матриці дорівнює 1, тому ФСР буде містити $n-1$ розв'язків. Вільними невідомими є $x_2, \ldots, x_n$, тому надаємо цим невідомим значень згідно з таблицею

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
	1	0	$\ldots$	0
	0	1	$\ldots$	0
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	0	0	$\ldots$	1

x_1 знаходиться з рівняння $x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$, тому остаточна таблиця матиме вигляд

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
-1	1	0	$\ldots$	0
-1	0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
-1	0	0	$\ldots$	1

Таким чином, ФСР складається з $n-1$ розв'язків $\boldsymbol{f}_1 = (-1,1,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1,0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{f}_{n-1} = (-1,0,0,\ldots,1)$, а загальний розв'язок має вигляд $t_1\boldsymbol{f}_1 + t_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + t_{n-1}\boldsymbol{f}_{n-1}$, де $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ — довільні.

d) Матрицею нашої системи є

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{8}{c|}{\dotfill} & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Віднімемо від кожного рядка, починаючи з першого, наступний рядок. Одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right). \tag{28}$$

Далі розглянемо три випадки залежно від остачі від ділення n на 3.

I. $n = 3k$. Починаючи знизу, в матриці (28) додамо кожен рядок до рядка з номером, на 3 меншим: n–й — до $(n-3)$–го, $(n-1)$–й — до $(n-4)$–го, ..., четвертий — до першого. Отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Якщо тепер у цій матриці перший рядок розділити на -1, а потім за його допомогою зробити нулі в останньому стовпці, то отримаємо матрицю, у якій у кожному рядку буде єдиний ненульовий елемент — одиниця, причому в різних рядках ці одиниці стоятимуть на різних місцях. Тому рядки матриці будуть лінійно незалежними, ранг матриці дорівнюватиме n, а підпростір розв'язків матиме розмірність $n - n = 0$. Отже, в цьому випадку СЛР матиме лише нульовий розв'язок $(0, 0, \dots, 0)$, а ФСР буде порожньою множиною.

II. $n = 3k + 1$. Знову, як і в попередньому випадку, у матриці (28) додамо, починаючи знизу, кожен рядок до рядка з номером, на 3 меншим. Отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\multicolumn{7}{c|}{\dotfill} & .\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Так само, як і в попередньому випадку, за допомогою першого зробимо нулі в останньому стовпці у отримаємо матрицю, у якій у кожному рядку буде єдиний ненульовий елемент — одиниця, причому в різних рядках ці одиниці стоятимуть на різних місцях. Тому в цьому випадку СЛР матиме лише нульовий розв'язок $(0, 0, \ldots, 0)$, а ФСР буде порожньою множиною.

III. $n = 3k + 2$. Якщо й тепер, як у попередніх випадкак, у матриці (28) додати кожен рядок, починаючи знизу, до рядка з номером, на 3 меншим, то отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0\\
\multicolumn{7}{c|}{\dotfill} & .\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right). \tag{29}$$

Легко бачити, що ця матриця має ранг $n-1$. Тому в цьому випадку підпростір розв'язків має розмірність $n-(n-1) = 1$, а ФСР складається з одного розв'язку. Із вигляду матриці (29) випливає, що

$$x_1 = x_4 = x_7 = \cdots = -x_n, \quad x_2 = x_5 = x_8 = \cdots = x_n, \quad x_3 = x_6 = \cdots = 0.$$

Якщо вільній невідомій x_n надати значення 1, то одержимо розв'язок $\boldsymbol{f}_1 = (-1, 1, 0, -1, 1, 0, \ldots, 0, -1, 1)$. Загальний розв'язок матиме вигляд $t_1\boldsymbol{f}_1$, де t_1 — довільний елемент поля. □

Задача 4. *Чи можна знайти систему лінійних рівнянь, для якої системи векторів* $\boldsymbol{f}_1 = (2, 3, 1, 2)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -2, -2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (3, 4, 2, 1)$ *та* $\boldsymbol{g}_1 = (1, 0, 2, -5)$, $\boldsymbol{g}_2 = (0, 1, 8, 7)$, $\boldsymbol{g}_3 = (4, 5, -2, 0)$ *будуть двома фундаментальними системами розв'язків цієї системи?*

Розв’язання. Якщо кожна із систем векторів $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ і $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ є фундаментальною системою розв’язків СЛР S, то, по-перше, кожна з них є лінійно незалежною, а по-друге, вони породжують той самий підпростір.

Перевіримо спочатку першу умову. Щоб перевірити лінійну незалежність векторів $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$, записуємо матрицю, рядками якої є ці вектори, і елементарними перетвореннями рядків і стовпців зводимо її до простішого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Рядки отриманої матриці лінійно незалежні. Тому вектори $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ також лінійно незалежні.

Аналогічно перевіряємо лінійну незалежність другої системи векторів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -50 & -15 \end{pmatrix}.$$

Знов отримали матрицю з лінійно незалежними рядками. Тому й друга система векторів є лінійно незалежною.

Таким чином, перша умова виконана. Переходимо до перевірки другої умови — рівності підпросторів $\mathscr{L}(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)$ і $\mathscr{L}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)$. Ці підпростори будуть рівними тоді й лише тоді, коли кожен вектор другої системи лінійно виражається через вектори першої системи і навпаки. Вектор $\boldsymbol{g}_1$ виражається через вектори $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ тоді й лише тоді, коли має розв’язок векторне рівняння

$$x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{g}_1.$$

Це рівняння рівносильне СЛР із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

З'ясовуємо тип цієї СЛР методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, СЛР є сумісною, а тому $\boldsymbol{g}_1$ виражається через вектори $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

Для вектора $\boldsymbol{g}_2$ перевірку можна здійснити аналогічно, а можна зауважити, що останній рядок другої матриці з () збігається з $\boldsymbol{g}_2$. Тому $\boldsymbol{g}_2$ лінійно виражається через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$.

Для вектора $\boldsymbol{g}_3$ перевірку виконаємо аналогічно тому, як ми це робили для $\boldsymbol{g}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

СЛР є несумісною, а тому вектор $\boldsymbol{g}_3$ не виражається через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Отже, дані системи векторів не можуть бути двома фундаментальними системами розв'язків тієї самої однорідної СЛР. □

Задача 5. *Доведіть, що дві однорідні системи лінійних рівнянь*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

та

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & 0, \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ b_{k1}x_1 & + & b_{k2}x_2 & + & \cdots & + & b_{kn}x_n & = & 0 \end{array}$$

є рівносильними тоді й лише тоді, коли системи векторів

$$\boldsymbol{u}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),\ \dots,\ \boldsymbol{u}_m = (a_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \tag{31}$$

та

$$\boldsymbol{v}_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}),\ \dots,\ \boldsymbol{v}_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn}) \tag{32}$$

— *еквівалентні.*

Розв'язання. Позначимо першу ОСЛР символом S_1, другу — символом S_2 і розглянемо їхні матриці:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & 0 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Необхідність. Нехай системи S_1 і S_2 є рівносильними. Це означає, що їхні множини розв'язків збігаються. Зокрема, якщо до системи S_1 дописати будь-яке рівняння із S_2, то множина розв'язків не зміниться. Множина розв'язків утворює підпростір розмірності $n - r$, де n — кількість невідомих, а r — ранг матриці системи. Тому для довільного i $(1 \le i \le m)$ ранги матриць A та

$$C_i = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} & 0 \end{array}\right)$$

однакові, тобто є однаковими ранги систем векторів-рядків обох матриць:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_i).$$

Це означає, що вектор $\boldsymbol{v}_i$ є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Оскільки i — довільне, то кожен вектор системи (32) є лінійною комбінацією векторів (31). Із транзитивності властивості лінійно виражатися тепер випливає, що

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \subseteq \mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m).$$

Аналогічно доводиться зворотне включення. Отже,

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \subseteq \mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m),$$

і системи векторів (31) та (32) — еквівалентні.

Достатність. Нехай системи векторів (31) та (32) — еквівалентні. Тоді кожен вектор $\boldsymbol{v}_i$ належить лінійній оболонці $\mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m)$, а тому є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m$. Звідси випливає, що

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_i)=\mathscr{L}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m).$$

Тоді

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_i)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m).$$

Отже, ранги матриць A та C_i — однакові. Тому підпростори розв'язків СЛР із матрицями A і C_i мають однакові розмірності. Оскільки підпростір розв'язків другої з цих СЛР міститься в підпросторі розв'язків першої СЛР, то ці два підпростори збігаються. Отже, кожен розв'язок СЛР S_1 є розв'язком i–го рівняння СЛР S_2. Позаяк i довільне, то кожен розв'язок СЛР S_1 є розв'язком СЛР S_2.

Аналогічно доводиться, що кожен розв'язок СЛР S_2 є розв'язком СЛР S_2. Тому ці дві СЛР рівносильні. □

Задача 6. *Знайдіть лінійний многовид, який є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь*

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4. \end{array}$$

Розв'язання. Зведемо матрицю системи до спеціального трапецієподібного вигляду методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 10 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 4 & -32 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Одним із часткових розв'язків нащої системи є вектор $(-32,10,0,0)$. Знайдемо підпростір розв'язків відповідної однорідної СЛР. Якщо з рядками її матриці виконати ті самі елементарні перетворення, що й з рядками матриці початкової СЛР, то одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Вільними невідомими є x_3 та x_4. Тому таблиця для ФСР матиме вигляд

x_1	x_2	x_3	x_4
16	−5	1	0
−4	1	0	1

.

Отже, ФСР відповідної однорідної СЛР становлять вектори $(16,-5,1,0)$ і $(-4,1,0,1)$, а множиною розв'язків цієї СЛР є породжений векторами із ФСР підпростір $U=\mathscr{L}((16,-5,1,0),(-4,1,0,1))$. Тому множиною розв'язків початкової неоднорідної СЛР буде лінійний многовид

$$(-32,10,0,0)+\mathscr{L}((16,-5,1,0),(-4,1,0,1)).$$ □

Задача 7. *Знайдіть систему лінійних рівнянь, множиною розв'язків якої є лінійний многовид* $(3,-1,2,4)+\mathscr{L}((1,-1,1,1),(3,-1,-3,7))$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо однорідну СЛР, множиною розв'язків якої буде підпростір $\mathscr{L}((1,-1,1,1),(3,-1,-3,7))$. Запишемо рівняння такої СЛР із невизначеними коефіцієнтами:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0. \qquad (33)$$

Кожен із векторів $(1,-1,1,1)$ та $(3,-1,-3,7)$ повинен бути розв'язком цього рівняння. Підставляючи ці вектори в рівняння (33), отримуємо таку однорідну СЛР із невідомими a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_1 & - & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & = & 0,\\ 3a_1 & - & a_2 & - & 3a_3 & + & 7a_4 & = & 0. \end{array} \qquad (34)$$

Щоб знайти ФСР цієї системи, зведемо її матрицю до спеціального трапецієподібного вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Вільними невідомими є x_3 та x_4. Тому таблиця для ФСР має вигляд

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	1	0
−3	−2	0	1

.

Отже, ФСР відповідної однорідної СЛР складають вектори $(2,3,1,0)$ і $(-3,-2,0,1)$. Розглянемо тепер однорідну СЛР, рядками матриці якої є ці вектори:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 0,\\ -3x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 0. \end{array} \qquad (35)$$

Ранг матриці цієї системи дорівнює 2, оскільки її рядки лінійно незалежні. Тому підпростір розв'язків СЛР (35) має розмірність $4 - 2 = 2$. Позаяк кожен із лінійно незалежних векторів $(1,-1,1,1)$ та $(3,-1,-3,7)$ є її розв'язком, то підпростір розв'язків збігається з лінійною оболонкою $\mathscr{L}((1,-1,1,1),(3,-1,-3,7))$ цих векторів.

Замінимо тепер нулі в правих частинах рівнянь СЛР (35) значеннями відповідних лівих частин на векторі $(3,-1,2,4)$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 5, \\ -3x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 3. \end{array} \tag{36}$$

Тоді вектор $(3,-1,2,4)$ є розв'язком системи (36). Оскільки підпростір $\mathscr{L}((1,-1,1,1),(3,-1,-3,7))$ є множиною розв'язків відповідної однорідної СЛР, то множиною розв'язків СЛР (36) є лінійний многовид $(3,-1,2,4)+\mathscr{L}((1,-1,1,1),(3,-1,-3,7))$. □

Основні задачі

8. Знайдіть необхідну й достатню умову того, щоб у кожному розв'язку сумісної системи лінійних рівнянь k–та невідома дорівнювала нулю.

9. Доведіть, що коли ранг однорідної системи лінійних рівнянь на одиницю менший за кількість невідомих системи, то два довільні розв'язки цієї системи пропорційні.

10. Знайдіть підпростір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь:

a) $\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0; \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{array}$

11. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь:

a) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0;$ b) $\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{array}$

$$
\text{c) }\begin{aligned}
14x_1+35x_2-7x_3-63x_4&=0\,,\\
-10x_1-25x_2+5x_3+45x_4&=0\,,\\
22x_1+55x_2-11x_3-99x_4&=0\,;
\end{aligned}
\qquad
\text{d) }\begin{aligned}
x_1+4x_2+2x_3\;-3x_5&=0\,,\\
2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5&=0\,,\\
x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5&=0\,.
\end{aligned}
$$

12. Знайдіть загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь:

$$
\text{a) }\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\,,\\
7x_1+14x_2+20x_3+27x_4&=0\,,\\
5x_1+10x_2+16x_3+19x_4&=0\,,\\
3x_1+5x_2+6x_3+13x_4&=0\,;
\end{aligned}
\qquad
\text{b) }\begin{aligned}
2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=0\,,\\
x_1+3x_2+5x_3-2x_4&=0\,,\\
x_1+5x_2-9x_3+8x_4&=0\,,\\
5x_1+18x_2+4x_3+5x_4&=0\,;
\end{aligned}
$$

$$
\text{c) }\begin{aligned}
2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0\,,\\
6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=0\,,\\
6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=0\,,\\
4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=0\,;
\end{aligned}
\qquad
\text{d) }\begin{aligned}
2x_1-x_2+x_3-x_4&=0\,,\\
4x_1-2x_2-2x_3+3x_4&=0\,,\\
2x_1-x_2+5x_3-6x_4&=0\,,\\
2x_1-x_2-3x_3+4x_4&=0\,.
\end{aligned}
$$

13. Доведіть, що СЛР сумісна при довільному стовпці вільних членів тоді й лише тоді, коли рядки її основної матриці лінійно незалежні.

14. Сформулюйте необхідні й достатні умови, які має задовольняти основна матриця СЛР, щоб кількість розв'язків цієї СЛР, залежно від стовпчика вільних членів, дорівнювала:

a) 0 або 1; b) 1 або ∞; c) 0 або ∞; d) завжди 1.

15. З'ясуйте, чи утворюють рядки кожної з матриць

$$
A=\begin{pmatrix}30&-24&43&-50&-5\\9&-15&8&5&2\\4&2&9&-20&-3\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix}4&2&9&-20&-3\\1&-11&2&13&4\\9&-15&8&5&2\end{pmatrix}
$$

фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних рівнянь

$$
\begin{aligned}
3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5&=0\,,\\
5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5&=0\,,\\
4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5&=0\,,\\
x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5&=0\,.
\end{aligned}
$$

16. Знайдіть однорідну систему лінійних рівнянь, яка складається з: a) двох, b) трьох рівнянь, базу підпростору розв'язків якої утворюють вектори $\boldsymbol{f}_1=(1,2,0,-1,0)$, $\boldsymbol{f}_2=(0,1,1,1,5)$, $\boldsymbol{f}_3=(0,0,0,3,-1)$.

17. Знайдіть таку систему лінійних рівнянь, множиною розв'язків якої є лінійний многовид $\boldsymbol{c} + W$, де $\boldsymbol{c} = (-8, 3, 6, 0)$, а підпростір W породжується вектором $\boldsymbol{f} = (-8, 4, 8, 1)$.

Додаткові задачі

18. Знайдіть необхідну й достатню умову для того, щоб n прямих $a_i x + b_i y = c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, проходили через одну точку.

19. Яка система лінійних рівнянь задає три різні прямі на площині, які утворюють трикутник?

20. Яка система лінійних рівнянь задає три площини у просторі, що не мають спільної точки, але попарно перетинаються?

21. Яка система лінійних рівнянь задає чотири площини у просторі, які утворюють тетраедр?

22. Укажіть геометричну інтерпретацію системи чотирьох лінійних рівнянь із трьома невідомими, у яких ранг розширеної матриці системи та ранги основних матриць для всіх трійок рівнянь дорівнюють 3.

23.° Доведіть, що для того, щоб система лінійних рівнянь з n невідомими та $n+1$ рівняннями, була сумісною, необхідно (але не достатньо), щоб визначник її розширеної матриці дорівнював 0. Покажіть, що ця умова буде також достатньою, якщо ранг основної матриці дорівнює n.

24. Доведіть, що дві СЛР будуть рівносильними тоді й лише тоді, коли будь–яке рівняння кожної з цих систем буде лінійною комбінацією рівнянь іншої системи.

Домашнє завдання

25. Знайдіть загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0; \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0; \end{aligned}$$

$$\text{c)}\ \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_5 = 0.$$

26. Доведіть, що коли стовпчики основної матриці СЛР лінійно незалежні, то СЛР має не більше одного розв'язку.

27. З'ясуйте, які з рядків матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0\,, \\ 5x_1 & - & 8x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,, \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0\,, \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

Література. [2, глава 2, §2; 4, глава I, §§1, 11; 5, розділ IX, §§1–2; 7, розділ 1, §§6–7; 12, глава 1].

Заняття 8. Алгебра матриць

Необхідні поняття. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ — матриці однакового розміру, то їх *сумою* $A+B$ називається матриця $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$. Додавати можна лише матриці однакового розміру.

Добутком $c \cdot A$ матриці $A = (a_{ij})$ на скаляр c називається матриця $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$. *Добутком* матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{n\times k}$ (розмірами $m \times n$ і $n \times k$ відповідно) називається матриця $AB = (r_{ij})$ розміром $m \times k$, де

$$r_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Не зовсім строго правило множення матриць можна сформулювати так: *елемент, що стоїть на перетині i–го рядка та j–го стовпця добутку AB, є скалярним добутком i–го рядка матриці A на j–й стовпець матриці B*. Перемножити дві матриці можна тоді й лише тоді, коли кількість стовпців першого множника дорівнює кількості рядків другого.

Транспонованою до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матриця

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, рядками матриці $A^\top$ є стовпці матриці A, а стовпцями — рядки матриці A.

Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ називається *симетричною*, якщо $A^\top = A$ (тобто якщо для довільних i, j виконується рівність $a_{ij} = a_{jj}$), і *кососиметричною*, якщо $A^\top = -A$ (тобто якщо для довільних i, j буде $a_{ij} = -a_{jj}$).

Значенням многочлена $f(x) = a_m x^m + a_{m_1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ від квадратної матриціA називається матриця

$$f(A) = a_m \cdot A^m + a_{m_1} \cdot A^{m-1} + \dots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E.$$

Матриця називається *елементарною*, якщо вона одержується з одиничної матриці за допомогою одного елементарного перетворення рядків або стовпців.

Необхідні твердження. **1.** *Властивості множення матриць*. Для довільних матриць A, B, C з коефіцієнтами з поля P і скаляра $c \in P$ виконуються такі рівності:

a) для нульової матриці 0 маємо $0 \cdot A = 0$ та $A \cdot 0 = 0$;

b) для одиничної матриці E маємо $E \cdot A = A$ та $A \cdot E = A$;

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

d) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$;

e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Множення матриць не є комутативним. Із двох добутків AB і BA може бути визначеним лише один. Навіть якщо обидва добутки визначені, то може виконуватися нерівність $AB \neq BA$.

2. *Теорема про властивості рядків і стовпців матриці добутку*.

a) Кожен стовпець матриці AB є лінійною комбінацією стовпців першого множника A, причому коефіцієнти цієї лінійної комбінації беруться з відповідного стовпця другого множника B.

b) Кожен рядок матриці AB є лінійною комбінацією рядків другого множника B, причому коефіцієнти цієї лінійної комбінації беруться з відповідного рядка першого множника A.

3. Ранг добутку AB двох матриць не перевищує рангу кожного з множників.

4. *Властивості транспонування матриць*:
a) $(A^\top)^\top = A$; b) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
c) $(cA)^\top = cA^\top$; d) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

5. Систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

можна записати у *матричному вигляді*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

де A — основна матриця системи, $\boldsymbol{x}$ — стовпець невідомих, а $\boldsymbol{b}$ — стовпець вільних членів.

6. Множення матриці A на елементарну матрицю зліва (справа) виконує відповідне елементарне перетворення рядків (стовпців) матриці A.

Приклади розв’язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть* $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix}^2$.

Розв’язання. Матриці множаться “рядок на стовпець”. Тому

$$\begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7{\cdot}7+(-18){\cdot}21+11{\cdot}9 & 7{\cdot}(-18)+(-18){\cdot}15+11{\cdot}(-8) & 7{\cdot}11+(-18){\cdot}21+11{\cdot}13 \\ 21{\cdot}7+15{\cdot}21+21{\cdot}9 & 21{\cdot}(-18)+15{\cdot}15+21{\cdot}(-8) & 21{\cdot}11+15{\cdot}21+21{\cdot}13 \\ 9{\cdot}7+(-8){\cdot}21+13{\cdot}9 & 9{\cdot}(-18)+(-8){\cdot}15+13{\cdot}(-8) & 9{\cdot}11+(-8){\cdot}21+13{\cdot}13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -230 & -484 & -158 \\ 651 & -321 & 819 \\ 12 & -386 & 100 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 2. *Обчисліть значення многочлена* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ *від матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Спочатку обчислюємо степені матриці A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$f(A) = A^3 + 2A^2 - 3A + 4E =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 \\ -4 & 0 & -4 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-3+4 & 10+8-3+0 & 12+12-6+0 \\ -2-4+3+0 & -4+0-3+4 & -8-4+0+0 \\ -4-2+0+0 & 6+6-3+0 & 6+8-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 18 \\ -3 & -3 & -12 \\ -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 3. *Доведіть, що добуток симетричних матриць буде симетричною матрицею тоді й лише тоді, коли вони комутують.*

Розв'язання. Нехай A та B — симетричні матриці. Тоді $A^\top = A$ та $B^\top = B$, звідки отримуємо: $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA$. З іншого боку, симетричність матриці AB рівносильна рівності $(AB)^\top = AB$. Тому добуток AB буде симетричною матрицею тоді й лише тоді, коли $BA = AB$. □

Задача 4. *Як зміниться добуток AB, якщо до i-го стовпця матриці B додати j-й, помножений на число c?*

Розв'язання. Додавання до i-го стовпця матриці B її j-го стовпця, помноженого на число c, рівносильне множенню матриці B справа на елементарну матрицю $E_{ji}(c)$. Тому після такого перетворення стовпців матриці B добуток AB заміниться на $A \cdot BE_{ji}(c)$. Оскільки множення матриць асоціативне, то $A \cdot BE_{ji}(c) = AB \cdot E_{ji}(c)$. Отже, до i-го стовпця матриці AB додасться її j-й стовпець, помножений на число c. □

Задача 5. *Розв'яжіть матричне рівняння* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб добуток двох матриць був визначений, кількість рядків другого множника має дорівнювати кількості стовпців першого, причому добуток має стільки стовпців, як і другой множник. Тому X є квадратною матрицею порядку 2.

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи результат із правою частиною рівняння, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 1, \\ 2x_2 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_3 &= 1, \\ 2x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Два останні рівняння можна опустити, а за вільні невідомі зручно взяти x_1 та x_2. Нехай $x_1 = a$, $x_2 = b$. Тоді $x_3 = 1 - 2a$, $x_4 = 1 - 2b$.

Таким чином, розв'язками матричного рівняння будуть усі матриці вигляду $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-2a & 1-2b \end{pmatrix}$ і тільки вони. $\square$

Задача 6. *Розв'яжіть матричне рівняння*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Як і при розв'язанні попередньої задачі, з порівняння розмірів множників випливає, що X є квадратною матрицею порядку 2. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Після нескладних обчислень у лівій частині рівняння отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 15x_1 + 21x_2 - 5x_3 - 7x_4 & 18x_1 + 24x_2 - 6x_3 - 8x_4 \\ 25x_1 + 35x_2 - 10x_3 - 14x_4 & 30x_1 + 40x_2 - 12x_3 - 16x_4 \end{pmatrix}.$$

Порівняння отриманого результату із правою частиною рівняння дає таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 15x_1 & + & 21x_2 & - & 5x_3 & - & 7x_4 & = & 14, \\ 18x_1 & + & 24x_2 & - & 6x_3 & - & 8x_4 & = & 16, \\ 25x_1 & + & 35x_2 & - & 10x_3 & - & 14x_4 & = & 9, \\ 30x_1 & + & 40x_2 & - & 12x_3 & - & 16x_4 & = & 10. \end{array} \tag{37}$$

Виписуємо матрицю системи (37)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 21 & -5 & -7 & 14 \\ 18 & 24 & -6 & -8 & 16 \\ 25 & 35 & -10 & -14 & 9 \\ 30 & 40 & -12 & -16 & 10 \end{array} \right)$$

і розв'язуємо цю систему методом Гаусса. Спочатку спрощуємо матрицю, віднімаючи від кожного рядка відповідне кратне першого рядка:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 21 & -5 & -7 & 14 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & -7 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -18 \end{array} \right).$$

Далі до першого рядка додаємо другий, помножений на −5, до третього — подвоєний другий, і переставляємо перший і третій рядки. Подальші перетворення ми вже не описуємо, оскільки вони є зрозумілими з вигляду відповідних матриць:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & -15 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -18 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 47 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -50 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Таким чином, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, звідки $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. □

Задача 7. *Знайдіть усі матриці, переставні з матрицею*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Якщо обидва добутки XA та AX визначені, то X є квадратною матрицею порядку 3. Нехай $X=(x_{ij})$. Тоді

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & x_{11} & x_{12}\\ 0 & x_{21} & x_{22}\\ 0 & x_{31} & x_{32}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Порівнюючи праві сторони цих рівностей, отримуємо:

$$x_{21} = x_{31} = x_{32} = 0, \quad x_{11} = x_{22} = x_{33}, \quad x_{12} = x_{23}.$$

Отже, матриця X буде переставною з матрицею A тоді й лише тоді, коли вона має вигляд $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. □

Задача 8. *Доведіть, що для довільних матриць A та B однакового розміру виконується нерівність* $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ — система стовпців матриці $A+B$, $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ — максимальна лінійно незалежна система стовпців матриці A, $\boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_m}$ — максимальна лінійно незалежна система стовпців матриці B. Тоді $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$, $\operatorname{rank} A = k$, $\operatorname{rank} B = m$. Крім того, кожен стовпець матриці A є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$, а кожен стовпець матриці B — лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_m}$.

Оскільки кожен стовпець матриці $A+B$ є сумою стовпця матриці A і стовпця матриці B, то кожен стовпець матриці $A+B$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}, \boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_m}$. Однак тоді

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\} \leq$$
$$\leq \operatorname{rank}\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}, \boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_m}\} = k + m = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

□

Задача 9. *Доведіть, що для довільних квадратних матриць A, B, і C одного порядку матриці $(A|B)$ і $(A+BC|B)$ мають однаковий ранг.*

Розв'язання. Нехай порядок матриць дорівнює n і $C = (c_{ij})$. k–й стовпець матриці $A+BC$ має вигляд $\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{d}_k$, де $\boldsymbol{a}_k$ — k–й стовпець матриці A, а $\boldsymbol{d}_k$ — k–й стовпець матриці BC. Із теореми 5 про властивості рядків і стовпців матриці добутку випливає, що $\boldsymbol{d}_k$ є лінійною комбінацією стовпців $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ матриці B, причому коефіцієнтами цієї лінійної комбінації е елементи k–го стовпця матриці C. Отже, k–й стовпець матриці $A+BC$ має вигляд

$$\boldsymbol{a}_k + c_{1k}\boldsymbol{b}_1 + c_{2k}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_{n-k}\boldsymbol{b}_n.$$

Якщо від одного зі стовпців матриці відняти лінійну комбінацію інших стовпців, то ранг матриці не зміниться. Тому якщо для кожного k від 1 до n від k–го стовпця матриці $(A+BC|B)$ (тобто від k–го стовпця матриці $A+BC$) відняти лінійну комбінацію $c_{1k}\boldsymbol{b}_1 + c_{2k}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_{n-k}\boldsymbol{b}_n$ стовпців матриці B, то ранг матриці не зміниться. Однак у результаті такого перетворення ми одержимо матрицю $(A|B)$. Отже, $\operatorname{rank}(A|B) = \operatorname{rank}(A+BC|B)$. □

Задача 10. *Доведіть, що матриця* $A=(\alpha_{ij})$ *має ранг* ≤ 1 *тоді й лише тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_m)^\top\cdot(b_1,b_2,\dots,b_n)=(a_ib_j).$$

Розв'язання. Оскільки перший множник $(a_1,a_2,\dots,a_m)^\top$ має лише один стовпець, а другий множник $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ — лише один рядок, то ранг кожного із множників не перевищує 1. А позаяк ранг добутку не перевищує рангу кожного із множників, то

$$\operatorname{rank}\big((a_1,a_2,\dots,a_m)^\top\cdot(b_1,b_2,\dots,b_n)\big)\le 1.$$

Тому лишилося показати, що кожну матрицю $A=(\alpha_{ij})$ рангу ≤ 1 можна подати в такому вигляді.

Нульова матриця розкладається в добуток нульового стовпчика на нульовий рядок. Тому далі можна вважати, що $A\ne 0$ і $\operatorname{rank}A=1$. Без обмеження загальності можна вважати, що перший стовпчик $\boldsymbol{a}_1=(a_1,a_2,\dots,a_m)^\top$ матриці A є ненульовим. Позаяк $\operatorname{rank}A=1$, то кожен із решти стовпчиків буде пропорційним першому:

$$\boldsymbol{a}_2=b_2\boldsymbol{a}_1,\quad \dots,\boldsymbol{a}_n=b_n\boldsymbol{a}_1.$$

Звідси

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_m)^\top\cdot(1,b_2,\dots,b_n).$$

□

Основні задачі

11. Обчисліть:

a) $\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&5\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}4&3\\7&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28&93\\38&-126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$; f) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$.

12. Обчисліть:

a) $\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&29\\2&18\\0&-3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&5&3\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&5\\-1&4&-2\\3&-1&1\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}3&0&2&0\\0&1&2&1\\2&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&1\\-1&1&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-3\\0&6&-3\\5&-2&8\end{pmatrix}$.

13. Обчисліть:

a) $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^6$.

14. Обчисліть $\begin{pmatrix} 748 & 749 & 750 \\ 798 & 799 & 780 \\ 848 & 849 & 850 \\ 898 & 899 & 880 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Обчисліть значення многочлена x^3-2x^2+1 від матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Обчисліть значення многочлена $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ порядку n.

17. Доведіть, що для всіх натуральних чисел n виконується рівність $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, де F_n — n–те число Фібоначчі (тобто $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всіх $n > 0$).

18. Доведіть, що кожна матриця розкладається в суму симетричної й кососиметричної матриць, причому тільки одним способом.

19. Доведіть, що квадратна матриця P є *ідемпотентною* (тобто задовольняє рівність $P^2 = P$) тоді й лише тоді, коли матриця $I = 2P-E$ є *інволютивною* (тобто задовольняє рівність $I^2 = E$).

20. Наведіть приклади таких матриць порядку 2, для яких: a) $B \neq 0$, але $B^2 = 0$; b) $FG = 0$, але жодна з матриць F і G не має нульових елементів.

21. Доведіть або спростуйте рівність $(AB)^2 = A^2B^2$.

22. Нехай $a = (a_1, \dots, a_n)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Оскільки добуток $a \cdot A \cdot a^\top$ є скаляром, то має зміст і добуток $(a \cdot A \cdot a^\top) \cdot a^\top$. З іншого боку, у добутку $(a \cdot A) \cdot (a^\top \cdot a^\top)$ вираз у других дужках змісту не має. Як це узгоджується з асоціативністю множення матриць?

23. Як зміниться добуток AB, якщо:
a) у кожного елемента матриці A змінити знак на протилежний;
b) кожен елемент кожного із множників замінити спряженим числом;
c) кожен елемент матриці B помножити на число c;
d) i-й рядок матриці A помножити на число $c \neq 0$;
e) i-й стовпець матриці B помножити на число $c \neq 0$;
f) стовпці матриці B написати у зворотному порядку;
g) переставити місцями i-й і j-й рядки матриці A;
h) переставити місцями i-й і j-й стовпці матриці B;
i) до i-го рядка матриці A додати j-й, помножений на число c?

24. Розв'яжіть матричне рівняння:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. Знайдіть усі матриці, переставні з матрицею:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

26. Доведіть, що матриця X порядку 2 комутує з кожною з матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ тоді й лише тоді, коли вона є скалярною.

27. Доведіть, що матриця A порядку n комутує з кожною матрицею порядку n тоді й лише тоді, коли вона є скалярною.

28. Сума $a_{11} + \cdots + a_{nn}$ діагональних елементів матриці $A = (a_{ij})$ називається *слідом* матриці A й позначається $\mathrm{sp}A$. Доведіть, що
a) $\mathrm{sp}(A+B) = \mathrm{sp}A + \mathrm{sp}B$; b) $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$.

29. Доведіть, що не існує таких матриць A та B, для яких виконувалась би рівність $AB - BA = E$.

30. Нехай A та B — матриці розмірами $n \times m$ і $m \times n$ відповідно, причому $n > m$. Доведіть, що матриця AB є виродженою.

31. Нехай A і B — квадратні матриці однакового порядку. Доведіть, що ранг кожної з таких матриць дорівнює $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$:
a) $\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & 4B \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B+B^2 \end{pmatrix}$.

32. Знайдіть усі такі матриці X, що для довільних матриць A та B рівності $XA = XB$, $AX = BX$ і $A = B$ є рівносильними.

Додаткові задачі

33. Доведіть, що:

a) підпростір $V \subseteq P^n$ є ядром деякого лінійного відображення $\varphi : P^n \to P^m$ тоді й лише тоді, коли $\dim V \geq n - m$;

b) підпростір $W \subseteq P^m$ є образом деякого лінійного відображення $\varphi : P^n \to P^m$ тоді й лише тоді, коли $\dim W \leq n$;

c) пара підпросторів $V \subseteq P^n$ і $W \subseteq P^m$ є відповідно ядром і образом деякого лінійного відображення $\varphi : P^n \to P^m$ тоді й лише тоді, коли $\dim V + \dim W = n$. Зокрема, підпростір $V \subseteq P^n$ є одночасно ядром і образом деякого лінійного перетворення $\varphi : P^n \to P^n$ тоді й лише тоді, коли $\dim V = n/2$.

34*. Обчисліть значення многочлена $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ від матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ порядку n.

35. Доведіть, що кожна матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ порядку 2 є "коренем" квадратного многочлена $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$.

36. Доведіть, що коли матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ має ранг 1, то для довільного $k > 1$ виконується рівність $A^k = (a+d)A^{k-1}$.

37. Доведіть, що коли для деякого натурального числа n виконується рівність $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = 0$, то $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$.

38. Знайдіть усі матриці X другого порядку, які задовольняють рівність: a) $X^2 = 0$; b) $X^2 = E$.

39. Доведіть, що коли $a + d = 0$, то існують такі матриці A і B другого порядку, що $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = AB - BA$.

40*. Розв'яжіть систему матричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X.$$

41. Нехай A — діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи попарно різні. Знайдіть усі матриці, які переставні з матрицею A.

42. Доведіть, що кожну невироджену матрицю можна розкласти в добуток елементарних матриць.

43. Нехай A — матриця рангу 1. Доведіть, що існує таке число c, що $A^2 = cA$.

44. Знайдіть усі матриці, які переставні з матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

порядку n.

45. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_k$ — матриці з однаковою кількістю рядків, а $A = (a_{ij})$ — невироджена матриця порядку k. Доведіть, що ранг матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11}A_1 & a_{12}A_2 & \dots & a_{1k}A_k \\ a_{21}A_1 & a_{22}A_2 & \dots & a_{2k}A_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}A_1 & a_{k2}A_2 & \dots & a_{kk}A_k \end{pmatrix}$$

дорівнює $\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \dots + \operatorname{rank}(A_k)$.

46.* Нехай $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ — розв'язки визначених систем лінійних рівнянь з тією самою основною матрицею і стовпчиками вільних членів відповідно $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$. Доведіть, що розв'язки $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли лінійно залежні стовпчики вільних членів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$.

47. Нехай $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B$ і вектор $\boldsymbol{x}$ є лінійною комбінацією стовпців матриці B. Доведіть, що тоді з рівності $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ випливає рівність $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

48. *Циркулянтом* $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Доведіть, що:
a) матриця буде циркулянтом тоді й лише тоді, коли вона є многочленом від матриці $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;
b) добуток двох циркулянтів також є циркулянтом;
c) будь–які два циркулянти комутують.

49. Скільки потрібно виконати операцій множення, щоб перемножити два циркулянти порядку n?

50*. Нехай вектори $\boldsymbol{x}_0^\top = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ та $\boldsymbol{y}_0^\top = (y_1', y_2', \dots, y_m')$ є розв'язками систем

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{і} \quad \begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m & = & c_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m & = & c_n \end{array},$$

відповідно. Доведіть, що

$$b_1y_1' + b_2y_2' + \dots + b_my_m' = c_1x_1' + c_2x_2' + \dots + c_nx_n'.$$

51*. Доведіть, що для довільних дійсної $(m \times n)$–матриці A і вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ система лінійних рівнянь $(A^\top A)\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$ буде сумісною.

Домашнє завдання

52. Обчисліть: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

53. Обчисліть добуток $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 213 & 510 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

54. Обчисліть $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

55. Розв'яжіть матричне рівняння:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

56. Знайдіть усі матриці, переставні з матрицею
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

57. Доведіть, що дійсна трикутна матриця комутує зі своєю транспонованою тоді й лише тоді, коли вона діагональна.

58. Доведіть, що для дійсної матриці A із рівності $\mathrm{sp}(AA^\top) = 0$ випливає рівність $A = 0$.

Література. [1, глава 1, §9; 5, розділ III; 7, розділ 4].

Заняття 9. Обернена матриця

Необхідні поняття. Матриця B називається *лівою оберненою* до матриці A, якщо $BA = E$. Аналогічно B називається *правою оберненою* до A , якщо $AB = E$.

Матриця B називається *оберненою* до матриці A, якщо $BA = AB = E$. Матриця, для якої існує обернена, називається *оборотною*.

Необхідні твердження. **1.** Якщо для квадратної матриці A існують ліва обернена B і права обернена C, то $B = C$.

2. Якщо A та B — оборотні матриці, то матриці A^{-1}, AB і $A^{\top}$ також будуть оборотними. При цьому:
a) $(A^{-1})^{-1} = A$;   b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;   c) $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.

3. *Критерій існування оберненої матриці.* Обернена матриця A^{-1} існує тоді й лише тоді, коли матриця A є невиродженою.

4. Якщо один із множників A чи B є невиродженою матрицею, то ранг добутку AB збігається з рангом другого множника.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. До матриці A дописуємо справа одиничну матрицю E такого самого порядку. Після того, як елементарними перетвореннями рядків матриці $(A|E)$ зведемо ліву частину до одиничної матриці, у правій частині отримаємо матрицю A^{-1}. Для цього спочатку від третього рядка віднімаємо другий:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Потім від двох перших рядків віднімаємо відповідні кратні третього і виконуємо перестановку рядків:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Подальші перетворення рядків зрозумілі з вигляду лівої частини матриці:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 41 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -38 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 41 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -34 & 24 \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}$. □

Задача 2. *Знайдіть обернену матрицю для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. До матриці A дописуємо справа одиничну матрицю E і додаємо всі рядки до першого:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a+1 & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a+1 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & a+1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & a+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4a+1 & 4a+1 & 4a+1 & 4a+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & a+1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & a+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Якщо $a = -1/4$, то в лівій частині матриці одержуємо нульовий рядок. Отже, при $a = -1/4$ матриця A буде виродженою, а тому оберненої матриці не буде. Далі вважаємо, що $a \neq -1/4$:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} \\ a & a+1 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & a+1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & a+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} & \frac{1}{4a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3a+1}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{-a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \dfrac{1}{4a+1}\begin{pmatrix} 3a+1 & -a & -a & -a \\ -a & 3a+1 & -a & -a \\ -a & -a & 3a+1 & -a \\ -a & -a & -a & 3a+1 \end{pmatrix}.$ □

Задача 3. *Знайдіть обернену матрицю для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

порядку n.

Розв'язання. До матриці A дописуємо справа одиничну матрицю E і додаємо всі рядки до першого:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a & b & b & \dots & b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b & b & a & \dots & b & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccccc} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b & b & \dots & b & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Якщо $a+(n-1)b=0$, то в лівій частині матриці з'являється нульовий рядок. Отже, при таких значеннях a та b матриця A буде виродженою й не матиме оберненої. Тому далі вважаємо, що $a \neq b(1-n)$. Ділимо перший рядок на $a+(n-1)b$, після чого від кожного рядка віднімаємо перший, помножений на b:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{a+(n-1)b} & \frac{1}{a+(n-1)b} & \cdots & \frac{1}{a+(n-1)b} \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 & \frac{-b}{a+(n-1)b} & \frac{a+(n-1)b-1}{a+(n-1)b} & \cdots & \frac{-b}{a+(n-1)b} \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 & \frac{-b}{a+(n-1)b} & \frac{-b}{a+(n-1)b} & \cdots & \frac{-b}{a+(n-1)b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & \frac{-b}{a+(n-1)b} & \frac{-b}{a+(n-1)b} & \cdots & \frac{a+(n-1)b-1}{a+(n-1)b} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Якщо $a-b=0$, то в лівій частині з'являються нульові рядки. Тому при $a=b$ матриця A буде виродженою й не матиме оберненої. Якщо ж $a \neq b$, то можна кожен рядок, крім першого, розділити на $a-b$, а потім від першого рядка відняти всі інші. Тоді в лівій частині отримаємо одиничну матрицю, а в правій — матрицю

$$\begin{pmatrix} \frac{a+(n-2)b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \cdots & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} \\ \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{a+(n-2)b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \cdots & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} \\ \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{a+(n-2)b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \cdots & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \frac{-b}{(a-b)(a+(n-1)b)} & \cdots & \frac{a+(n-2)b}{(a-b)(a+(n-1)b)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \dots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \dots & -b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & -b & \dots & a+(n-2)b \end{pmatrix},$$

яка і є матрицею, оберненою до A.

Таким чином, якщо $a=b(1-n)$ або $a=b$, то A^{-1} не існує, а в усіх інших випадках

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \dots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \dots & -b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & -b & \dots & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$ $\square$

Задача 4. *Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо:*

а) рядки матриці A переписати у зворотному порядку;

b) від кожного стовпця матриці A, крім останнього, відняти наступний стовпець;

c) кожен елемент матриці A замінити елементом, симетричним даному відносно "центра" матриці?

Розв'язання. Елементарне перетворення рядків (відповідно стовпців) матриці A можна замінити множенням матриці A на відповідну елементарну матрицю зліва (відповідно справа). Тому композицію кількох елементарних перетворень рядків (стовпців) можна замінити множенням матриці A зліва (справа) на добуток відповідних елементарних матриць. Це просте міркування можна використати, щоб з'ясувати, як змінюється матриця A^{-1} при певних перетвореннях рядків або стовпців матриці A.

a) Переписати у зворотному порядку рядки матриці A — це все одно, що матрицю A помножити зліва на матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто нова матриця — це BA. Якщо тепер переписати у зворотному порядку рядки нової матриці, то одержимо початкову матрицю A. Отже, $B \cdot BA = A$. Звідси $B^2 = E$, тобто матриця B є оберненою до себе. Використовуючи цей факт, отримуємо:

$$E = A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot E \cdot A = A^{-1} \cdot BB \cdot A = A^{-1}B \cdot BA.$$

Отже, оберненою до BA є матриця $A^{-1}B$. Проте множення матриці A^{-1} на матрицю B справа еквівалентне переписуванню стовпців матриці A^{-1} у зворотному порядку.

Таким чином, якщо рядки матриці A переписати у зворотному порядку, то в оберненій матриці A^{-1} перепишуться у зворотному порядку стовпці.

b) Віднімання від i–го стовпця матриці A її $(i+1)$–го стовпця еквівалентне множенню матриці A справа на матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

яка отримана з одиничної відніманням від i–го стовпця $(i+1)$–го стовпця. Тому відняти від кожного (крім останнього) стовпця матриці A її наступний стовпець — це все одно, що помножити A справа на матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернену до матриці B знаходимо легко:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(щоб зробити в лівій частині одиничну матрицю, треба до другого рядка додати перший, потім до третього — другий, до четвертого — третій і т.д.). Отже,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$E = A \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot BB^{-1} \cdot A^{-1} = AB \cdot B^{-1}A^{-1},$$

то оберненою до AB є матриця $B^{-1}A^{-1}$. Однак множення A^{-1} на матрицю B^{-1} зліва рівносильне додаванню до кожного рядка матриці A^{-1} усіх попередніх рядків.

Таким чином, якщо від кожного стовпця матриці A, крім останнього, відняти наступний стовпець, то в оберненій матриці A^{-1} до кожного рядка додадуться всі попередні рядки.

c) Якщо перейти на геометричну мову, то заміна кожного елемента матриці A елементом, симетричним даному відносно “центра” матриці, рівносильна повороту матриці на 180° навколо “центра”. Це перетворення можна розкласти в композицію двох: симетрії відносно горизонтальної прямої, що проходить через “центр”, і симетрії відносно вертикальної прямої, що проходить через “центр”. Перше перетворення рівносильне переписуванню у зворотному порядку рядків матриці, а друге — переписуванню у зворотному порядку стовпців матриці. Як показано в пункті а), перше перетворення приводить до переписування у зворотному порядку стовпців оберненої матриці. Аналогічно можна показати, що друге перетворення приводить до переписування у зворотному порядку рядків оберненої матриці. Композиція цих перетворень дасть поворот оберненої матриці на 180° навколо “центра”. Тому в оберненій матриці також кожен елемент заміниться елементом, симетричним даному відносно “центра” матриці. □

Задача 5. *Розв’яжіть матричне рівняння*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 35 \\ -41 & 57 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Якщо матриці A та B невироджені, то розв’язок матричного рівняння $AXB = C$ можна знайти таким чином:

$$X = A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}. \tag{38}$$

У нашому випадку кожна з матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ є невиродженою, оскільки матриця другого порядку вироджена тоді й лише тоді, коли її рядки пропорційні. Тому матрицю X можна шукати описаним вище способом. Спочатку шукаємо A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Далі шукаємо B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right).$$

Отже, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. Нарешті, використовуючи рівність (38), обчислюємо матрицю X:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -25 & 35 \\ -41 & 57 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -17 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Задача 6. *Нехай для квадратних матриць A та B існує таке натуральне число n, що $(AB)^n = E$. Чи випливає звідси, що $(BA)^n = E$?*

Розв'язання. За умовою $A \cdot B(AB)^{n-1} = E$, тому для матриці A існує права обернена матриця. Тоді матриця A є невиродженою і для неї існує обернена матриця A^{-1}. Перепишемо тепер рівність $(AB)^n = E$ у вигляді $A(BA)^{n-1}B = E$ і помножимо її зліва на A^{-1}, а справа — на A:

$$A^{-1} \cdot A(BA)^{n-1}B \cdot A = A^{-1} \cdot E \cdot A. \qquad (39)$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то (39) рівносильна рівності $(BA)^{n-1} \cdot BA = E$, тобто $(BA)^n = E$.

Отже, якщо$(AB)^n = E$, то $(BA)^n = E$. $\square$

Основні задачі

7. Знайдіть обернену матрицю для матриці:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Знайдіть обернену матрицю для матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Знайдіть обернену матрицю для матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Знайдіть обернену матрицю для матриці порядку n:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Розв'яжіть матричне рівняння:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

12. Доведіть, що для оборотних матриць A та B з рівності $(AB)^2 = A^2B^2$ випливає рівність $AB = BA$.

13. Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо:
a) змінити знак кожного елемента матриці A на протилежний;
b) у матриці A з комплексними елементами кожен елемент замінити спряженим числом;
c) i-й рядок матриці A помножити на число $c \neq 0$;
d) у матриці A знак кожного елемента a_{ij} з парною сумою $i + j$ індексів змінити на протилежний;
e) стовпці матриці A переписати у зворотному порядку;
f) переставити місцями i–й та j–й стовпці матриці A;
g) до i–го рядка матриці A додати j–й, помножений на число c;
h) кожен елемент матриці A замінити елементом, симетричним даному відносно побічної діагоналі;
i) від кожного рядка матриці A, крім останнього, відняти наступний рядок?

14. Нехай A та B — ненульові квадратні матриці одного порядку. Доведіть, що коли $AB = 0$, то обидві матриці A та B є виродженими.

15. Нехай A та B — матриці розмірами $n \times m$ і $m \times n$ відповідно, причому $AB = E_n$ і $BA = E_m$. Доведіть, що $n = m$.

16. Нехай A та B — квадратні матриці одного порядку, причому матриця A є невиродженою. Доведіть, що для довільного многочлена $f(x)$ виконується рівність $A \cdot f(B) \cdot A^{-1} = f(ABA^{-1})$.

17. Доведіть, що матриця, обернена до невиродженої симетричної матриці, також є симетричною.

18. Нехай $A = B + iC$ (де B і C — дійсні матриці) — невироджена комплексна матриця порядку n, причому $A^{-1} = P + iQ$. Доведіть, що дійсні матриці $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$ порядку $2n$ є взаємно оберненими.

19. Нехай J_n — квадратна матриця порядку n, усі елементи якої дорівнюють 1. Доведіть, що матриця $E - J_n$ є невиродженою, причому $(E - J_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1} J_n$.

Додаткові задачі

20. Чи існують невироджені матриці A та B, які задовольняють рівність $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

21. Доведіть, що коли матриця A є коренем многочлена з ненульовим вільним членом, то вона є невиродженою.

22. Доведіть, що коли матриця A задовольняє рівність $A^k = 0$, то матриця $E - A$ є невиродженою.

23*. Нехай $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Знайдіть обернену матрицю для матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

24*. Знайдіть обернену матрицю для матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

25*. Знайдіть обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

26.** Нехай $A = (a_{ij})$ — матриця порядку n, у якій $a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$. Знайдіть обернену матрицю.

27. Нехай A — невироджена матриця з невід'ємними коефіцієнтами. Доведіть, що обернена матриця A^{-1} має невід'ємні коефіцієнти тоді й лише тоді, коли в кожному рядку і кожному стовпці матриці A є єдиний ненульовий елемент.

28. Матриця A називається інволютивною, якщо $A^2 = E$, і ортогональною, якщо $A^\top = A^{-1}$. Доведіть, що кожна із трьох властивостей матриць — симетричність, інволютивність, ортогональність — випливає з інших двох.

29. Нехай A та B — невироджені матриці порядків m та n відповідно, C — довільна $(m \times n)$–матриця. Доведіть, що

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

30. Нехай рядки матриці A розміром $m \times n$ є лінійно незалежними. Доведіть, що існує така матриця B, що $AB = E_m$.

31*. Доведіть, що коли циркулянт A є невиродженою матрицею, то обернена матриця A^{-1} також є циркулянтом.

32*. Нехай у невиродженій матриці A сума елементів кожного рядка дорівнює a. Доведіть, що в оберненій матриці A^{-1} сума елементів кожного рядка однакова, і знайдіть цю суму.

Домашнє завдання

33. Знайдіть обернену матрицю для матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

34. Знайдіть обернену матрицю для матриці:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

35. Знайдіть обернену матрицю для матриці порядку n:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $(n > 1)$; b) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

36. Розв’яжіть матричне рівняння: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

37. Як зміниться обернена матриця A^{-1}, якщо:
а) кожен елемент матриці A помножити на число $a \neq 0$;

b) i-й стовпець матриці A помножити на число $c \neq 0$;
c) у матриці A знак кожного елемента a_{ij} з непарною сумою $i + j$ індексів змінити на протилежний;
d) переставити місцями i–й та j–й рядки матриці A;
e) до i–го стовпця матриці A додати j–й, помножений на число c?

38. Доведіть, що коли матриця A — невироджена, то для довільної матриці B матриці $A + B$ та $E + A^{-1}B$ або одночасно вироджені, або одночасно невироджені.

Література. [1, глава 1, §9; 5, розділ III, §3; 7, розділ 4, §3]

Заняття 10. Підстановки

Необхідні поняття. Підстановкою на множині $N = \{1, 2, \dots, n\}$ називається взаємно однозначне відображення множини N на себе. Якщо підстановка π відображає 1 в i_1, 2 в i_2, ..., n в i_n, то її можна задати таблицею

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

яку називають *стандартним* записом підстановки π. Множина всіх підстановок на множині N позначається символом S_n. Підстановки із S_n називають *підстановками степеня n*.

Тотожне відображення множини N на себе називається *одиничною підстановкою* і позначається символом ε.

Якщо π і τ — дві підстановки із S_n, то їх *добутком* $\pi \cdot \tau$ (або просто $\pi\tau$) є підстановка на N, визначена правилом:

$$(\pi \cdot \tau)(i) = \tau(\pi(i)) \quad \text{для всіх } i \in N.$$

Якщо підстановка π відображає a_1 в a_2, a_2 в a_3, ..., a_{k-1} в a_k, a_k в a_1, а решту елементів не рухає, то π називається *циклом* довжиною k. Такий цикл часто позначають символом $(a_1 \ a_2 \ \dots a_k)$, причому запис може починатися з довільного елемента циклу. Цикли, які не мають спільних елементів, називаються *незалежними*. Кожну підстановку можна розкласти в добуток незалежних циклів (так званий *цикловий запис* підстановки). Якщо такий розклад містить l_1 циклів довжиною 1, l_2 циклів довжиною 2, ..., l_n циклів довжиною n, то кажуть, що підстановка має *цикловий тип* $(l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Цикли довжиною 2 називають *транспозиціями*.

Елементи a_i та a_j утворюють *інверсію* в перестановці $a_1, a_2, \dots, a_n$ елементів $1, 2, \dots n$, якщо $i < j$, але $a_i > a_j$. Суму кількості інверсій у верхньому й нижньому рядках підстановки π називають кількістю інверсій цієї підстановки і позначають $N(\pi)$. Підстановка називається *парною*, якщо вона має парну кількість інверсій, і *непарною* у протилежному випадку.

Знаком $\operatorname{sign} \pi$ підстановки π називається число $\operatorname{sign} \pi = (-1)^{N(\pi)}$.

Найменше натуральне число k, для якого виконується рівність $\pi^k = \varepsilon$, називається *порядком* підстановки π і позначається $|\pi|$.

Необхідні твердження. **1.** Множина S_n містить $n!$ підстановок.

2. *Властивості множення підстановок*:

а) множення підстановок *асоціативне*: $\pi \cdot (\tau \cdot \mu) = (\pi \cdot \tau) \cdot \mu$ для довільних підстановок $\pi, \tau, \mu \in S_n$;

b) множення підстановок, узагалі кажучи, *не комутативне*: для кожного $n > 2$ існують такі підстановки $\pi, \tau \in S_n$, що $\pi \cdot \tau \neq \tau \cdot \pi$;

c) *тотожна* підстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ має властивості нейтрального елемента (одиниці) для множення, тобто $\pi \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \pi = \pi$ для кожної підстановки $\pi \in S_n$;

d) для кожної підстановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

обернена підстановка

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

має властивості оберненого елемента, тобто $\pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = \varepsilon$.

3. Кожна підстановка розкладається в добуток транспозицій.

4. Парність кількості інверсій $N(\pi)$ підстановки π є властивістю самої підстановки й не залежить від способу її запису.

5. *Властивості парних і непарних підстановок*:

a) Кожна транспозиція є непарною підстановкою.

b) $sign(\pi_1 \pi_2) = sign\, \pi_1 \cdot sign\, \pi_2$. Зокрема, добуток підстановок однакової парності є парною підстановкою, а добуток підстановок різної парності — непарною.

c) Парність підстановки збігається з парністю кількості множників у розкладі підстановки в добуток транспозицій. Зокрема, парність кількості множників не залежить від способу розкладання підстановки в добуток транспозицій.

d) Якщо $n > 1$, то в S_n кількість парних підстановок дорівнює кількості непарних і дорівнює $n!/2$.

e) Підстановка й обернена до неї мають однакову парність.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть добуток підстановок*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За правилом множення підстановок $(\pi \cdot \tau)(i) = \tau(\pi(i))$

для всіх i. У нашому випадку

$$
\begin{aligned}
&(\pi\cdot\tau)(1)=\tau(\pi(1))=\tau(2)=5, && (\pi\cdot\tau)(2)=\tau(\pi(6))=\tau(6)=6,\\
&(\pi\cdot\tau)(3)=\tau(\pi(3))=\tau(4)=2, && (\pi\cdot\tau)(4)=\tau(\pi(4))=\tau(1)=3,\\
&(\pi\cdot\tau)(5)=\tau(\pi(5))=\tau(5)=4, && (\pi\cdot\tau)(6)=\tau(\pi(6))=\tau(3)=1.
\end{aligned}
$$

Добуток дорівнює $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&2&3&4&1\end{pmatrix}$. □

Задача 2. *Обчисліть добуток* $(2\,4\,5\,6)(1\,2)(5\,3\,2\,7)(1\,6\,5\,7)(2\,5)$.

Розв'язання. Знайдемо послідовні образи точки 1 під дією кожного із множників:

$$1\mapsto 1\mapsto 2\mapsto 7\mapsto 1\mapsto 1.$$

Отже, добуток лишає точку 1 нерухомою.

Аналогічно шукаємо образи інших точок:

$$
\begin{aligned}
&2\mapsto 4\mapsto 4\mapsto 4\mapsto 4\mapsto 4, && 3\mapsto 3\mapsto 3\mapsto 2\mapsto 2\mapsto 5,\\
&4\mapsto 5\mapsto 5\mapsto 3\mapsto 3\mapsto 3, && 5\mapsto 6\mapsto 6\mapsto 6\mapsto 5\mapsto 2,\\
&6\mapsto 2\mapsto 1\mapsto 1\mapsto 5\mapsto 6, && 7\mapsto 7\mapsto 7\mapsto 5\mapsto 7\mapsto 7.
\end{aligned}
$$

Звідси маємо, що добуток дорівнює $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&5&3&2&6&7\end{pmatrix}$. □

Задача 3. *Розкладіть підстановку*

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\10&5&8&9&7&3&2&4&6&1\end{pmatrix}$$

у добуток незалежних циклів і знайдіть її порядок.

Розв'язання. Спочатку знайдемо цикли підстановки π:

$$1\mapsto 10\mapsto 1,\quad 2\mapsto 5\mapsto 7\mapsto 2,\quad 3\mapsto 8\mapsto 4\mapsto 9\mapsto 6\mapsto 3.$$

Таким чином, підстановка π має три цикли: $(1\,10)$, $(2\,5\,7)$ і $(3\,8\,4\,9\,6)$. Тому її розклад у добуток незалежних циклів має вигляд

$$\pi=(1\,10)(2\,5\,7)(3\,8\,4\,9\,6).$$

Зрозуміло, що порядок циклу $(a_1\,a_2\,\dots\,a_{k-1}\,a_k)$ (тобто найменше m, при якому степінь $(a_1\,a_2\,\dots\,a_{k-1}\,a_k)^m$ є тотожним перетворенням множини $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$) дорівнює його довжині k. А в загальному випадку рівність

$$(a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k)^n = \varepsilon$$

матиме місце тоді й лише тоді, коли показник n буде кратним k.

Оскільки цикли: $(1\ 10)$, $(2\ 5\ 7)$ і $(3\ 8\ 4\ 9\ 6)$ діють на незалежних множинах, то

$$\pi^n = (1\ 10)^n (2\ 5\ 7)^n (3\ 8\ 4\ 9\ 6)^n.$$

Тому рівність $\pi^n = \varepsilon$ буде виконуватися тоді й лише тоді, коли кожен зі степенів $(1\ 10)^n$, $(2\ 5\ 7)^n$ і $(3\ 8\ 4\ 9\ 6)^n$ дасть тотожну підстановку на відповідній множині, тобто тоді й лише тоді, коли показник n буде кратним кожному з чисел 2, 3 і 5. Отже, порядок підстановки π є найменшим спільним кратним чисел 2, 3 і 5, тобто $|\pi| = 30$. □

Задача 4. *Розкладіть підстановку*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & 2k & 2k+1 & \ldots & 3k \\ k+1 & k+2 & \ldots & 2k & 2k+1 & \ldots & 3k & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

у добуток незалежних циклів та знайдіть її цикловий тип і порядок.

Розв'язання. Легко переконатися, що для кожного числа m із множини $\{1, 2, \ldots, k\}$ маємо цикл

$$m \mapsto k + m \mapsto 2k + m \mapsto m$$

довжиною 3. Крім того, різним m із множини $\{1, 2, \ldots, k\}$ відповідають різні цикли і кожне число з множини $\{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, 3k\}$ належить одному з циклів вигляду $(m,\ k{+}m,\ 2k{+}m)$. Тому підстановка π розкладається в добуток

$$\pi = (1,\ k{+}1,\ 2k{+}1)(2,\ k{+}2,\ 2k{+}2)\cdots(k,\ k{+}k,\ 2k{+}k)$$

k незалежних циклів довжиною 3.

Позаяк усі незалежні цикли мають довжину 3, то порядок підстановки π (як найменше спільне кратне довжин циклів) також дорівнює 3. □

Задача 5. *Розкладіть підстановку* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *у добуток транспозицій.*

Розв'язання. Спочатку розкладемо цю підстановку в добуток незалежних циклів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,2\,6)(4\,5\,7). \tag{40}$$

Згадаємо, що цикл довжиною k можна розкласти в добуток транспозицій таким чином:

$$(a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k) = (a_1\, a_2) \cdot (a_1\, a_3) \cdot \,\cdots\, \cdot (a_1\, a_k). \tag{41}$$

Із рівностей (40) і (41) тепер одержуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3)(1\,2)(1\,6)(4\,5)(4\,7). \qquad \square$$

Задача 6. *Знайдіть кількість тих підстановок із S_6, які переставні з підстановкою $\pi = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$.*

Розв'язання. Нехай підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

переставна з підстановкою $\pi = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$. Це дає рівність

$$\pi(a_1) = \pi(\tau(1)) = \tau(\pi(1)) = \tau(2) = a_2.$$

Подібним чином отримуємо і рівність $\pi(a_2) = a_1$. У результаті маємо таку діаграму:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 1 \arrow[d, "\tau"'] \\
a_1 \arrow[r, "\pi"'] & a_2 \arrow[r, "\pi"'] & a_1
\end{tikzcd}$$

Аналогічно для циклу $(3\,4\,5\,6)$ отримуємо діаграму

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 4 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 5 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 6 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"'] & 3 \arrow[d, "\tau"'] \\
a_3 \arrow[r, "\pi"'] & a_4 \arrow[r, "\pi"'] & a_5 \arrow[r, "\pi"'] & a_6 \arrow[r, "\pi"'] & a_3
\end{tikzcd}$$

Таким чином, підстановка π повинна містити цикли $(a_1\ a_2)$ і $(a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$. Отже,

$$(a_1\ a_2) = (1\ 2), \quad (a_3\ a_4\ a_5\ a_6) = (3\ 4\ 5\ 6).$$

Цикл можна починати виписувати з довільного його елемента. Тому a_1 можна вибрати двома способами як елемент множини $\{1,2\}$ (після чого елемент a_2 визначається однозначно), а a_3 — чотирма способами як елемент множини $\{3,4,5,6\}$ (після чого однозначно визначаються елементи a_4, a_5 і a_6). Оскільки вибір елементів a_1 і a_3 можна робити незалежно, то загалом маємо $2 \cdot 4 = 8$ варіантів для підстановки τ. □

Задача 7. *Який найбільший порядок може мати підстановка з S_8?*

Розв'язання. Як випливає з розв'язання задачі 3, порядок підстановки дорівнює найменшому спільному кратному довжин циклів із розкладу підстановки в добуток незалежних циклів. З іншого боку, сума довжин незалежних циклів дорівнює степеню підстановки. Тому задачу можна переформулювати таким чином:

для всіх можливих розкладів $8 = a_1 + \cdots + a_k$ числа 8 у суму натуральних доданків $a_1, \ldots, a_k$ знайти найбільше значення, якого може набувати найменше спільне кратне НСК$(a_1, \ldots, a_k)$ цих доданків.

Якщо найбільше з чисел $a_1, \ldots, a_k$ не перевищує 4, то

$$\text{НСК}(a_1, \ldots, a_k) \leq 4 \cdot 3 = 12.$$

Випадки, коли найбільше з чисел $a_1, \ldots, a_k$ є більшим ніж 4, легко перебираються:

$$\text{НСК}(5,3) = 15, \quad \text{НСК}(5,2,1) = 10, \quad \text{НСК}(5,1,1,1) = 5,$$
$$\text{НСК}(6,2) = \text{НСК}(6,1,1) = 6, \quad \text{НСК}(7,1) = 7, \quad \text{НСК}(8) = 8.$$

Отже, найбільший порядок підстановки із S_8 дорівнює 15. □

Задача 8. *Як зміниться розклад підстановки в добуток незалежних циклів, якщо її помножити (зліва або справа) на транспозицію $(i\ j)$?*

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли i та j належать різним циклам підстановки. У цьому випадку маємо:

$$(i\ j)(i\ a\ \ldots\ b)(j\ c\ \ldots\ d) = (i\ \ c\ \ldots\ d\ \ j\ \ a\ \ldots\ b),$$
$$(i\ a\ \ldots\ b)(j\ c\ \ldots\ d)(i\ j) = (i\ \ a\ \ldots\ b\ \ j\ \ c\ \ldots\ d).$$

Отже, якщо i та j належать різним циклам підстановки, то після множення на транспозицію $(i\ j)$ ці два цикли зливаються в один.

Нехай тепер i та j належать тому самому циклу. Тоді

$$(i\ j)(i\ a\ \ldots\ b\ j\ c\ \ldots\ d) = (i\ \ c\ \ldots\ d)(j\ \ a\ \ldots\ b),$$
$$(i\ a\ \ldots\ b\ j\ c\ \ldots\ d)(i\ j) = (i\ \ a\ \ldots\ b)(j\ \ c\ \ldots\ d).$$

У цьому випадку цикл, що містив i та j, розпадається на два. □

Задача 9. *Доведіть, що коли в стандартному записі підстановки π є k інверсій, то її можна розкласти в добуток k транспозицій сусідніх елементів і не можна розкласти в добуток меншої кількості таких транспозицій.*

Розв'язання. Нехай підстановку π розклали в добуток транспозицій сусідніх елементів:

$$\pi = (i_m,\, i_m+1)\cdots(i_2,\, i_2+1)(i_1,\, i_1+1) =$$
$$= (i_m,\, i_m+1)\cdots(i_2,\, i_2+1)(i_1,\, i_1+1)\varepsilon.$$

Якщо підстановка τ має вигляд

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ a_1 & \ldots & a_r & a_{r+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

то після множення зліва на транспозицію $(r,\, r+1)$ сусідніх елементів маємо:

$$(r,\, r+1)\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ a_1 & \ldots & a_{r+1} & a_r & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Тому при переході від τ до $(r,\, r+1)\tau$ кількість інверсій могла або збільшитися на 1 (якщо $a_{r+1} > a_r$), або зменшитися на 1 (якщо $a_{r+1} < a_r$). У кожному разі при множенні зліва на транспозицію сусідніх елементів кількість інверсій зростає не більше ніж на 1.

Позаяк тотожна підстановка ε у стандартному записі має 0 інверсій, то добуток $(i_m,\, i_m+1)\cdots(i_2,\, i_2+1)(i_1,\, i_1+1)\varepsilon$ має не більше ніж m інверсій. Тому $m \geq k$ і розкласти π в добуток менше ніж k транспозицій сусідніх елементів не можна.

З іншого боку, якщо підстановка

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ a_1 & \ldots & a_r & a_{r+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

має хоча б одну інверсію, то в нижньому рядку знайдуться такі сусідні елементи a_r і a_{r+1}, що $a_r > a_{r+1}$. Однак тоді підстановка $(r,\, r+1)\tau$

має на одну інверсію менше, ніж τ. Якщо підстановка $(r,\ r+1)\tau$ також має інверсії, то аналогічно доводиться існування такої транспозиції $(t,\ t+1)$ сусідніх елементів, що добуток $(t,\ t+1)(r,\ r+1)\tau$ має на дві інверсії менше, ніж τ і т. д.

Застосовуючи це міркування до підстановки π, ми зможемо знайти такі k транспозицій $(j_1,\ j_1+1)$, $(j_2,\ j_2+1)$, $\ldots$, $(j_k,\ j_k+1)$ сусідніх елементів, що

$$(j_k,\ j_k+1)\cdots(j_2,\ j_2+1)(j_1,\ j_1+1)\pi = \varepsilon.$$

Проте тоді

$$\pi = (j_1,\ j_1+1)(j_2,\ j_2+1)\cdots(j_k,\ j_k+1).$$

Отже, у добуток k транспозицій сусідніх елементів підстановку π розкласти можна. $\square$

Основні задачі

10. Розкладіть дану підстановку в добуток незалежних циклів:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n & 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 3n-3 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Запишіть дану підстановку в табличному вигляді:

a) $(1\,5\,2\,7)(4\,6\,3)$; b) $(1\,8\,2\,3)(5\,4\,7)$; c) $(1\,4\,2\,8)(3\,9\,5)(6\,7)$.

12. Обчисліть добуток:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^2$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^3$.

13. Обчисліть добуток:

a) (5 2 1 4)(7 2 1)(3 4)(2 5 1 6);

b) (2 4 7 3)(1 3 5)(2 1 7 5)(1 5 7).

14. Розкладіть у добуток транспозицій сусідніх елементів транспозицію: a) (3 5); b) (2 6).

15. Розкладіть у добуток транспозицій підстановку:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

16. Знайдіть із рівності $a \cdot x \cdot b = c$ підстановку x, якщо:

a) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Розкладіть підстановку π у добуток незалежних циклів і знайдіть її порядок:

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 1 & 11 & 10 & 7 & 3 & 9 & 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 12 & 7 & 9 & 8 & 10 & 6 & 11 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 10 & 7 & 2 & 11 & 8 & 9 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Розкладіть підстановку π у добуток незалежних циклів та знайдіть її цикловий тип і порядок:

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k & 2k+1 & \dots & 3k \\ 2k+1 & 2k+2 & \dots & 3k & 1 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k \end{pmatrix}$;

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+2 & n+1 & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

19. Обчисліть π^{1000}, якщо:

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 9 & 4 & 10 & 12 & 1 & 5 & 2 & 11 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Знайдіть циклові типи і порядки підстановок τ^4, τ^5, τ^6, τ^9, τ^{12}, якщо:

a) $\tau = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15)$;

b) $\tau = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16)$.

21. Знайдіть парність підстановки:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 8 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Підрахуйте кількість інверсій у стандартному табличному записі кожної з підстановок із зад. 11.

23. Знайдіть кількість інверсій і вкажіть парність перестановки:

a) $k, k+1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, k-1$;

b) $k, k+1, \ldots, n, k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.

24. Знайдіть кількість інверсій і вкажіть парність перестановки:

a) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n$;

b) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;

c) $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$.

25. Знайдіть знак підстановки:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & \ldots & & \ldots \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 1\;3\;5 & \ldots & & \ldots \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2\;4\;6 & \ldots & & \ldots \end{pmatrix}$.

26. Який найбільший порядок може мати підстановка із: a) S_5; b) S_6; c) S_{10}?

27. Знайдіть кількість тих підстановок із S_5, які переставні з підстановкою: a) $(1\,2\,3\,4\,5)$; b) $(12)(34)$.

28. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

a) Яку найбільшу кількість інверсій вона може мати?

b) Скільки інверсій утворює число 1, якщо воно стоїть на k–му місці?

c) Скільки інверсій утворює число n, якщо воно стоїть на k–му місці?

d) Якщо перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ має m інверсій, то скільки інверсій має перестановка $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$?

e) Як зміниться кількість інверсій, якщо в перестановці $a_1, a_2, \ldots, a_n$ поміняти місцями числа r і $r+1$?

29. Доведіть, що кількість тих перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, які мають k інверсій, дорівнює кількості тих перестановок, які мають $\binom{n}{2} - k$ інверсій.

30. Доведіть, що для довільного числа k, $0 \le k \le \binom{n}{2}$, існує перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, яка має рівно k інверсій.

31. Знайдіть загальну кількість інверсій у всіх перестановках чисел $1, 2, \ldots, n$.

32. Доведіть, що множення підстановки на транспозицію (i, j) зліва рівносильне перестановці елементів i та j у верхньому рядку підстановки, а множення на ту саму транспозицію справа рівносильне перестановці елементів i та j у нижньому рядку підстановки.

33. Доведіть, що цикл довжиною k завжди можна розкласти в добуток $k-1$ транспозиції й не можна розкласти в добуток меншої кількості транспозицій.

34. a) Доведіть, що від однієї перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$ до іншої перестановки цих чисел завжди можна перейти за допомогою не більше ніж $n-1$ транспозицій.
b) Доведіть, що менше ніж $n-1$ транспозицій може не вистачити.

35. Доведіть, що кожну підстановку із S_n можна розкласти в добуток:

a) транспозицій (1 2), (1 3), (1 4), …, (1 n)};

b) циклів довжиною 4 ($n \geq 4$);

c) множників, кожен з яких є або транспозицією (1 2), або циклом (1 2 3 … n).

36. Нехай π — цикл довжиною n. Знайдіть кількість і довжини циклів у розкладі π^k у добуток незалежних циклів.

37. Доведіть, що підстановка непарного порядку завжди є парною.

38. Яким буде знак підстановки, якщо вона має рівно l_1 циклів довжиною 1, рівно l_2 циклів довжиною 2, …, рівно l_n циклів довжиною n?

Додаткові задачі

39.* Доведіть, що при стандартному записі пряма й обернена підстановки мають однакову кількість інверсій.

40. Позначимо через $I_n(k)$ кількість тих перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, які мають рівно k інверсій. Доведіть, що для довільних натуральних чисел $k < n$ виконується рівність $I_n(k) = I_{n-1}(k) + I_n(k-1)$.

41. Доведіть, що для чисел $I_n(k)$ із зад. 40 виконуються такі рівності:

a) $I_n(0) = 1$; b) $I_n(1) = n-1$; c) $I_n(2) = \binom{n}{2} - 1$, $n \geq 2$;

d)* $I_n(3) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{1}$, $n \geq 3$;

e)* $I_n(4) = \binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{2}$, $n \geq 4$;

f)* $I_n(5) = \binom{n+3}{5} - \binom{n+2}{3} + 1$, $n \geq 5$.

42. Доведіть, що для чисел $I_n(k)$ із зад. 40 виконуються такі рівності:

a) $I_{n+1}(k) = I_n(k) + I_n(k-1) + I_n(k-2) + \cdots + I_n(k-n)$;

b)* $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} I_n(k) x^k = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+x+\cdots+x^{n-1})$.

43. Позначимо через $l(\tau)$ довжину найкоротшого розкладу підстановки $\tau \in S_n$ у добуток транспозицій. Знайдіть $\max\limits_{\tau \in S_n} l(\tau)$.

44. Доведіть, що кожна підстановка із S_n однозначно розкладається в добуток транспозицій вигляду $(1a_1)(2a_2)(3a_3)\cdots(na_n)$, де $1 \leq a_k \leq k$ для всіх k.

45*. Доведіть, що добуток $\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1}$ транспозицій $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$ із S_n буде циклом довжиною n тоді й лише тоді, коли граф, що відповідає цій множині транспозицій, буде деревом.

46**. У множині S_n вибрали $n-1$ транспозицію $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$. Доведіть, що кожна підстановка із S_n розкладається в добуток вибраних транспозицій тоді й лише тоді, коли добуток $\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1}$ є циклом довжиною n.

47. Доведіть, що кожну парну підстановку із S_n можна розкласти в добуток:

a) циклів довжиною 3;

b) циклів довжиною 5 ($n \geq 5$);

c) циклів (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), ..., (1 2 n);

d) циклів {(1 2 3), (2 3 4), (3 4 5), ..., (n–2 n–1 n).

48. Доведіть, що кожну підстановку із S_n можна розкласти в добуток двох елементів порядку ≤ 2.

49. Для підстановок із S_n підрахуйте:

a) середню кількість циклів довжиною k у цикловому розкладі підстановки;

b) середню кількість циклів у цикловому розкладі підстановки.

50. Доведіть, що порядок підстановки із S_n не перевищує числа:

a)* $n^{\pi(n)}$, де $\pi(n)$ — кількість простих чисел, які не перевищують числа n;

b)** $e^{n/e}$.

51. Нехай $n > 1$. Підрахуйте кількість тих підстановок із S_n, в яких два дані елементи належать одному циклу.

52*. Доведіть, що коли підстановки π і τ із S_n мають взаємно прості порядки і комутують, то будь–який цикл підстановки π має не більше однієї спільної точки з будь–яким циклом підстановки τ.

53. Доведіть, що всі $n!$ підстановок із S_n можна розставити по циклу таким чином, щоб кожна наступна підстановка одержувалася з попередньої транспозицією двох сусідніх елементів.

Домашнє завдання

54. Обчисліть добуток (3 5)(1 4 7 6)(2 3 4)(2 7 3 5).

55. Обчисліть π^{200}, якщо

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 9 & 4 & 10 & 12 & 1 & 5 & 2 & 11 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

56. Знайдіть із рівності $a \cdot x \cdot b = c$ підстановку x, якщо

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$,
$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

57. Розкладіть підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k & 2k+1 & \dots & 3k \\ k & k-1 & \dots & 1 & 2k+1 & \dots & 3k & k+1 & \dots & 2k \end{pmatrix}$$

у добуток незалежних циклів та знайдіть її цикловий тип і порядок.

58. Знайдіть циклові типи й порядки підстановок τ^4, τ^5, τ^6, τ^9, τ^{12}, якщо $\tau = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18)$.

59. Знайдіть кількість інверсій і вкажіть парність перестановки:
a) $2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n$;
b) $k, k+1, \dots, n, 1, 2, \dots, k-1$.

60. Який найбільший порядок може мати підстановка із: a) S_9; b) S_{12}?

61. Знайдіть кількість підстановок:
a) із S_5, які переставні з підстановкою $\pi = (1\,2)(3\,4\,5)$;
b) із S_6, які переставні з підстановкою $\pi = (1\,2\,3)(4\,5\,6)$.

62. Підрахуйте кількість тих підстановок із S_n, в яких даний елемент i належить циклу даної довжини k.

Література. [4, глава I, § 2–3; 5, розділ II, § 1; 7, розділ 2].

Заняття 11. Визначники – 1

Необхідні поняття. Визначником порядку n над полем P називається функція det, яка визначена на множині $M_n(P)$ усіх квадратних матриць порядку n з коефіцієнтами з поля P, набуває значень у полі P і задовольняє такі умови:

a) функція det є полілінійною від набору векторів-стовпців матриці;

b) функція det є знакозмінною, тобто значення det дорівнює 0, якщо серед стовпців матриці є два однакові;

c) функція det є нормованою, тобто значення det від одиничної матриці E дорівнює 1.

Визначник квадратної матриці A позначають $\det A$ або $|A|$. Визначник матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

позначають також

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Необхідні твердження. **1.** *Явна формула для визначника*: визначник квадратної матриці (a_{ij}) порядку n обчислюється за формулою

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{42}$$

де сума береться за всіма підстановками $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)$ із S_n.

Зокрема, для визначників другого і третього порядків маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{43}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{44}$$

2. *Теорема про визначник транспонованої матриці*: $\det A^\top = \det A$.

3. При обчисленні визначника квадратної матриці її рядки і стовпці рівноправні. Зокрема, визначник матриці є полілінійною знакозмінною нормованою функцією від її рядків.

4. *Властивості визначника*:

a) Якщо серед рядків (стовпців) визначника є нульовий, то визначник дорівнює 0.

b) Якщо серед рядків (стовпців) визначника є пропорційні, то визначник дорівнює 0.

b) Якщо рядки (стовпці) визначника є лінійно залежними, то визначник дорівнює 0.

c) Значення визначника не змінюється, якщо до одного з рядків (стовпців) додати довільне кратне іншого рядка (стовпця).

d) Значення визначника не змінюється, якщо до одного з рядків (стовпців) додати довільну лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

e) Значення визначника змінюється на протилежне, якщо переставити місцями два рядки (два стовпці).

5. Якщо матриця $A = (a_{ij})$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

де B і C — квадратні матриці, то $\det A = \det B \cdot \det C$.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Яких значень можуть набувати індекси i, j, k, якщо добуток $a_{46}a_{5i}a_{63}a_{2j}a_{12}a_{3k}a_{75}$ входить у явну формулу для визначника сьомого порядку зі знаком плюс?*

Розв'язання. Щоб добуток $a_{46}a_{5i}a_{63}a_{2j}a_{12}a_{3k}a_{75}$ входив у явну формулу для визначника сьомого порядку, відображення, задане таблицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & j & k & 6 & i & 3 & 5 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

має бути підстановкою. Тому $\{i, j, k\} = \{1, 4, 7\}$. Множину $\{1, 4, 7\}$ можна впорядкувати $3! = 6$ різними способами. Розглянемо спочатку випадок, коли вона впорядкована за зростанням: $(i, j, k) = (1, 4, 7)$. У цьому випадку підстановка (45) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Вона містить 10 інверсій і тому є парною. Отже, у цьому випадку відповідний добуток входить у явну формулу зі знаком плюс.

Кожна транспозиція перестановки $(1,4,7)$ буде індукувати відповідну транспозицію підстановки (46). Оскільки при транспозиції підстановка змінює знак на протилежний, то для кожного з наборів $(i,j,k)=(4,1,7)$, $(i,j,k)=(7,4,1)$ і $(i,j,k)=(1,7,4)$ відповідний добуток входитиме в явну формулу зі знаком мінус. Лишаються ще два набори $(i,j,k)=(7,1,4)$ і $(i,j,k)=(4,7,1)$, які одержуємо з початкового набору $(1,4,7)$ за допомогою двох транспозицій. Оскільки після двох транспозицій знак підстановки не змінюється, то відповідні добутки входитимуть у явну формулу зі знаком плюс.

Таким чином, добуток $a_{46}a_{5i}a_{63}a_{2j}a_{12}a_{3k}a_{75}$ входить у явну формулу для визначника сьомого порядку зі знаком плюс тоді й лише тоді, коли набір (i,j,k) збігається з одним із наборів $(1,4,7)$, $(7,1,4)$ або $(4,7,1)$. □

Задача 2. *Із яким знаком входить у явну формулу для визначника порядку n добуток: a) елементів головної діагоналі; b) елементів побічної діагоналі?*

Розв'язання. a) Добутку $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ елементів головної діагоналі відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Ця підстановка містить 0 інверсій, а тому є парною. Отже, добуток елементів головної діагоналі входить у явну формулу зі знаком плюс.

b) Добутку $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ елементів побічної діагоналі відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця підстановка містить

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

інверсій. Легко бачити, що число $\dfrac{n(n-1)}{2}$ буде парним, якщо $n=4k$ або $n=4k+1$, і непарним, якщо $n=4k+2$ або $n=4k+3$. Тому добуток елементів побічної діагоналі входить у явну формулу зі знаком плюс, якщо $n=4k$ або $n=4k+1$, і зі знаком мінус, якщо $n=4k+2$ або $n=4k+3$. □

Задача 3. *Обчисліть визначник* $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & 0 & 0 & 0 & g \\ h & 0 & 0 & 0 & i \\ j & 0 & 0 & 0 & k \\ l & m & n & o & p \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розглянемо довільний доданок $a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_4 4}$ із явної формули для визначника п'ятого порядку. Щоб цей доданок був ненульовим, множники $a_{i_2 2}$, $a_{i_3 3}$ і $a_{i_4 4}$ треба брати лише з першого або п'ятого рядків. Однак з кожного рядка можна взяти лише один множник. Тому принаймні один із множників $a_{i_2 2}$, $a_{i_3 3}$ і $a_{i_4 4}$ буде дорівнювати 0.

Таким чином, кожен доданок із явної формули для визначника дорівнює 0. Отже, визначник дорівнює 0. □

Задача 4. *Як зміниться визначник порядку n, якщо:*

a) кожний його елемент замінити спряженим числом;

b) кожний елемент a_{ij} визначника помножити на a^{i-j}, де $a \neq 0$;

c) кожний його елемент замінити елементом, симетричним даному відносно "центра" визначника;

d) із кожного стовпця, крім останнього, відняти наступний стовпець, а від останнього стовпця відняти попередній перший стовпець?

Розв'язання. a) Використовуючи явну формулу для визначника і властивості спряжених чисел, маємо:

$$\det(\overline{a_{ij}}) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot \overline{a_{i_1 1}} \cdot \overline{a_{i_2 2}} \cdots \overline{a_{i_n n}} =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot \overline{a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}} =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \overline{\operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}} =$$

$$= \overline{\sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}} = \overline{\det(a_{ij})}.$$

Отже, визначник заміниться на спряжений.

b) Використовуючи явну формулу для визначника, маємо:

$$\det(a^{i-j}a_{ij}) =$$
$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a^{i_1-1}a_{i_1 1} \cdot a^{i_2-2}a_{i_2 2} \cdots a^{i_n-n}a_{i_n n} =$$
$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a^{(i_1+i_2+\dots+i_n)-(1+2+\dots+n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

Однак числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ — це числа $1, 2, \dots, n$, тільки, можливо, в іншому порядку. Тому $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 1 + 2 + \dots + n$. Тоді

$$a^{(i_1+i_2+\dots+i_n)-(1+2+\dots+n)} = a^0 = 1$$

та

$$\det(a^{i-j}a_{ij}) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \cdot a_{i_1 1}a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \det(a_{ij}).$$

Отже, визначник не зміниться.

c) Заміну кожного елемента визначника симетричним йому відносно "центра" елементом можна зробити у два кроки: спочатку переставимо у зворотному порядку стовпці початкового визначника, а потім переставимо у зворотному порядку рядки утвореного визначника. Перестановку у зворотному порядку стовпців можна звести до виконання певної кількості перестановок двох стовпців, а перестановку у зворотному порядку рядків — до виконання такої самої кількості аналогічних перестановок двох рядків. При кожній перестановці двох рядків (стовпців) значення визначника змінюється на протилежне. Оскільки загальна кількість перестановок двох рядків (стовпців) виходить парною, то визначник не зміниться.

d) Позначимо стовпці через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ початкового визначника. Тоді стовпцями нового визначника будуть

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1.$$

Позаяк

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + \dots + (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1) = \mathbf{0},$$

то стовпці нового визначника є лінійно залежними, а тому він дорівнює 0. □

Задача 5. *Обчисліть визначники:*

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. a) Використовуючи формулу (15), отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot i\cdot(1-i) + 0\cdot(-i)\cdot(1+i) - (1+i)\cdot 1\cdot(1-i) -$$
$$-0\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot i\cdot(-i) = 1+0+0-2-0-1 = -2.$$

b) Розкладаючи кожен стовпець у суму двох, отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ 1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x_1y_3 \\ 1 & 1 & 1+x_2y_2 \\ 1 & 1 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1 & x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ 1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 & 1+x_1y_3 \\ x_2y_1 & 1 & 1+x_2y_2 \\ x_3y_1 & 1 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & 1+x_2y_2 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1y_3 \\ 1 & 1 & x_2y_2 \\ 1 & 1 & x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & 1 \\ 1 & x_2y_2 & 1 \\ 1 & x_3y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ 1 & x_2y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 & 1 \\ x_2y_1 & 1 & 1 \\ x_3y_1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & 1 & x_2y_2 \\ x_3y_1 & 1 & x_3y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & 1 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & 1 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_2 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

Кожен із восьми отриманих доданків містить принаймні або два стовпці з одиниць, або два стовпці, пропорційні стовпцю $(x_1, x_2, x_3)^\top$. В обох випадках такий визначник дорівнює 0, а тому вся сума дорівнює 0. □

Задача 6. *Доведіть, що для довільних квадратних матриць A та B однакового порядку виконується рівність*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Розв'язання. Використовуючи лише додавання до одного рядка (стовпця) кратного іншого рядка (стовпця), отримуємо:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -B & -A \\ A+B & A+B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-B & -A \\ 0 & A+B \end{pmatrix}.$$

Останній визначник є блочно-трикутним, тому він дорівнює $\det(A+B)\det(A-B)$. □

Основні задачі

7. Чи входить даний добуток у явну формулу для визначника відповідного порядку, а якщо входить, то з яким знаком:
a) $a_{53}a_{62}a_{31}a_{42}a_{55}a_{64}$; b) $a_{46}a_{51}a_{63}a_{25}a_{12}a_{34}$; c) $a_{35}a_{14}a_{61}a_{23}a_{32}a_{56}$?

8. Підберіть i та j так, щоб добуток
a) $a_{36}a_{5i}a_{23}a_{6j}a_{12}a_{44}$, b) $a_{46}a_{i3}a_{65}a_{22}a_{j1}a_{34}$
входив у явну формулу для визначника шостого порядку зі знаком плюс.

9. Знайдіть коефіцієнти, з якими x^4 та x^3 входять у визначник

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & 2x & 1 & -x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

10. Доведіть, що коли у визначнику порядку n на перетині деяких k рядків і m стовпців стоять нулі та $k+m>n$, то такий визначник дорівнює 0.

11. Нехай A — квадратна матриця порядку 3, усі коефіцієнти якої дорівнюють ± 1. Доведіть, що визначник $|A|$ є парним числом.

12. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -x & 0 & & 0\cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -x \end{vmatrix}$.

13. Чому дорівнює визначник, у якого сума рядків із парними номерами дорівнює сумі рядків із непарними номерами?

14. Як зміниться визначник порядку n, якщо:

a) у кожного його елемента змінити знак на протилежний;

b) у кожного його елемента a_{ij} з непарною сумою $i+j$ індексів змінити знак на протилежний;

c) у кожного його елемента a_{ij} з парною сумою $i+j$ індексів змінити знак на протилежний;

d) його стовпці написати у зворотному порядку;

e) кожний його елемент замінити елементом, симетричним даному відносно головної діагоналі;

f) його матрицю повернути проти годинникової стрілки на 90° навколо “центра” визначника;

g) від кожного стовпця, крім останнього, відняти наступний стовпець;

h) останній стовпець поставити на перше місце, а решту стовпців змістити вправо, зберігаючи їх розташування.

15. Використовуючи рівності $43 \cdot 30 = 1290$, $43 \cdot 53 = 2279$, $43 \cdot 87 = 3741$, $43 \cdot 109 = 4687$, доведіть, що визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

ділиться на 43.

16. Доведіть, що

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

17. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$.

18. Доведіть, що для довільних дійсних чисел a, b, c, d корені рівняння

a) $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$

також є дійсними.

19. Нехай $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$.

20. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b) \\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a) \\ 2(ca+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \end{vmatrix}$.

21. Доведіть, що коли для довільних $i \neq j$ коефіцієнти дійсної квадратної матриці $A = (a_{ij})$ задовольняють нерівність $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, то $\det A \neq 0$.

22. Доведіть, що визначник кососиметричної матриці непарного порядку дорівнює 0.

23. Яку найменшу кількість нулів можна взяти і де їх розмістити в матриці порядку n, щоб гарантувати рівність визначника цієї матриці нулеві?

Додаткові задачі

24. a) Доведіть, що не існує такої дійсної матриці (a_{ij}) порядку 3, для якої всі доданки $\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3}$ з розкладу визначника $\det(a_{ij})$ були б додатними.
b) Доведіть, що попереднє твердження залишається правильним для визначників довільного порядку $n > 2$.

25. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} a_1+x & x & \cdots & x \\ x & a_2+x & \cdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

26. Три прямі $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, задовольняють умову

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведіть, що ці прямі або попарно паралельні, або перетинаються в одній точці.

27. Нехай точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) не лежать на одній прямій. Доведіть, що рівняння кола, яке проходить через ці точки, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

28. Доведіть, що коли коло проходить через три точки з раціональними координатами, то центр кола також має раціональні координати.

29. Нехай $f_i(x) = a_0^i + a_1^i x + \dots + a_{n-2}^i x^{n-2}$, $(i = 1, \dots, n)$ — многочлени степеня $\leq n-2$, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ — попарно різні числа. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} f_1(b_1) & f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n) \\ f_2(b_1) & f_2(b_2) & \cdots & f_2(b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(b_1) & f_n(b_2) & \cdots & f_n(b_n) \end{vmatrix}.$$

30. Нехай A та B — квадратні дійсні матриці порядку n. Доведіть, що для матриці

$$C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

порядку $2n$ виконується рівність

$$\det C = |\det(A + iB)|^2.$$

Домашнє завдання

31. Доведіть, що визначник матриці $\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ B & C & D \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}$, де A, B, C, D, F — довільні квадратні матриці однакового порядку, дорівнює 0.

32. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

33. Як зміниться визначник порядку n, якщо:

a) кожний його елемент помножити на число a;

b) кожний його елемент замінити елементом, симетричним даному відносно побічної діагоналі;

c) із кожного рядка, крім першого, відняти всі попередні рядки;

d) до кожного рядка, крім першого, додати попередній рядок, а до першого — останній рядок початкової матриці.

34. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, де $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,

c) $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$.

35. Доведіть, що для довільних дійсних чисел a, b, c і комплексних чисел u, v, z дійсна частина визначника $\begin{vmatrix} u & v & z \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{z} \\ a & b & c \end{vmatrix}$ дорівнює 0.

Література. [1, глава 2, §4; 2, глава 4; 4, глава I, §2–3; 5, розділ II, §§2–3; 7, розділ 3, §§1–2; 12, глава 4, §1–3].

Заняття 12. Визначники – 2

Необхідні поняття. Мінором порядку k матриці A називається визначник квадратної матриці порядку k, що складається з елементів, які стоять на перетині певних k рядків і k стовпців матриці A (зі збереженням відносного порядку цих рядків і стовпців).

Якщо потрібно явно вказати номери вибраних рядків і стовпців, то мінор порядку k позначають $M_{\{i_1,\dots,i_k\}}^{\{j_1,\dots,j_k\}}$ (знизу — номери вибраних рядків, угорі — стовпців).

Мінор квадратної матриці A, який одержуємо викреслюванням її i–го рядка та j–го стовпця, називається *доповняльним* мінором елемента a_{ij} матриці A та позначається $\overline{M}_i^j$.

Якщо взяти суму всіх тих доданків із явної формули для визначника матриці $A = (a_{ij})$, які містять даний елемент a_{ij}, і винести спільний множник a_{ij} за дужки, то сума, що залишиться в дужках, називається *алгебричним доповненням* елемента a_{ij} і позначається A_{ij}.

Необхідні твердження. **1.** Визначник трикутної матриці дорівнює добуткові її діагональних елементів.

2. $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_i^j$, де $\overline{M}_i^j$ — доповняльний мінор елемента a_{ij}.

3. *Теорема про розклад визначника за своїм рядком або стовпцем*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,.$$

4. *Теорема про розклад визначника за чужим рядком або стовпцем*:

Якщо $i \neq j$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki} = 0\,.$$

5. Є три основні прийоми обчислення визначників (зокрема, з нечисловими коефіцієнтами та довільного порядку):

1) зведення до трикутного вигляду;
2) розкриття за рядком (стовпцем);
3) виділення лінійних множників.

Не завжди можна обмежитися лише одним із цих прийомів, частіше їх доводиться комбінувати.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть визначники:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 3+x & 3+x & 4+x \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. a) Зводимо визначник до трикутного вигляду, ураховуючи, що при додаванні до одного рядка кратного іншого рядка визначник не змінюється. Спочатку від кожного рядка віднімаємо перший:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} =,$$

від третього рядка віднімаємо другий, а потім до четвертого рядка додаємо утворений третій:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник є трикутним. Тому він дорівнює добутку діагональних елементів: $1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-4) = 16$.

b) Віднімаємо від другого і третього рядків перший і виносимо з другого рядка спільний множник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 3+x & 3+x & 4+x \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & 1+x & x & x \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & x & x \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} =$$

переставляємо перший і другий рядки, а потім від третього стовпця віднімаємо перший:

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1+x & x & x \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1+x & x & x \\ 1 & -3 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

від третього стовпця віднімаємо другий, а від четвертого — подвоєний другий:

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x & -1 & -x-2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =,$$

нарешті від четвертого стовпця віднімаємо третій, помножений на $x + 2$, і обчислюємо отриманий трикутний визначник:

$$= -x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 2x+5 \end{vmatrix} = (-x) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (2x+5) = 4x^2 + 10.$$

c) Віднімаємо від першого рядка останній, а потім, віднімаючи від кожного рядка відповідне кратне нового першого рядка, робимо в першому стовпці нулі:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

розкриваємо визначник за першим стовпцем, а потім від другого і четвертого рядків віднімаємо перший:

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

нарешті переставимо другий і третій рядки:

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отримали трикутний визначник, у якому ненульові елементи стоять на *побічній* діагоналі. Добуток елементів цієї діагоналі треба брати зі знаком $\operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Підстановка $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ є непарною. Тому визначник дорівнює

$$-1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-1) = 5.$$

□

Задача 2. *Обчисліть визначники за допомогою зведення до трикутного вигляду:*

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. a) Віднімемо від кожного рядка останній:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

Отримали трикутну матрицю. Тому її визначник дорівнює добуткові діагональних елементів:

$$(1-n)\cdot(2-n)\cdot(3-n)\cdots(-1)\cdot n =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots 1\cdot n = (-1)^{n-1}n!.$$

b) Додаємо всі стовпці до першого, виносимо з першого стовпця спільний множник, а потім від кожного стовпця, починаючи з другого, віднімаємо відповідне кратне першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_2+\cdots+a_n+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1+a_2+\cdots+a_n+x & a_2+x & \cdots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1+a_2+\cdots+a_n+x & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1+a_2+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1+a_2+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Остання матриця є трикутною, а її визначник дорівнює добуткові діагональних елементів. Тому початковий визначник дорівнює

$$(a_1 + \cdots + a_n + x)x^{n-1}.$$

□

Задача 3. *Обчисліть визначник* $\det(a_{ij})$ *порядку* n, *якщо* $a_{ij} = \min(i, j)$.

Розв'язання. Наш визначник має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Від кожного рядка, починаючи з останнього, віднімемо попередній. Одержимо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник є трикутним, тому він дорівнює добуткові діагональних елементів, тобто 1. □

Задача 4. *Обчисліть визначник*

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

порядку n.

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим стовпцем.

Одержимо:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix}$$

Обидва отримані визначники є трикутними й дорівнюють відповідно x^{n-1} та y^{n-1}. Тому початковий визначник дорівнює

$$x \cdot x^{n-1} + y \cdot (-1)^{n+1} y^{n-1} = x^n - (-1)^n y^n. \qquad \square$$

Основні задачі

5. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$.

6. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$.

7. Обчисліть визначники:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix};\ \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Розв'яжіть рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ x+1 & 2 & 3 & x+4 \\ 2 & x-3 & x-4 & x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Обчисліть визначники за допомогою зведення до трикутного вигляду:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix};\ \text{d)}\ \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

10. Обчисліть визначники:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

11. Обчисліть визначник $\det(a_{ij})$ порядку n, якщо $a_{ij} = |i-j|$.

12. Обчисліть визначники за допомогою розкладу за рядком/стовпцем:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

13. Знайдіть кількість ненульових членів у розкладі визначника:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ c_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & b_3 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix}; \ \text{b)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Додаткові задачі

14. Доведіть, що кожна матриця, визначник якої дорівнює 1, розкладається в добуток елементарних матриць вигляду $E_{ij}(a)$.

15*. Нехай A, B, C, D — квадратні матриці однакового порядку, причому $\det A \neq 0$. Доведіть, що

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)\,.$$

16*. Нехай A, B, C, D — квадратні матриці однакового порядку, причому $\det A \neq 0$. Доведіть, що:

a) коли $AC = CA$, то $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$;

b) коли $AB = BA$, то $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.

17. Нехай A та B — вектори–рядки довжиною n, а E — одинична матриця порядку n. Доведіть, що $\det(E + B^\top A) = 1 + AB^\top$.

18.** Доведіть рівність

$$(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} =$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}
\frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\
\frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= 2^n \begin{vmatrix}
\frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\
\frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!}
\end{vmatrix}.
$$

Домашнє завдання

19. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 23571 & 23471 \\ 19725 & 19625 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1014 & 543 & 443 \\ 246 & 427 & 327 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{vmatrix}$.

20. Обчисліть визначники:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

21. Обчисліть визначники за допомогою зведення до трикутного вигляду:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{12} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. Обчисліть визначник $\det(a_{ij})$ порядку n, якщо $a_{ij} = \max(i, j)$.

23. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + x & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + x & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_n \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 + x & \dots & a_3 a_n \\ \hdotsfor{5} \\ a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_3 & \dots & a_n^2 + x \end{vmatrix}.$$

Література. [1, глава 2, §4; 2, глава 4; 4, глава I, §3–5; 5, розділ II, §§3–4; 7, розділ 3, §§1–3; 12, глава 4, §§1–3].

Заняття 13. Визначники – 3

Необхідні поняття. Найбільший із порядків ненульових мінорів матриці A називається *мінорним рангом* матриці A і позначається $r_{\min}(A)$.

Необхідні твердження. **1.** *Теорема про явний вигляд оберненої матриці*: якщо визначник матриці $A = (a_{ij})$ не дорівнює 0, то обернена до A матриця існує і має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^\top = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ji}) .$$

2. *Теорема про мінорний ранг*: $r_{\min}(A) = \operatorname{rank}(A)$.

3. *Теорема Крамера*. Квадратна система лінійних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ буде визначеною тоді й лише тоді, коли її основна матриця A є невиродженою. Якщо матриця A — невироджена, то єдиний розв'язок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ знаходимо за формулами

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де Δ — визначник матриці A, а Δ_k — визначник матриці, яка одержується з A заміною k–го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$ вільних членів.

4. *Теорема Коші*: для довільних квадратних матриць A та B однакового порядку виконується рівність $|AB| = |A| \cdot |B|$.

5. Якщо A є квадратною матрицею з цілими коефіцієнтами, то обернена матриця A^{-1} буде мати цілі коефіцієнти тоді й лише тоді, коли $|A| = \pm 1$.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Нехай A — матриця порядку n і $r(A) < n$. Доведіть, що для довільного i набір $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})$ алгебричних доповнень буде розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Розв'язання. Якщо $r(A) < n$, то $|A| = 0$. Тоді з теореми про розклад визначника за своїм рядком випливає, що для довільного i виконується рівність

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A| = 0.$$

Крім того, з теореми про розклад визначника за чужим рядком випливає, що для довільних $j \neq i$ виконується рівність

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0.$$

Отже, $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ є розв'язком кожного з рівнянь однорідної системи $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Задача 2. *Використовуючи задачу 1, знайдіть загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь*

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0,$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0.$$

Розв'язання. Доповнимо систему тривіальним рівнянням

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0.$$

Очевидно, що нова система рівносильна початковій. Розглянемо алгебричні доповнення елементів першого рядка основної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

утвореної системи:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 10, \ A_{12} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = -2, \ A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -5.$$

Оскільки матриця A вироджена, то згідно із задачею 1 набір

$$(A_{11}, A_{12}, A_{13}) = (10, -2, -5)$$

є розв'язком даної однорідної системи лінійних рівнянь. Крім того, з виродженості матриці A й того, що серед її мінорів другого порядку є ненульові, випливає, що $\operatorname{rank} A = 2$. Це означає, що простір розв'язків даної системи має розмірність $3 - 2 = 1$ і породжується будь-яким своїм ненульовим вектором. Тому загальний розв'язок має вигляд $c(10, -2, -5)$. □

Задача 3. *Як зміниться приєднана матриця A^*, якщо переставити i–й та j–й стовпці матриці A?*

Розв'язання. Нехай $A = (a_{km})$, $A^* = (A_{mk})$, $B = (b_{km})$ — матриця, утворена з A перестановкою i–го та j–го стовпців, $B^* = (B_{km})$. Якщо $k \notin i, j$, то доповняльний мінор елемента b_{mk} отримується з доповняльного мінора елемента a_{mk} перестановкою двох стовпців. Позаяк при такому перетворенні визначник змінює знак на протилежний, то

$B_{mk} = -A_{mk}$. Алгебричні доповнення елементів стовпця даної матриці утворюють рядок її приєднаної матриці. Тому всі елементи рядків, відмінних від i–го та j–го, утворюються з відповідних рядків матриці A^* заміною знака на протилежний.

Розглянемо тепер доповняльний мінор $\overline{M}_k^{\prime\, i}$ елемента з i–го стовпця матриці B. Він одержується з доповняльного мінора $\overline{M}_k^i$ матриці A заміною елементів a_{kj} із j–го стовпця матриці A відповідними елементами a_{ki} її i–го стовпця. Таку заміну можна зробити, якщо взяти доповняльний мінор $\overline{M}_k^j$ матриці A і переставити стовпець, утворений з i–го стовпця матриці A, на $|j-i|-1$ позицій. Тому $\overline{M}_k^{\prime\, i} = (-1)^{j-i-1}\overline{M}_k^j$. Тоді

$$B_{ki} = (-1)k + i\overline{M}_k^{\prime\, i} = (-1)k + i \cdot (-1)^{j-i-1}\overline{M}_k^j =$$
$$= (-1)^{k+j-1}\overline{M}_k^j = -(-1)^{k+j}\overline{M}_k^j = -A_{kj}.$$

Таким чином, в i–му рядку матриці B^* будуть стояти відповідні елементи j–го рядка матриці A^* із протилежними знаками. Аналогічно доводиться, що в j–му рядку матриці B^* будуть стояти елементи, протилежні до відповідних елементів i–го рядка матриці A^*.

Отже, якщо переставити i–й та j–й стовпці матриці A, то в приєднаній матриці всі елементи змінять знак на протилежний і переставляться i-й та j-й рядки. $\square$

Задача 4. *Обчисліть визначник за допомогою знаходження рекурентної формули:*

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 5 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. а) Позначимо визначник через D_n і розкладемо його за першим рядком:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Визначник у першому доданку — це D_{n-1}, а визначник у другому доданку розкладемо ще раз, але вже за першим стовпцем:

$$2D_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Обчислимо D_n для малих значень n:

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D_3 = 2D_2 - D_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4,$$
$$D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5; \quad D_5 = 2D_4 - D_3 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Легко помітити, що $D_n = n + 1$. Проте поки що це лише гіпотеза. Щоб її довести, застосуємо математичну індукцію. База індукції в нас уже є. А індукційний крок перевіряється легко: якщо $D_{n-1} = (n-1) + 1 = n$ і $D_{n-2} = (n-2) + 1 = n - 1$, то

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n + 1.$$

b) Цей визначник, як і попередній, має вигляд

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Неважко знайти рекурентну формулу для такого визначника у загальному випадку. Справді, розкриваючи цей визначник за першим рядком, а потім другий з отриманих доданків — за першим стовпцем, матимемо:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & \dots & 0 \\ c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= aD_{n-1} - bc \cdot \begin{vmatrix} a & b & \dots & 0 \\ c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

Зокрема, для нашого визначника отримуємо рекурентну формулу $D_n = 5D_{n-1} - 3D_{n-2}$. Обчислимо D_n для малих значень n:

$$D_1 = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 22, \quad D_3 = 5D_2 - 3D_1 = 5 \cdot 22 - 3 \cdot 5 = 95,$$
$$D_4 = 5D_3 - 3D_2 = 5 \cdot 95 - 3 \cdot 22 = 409;$$
$$D_5 = 5D_4 - 3D_3 = 5 \cdot 409 - 3 \cdot 95 = 1760.$$

На відміну від попередньої задачі, тут набагато важче помітити, як D_n виражається через свій номер n. Насправді ми маємо справу із частковим випадком такої задачі:

Послідовність $(a_n)_{n \geq 1}$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \dots + A_k a_{n-k}, \quad n > k, \tag{47}$$

зі сталими коефіцієнтами A_1, A_2, $\dots$, A_k. Потрібно знайти явний вираз члена a_n через його номер n, якщо відомі k перших членів a_1, a_2, $\dots$, a_k.

У повному обсязі ця задача розглядається в курсах дискретної математики та комбінаторного аналізу. Ми обмежимося випадком $k = 2$ (ще одне обмеження буде сформульоване трохи пізніше). Спочатку зробимо кілька загальних зауважень про послідовності $(a_n)_{n \geq 1}$, які задовольняють рекурентне співвідношення

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2}. \tag{48}$$

1. Для довільних a_1 і a_2 існує єдина послідовність $(a_n)_{n \geq 1}$, яка задовольняє рекурентне співвідношення (48).

2. Якщо послідовність $(a_n)_{n \geq 1}$ задовольняє рекурентне співвідношення (48), то й довільне її кратне $\alpha \cdot (a_n)_{n \geq 1} = (\alpha a_n)_{n \geq 1}$ задовольняє це співвідношення. Справді,

$$A_1 \cdot \alpha a_{n-1} + A_2 \cdot \alpha a_{n-2} = \alpha \cdot (A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2}) = \alpha a_n.$$

3. Якщо кожна з послідовностей $(a_n)_{n\geq1}$ і $(b_n)_{n\geq1}$ задовольняє рекурентне співвідношення (48), то їх сума $(a_n+b_n)_{n\geq1}$ також задовольняє це співвідношення. Справді,

$$A_1(a_{n-1}+b_{n-1})+A_2(a_{n-2}+b_{n-2})=$$
$$=(A_1a_{n-1}+A_2a_{n-2})+(A_1b_{n-1}+A_2b_{n-2})=a_n+b_n.$$

Із цих властивостей випливає, що коли кожна з послідовностей $(a_n)_{n\geq1}$ і $(b_n)_{n\geq1}$ задовольняє співвідношення (48), тоді й будь-яка їх лінійна комбінація $(\alpha\cdot a_n+\beta\cdot b_n)_{n\geq1}$ задовольняє це співвідношення.

Зауважимо, що при $k=1$ співвідношення (47) набуває вигляду $a_n=A_1a_{n-1}$, тобто визначає геометричну прогресію з першим членом a_1 і знаменником A_1. З'ясуємо, чи існують геометричні прогресії, які задовольняють співвідношення (48). Після підстановки загального члена прогресії $a_n=aq^{n-1}$ в (48) отримуємо:

$$aq^{n-1}=A_1aq^{n-2}+A_2aq^{n-3},$$

звідки після скорочення на aq^{n-3}, матимемо квадратне рівняння для знаменника прогресії:

$$q^2=A_1q+A_2. \tag{49}$$

Ми обмежимося випадком, коли це рівняння має два різні корені q_1 і q_2 (вони можуть бути й комплексними). У цьому випадку ми маємо дві геометричні прогресії $(q_1^{n-1})_{n\geq1}$ і $(q_2^{n-1})_{n\geq1}$ з різними знаменниками, які задовольняють співвідношення (48). Будь-яка їх лінійна комбінація

$$(\alpha\cdot q_1^{n-1}+\beta\cdot q_2^{n-1})_{n\geq1} \tag{50}$$

також задовольняє це співвідношення.

Нехай тепер послідовність $(a_n)_{n\geq1}$ задовольняє співвідношення (48). Якщо підібрати α та β так, щоб два перші члени послідовності $(a_n)_{n\geq1}$ збігалися з відповідними членами послідовності (50), то будуть збігатися й усі інші члени цих послідовностей. А підібрати потрібні α та β можна завжди, оскільки за теоремою Кронекера – Капеллі про визначеність система

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & a_1, \\ q_1\alpha & + & q_2\beta & = & a_2 \end{array} \tag{51}$$

є визначеною.

У нашому випадку рівняння (49) набуває вигляду

$$q^2=5q-3.$$

Його коренями є $q_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ і $q_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$. Тому система (51) набуває вигляду

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 5, \\ \frac{5+\sqrt{13}}{2}\alpha & + & \frac{5-\sqrt{13}}{2}\beta & = & 22. \end{array}$$

Її розв'язком буде $\alpha = \frac{65+\sqrt{13}}{26}$, $\beta = \frac{65-\sqrt{13}}{26}$. Звідси

$$D_n = \frac{65+\sqrt{13}}{26}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} + \frac{65-\sqrt{13}}{26}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}.$$

c) Розкладемо визначник за першим рядком. Одержимо:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= n \cdot \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} n-1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= nx^{n-1} + D_{n-1}.$$

До останнього доданка можна знову застосувати отримане рекурентне співвідношення і т. д. Остаточно отримуємо:

$$D_n = nx^{n-1} + D_{n-1} = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + D_{n-2} =$$
$$= nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + D_{n-3} = \cdots$$
$$\cdots = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 2x + 1.$$

Отриману суму можна згорнути:

$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 2x + 1 =$$
$$= (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x) + \cdots$$
$$\cdots + (x^{n-1} + x^{n-2}) + x^{n-1} =$$

$$= \frac{x^n - 1}{x-1} + \frac{x^n - x}{x-1} + \dots + \frac{x^n - x^{n-2}}{x-1} + \frac{x^n - x^{n-1}}{x-1} =$$

$$= \frac{nx^n}{x-1} - \frac{1 + x + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}}{x-1} = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \qquad \square$$

Задача 5. *За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 5, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -2. \end{array}$$

Розв'язання. Обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -14.$$

Він не дорівнює 0. Тому формули Крамера можна застосовувати. Для цього обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -70, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -98,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -42.$$

Розв'язком системи буде набір

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}\right) = \left(\frac{-70}{-14}, \frac{-98}{-14}, \frac{-42}{-14}\right) = (5, 7, 3). \qquad \square$$

Задача 6. *Нехай A — невироджена квадратна матриця із цілими коефіцієнтами. Доведіть, що система лінійних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тоді й лише тоді буде мати цілочисловий розв'язок для довільного цілочислового стовпця $\mathbf{b}$ вільних членів, коли $|A| = \pm 1$.*

Розв'язання. Якщо $|A| = \pm 1$, то обернена матриця A^{-1} також буде мати цілі коефіцієнти. Однак тоді для довільного цілочислового стовпця $\mathbf{b}$ вільних членів розв'язок $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ системи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ також буде цілочисловим.

Нехай тепер $|A| \neq \pm 1$. У цьому випадку принаймні один із коефіцієнтів оберненої матриці A^{-1} не є цілим числом. Нехай це a_{ij}. Розглянемо стовпчик вільних членів $\mathbf{b} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top$, у якому на j–му місці стоїть 1, а всі інші компоненти дорівнюють 0. Тоді в розв'язку $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ системи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i–та компонента буде дорівнювати a_{ij}. Отже, розв'язок не буде цілочисловим. $\square$

Основні задачі

7. Доведіть, що коли в матриці A всі мінори порядку k дорівнюють нулю, то нулю дорівнюють і всі мінори вищих порядків.

8. Використовуючи задачу 1, знайдіть загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

a) $\begin{array}{l} 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0; \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{array}$

9. Доведіть, що коли всі елементи якогось рядка визначника дорівнюють 1, то сума алгебричних доповнень усіх елементів визначника дорівнює самому визначникові.

10. Нехай $|A| \neq 0$. Як, знаючи всі елементи матриці A^*, знайти всі елементи матриці A?

11. Як зміниться приєднана матриця A^*, якщо:

a) i–й рядок матриці A помножити на число $c \neq 0$;

d) матрицю A помножити на число $c \neq 0$;

c) переставити i–й та j–й рядки матриці A;

d) від i–го рядка матриці A відняти її j–й рядок, помножений на c?

12. Нехай матриця $A = (a_{ij})$ є невиродженою.

a) Доведіть, що для довільного набору $c_1, \ldots, c_n$ додатних чисел система

$$\begin{array}{c} x_1^{a_{11}} \cdots x_n^{a_{1n}} = c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{a_{n1}} \cdots x_n^{a_{nn}} = c_n \end{array}$$

має єдиний розв'язок у додатних числах.

b) Доведіть, що коли показники a_{ij} є цілими числами, вільні члени $c_1, \ldots, c_n$ — додатними раціональними і $|A| = 1$, то розв'язок системи буде раціональним.

13. Доведіть, що

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

14. Обчисліть визначник за допомогою знаходження рекурентної формули:

a) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

15. Обчисліть визначник за допомогою знаходження рекурентної формули:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 6 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

16. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}.$$

17. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь:

a) $\begin{array}{rcrcl} x\cos\alpha & - & y\sin\alpha & = & \cos\beta, \\ x\sin\alpha & + & y\cos\alpha & = & \sin\beta; \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a\,, \\ x & + & \varepsilon y & + & \varepsilon^2 z & = & b\,, \\ x & + & \varepsilon^2 y & + & \varepsilon z & = & c\,, \end{array}$

де ε — первісний корінь степеня 3 з одиниці.

18. Нехай система

$$\begin{array}{rcrcl} ay & + & bx & = & c\,, \\ cx & + & az & = & b\,, \\ bz & + & cy & = & a \end{array}$$

є визначеною. Доведіть, що $abc \neq 0$, і знайдіть розв'язок.

19. Нехай $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$. Доведіть, що система

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \\ a_{n+1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n+1,n}x_n & = & b_{n+1} \end{array}$$

буде сумісною тоді й лише тоді, коли визначник її розширеної матриці дорівнює 0.

Додаткові задачі

20. Нехай $\operatorname{rank} A = k$. Доведіть, що мінор порядку k матриці A буде ненульовим тоді й лише тоді, коли він утворюється в результаті перетину k лінійно незалежних рядків із k лінійно незалежними стовпцями.

21. Доведіть, що сума $\sum\limits_{i,j} A_{ij}$ всіх алгебричних доповнень елементів визначника не зміниться, якщо до всіх елементів додати одне й те саме число.

22*. Доведіть, що для суми $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$ алгебричних доповнень усіх елементів визначника $\det(a_{ij})$ виконуються рівності

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \dots & a_{3n}-a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \dots & a_{3n}-a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

23. Нехай $A = (a_{ij})$ — квадратна матриця порядку $n > 1$ та r — її ранг. Знайдіть ранг приєднаної матриці $A^* = (A_{ij})$.

24. Нехай A — матриця порядку n. Доведіть, що:
a) коли $n = 2$, то $(A^*)^* = A$;
b) коли $n > 2$, то $(A^*)^* = |A|^{n-2} \cdot A$.

25. Доведіть, що коли сума елементів кожного рядка і кожного стовпця матриці A дорівнює 0, то алгебричні доповнення всіх елементів цієї матриці збігаються.

26. Нехай A — матриця з цілими коефіцієнтами. Доведіть, що при додаванні до одного її рядка (стовпця) довільного цілого кратного іншого рядка (стовпця) найбільший спільний дільник мінорів даного порядку k не змінюється.

27. Нехай A та B — вектори–рядки довжиною n, а E — одинична матриця порядку n. Доведіть, що коли $AB^\top = -1$, то матриця $E + B^\top A$ має ранг $n - 1$.

28.* *Кутовим мінором* порядку k квадратної матриці називається мінор $M^{\{1,2,\dots,k\}}_{\{1,2,\dots,k\}}$. Нехай усі кутові мінори матриці A не дорівнюють 0. Доведіть, що A можна розкласти в добуток $A = UB$ нижньої трикутної матриці U з одиницями на діагоналі та верхньої трикутної матриці B, причому такий розклад — єдиний.

29.°* Доведіть, що для довільної дійсної матриці A ранг кожної із матриць $AA^\top$ і $A^\top A$ дорівнює рангу матриці A.

30.* Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} 1/1! & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2! & 1/1! & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1/1! & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n! & 1/(n-1)! & 1/(n-2)! & 1/(n-3)! & \dots & 1/1! \end{vmatrix}.$$

31.* Нехай ε — первісний корінь степеня n з 1 і $A = (\varepsilon^{i \cdot j}) \in M_n(\mathbb{C})$. Знайдіть модуль визначника $|A|$.

32.* Доведіть, що

$$\sum_{\pi \in S_n} \begin{vmatrix} a_{1\pi(1)} & a_{1\pi(2)} & \dots & a_{1\pi(n)} \\ a_{2\pi(1)} & a_{2\pi(2)} & \dots & a_{2\pi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\pi(1)} & a_{n\pi(2)} & \dots & a_{n\pi(n)} \end{vmatrix} = 0\,.$$

33.* Нехай A, B, C, D — квадратні матриці однакового порядку, причому $\det A \neq 0$. Доведіть, що:

a) якщо $AC = CA$, то $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$;

b) якщо $AB = BA$, то $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.

34.** Нехай ε — первісний корінь степеня n з 1. Доведіть, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + \varepsilon^k a_2 + \varepsilon^{2k} a_3 + \dots + \varepsilon^{(n)k} a_{n-1}).$$

35. При розумних припущеннях про швидкодію комп'ютера та вартість машинного часу визначте максимальний порядок квадратної системи лінійних рівнянь, яку можна розв'язати:

1) за 1 коп., 2) за 1 грн, 3) за 1000 грн,

якщо систему розв'язувати:

a) методом Гаусса;

b) за формулами Крамера, причому для обчислення визначників використовувати явну формулу.

36.** Квадратна однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{array}{ccccccc} c_{11}z_1 & + & \cdots & + & c_{1n}z_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}z_1 & + & \cdots & + & c_{nn}z_n & = & 0 \end{array}$$

з комплексними коефіцієнтами $c_{kj} = a_{kj} + ib_{kj}$ має над полем $\mathbb{C}$ нетривіальний розв'язок тоді й лише тоді, коли $\det(c_{kj}) = a + ib = 0$. Це дає для $2n^2$ дійсних змінних a_{kj}, b_{kj} два рівняння: $a = 0$, $b = 0$. З іншого боку, якщо записати $z_k = x_k + iy_k$, то цю систему можна замінити рівносильною їй системою $2n$ лінійних однорідних рівнянь із $2n$ дійсними невідомими x_k, y_k. Тоді умова існування нетривіального розв'язку запишеться у вигляді рівності нулю дійсного визначника порядку $2n$. Однак це дає для тих самих дійсних змінних a_{kj}, b_{kj} лише одне рівняння. Як узгодити між собою ці два результати?

37.* Доведіть, що n–ту похідну функції $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ можна обчислювати за формулою

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{h^{n+1}(x)} \begin{vmatrix} h(x) & 0 & 0 & \cdots & g(x) \\ h'(x) & h(x) & 0 & \cdots & g'(x) \\ h''(x) & 2h'(x) & h(x) & \cdots & g''(x) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \binom{n}{0}h^{(n)}(x) & \binom{n}{1}h^{(n-1)}(x) & \binom{n}{2}h^{(n-2)}(x) & \cdots & g^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

38°. Нехай $A \times B$ — кронекерівський добуток матриць $A \in M_n(P)$ і $B \in M_m(P)$. Доведіть, що $\det(A \times B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n$.

39*. Нехай для квадратних матриць A та B однакового порядку існує $n+1$ різних ненульових значень a, для яких $(aA+B)^n = 0$. Доведіть, що $A^n = B^n = 0$.

40.** Доведіть, що для довільної кососиметричної цілочислової матриці (a_{ij}) її визначник $\det(a_{ij})$ є квадратом цілого числа.

Домашнє завдання

41. Використовуючи задачу 1, знайдіть загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

42. Нехай $A = (a_{ij})$ — квадратна матриця порядку $n > 1$, B — матриця, яку одержуємо з A заміною кожного елемента a_{ij} його алгебричним доповненням A_{ij}, а C — матриця, яку одержуємо з A заміною кожного елемента a_{ij} доповняльним мінором $\overline{M}_i^j$. Доведіть, що $|B| = |C|$.

43. Як зміниться приєднана матриця A^*, якщо до i–го стовпця матриці A додати її j–й стовпець, помножений на c?

44. Обчисліть визначник за допомогою знаходження рекурентної формули:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

45. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

46. За допомогою формул Крамера розв'яжіть систему рівнянь:

a) $\begin{array}{rcrcl} x\,\mathrm{tg}\alpha & + & y & = & \sin(\alpha+\beta), \\ x & - & y\,\mathrm{tg}\alpha & = & \cos(\alpha+\beta); \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}$

Література. [1, глава 2, §4; 2, глава 4; 4, глава I, §3–5; 5, розділ II, §§3–4; 7, розділ 3, § 4; 12, глава 4, §4].

Заняття 14. Кільця лишків

Необхідні поняття. Цілі числа a та b називаються *порівняльними* (або *конгруентними*) *за модулем натурального числа* n (позначається $a \equiv b \pmod{n}$), якщо різниця $a - b$ ділиться на n. Вираз вигляду $a \equiv b \pmod{n}$ називається *конгруенцією за модулем числа* n.

Відношення конгруентності за модулем числа n є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності цього відношення називаються *класами лишків за модулем числа* n. Клас лишків, що містить число a, позначають $\overline{a}$. Тоді $\overline{a} = \{\ldots, -2n+a, -n+a, a, n+a, 2n+a, 3n+a, \ldots\}$. Систему з n чисел, узятих по одному з кожного класу лишків за модулем n, називають *повною системою лишків*.

Множину класів лишків за модулем числа n позначають $\mathbb{Z}_n$. На цій множині визначені дії додавання і множення класів лишків:

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}\,; \quad \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{ab}\,.$$

Необхідні твердження. **1.** $a \equiv b \pmod{n}$ тоді й лише тоді, коли a та b мають однакові остачі від ділення на n.

2. Є рівно n різних класів лишків за модулем числа n. Ці класи перебувають в природній взаємно однозначній відповідності з остачами від ділення на n.

3. Конгруенції за тим самим модулем можна почленно додавати і множити: якщо $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ і $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, то

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}, \quad a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{n}.$$

4. Відносно додавання і множення множина $\mathbb{Z}_n$ утворює комутативне кільце з одиницею.

5. Для елемента $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$ обернений існує тоді й лише тоді, коли k та n взаємно прості.

6. У кільці $\mathbb{Z}_n$ є рівно $\varphi(n)$ оборотних елементів.

7. Кільце $\mathbb{Z}_n$ буде полем тоді й лише тоді, коли n — просте число.

8. У кільці $\mathbb{Z}_n$ можна скорочувати на елемент $\overline{a}$ тоді й лише тоді, коли $\overline{a}$ є оборотним.

9. *Теорема Ойлера.* У термінах класів лишків: якщо $\overline{a}$ — оборотний елемент кільця $\mathbb{Z}_n$, то $\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$; у термінах конгруенцій: якщо ціле число a є взаємно простим із n, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

10. Якщо $\overline{a}$ — оборотний елемент кільця $\mathbb{Z}_n$, то елемент $\overline{a}^{\,\varphi(n)-1}$ буде оберненим до $\overline{a}$.

11. *Мала теорема Ферма.* У термінах класів лишків: якщо $\overline{a}$ — ненульовий елемент поля $\mathbb{Z}_p$, то $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$; у термінах конгруенцій: якщо число a не ділиться на просте число p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

12. *Алгоритм Евкліда.* Нехай a та b — цілі числа. Розглянемо ланцюжок ділень з остачею:

$$\begin{gathered} a = q_1 b + r_1\,, \\ b = q_2 g + r_2\,, \\ r_1 = q_3 r_2 + r_3\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}\,, \\ r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k\,, \\ r_{k-1} = q_{k+1} r_k. \end{gathered}$$

Остання ненульова остача r_k у цьому ланцюжку буде найбільшим спільним дільником чисел a та b.

13. Якщо d — найбільший спільний дільник чисел a та b, то існує зображення $d = ka + mb$, де k і m — цілі числа. Це зображення можна знайти, використовуючи ланцюжок ділень з остачею з алгоритму Евкліда.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Доведіть, що конгруенція* $ax \equiv b \pmod{n}$ *має розв'язок тоді й лише тоді, коли b ділиться на найбільший спільний дільник d чисел a та n.*

Розв'язання. Необхідність. Якщо x_0 — розв'язок конгруенції, то вираз $ax_0 - b$ ділиться на n, тобто $ax_0 - b = nn_1$ для деякого цілого числа n_1. Звідси $b = ax_0 - nn_1$. Тому b ділиться на d.

Достатність. Нехай $b = b_1 d$, $a = a_1 d$, $n = n_1 d$. Зауважимо, що числа a_1 і n_1 є взаємно простими. Тому a_1 є оборотним елементом у кільці класів лишків за модулем n_1. Нехай клас $\overline{c}$ є оберненим до $\overline{a_1}$ в $\mathbb{Z}_{n_1}$. Розглянемо конгруенцію $a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}$. Ця конгруенція має розв'язок $x_0 = cb_1$, бо $a_1 \cdot x_0 \equiv a \cdot cb_1 \equiv a_1 c \cdot b_1 \equiv 1 \cdot b_1 \equiv b_1 \pmod{n_1}$. Отже, $a_1 x_0 - b_1$ ділиться на n_1. Тоді $ax_0 - b = a_1 d x_0 - b_1 d = d(a_1 x_0 - b_1)$ ділиться на $dn_1 = n$. Тому x_0 є також розв'язком початкової конгруенції $ax \equiv b \pmod{n}$. □

Задача 2. *Розв'яжіть конгруенцію:*

a) $7x \equiv 4 \pmod{10}$; b) $6x+3 \equiv 4 \pmod{10}$; c) $6x+3 \equiv 1 \pmod{10}$.

Розв'язання. a) Числа 7 і 10 — взаємно прості. Тому існує число, обернене до 7 за модулем числа 10. Оскільки $7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}$, то таким є число 3. Помноживши обидві частини даної конгруенції на 3, одержуємо: $3 \cdot 7x \equiv 3 \cdot 4 \pmod{10}$, звідки $x \equiv 2 \pmod{10}$.

b) Дана конгруенція рівносильна конгруенції $6x \equiv 4 - 3 \equiv 1 \pmod{10}$. Для довільного цілого числа x число $6x$ буде парним, тому й остача від ділення $6x$ на 10 буде парною. Отже, ця остача не може дорівнювати 1, тому дана конгруенція розв'язків не має.

c) Дана конгруенція рівносильна конгруенції $6x \equiv 1-3 \equiv -2 \equiv 8 \pmod{10}$. Зрозуміло, що $6x - 8$ буде ділитися на 10 тоді й лише тоді, коли $3x - 4$ буде ділитися на 5. Тому можна перейти до конгруенції $3x \equiv 4 \pmod{5}$. Вона розв'язується аналогічно конгруенції з п. a) (оскільки $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$, то оберненим до 3 за модулем числа 5 буде число 2): $2 \cdot 3x \equiv 2 \cdot 4 \pmod{5}$, звідки $x \equiv 3 \pmod{5}$. Таким чином, кожне число вигляду $3 + 5k$ є розв'язком початкової конгруенції. За модулем 10 це дає два розв'язки: $x \equiv 3 \pmod{10}$ та $x \equiv 3 + 5 = 8 \pmod{10}$. □

Задача 3. *Доведіть, що система конгруенцій*

$$\begin{gathered} a \equiv b \pmod{n_1}, \\ a \equiv b \pmod{n_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a \equiv b \pmod{n_k} \end{gathered}$$

рівносильна конгруенції $a \equiv b \pmod{n}$, *де* n *— найменше спільне кратне чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Розв'язання. Якщо $a \equiv b \pmod{n}$, то різниця $a - b$ ділиться на n. Але тоді $a - b$ ділиться на кожне з чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, тобто виконується кожна з конгруенцій системи.

Навпаки, якщо виконується кожна з конгруенцій системи, то різниця $a - b$ ділиться на кожне з чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Тому $a - b$ ділиться і на найменше спільне кратне n цих чисел, тобто виконується конгруенція $a \equiv b \pmod{n}$. □

Задача 4. *Розв'яжіть систему конгруенцій:*

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} 3x + 2y + 4z \equiv 0 \pmod{5} \\ \ x + \ y + \ z \equiv 0 \pmod{5} \end{array}; \quad \text{b)}\ \begin{array}{l} 3x + 3y + 3z \equiv 4 \pmod{5} \\ \ x + \ y + \ z \equiv 1 \pmod{5} \end{array};$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{l} 2x + 7y \qquad \equiv 3 \pmod{11} \\ 3x \qquad + 4z \equiv 6 \pmod{11} \\ 4x + 7y + z \equiv 0 \pmod{11} \end{array}.$$

Розв'язання. Від конгруенцій за модулем n можна перейти до класів лишків за модулем n. Тоді система конгруенцій переходить у систему рівнянь із коефіцієнтами з кільця $\mathbb{Z}_n$.

a) Число 5 є простим. Тому кільце $\mathbb{Z}_5$ є полем. Отже, одержуємо СЛР

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{3}x & + & \overline{2}y & + & \overline{4}z & = & \overline{0}, \\ x & + & y & + & z & = & \overline{0}. \end{array} \tag{52}$$

з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_5$, яку будемо розв'язувати методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{3} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{-1} & \overline{0} \end{array}\right).$$

Дана СЛР є невизначеною, а за вільну невідому можна взяти z. Оскільки $x = \overline{-2}z = \overline{3}z$, $y = z$, то загальний розв'язок має вигляд $(\overline{3}z, z, z)$, де $z \in \mathbb{Z}_5$.

Повертаючись до конгруенцій, загальний розв'язок початкової системи можна описати так: z — довільне ціле число, $x \equiv 3z \pmod 5$, $y \equiv z \pmod 5$.

Зауваження. Раніше, коли ми розглядали СЛР над числовими полями, невизначена система мала нескінченно багато розв'язків. Оскільки систему (52) ми розглядаємо над полем $\mathbb{Z}_5$, яке має всього п'ять елементів, то вільна невідома z може набувати лише п'яти значень, а невизначена СЛР (52) має всього п'ть розв'язків:

$$(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), \ (\overline{3}, \overline{1}, \overline{1}), \ (\overline{1}, \overline{2}, \overline{2}), \ (\overline{4}, \overline{3}, \overline{3}) \ \text{ і } (\overline{2}, \overline{4}, \overline{4}).$$

b) Знову переходимо до СЛР

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{3}x & + & \overline{3}y & + & \overline{3}z & = & \overline{4}, \\ x & + & y & + & z & = & \overline{1} \end{array} \tag{53}$$

з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_5$. Розв'язуючи її методом Гаусса, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{3} & \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}\right).$$

Отже, СЛР (53) (а тим самим і початкова система конгруенцій) є несумісною.

c) Як і в попередніх випадках, переходимо до СЛР

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{2}x & + & \overline{7}y & & & = & \overline{3}, \\ \overline{3}x & & + & & \overline{4}z & = & \overline{6}, \\ \overline{4}x & + & \overline{7}y & + & z & = & \overline{0}, \end{array} \tag{54}$$

тільки цього разу коефіцієнти належать полю $\mathbb{Z}_{11}$. Застосовуючи метод Гаусса, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{2} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{4} & \overline{7} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{-1} & \overline{7} & \overline{-4} & \overline{-3} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{1} & \overline{7} & \overline{-3} & \overline{-6} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{-7} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{21} & \overline{-8} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{14} & \overline{-7} & \overline{-9} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{3} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{3} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{13} & \overline{-7} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{3} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{3} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{-5} \\ \overline{0} & \overline{-1} & \overline{0} & \overline{-9} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{9} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}\right).$$

Таким чином, система (54) є визначеною, а її єдиним розв'язком є набір $(\overline{3}, \overline{9}, \overline{2})$. Розв'язок початкової системи конгруенцій має вигляд $x \equiv 3 \pmod{11}$, $y \equiv 9 \pmod{11}$, $z \equiv 2 \pmod{11}$. □

Задача 5. *У кільці лишків $\mathbb{Z}_{102}$ знайдіть елемент, обернений до елемента $\overline{43}$.*

Розв'язання. Числа 43 та 102 — взаємно прості. Тому для елемента $\overline{43}$ у кільці $\mathbb{Z}_{102}$ обернений існує.

Перший спосіб. Алгоритмом Евкліда дає такий ланцюжок ділень із остачею:

$$102 = 2 \cdot 43 + 16, \quad 43 = 2 \cdot 16 + 11, \quad 16 = 1 \cdot 11 + 5, \quad 11 = 2 \cdot 5 + 1.$$

Звідси отримуємо (жирним шрифтом виділено початкові числа та остачі з алгоритму Евкліда):

$$\begin{gathered} 1 = \mathbf{11} - 2 \cdot \mathbf{5} = \mathbf{11} - 2 \cdot (\mathbf{16} - 1 \cdot \mathbf{11}) = -2 \cdot \mathbf{16} + 3 \cdot \mathbf{11} = \\ = -2 \cdot \mathbf{16} + 3 \cdot (\mathbf{43} - 2 \cdot \mathbf{16}) = 3 \cdot \mathbf{43} - 8 \cdot \mathbf{16} = \\ = 3 \cdot \mathbf{43} - 8 \cdot (\mathbf{102} - 2 \cdot \mathbf{43}) = -8 \cdot \mathbf{102} + 19 \cdot \mathbf{43}. \end{gathered}$$

Отже, $1 = -8 \cdot 102 + 19 \cdot 43$. За модулем 102 це дає конгруенцію $1 \equiv 19 \cdot 43$. Тому оберненим до класу лишків $\overline{43}$ буде клас $\overline{19}$.

Другий спосіб. Оскільки $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, то

$$\varphi(102) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (17 - 1) = 32.$$

За теоремою Ойлера оберненим до елемента $\overline{a}$ є елемент $\overline{a}^{\,\varphi(n)-1}$. Тому оберненим до класу $\overline{43}$ буде клас $\overline{43}^{31}$. Обчислимо степені класу $\overline{43}$:

$$43^2 = 1849 \equiv 13 \pmod{102}, \quad 43^4 \equiv 13^2 = 169 \equiv 67 \pmod{102},$$
$$43^8 \equiv 67^2 = 4489 \equiv 1 \pmod{102}, \quad 43^16 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{102}.$$

Звідси

$$43^{31} = 43^{1+2+4+8+16} = 43^1 \cdot 43^2 \cdot 43^4 \cdot 43^8 \cdot 43^{16} \equiv$$
$$\equiv 43 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 1 \cdot 1 = 37453 \equiv 19 \pmod{102}.$$

Таким чином, оберненим до класу лишків $\overline{43}$ є клас $\overline{19}$. □

Задача 6. *Доведіть, що жодне натуральне число вигляду* $4k+3$ *не можна подати у вигляді суми двох квадратів.*

Розв'язання. Припустимо, що $4k+3 = a^2+b^2$. Тоді

$$a^2 + b^2 \equiv 4k+3 \equiv 3 \pmod{4}. \tag{55}$$

Із рівностей $(2m)^2 = 4m^2$ і $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$ випливає, що квадрат числа може бути порівняльним за модулем 4 лише з 0 або з 1. Однак тоді або $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{4}$, або $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, або $a^2+b^2 \equiv 4 \pmod{n}$. Кожна з цих конгруенцій суперечить конгруенції (55), тому рівність $4k+3 = a^2+b^2$ неможлива. □

Задача 7. *Доведіть, що за модулем майже кожного простого числа* (*тобто є лише скінченна кількість винятків*) *система*

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + \ y - 2z &= 1 \\ 2x - 2y + \ z &= 1 \end{aligned} \tag{56}$$

має єдиний розв'язок. Знайдіть ті прості числа, які є винятками, і розв'яжіть систему за модулем кожного з них.

Розв'язання. Обчислимо головний визначник даної СЛР:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -27.$$

$\Delta \not\equiv 0$ за модулем кожного простого числа $p \neq 3$. Тому за теоремою Крамера за модулем кожного простого числа $p \neq 3$ система (56) буде мати єдиний розв'язок.

Розглянемо тепер випадок $p = 3$, тобто СЛР (56) розглядаємо як систему з коефіцієнтами з поля класів лишків $\mathbb{Z}_3$. Застосуємо до СЛР (56) метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{-2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{-2} & \overline{1} & \overline{1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{-3} & \overline{-6} & \overline{-3} \\ \overline{0} & \overline{-6} & \overline{-3} & \overline{-3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right).$$

За модулем 3 СЛР (7) є невизначеною. Вільними невідомими є y і z. Оскільки $x = \overline{2} - \overline{2}y - \overline{2}z = \overline{2} + y + z$, то загальний розв'язок має вигляд $(\overline{2} + y + z, y, z)$, де $y, z \in \mathbb{Z}_3$.

Повертаючись до конгруенцій, загальний розв'язок початкової системи можна описати так: z — довільне ціле число, $x \equiv 3z \pmod 5$, $y \equiv z \pmod 5$. □

Задача 8. *Розв'яжіть конгруенцію* $x^2 \equiv 35 \pmod{100}$.

Розв'язання. Конгруенція $x^2 \equiv 35 \pmod{100}$ означає, що число $x^2 - 35$ ділиться на 100. Тоді $x^2 - 35$ ділиться і на 25, і на 5, тобто виконуються конгруенції

$$x^2 \equiv 35 \equiv 10 \pmod{25} \quad \text{і} \quad x^2 \equiv 35 \equiv 0 \pmod 5. \tag{57}$$

Остання конгруенція означає, що x^2 ділиться на 5. Оскільки 5 — просте число, то x^2 ділиться на 5 тоді й лише тоді, коли x ділиться на 5. Однак якщо x ділиться на 5, то x^2 ділиться на 25, що суперечить першій із конгруенцій (57). Отже, конгруенція $x^2 \equiv 35 \pmod{100}$ розв'язків немає. □

Задача 9. *Обчисліть:* a) $3^{1000} \bmod 13$; b) $(7^n + 11^n) \bmod 19$, *де* $n \geq 0$.

Розв'язання. a) Числа 3 і 13 — взаємно прості, $\varphi(13) = 12$. Тому згідно з теоремою Ойлера $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Звідси одержуємо:

$$3^{1000} = 3^{12\cdot 83+4} = (3^{12})^{83} \cdot 3^4 \equiv 1^{83} \cdot 3^4 = 3^4 = 81 \equiv 3 \mod 13.$$

b) Зауважимо, що $7^0 \equiv 1 \pmod{19}$, $7^1 \equiv 7 \pmod{19}$, $7^2 \equiv 11 \pmod{19}$, $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$. Тому

$$7^{3k+r} = (7^3)^k \cdot 7^r \equiv 1^k \cdot 7^r \equiv 7^r \mod 19.$$

Аналогічно $11^0 \equiv 1 \pmod{19}$, $11^1 \equiv 11 \pmod{19}$, $11^2 = 121 \equiv 7 \pmod{19}$, $11^3 \equiv 7 \cdot 11 = 77 \equiv 1 \pmod{19}$, звідки

$$11^{3k+r} = (11^3)^k \cdot 11^r \equiv 1^k \cdot 11^r \equiv 11^r \mod 19.$$

Таким чином, за модулем числа 19 значення кожного з доданків 7^n і 11^n визначається остачею від ділення n на 3. Тому за модулем 19 сума $7^n + 11^n$ дорівнює 2 при $n = 3k$ і 18 — в інших випадках. □

Задача 10. *Знайдіть, для яких натуральних чисел n виконується конгруенція* $2^n \equiv n \pmod 7$.

Розв'язання. Аналогічно розв'язанню задачі 9.b знайдемо найменше натуральне k, для якого виконується конгруенція $2^k \equiv 1 \pmod 7$ (із теореми Ойлера випливає, що таке k існує). Маємо: $2^1 \equiv 2 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $2^3 \equiv 1 \pmod 7$. Звідси випливає, що

$$2^{3t+r} = (2^3)^t \cdot 2^r \equiv 1^k \cdot 2^r \equiv 2^r \mod 7.$$

Отже, $k = 3$ і ліва частина $2^n \mod 7$ нашої конгруенції залежить лише від остачі від ділення n на 3. Тому далі розглянемо три випадки залежно від цієї остачі.

I. $n = 3t$. Наша конгруенція набуває вигляду $1 \equiv 3t \pmod 7$. Помноживши обидві частини конгруенції на 5 (у кільці $\mathbb{Z}_7$ оберненим до елемента $\overline{3}$ є $\overline{5}$), отримуємо: $t \equiv 5 \pmod 7$, тобто $t = 7m + 5$. Тому $n = 21m + 15$.

II. $n = 3t + 1$. Конгруенція набуває вигляду $2 \equiv 3t + 1 \pmod 7$. Отже, знову $3t \equiv 1 \pmod 7$ і $t \equiv 5 \pmod 7$. Тому $n = 3(7m + 5) + 1 = 21m + 16$.

III. $n = 3t + 2$. Конгруенція має вигляд $4 \equiv 3t + 2 \pmod 7$, звідки $3t \equiv 2 \pmod 7$ і $t \equiv 3 \pmod 7$. Тому $t = 7m + 3$ і $n = 3(7m + 3) + 2 = 21m + 11$.

Таким чином, конгруенція $2^n \equiv n \pmod 7$ виконується для всіх натуральних чисел вигляду $n = 21m + 11$, $n = 21m + 15$ і $n = 21m + 16$. □

Задача 11. *Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які менші за n і взаємно прості з n.*

Розв'язання. Позначимо множину всіх таких натуральних чисел через M. Зауважимо, що $|M| = \varphi(n)$.

Якщо k є натуральним числом, яке менше за n і взаємно просте з n, то число $n-k$ також буде натуральним, меншим за n і взаємно простим з n. Зрозуміло також, що коли k пробігає всі натуральні числа, які менші за n і взаємно прості з n, то $n-k$ теж пробігає всі такі числа. Тому

$$\sum_{k\in M} k = \sum_{k\in M}(n-k).$$

З іншого боку,

$$\sum_{k\in M} k + \sum_{k\in M}(n-k) = \sum_{k\in M}(k+(n-k)) = \sum_{k\in M} n = n\cdot|M| = n\varphi(n).$$

Тому

$$\sum_{k\in M} k = \frac{1}{2}n\varphi(n).$$

□

Основні задачі

12. Доведіть, що для кожного непарного числа n, яке не ділиться на 3, виконується конгруенція $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

13. Для яких натуральних чисел n відображення $x \mapsto 6x+7$ є бієкцією кільця $\mathbb{Z}_n$?

14. Доведіть такі властивості конгруенцій:

a) для довільного цілого числа c із $a \equiv b \pmod{n}$ випливає $a+c \equiv b+c \pmod{n}$ і $ac \equiv bc \pmod{n}$;

b) до будь–якої частини конгруенції можна додати довільне ціле кратне модуля, тобто із $a \equiv b \pmod{n}$ випливає $a+tn \equiv b \pmod{n}$ і $a \equiv b+tn \pmod{n}$;

c) якщо число d взаємно просте з модулем n, то із $ad \equiv bd \pmod{n}$ випливає $a \equiv b \pmod{n}$;

d) для довільного цілого числа c конгруенції $a \equiv b \pmod{n}$ і $ac \equiv bc \pmod{nc}$ рівносильні.

15. Розв'яжіть систему конгруенцій: $\begin{matrix} x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5) \\ 3x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8) \end{matrix}.$

16. Обчисліть остачу від ділення 3^{2015} на 11.

17. У кільці класів лишків $\mathbb{Z}_{27}$ знайдіть елемент, обернений до класу: a) $\overline{7}$, b) $\overline{11}$.

18. Побудуйте таблички додавання і множення для кільця $\mathbb{Z}_n$, якщо: a) $n = 3$, b) $n = 4$.

19. Розв'яжіть систему конгруенцій: a) $\begin{array}{l} 3x + 2y \equiv 1 \pmod 7, \\ 4x + 6y \equiv 3 \pmod 7; \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} 2x + y - z & \equiv & 1 \pmod 5, \\ x + 2y + z & \equiv & 2 \pmod 5, \\ -x + y - z & \equiv & -1 \pmod 5; \end{array}$ c) $\begin{array}{rcl} 3x + 2y + 5z & \equiv & 1 \pmod{19}, \\ 2x + 5y + 3z & \equiv & -1 \pmod{19}, \\ 5x + 3y + 2z & \equiv & -4 \pmod{19}; \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x - 2y + z \equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x + 2y \equiv 7 \pmod{13}, \\ 5x - 3y + 4z \equiv 1 \pmod{13}; \end{array}$ e) $\begin{array}{l} x + 2y - z + 5t \equiv 4 \pmod 7, \\ 2x + 5y + z + 2t \equiv 1 \pmod 7, \\ x + 3y + 2z + 6t \equiv 2 \pmod 7. \end{array}$

20. Знайдіть усі прості числа, за модулем яких система лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 & = & 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array}$$

є: a) визначеною; b) невизначеною; c) несумісною.

21. Знайдіть усі прості числа, за модулем яких система векторів $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3,4,3)$, $\mathbf{v}_3 = (1,3,1,1)$ є лінійно залежною.

22. Для яких натуральних n із конгруенції $x^2 \equiv 0 \pmod n$ випливає конгруенція $x \equiv 0 \pmod n$?

23. Розв'яжіть конгруенцію: a) $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$; b) $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$; c) $x^2 + 2x + 14 \equiv 0 \pmod{17}$; d) $x^3 \equiv 5 \pmod{11}$.

24. Доведіть, що жодне число $m \equiv 7 \pmod 8$ не можна подати у вигляді суми трьох квадратів.

25. Нехай p — просте число і $p \equiv 3 \pmod 4$. Доведіть, що конгруенція $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ не має розв'язків.

26. Розв'яжіть конгруенцію $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Додаткові задачі

27. Розв'яжіть конгруенцію $2^n \equiv n \pmod p$, де p — непарне просте число.

28. Доведіть, що коли квадратна система лінійних рівнянь із цілими коефіцієнтами є визначеною за модулем кожного простого числа p, то вона є визначеною й над кільцем цілих чисел.

29. Чи буде правильним твердження, обернене до твердження задачі 28?

30. Чи вірно, що квадратна система лінійних рівнянь із цілими коефіцієнтами, яка є сумісною за модулем довільного простого числа p, буде сумісною й над кільцем цілих чисел?

31. Доведіть, що коли система векторів із цілими координатами лінійно незалежна за модулем деякого простого числа p, то вона лінійно незалежна й над полем раціональних чисел.

32. Нехай система векторів із цілими координатами лінійно незалежна над полем раціональних чисел. Доведіть, що є лише скінченна кількість простих чисел, за модулем яких вона буде лінійно залежною.

33. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця порядку p з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_p$. Доведіть, що знайдеться натуральне число k, для якого $A^k = E$, і знайдіть найменше таке k.

34.** Доведіть, що коли конгруенція $x^2 \equiv 1 \pmod n$ має більше ніж два розв'язки, то за модулем числа n добуток усіх її розв'язків дорівнює 1.

Домашнє завдання

35. У кільці класів лишків $\mathbb{Z}_{101}$ знайдіть елемент, обернений до класу: a) $\overline{7}$, b) $\overline{11}$.

36. Побудуйте таблички додавання і множення для кільця $\mathbb{Z}_n$, якщо: a) $n = 7$, b) $n = 8$.

37. Розв'яжіть систему конгруенцій за модулем 7:
a) $3x + 2y + 3z \equiv 0, \quad 4x + y + 5z \equiv 1, \quad 5x + 2y + 4z \equiv 2;$
b) $4x + 2y - z \equiv 1, \quad 5x + 3y + 5z \equiv 0, \quad 3x + 2y + 6z \equiv 4.$

38. Розв'яжіть систему конгруенцій за модулем 11:
a) $x+y+z\equiv 2,\quad x+2y+3z\equiv 1,\quad x+3y+6z\equiv 1;$
b) $2x+y-8z\equiv 1,\quad 5x+3y+2z\equiv 2,\quad x+4y+3z\equiv 1.$

39. Доведіть, що для кожного натурального числа n виконується рівно одна з конгруенцій $n^2 \equiv 0 \pmod 8$, $n^2 \equiv 1 \pmod 8$, $n^2 \equiv 4 \pmod 8$.

40. Розв'яжіть конгруенції: a) $2x+1\equiv 0 \pmod{13}$; b) $5x\equiv 7 \pmod{21}$; c) $x^2\equiv -1 \pmod{11}$;
d) $x^2+3x+10\equiv 0 \pmod{19}$; e) $x^3-3x+1\equiv 0 \pmod{19}$.

41. Розв'яжіть конгруенцію $x^2-1\equiv 0 \pmod{p^n}$, де p — непарне просте число.

42. Доведіть, що за модулем майже кожного простого числа (тобто є лише скінченна кількість винятків) система

$$\begin{gathered}x+y+z+t=1,\\ x+y-z-t=1,\\ x+y+z-t=1,\\ x-y-z+t=0\end{gathered}$$

є визначеною. Знайдіть прості числа, які є винятками, і розв'яжіть систему за модулем кожного з них.

43. Знайдіть усі прості числа, за модулем яких система векторів $\mathbf{v}_1=(0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_2=(1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_3=(1,1,0,1)$, $\mathbf{v}_4=(1,1,1,0)$ є лінійно залежною.

Література. [1, глава 1, §5; 5, розділ V, §2].

Заняття 15. Подільність многочленів

Необхідні поняття. Нехай K — довільне комутативне кільце з одиницею, а x — новий символ, який називається *невідомою* або *змінною*. *Многочленами (поліномами) від змінної x із коефіцієнтами з кільця K* називаються формальні суми вигляду

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\,, \tag{58}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. Елементи $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називаються *коефіцієнтами* многочлена (58). Множину всіх многочленів з коефіцієнтами з кільця K позначають $K[x]$. Якщо кільце коефіцієнтів є полем, то замість K будемо використовувати літеру P.

Многочлен називається *нульовим*, якщо всі його коефіцієнти дорівнюють 0. Кожному ненульовому многочлену $f(x)$ приписується невід'ємне ціле число — максимальний індекс ненульового коефіцієнта — яке називається *степенем* многочлена $f(x)$ і позначається $\deg f(x)$. Коефіцієнт a_0 називається *вільним членом* многочлена $f(x)$, коефіцієнт $a_{\deg f(x)}$ — *старшим коефіцієнтом*.

Вираз вигляду ax^k називається *одночленом*. На многочлен (58) можна дивитися як на суму одночленів. Якщо степінь многочлена (58) дорівнює n, то одночлен $a_n x^n$ називається *старшим членом* многочлена $f(x)$.

Многочлени $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ і $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ вважаються рівними тоді й лише тоді, коли $\deg f(x) = \deg g(x)$ і $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_{\deg f(x)} = b_{\deg g(x)}$.

Сумою многочленів $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ та $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ називається многочлен

$$f(x) + g(x) := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i\,. \tag{59}$$

Добутком многочлена $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ на елемент $a \in K$ називається многочлен

$$a \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{n} (a a_i) x^i\,. \tag{60}$$

Добутком многочленів $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ та $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$ називається многочлен

$$f(x) \cdot g(x) := \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k\,. \tag{61}$$

Кажуть, що многочлен $f(x)$ *ділиться* на многочлен $g(x)$ або що $g(x)$ *ділить* $f(x)$ (коротко це позначають як $g(x) \mid f(x)$), якщо існує такий многочлен $h(x)$, що $f(x) = g(x)h(x)$. Якщо $g(x) \mid f(x)$), то $g(x)$ називається *дільником* $f(x)$, а $f(x)$ — *кратним* $g(x)$.

Найбільше таке натуральне число k, що $f(x)$ ділиться на $(x-c)^k$, називається *кратністю* кореня c.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називають *асоційованими* , якщо $g(x) \mid f(x)$ і $f(x) \mid g(x)$.

Многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ степеня n називається *нормованим*, якщо $a_n = 1$.

Дільник $g(x)$ многочлена $f(x)$ називається *нетривіальним*, якщо $g(x)$ не є асоційованим ні з многочленом $f(x)$, ні з одиницею (тобто якщо в розкладі $f(x) = g(x)h(x)$ обидва множники мають додатні степені).

Многочлен $f(x)$ ненульового степеня називається *незвідним*, якщо він не має нетривіальних дільників. У протилежному разі $f(x)$ називається *звідним*.

Многочлен $d(x)$ називається *найбільшим спільним дільником* (скорочено НСД) многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо він задовольняє такі дві умови:

1) $d(x)$ є спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тобто $d(x) \mid f(x)$ і $d(x) \mid g(x)$;

2) $d(x)$ ділиться на кожен спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тобто із $c(x) \mid f(x)$ і $c(x) \mid g(x)$ випливає, що $c(x) \mid d(x)$.

Найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ позначається НСД$(f(x), g(x))$ або просто $(f(x), g(x))$.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються *взаємно простими*, якщо 1 є їх найбільшим спільним дільником.

Многочлен $m(x)$ називається *найменшим спільним кратним* (скорочено НСК) многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо він задовольняє такі дві умови:

1) $m(x)$ є спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тобто $f(x) \mid m(x)$ і $g(x) \mid m(x)$;

2) $m(x)$ ділить кожне спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тобто із $f(x) \mid c(x)$ і $g(x) \mid c(x)$ випливає, що $m(x) \mid c(x)$.

Найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$ позначається НСК$(f(x), g(x))$ або $[f(x), g(x)]$.

Розклад многочлена $f(x)$ у добуток незвідних многочленів, записаний у вигляді

$$f(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x),$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_m(x)$ — попарно неасоційовані незвідні многочлени, називається *канонічним* розкладом многочлена $f(x)$.

Необхідні твердження. **1.** Відносно дій додавання і множення множина многочленів $K[x]$ утворює комутативне кільце з одиницею.

2. $\deg(f+g) \le \max(\deg f, \deg g)$, $\deg(f \cdot g) \le \deg f + \deg g$.

3. У кільці $P[x]$ многочленів з коефіцієнтами з поля P можна скорочувати.

4. *Теорема про ділення з остачею.* Для довільних многочленів $f(x)$ і $g(x) \ne 0$ з коефіцієнтами з поля P існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \text{і} \quad r(x) = 0 \ \text{ або } \ \deg r(x) < \deg g(x).$$

Частка $q(x)$ і *остача від ділення* $r(x)$ визначені однозначно.

5. *Теорема Безу*: значення многочлена $f(x) \in P[x]$ у точці c дорівнює остачі від ділення $f(x)$ на двочлен $x - c$.

6. *Схема Горнера* ділення на лінійний двочлен. Якщо

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + r,$$

то коефіцієнти частки й остача задовольняють рівності

$$\begin{array}{rcl} b_{n-1} & = & a_n, \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + c b_{n-1}, \\ b_{n-3} & = & a_{n-2} + c b_{n-2}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_0 & = & a_1 + c b_1, \\ r & = & a_0 + c b_0. \end{array}$$

Початкові дані й результати обчислень зручно записувати у вигляді таблиці

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline c & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 & r \end{array},$$

у якій перший елемент b_{n-1} другого рядка просто зноситься з першого рядка, а кожен наступний елемент другого рядка обчислюється як сума числа, що стоїть над ним, і помноженого на c числа зліва від нього.

7. У кільці $P[x]$ ненульові многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будуть асоційованими тоді й лише тоді, коли вони розрізняються скалярними множниками.

8. Кожен клас асоційованих многочленів містить рівно один нормований многочлен.

9. У кільці $P[x]$ многочленів із коефіцієнтами з поля P для довільних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ існує НСД$(f(x), g(x))$. Його можна знайти за допомогою *алгоритму Евкліда*. Для цього будуємо ланцюжок ділень з остачею:

$$\begin{gathered}
f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),\\
g(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x),\\
r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
r_{k-3}(x) = q_{k-1}(x)r_{k-2}(x) + r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x),\\
r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x).
\end{gathered}$$

Остання ненульова остача $r_k(x)$ у цьому ланцюжку буде найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

10. У кільці $P[x]$ для довільних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що НСД$(f(x), g(x)) = u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

11. *Критерій взаємної простоти многочленів*. Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будуть взаємно простими тоді й лише тоді, коли існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

12. *Властивості взаємно простих многочленів*:

a) *Лема Евкліда*. Якщо $(f(x), g(x)) = 1$ і $f(x)|g(x)h(x)$, то $f(x)|h(x)$.

b) Якщо $(f(x), g(x)) = 1$ і $f(x)|h(x)$, $g(x)|h(x)$, то $f(x)g(x)|h(x)$.

c) Якщо $(f(x), h(x)) = 1$ і $(g(x), h(x)) = 1$, то $(f(x)g(x), h(x)) = 1$.

13. *Основна теорема арифметики кільця многочленів.* Кожен ненульовий многочлен із коефіцієнтами з поля P розкладається в кільці $P[x]$ у добуток незвідних многочленів. Цей розклад є однозначним із точністю до порядку множників та їх асоційованості.

14. Якщо

$$f(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x) \text{ і } g(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_m^{r_m}(x)$$

— канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$, відповідно, то

$$\text{НСД}(f(x), g(x)) = p_1^{\min(k_1,r_1)}(x)p_2^{\min(k_2,r_2)}(x)\cdots p_m^{\min(k_m,r_m)}(x),$$
$$\text{НСК}(f(x), g(x)) = p_1^{\max(k_1,r_1)}(x)p_2^{\max(k_2,r_2)}(x)\cdots p_m^{\max(k_m,r_m)}(x).$$

15. *Розклад многочлена в ряд Тейлора* в точці c: якщо $\deg f(x) = n$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Обчисліть значення многочлена* $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$ *у точці* $x_0 = 2$.

Розв'язання. Значення многочлена $f(x)$ у точці x_0 дорівнює остачі від ділення $f(x)$ на двочлен $x - x_0$. Розділимо $f(x)$ на $x - 2$ за схемою Горнера:

	3	1	0	−19	−13	−10
2	3	7	14	9	5	0

.

Остачею від ділення $f(x)$ на $x - 2$ є останній елемент нижнього рядка. Отже, $f(2) = 0$. □

Задача 2. *Визначіть кратність кореня* $x_0 = 2$ *многочлена* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Розв'язання. Кратністю x_0 многочлена $f(x)$ є найбільший показник степеня, для якого $f(x)$ ділиться на $(x - x_0)^k$. Розділимо $f(x)$ на $x - 2$ за схемою Горнера:

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0

. (62)

Отже, остача від ділення $f(x)$ на $x - 2$ дорівнює 0. Часткою від ділення є многочлен $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$. Тепер ділимо на $x - 2$ цю частку і т.д. Ділення на $x - 2$ будемо продовжувати до тих пір, поки на якомусь кроці не з'явиться ненульова остача. При цьому зручно не виписувати кожного разу нову таблицю для схеми Горнера, а дописувати знизу до таблиці (62) черговий рядок:

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0
2	1	−1	−1	−2	0	
2	1	1	−1	0		
2	1	3	5			

.

Таким чином, тричі ділення на $x - 2$ відбулося націло, а на четвертому кроці з'явилася ненульова остача 5. Тому число 2 є для многочлена $f(x)$ коренем кратності 3. □

Задача 3. *Розкладіть многочлен* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *за степенями двочлена* $x + 1$ *і обчисліть значення його похідних у точці* -1.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $f(x)$ дорівнює 4, то його розклад за степенями двочлена $x + 1$ має вигляд

$$f(x) = a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

Із цієї рівності видно, що коефіцієнт a_0 є остачею від ділення $f(x)$ на $x+1$, а частка від ділення дорівнює $a_4(x+1)^3+a_3(x+1)^2+a_2(x+1)+a_1$. Тому a_1 є остачею від ділення на $x + 1$ цієї частки, a_2 є остачею від ділення на $x + 1$ наступної частки і т.д. Ділення на $x + 1$ виконуємо за допомогою схеми Горнера:

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			
-1	1				

Звідси

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

З іншого боку, розклад многочлена $f(x)$ у ряд Тейлора в точці -1 має вигляд

$$f(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4.$$

Порівнюючи ці два розклади, отримуємо:

$$f(-1) = 1,\ f'(-1) = 4,\ f''(-1) = -6,\ f'''(-1) = -12,\ f^{(4)}(-1) = 24. \square$$

Задача 4. *Для яких значень a многочлен* $x^5 - ax^2 - ax + 1$ *ділиться на* $(x+1)^2$*?*

Розв'язання. За допомогою схеми Горнера виконаємо двічі ділення даного многочлена на $x + 1$:

	1	0	0	$-a$	$-a$	1
-1	1	-1	1	$-a-1$	1	0
-1	1	-2	3	$-a-4$	$a+5$	

Перше ділення виконалося націло. При другому діленні остача також має дорівнювати 0. Отже, $a + 5 = 0$, звідки $a = -5$. $\square$

Задача 5. *За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД многочленів* $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x + 1$ *і* $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$.

Розв'язання. Нагадаємо, що НСД многочленів визначений із точністю до скалярного множника. Коли ми застосовуємо алгоритм Евкліда лише для знаходження НСД, то на кожному кроці нас цікавлять лише остачі від ділення. Тому для полегшення обчислень ділене і дільник у процесі обчислень можна множити/ділити на довільні скаляри. Розділимо спочатку $f(x)$ на $g(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -\ x^4 & -\ x^3 & & -\ 2x & +\ 1 & 3x^4-2x^3+x^2-9x-2 \\ \cline{7-7}
3x^5 & -\ 3x^4 & -\ 3x^3 & & -\ 6x & +\ 3 & x\ -\ 1 \\
3x^5 & -\ 2x^4 & +\ x^3 & -\ 9x^2 & -\ 2x & & \\ \cline{1-6}
 & -x^4 & -\ 4x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 3 & \\
 & -3x^4 & -\ 12x^3 & +\ 27x^2 & -\ 12x & +\ 9 & \\
 & -3x^4 & +\ 2x^3 & -\ x^2 & +\ 9x & +\ 2 & \\ \cline{1-6}
 & & -14x^3 & +\ 28x^2 & -\ 21x & +\ 7 &
\end{array}
$$

Щоб уникнути дробів, ми в процесі ділення двічі множили ділене на 3. Частка при цьому змінилася, однак вона нам не потрібна. Для полегшення подальших обчислень остачу ділимо на -7. Остаточно одержуємо: $r_1(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$.

Аналогічно ділимо $g(x)$ на $r_1(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\ 2x^3 & +\ x^2 & -\ 9x & -\ 2 & 2x^3-4x^2+3x-1 \\ \cline{6-6}
6x^4 & -\ 4x^3 & +\ 2x^2 & -\ 18x & -\ 4 & 3x\ +\ 4 \\
6x^4 & -\ 12x^3 & +\ 9x^2 & -\ 3x & & \\ \cline{1-5}
 & 8x^3 & -\ 7x^2 & -\ 15x & -\ 4 & \\
 & 8x^3 & -\ 16x^2 & +\ 12x & -\ 4 & \\ \cline{1-5}
 & & 9x^2 & -\ 27x & &
\end{array}
$$

Після ділення отриманої остачі на 9 маємо: $r_2(x) = x^2 - 3x$. Далі ділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 4x^2 & +\ 3x & -\ 1 & x^2-3x \\ \cline{5-5}
2x^3 & -\ 6x^2 & & & 2x+\ 2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & +\ 3x & -\ 1 & \\
 & 2x^2 & -\ 6x & & \\ \cline{1-4}
 & & 9x & -\ 1 &
\end{array}
$$

Отже, $r_3(x) = x^2 - 3x$. Нарешті, ділимо $r_2(x)$ на $r_3(x)$:

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & - & 3x & 9x - 1 \\ \cline{4-4}
9x^2 & - & 27x & x - 26/9 \\
9x^2 & - & x & \\ \cline{1-3}
 & & -26x & \\
 & & -26x + 26/9 & \\ \cline{1-3}
 & & 26/9 &
\end{array}
$$

Таким чином, r_4 є константою. Зрозуміло, що r_4 є останньою ненульовою остачею. Тому НСД$(f(x), g(x)) = 1$. $\square$

Задача 6. *За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ і $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ і його лінійне зображення $d(x) = u(x)f(x) + v(x)f(x)$.*

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі, для знаходження лінійного зображення НСД нам будуть потрібні не тільки остачі від ділення, які з'являються в процесі роботи алгоритму Евкліда, а й частки. Тому множити/ділити в процесі обчислень ділене і дільник на довільні скаляри вже не можна.

Застосовуючи алгоритм Евкліда, одержуємо такий ланцюжок рівностей:

$$
\begin{gathered}
f(x) = (x-1)g(x) + x^2 = (x-1)g(x) + r_1(x), \\
g(x) = (3x-2)r_1(x) + (x-1) = (3x-2)r_1(x) + r_2(x), \\
r_1(x) = (x+1)r_2(x) + 1 = (x+1)r_2(x) + r_3(x), \\
r_2(x) = (1-x)r_3(x),
\end{gathered}
$$

де $r_1(x) = x^2$, $r_2(x) = x - 1$, $r_3(x) = 1$. Отже, НСД$(f(x), g(x)) = 1$.

Рухаючись отриманими нерівностями знизу вгору, можемо написати:

$$
\begin{gathered}
1 = r_3(x) = r_1(x) - (x+1)r_2(x) = \\
= r_1(x) - (x+1)\big(g(x) - (3x-2)r_1(x)\big) = \\
= -(x+1)g(x) + (3x^2 + x - 1)r_1(x) = \\
= -(x+1)g(x) + (3x^2 + x - 1)\big(f(x) - (x-1)g(x)\big) = \\
= (3x^2 + x - 1)f(x) + (-3x^3 + 2x^2 + x - 2)g(x).
\end{gathered}
$$

Таким чином,

$$
\text{НСД}(f(x), g(x)) = 1 = (3x^2 + x - 1)f(x) + (-3x^3 + 2x^2 + x - 2)g(x). \square
$$

Задача 7. *Доведіть, що $x^n - 1$ ділиться на $x^k - 1$ тоді й лише тоді, коли n ділиться на k.*

Розв'язання. Нехай $n = pk + r$. З очевидної рівності

$$x^n - 1 = ((x^p)^k - 1)x^r + (x^r - 1)$$

та відомої рівності

$$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1)$$

випливає, що

$$x^n - 1 = (x^k - 1)(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + \cdots + x^p + 1))x^r + (x^r - 1).$$

Тому остача $x^r - 1$ від ділення $x^n - 1$ на $x^k - 1$ буде нульовою тоді й лише тоді, коли $r = 0$, тобто тоді й лише тоді, коли n ділиться на k.

□

Основні задачі

8. Розділіть із остачею многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$.

9. Обчисліть значення многочлена $f(x)$ у точці x_0:
a) $f(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$.

10. Визначіть кратність кореня $x_0 = -2$ многочлена $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

11. Розкладіть многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $x - x_0$ і обчисліть значення його похідних у точці x_0:
a) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $x_0 = 1 + 2i$.

12. Розкладіть $(x+3)^5 - 2(x+3)^4 + (x+3)^3 + 7(x+3)^2 - 12(x+3) + 4$ за степенями x.

13. Для яких значень a та b многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ ділиться на $(x-1)^2$?

14. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД двох многочленів:
a) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ і $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

b) x^4-4x^3+1 і x^3-3x^2+1;
c) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ і x^5+x^2-x+1;
d) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$ і $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;
e) $2x^4+x^3+x^2-x-3$ і x^3+3x^2-1.

15. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x)$ та $g(x)$ і його лінійне зображення $d(x)=u(x)f(x)+v(x)f(x)$:
a) $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ і $g(x)=x^4+2x^3+x+2$;
b) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$ і $g(x)=x^2-x-1$;
c) $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ і $g(x)=x^3-1$.

16. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_2$ та його лінійне зображення $d(x)=u(x)f(x)+v(x)f(x)$:
a) $f(x)=x^5+x^3+x+1,\;\; g(x)=x^4+1$;
b) $f=x^5+x^3+x,\;\; g=x^4+x+1$.

17. Методом невизначених коефіцієнтів знайдіть лінійне зображення $d(x)=u(x)f(x)+v(x)f(x)$ найбільшого спільного дільника $d(x)$ многочленів $f(x)=x^3$ і $g(x)=(1-x)^2$.

18. Нехай НСД$(f,g)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$. Чому дорівнює НСД многочленів $u(x)$ і $v(x)$?

Додаткові задачі

19. За якої умови на коефіцієнти p і q многочлен x^4+px^2+q ділиться на x^2+mx+1?

20. Доведіть, що x^n+x^{-n} є многочленом степеня n від $x+x^{-1}$.

21. Доведіть, що в зображенні НСД$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ многочлени $u(x)$ і $v(x)$ можна вибрати так, щоб виконувалися нерівності $\deg u(x)<\deg g(x)n$, $\deg v(x)<\deg f(x)$.

22. Знайдіть многочлени $u(x)$ і $v(x)$, для яких виконується рівність $2x-1=u(x)x^3+v(x)(1-x)^2$.

23. Нехай многочлен $f(x)$ при діленні на $x-1$ та $x-3$ дає в остачі відповідно 2 та 1. Знайдіть остачу від ділення $f(x)$ на $(x-1)(x-3)$.

24. Доведіть, що коли многочлен $f(x^n)$ ділиться на $x-1$, то він ділиться й на x^n-1.

25. Відомо, що для всіх x виконується нерівність $f(x)<5(x^2+1)^3+1000$. Що можна сказати про степінь многочлена $f(x)$?

26.[**] Знайдіть такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $1 = u(x)x^m + v(x)(1-x)^n$.

Домашнє завдання

27. Розділіть із остачею многочлен $f(x) = 4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$.

28. Розкладіть многочлен $f(x) = x^5 - x^3 + 1$ за степенями двочлена $x + i$ та обчисліть значення його похідних у точці $-i$.

29. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД двох многочленів:

a) $2x^3 + 6x^2 + x - 3$ і $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 1$;
b) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ і $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;
c) $x^{18} - 1$ і $x^{33} - 1$.

30. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ і $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$ та його лінійне зображення $d(x) = u(x)f(x) + v(x)f(x)$.

31. За допомогою алгоритму Евкліда знайдіть НСД $d(x)$ многочленів $f(x) = x^5 + x + 1$ і $g(x) = x^4 + x^3 + 1$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_2$ і його лінійне зображення $d(x) = u(x)f(x) + v(x)f(x)$.

32. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів $x^m - 1$ та $x^n - 1$.

Література. [1, глава 3, §5; 5, розділ VII, §§1–2].

Заняття 16. Корені та розклад на множники

Необхідні поняття. Якщо $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ — многочлен із коефіцієнтами з кільця K, а K_1 — довільне поле або кільце, що містить K, то для елемента $c \in K_1$ сума $a_0 + a_1c + \cdots + a_nc^n$ позначається $f(c)$ і називається *значенням многочлена* $f(x)$ *у точці* c.

Елемент c називається *коренем* многочлена $f(x)$, якщо $f(c) = 0$.

Нехай c — корінь многочлена $f(x) \in P[x]$. Найбільше таке натуральне число k, що $f(x)$ ділиться на $(x-c)^k$, називається *кратністю* кореня c. Корені кратності 1 називаються *простими*, а корені більшої кратності — *кратними*. Зокрема, корені кратності 2 називають *подвійними*, кратності 3 — *потрійними* і т.д.

Похідною многочлена

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

називається многочлен

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Поле P називається *алгебрично замкненим*, якщо кожен многочлен ненульового степеня із $P[x]$ розкладається над полем P на лінійні множники.

Необхідні твердження. **1.** *Теорема Безу*: значення многочлена $f(x) \in P[x]$ у точці c дорівнює остачі від ділення $f(x)$ на двочлен $x-c$.

2. Елемент c буде коренем многочлена $f(x)$ тоді й лише тоді, коли $f(x)$ ділиться на $x-c$.

3. Якщо $a_1, \ldots, a_m$ — корені многочлена $f(x) \in P[x]$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$, відповідно, то $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_m)^{k_m} g(x),$$

причому жоден з елементів $a_1, \ldots, a_m$ не є коренем многочлена $g(x)$. Зокрема, кількість коренів многочлена з урахуванням їх кратностей не перевищує степеня многочлена, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли многочлен розкладається на лінійні множники.

4. Якщо степінь кожного з многочленів $f(x)$ і $g(x)$ не перевищує n і для попарно різних елементів $a_1, \ldots, a_{n+1}$ виконуються рівності $f(a_i) = g(a_i)$, то $f(x) = g(x)$.

5. *Формули Вієта*: якщо

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

то

$$\begin{array}{rcl}
c_1 + c_2 + \cdots + c_n & = & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\,, \\
c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_{n-1}c_n & = & \dfrac{a_{n-2}}{a_n}\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k} & = & (-1)^k\,\dfrac{a_{n-k}}{a_n}\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
c_1c_2\cdots c_n & = & (-1)^n\,\dfrac{a_0}{a_n}\,.
\end{array}$$

6. Якщо характеристика поля P дорівнює 0 і c — корінь кратності $k \geq 2$ многочлена $f(x) \in P[x]$, то c є коренем кратності $k-1$ його похідної $f'(x)$. Якщо c — простий корінь многочлена $f(x)$, то $f'(c) \neq 0$. Зокрема, корінь c многочлена $f(x)$ буде коренем його похідної $f'(x)$ тоді й лише тоді, коли він є кратним коренем.

7. Нехай $f(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x)$ — канонічний розклад многочлена $f(x) \in P[x]$. Тоді:

a) похідна $f'(x)$ має вигляд

$$f'(x) = p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_m^{k_m-1}(x)g(x),$$

де $g(x)$ не ділиться на жоден із многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_m(x)$;

b) $\text{НСД}(f(x), f'(x)) = p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_m^{k_m-1}(x)$;

c) $\dfrac{f(x)}{\text{НСД}(f(x), f'(x))} = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$.

8. Многочлен $f(x)$ не має кратних множників тоді й лише тоді, коли він взаємно простий зі своєю похідною.

9. *Основна теорема алгебри*: кожен многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має в полі комплексних чисел принаймні один корінь.

10. Кожен многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ненульового степеня розкладається над полем $\mathbb{C}$ на лінійні множники, а тому має, з урахуванням кратності, рівно n коренів.

11. Многочлен із дійсними коефіцієнтами буде незвідним над полем дійсних чисел тоді й лише тоді, коли він є лінійним або многочленом другого степеня із від’ємним дискримінантом.

Приклади розв’язання типових задач

Задача 1. *Доведіть, що многочлен* $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ *ділиться на* $x^2 + x + 1$.

Розв’язання. Нехай $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$, $g(x) = x^2 + x + 1$. Дані многочлени зручно розглядати як многочлени з комплексними коефіцієнтами. Оскільки $g(x)$ не має кратних коренів, то для доведення подільності $f(x)$ на $g(x)$ досить показати, що кожен корінь многочлена $g(x)$ є коренем многочлена $f(x)$. Зауважимо, що $(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$. Тому кожен корінь ε многочлена x^2+x+1 буде й коренем многочлена x^3-1, звідки $\varepsilon^3 = 1$. Тоді

$$f(\varepsilon) = \varepsilon^{3m} + \varepsilon^{3n+1} + \varepsilon^{3k+2} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = g(\varepsilon) = 0.$$

Отже, кожен корінь $g(x)$ є коренем $f(x)$, а тому $f(x)$ ділиться на $g(x)$. □

Задача 2. *Визначіть, для яких натуральних чисел* m *многочлен* $(x+1)^m + x^m + 1$ *ділиться на* $(x^2+x+1)^2$.

Розв’язання. Щоб многочлен $(x+1)^m + x^m + 1$ ділився на $(x^2+x+1)^2$, необхідно й достатньо, щоб кожен корінь многочлена x^2+x+1 був коренем многочлена $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$ кратності ≥ 2, тобто кожен корінь многочлена x^2+x+1 повинен бути коренем як многочлена $f(x)$, так і його похідної $f'(x) = m(x+1)^{m-1} + mx^{m-1}$. Оскільки $(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$, то коренями многочлена x^2+x+1 є два комплексні кубічні корені з одиниці:

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зауважимо, що

$$\varepsilon_1 + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$
$$\varepsilon_2 + 1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}.$$

Тому

$$f(\varepsilon_1)=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^m+1=$$
$$=\left(\cos\frac{m\pi}{3}+\cos\frac{2m\pi}{3}+1\right)+i\left(\sin\frac{m\pi}{3}+\sin\frac{2m\pi}{3}\right),$$

$$f'(\varepsilon_1)=m\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{m-1}+m\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{m-1}=$$
$$=m\left(\cos\frac{(m-1)\pi}{3}+\cos\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)+im\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{3}+\sin\frac{2(m-1)\pi}{3}\right).$$

Оскільки значення кожної з функцій $\sin\frac{k\pi}{3}$ і $\cos\frac{k\pi}{3}$ залежить від остачі від ділення k на 6, то розглянемо шість випадків:

m	$6n$	$6n+1$	$6n+2$	$6n+3$	$6n+4$	$6n+5$
$f(\varepsilon_1)$	3	$1+i\sqrt{3}$	0	1	0	$1-i\sqrt{3}$

Далі треба розглядати лише випадки $m=6n+2$ і $m=6n+4$. Для $f'(\varepsilon_1)$ у цих випадках відповідно маємо:

$$f'(\varepsilon_1)=(6n+2)(0+i\sqrt{3})\quad \text{і}\quad f'(\varepsilon_1)=0.$$

Таким чином, ε_1 буде коренем многочлена $(x+1)^m+x^m+1$ і його похідної тоді й лише тоді, коли m має вигляд $m=6n+4$. При таких значеннях m також маємо:

$$f(\varepsilon_2)=\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^{6n+4}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{6n+4}+1=$$
$$=\left(\cos\frac{-(6n+4)\pi}{3}+\cos\frac{4(6n+4)\pi}{3}+1\right)+$$
$$+i\left(\sin\frac{-(6n+4)\pi}{3}+\sin\frac{4(6n+4)\pi}{3}\right)=0,$$

$$f'(\varepsilon_2)=(6n+4)\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^{6n+3}+(6n+4)\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{6n+3}=$$
$$=(6n+4)\left(\cos\frac{-(6n+3)\pi}{3}+\cos\frac{4(6n+3)\pi}{3}\right)+$$
$$+i(6n+4)\left(\sin\frac{-(6n+3)\pi}{3}+\sin\frac{4(6n+3)\pi}{3}\right)=0.$$

Отже, $(x+1)^m + x^m + 1$ ділиться на $(x^2+x+1)^2$ тоді й лише тоді, коли m має вигляд $m = 6n+4$. $\square$

Задача 3. *Знайдіть a, якщо один із коренів многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + a$ дорівнює 1.*

Розв'язання. Позначимо два інші корені многочлена через c_1 і c_2. Тоді з формул Вієта маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{gathered} 1 + c_1 + c_2 = \frac{1}{2}\,, \\ c_1 + c_2 + c_1 c_2 = -\frac{7}{2}\,, \\ c_1 c_2 = -\frac{a}{2}\,. \end{gathered}$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, отримуємо: $c_1 c_2 = -3$. Порівнюючи це з третім рівнянням, знаходимо: $a = 6$. $\square$

Задача 4. *Нехай $n > 1$. Доведіть, що число 1 є коренем кратності 3 многочлена $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.*

Розв'язання. Щоб число 1 було коренем кратності 3, необхідно й достатньо, щоб воно було коренем многочлена і двох перших його похідних, але не було коренем третьої похідної. Перевіряємо:

$$\begin{gathered} f(1) = 1 - n + n - 1 = 0\,, \\ f'(1) = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 0\,, \\ f''(1) = 2n(2n-1) - n(n+1)n + n(n-1)(n-2) = 0\,, \\ f'''(1) = 2n(2n-1)(2n-2) - n(n+1)n(n-1) + n(n-1)(n-2)(n-3) = \\ = 2n^3 - 2n\,. \end{gathered}$$

Якщо $n > 1$, то $f'''(1) > 0$. Тому число 1 є коренем кратності 3. $\square$

Задача 5. *Доведіть, що коли дійсний многочлен $f(x)$ розкладається над полем $\mathbb{R}$ на лінійні множники, то його похідна $f'(x)$ також розкладається на лінійні множники.*

Розв'язання. Дійсний многочлен розкладається над полем $\mathbb{R}$ на лінійні множники тоді й лише тоді, коли кількість його дійсних коренів, з урахуванням кратності, дорівнює степеню цього многочлена. Нехай $c_1, \dots, c_k$ — корені многочлена $f(x)$ кратностей $m_1, \dots, m_k$, відповідно, причому $c_1 < \dots < c_k$. Тоді $m_1 + \dots + m_k = \deg f(x)$. Числа c_1,

$\ldots, c_k$ будуть коренями похідної $f'(x)$ кратностей $m_1-1,\ldots,m_k-1$ відповідно. Крім того, для кожного проміжку $[c_i, c_{i+1}]$ $(i=1,\ldots,k_1)$ маємо: $f(c_i)=f(c_{i+1})=0$. Тому всередині кожного такого проміжку є точка, у якій похідна дорівнює 0, тобто ще один корінь похідної.

Отже, похідна $f'(x)$ має, з урахуванням їх кратності, не менше ніж

$$(m_1-1)+\cdots+(m_k-1)+(k-1)=\deg f(x)-1=\deg f'(x)$$

дійсних коренів. Таким чином, кількість коренів похідної дорівнює її степеневі. Отже, похідна розкладається на лінійні множники. □

Задача 6. *Розкладіть на незвідні множники над полем комплексних і полем дійсних чисел многочлен* x^8-16.

Розв'язання. Комплексні корені многочлена x^8-16 — це корені степеня 8 із числа 16. Щоб знайти ці корені, переводимо число 16 у тригонометричну форму застосовуємо відому формулу:

$$\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{8}+i\sin\frac{2k\pi}{8}\right),\ \ k=0,1,\ldots,7.$$

Отже, маємо 8 коренів:

$$c_0=\sqrt{2},\ \ c_1=1+i,\ \ c_2=i\sqrt{2},\ \ c_3=-1+i,$$
$$c_4=-\sqrt{2},\ \ c_5=-1-i,\ \ c_6=-i\sqrt{2},\ \ c_7=1-i.$$

Тому

$$x^8-16=$$
$$=(x-\sqrt{2})(x-1-i)(x-i\sqrt{2})(x+1-i)(x+\sqrt{2})(x+1+i)(x+i\sqrt{2})(x-1+i).$$

Щоб знайти розклад над полем дійсних чисел, треба в цьому розкладі залишити множники, які відповідають дійсним кореням, і перемножити множники, які відповідають парам спряжених коренів. Таких пар три: c_1 і c_7, c_2 і c_6, c_3 і c_5. Остаточно отримуємо:

$$x^8-16=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)(x^2+2)(x^2+2x+2).$$ □

Задача 7. *Розкладіть на лінійні множники над полем комплексних чисел многочлен* $x^{2n}+x^n+1$.

Розв'язання. Якщо ми знаємо корені многочлена, то його розклад на лінійні множники виписуємо вже автоматично. Корені многочлена $x^{2n}+x^n+1$ легко знайти, якщо зауважити, що

$$(x^{2n}+x^n+1)(x^n-1)=x^{3n}-1.$$

Із цієї рівності випливає, що коренями многочлена $x^{2n}+x^n+1$ є ті корені многочлена $x^{3n}-1$, які не є коренями x^n-1, тобто ті корені степеня $3n$ з одиниці, які не є коренями степеня n з одиниці. Тому

$$x^{2n}+x^n+1=\prod_{0<k<3n,\ 3\nmid k}\left(x-\cos\frac{2\pi k}{3n}-i\sin\frac{2\pi k}{3n}\right). \qquad \square$$

Задача 8. *Відокремте кратні множники многочлена*

$$f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$$

і розкладіть його на незвідні множники.

Розв'язання. Спочатку знайдемо за допомогою алгоритму Евкліда НСД многочлена $f(x)$ і його похідної. Нагадаємо, що при знаходженні НСД остачі, які з'являються в процесі роботи алгоритму Евкліда, нас цікавлять лише з точністю до числового множника.

$$f'(x)=7x^6-18x^5+25x^4-28x^3+21x^2-10x+3.$$

Ділимо $f(x)$ на $f'(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{49}(7x-3)f'(x)+\frac{1}{49}(16x^5-72x^4+112x^3-112x^2+96x-40).$$

Для спрощення подальших обчислень розділимо на $\dfrac{8}{49}$ і візьмемо $r_1(x)=2x^5-9x^4+14x^3-14x^2+12x-5$. Далі ділимо $f'(x)$ на $r_1(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{4}(14x+27)r_1(x)+\frac{3}{4}(49x^4-98x^3+98x^2-98x+49).$$

Скорочуємо на $\dfrac{3}{4\cdot 49}$ і беремо $r_2(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$. $r_1(x)$ на $r_2(x)$ уже ділиться націло: $r_1(x)=(2x-5)r_2(x)$. Тому останньою ненульовою остачею є $r_2(x)$ і

$$\text{НСД}(f(x),f'(x))=r_2(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

Щоб відокремити кратні множники многочлена $f(x)$, розділимо $f(x)$ на НСД$(f(x), f'(x))$:

$$\frac{f(x)}{\text{НСД}(f(x), f'(x))} = \frac{x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} =$$

$$= x^3 - x^2 + x - 1. \tag{63}$$

Канонічний розклад многочлена (63) містить ті самі незвідні множники, що й канонічний розклад многочлена $f(x)$. Тільки в розкладі многочлена (63) усі незвідні множники будуть у перших степенях. Щоб знайти канонічний розклад многочлена $f(x)$, розкладемо спочатку на незвідні множники многочлен (63). Це легко:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1).$$

Тоді $f(x) = (x - 1)^k (x^2 + 1)^m$. Знайдемо показники k і m. Оскільки $k + 2m = 7$, то досить знайти k — кратність числа 1 як кореня многочлена $f(x)$. Зробимо це за допомогою схеми Горнера:

	1	−3	5	−7	7	−5	3	−1
1	1	−2	3	−4	3	−2	1	0
1	1	−1	2	−2	1	−1	0	
1	1	0	2	0	1	0		
1	1	1	3	3	4			

.

Отже, кратність k дорівнює 3, тому канонічний розклад многочлена $f(x)$ має вигляд $f(x) = (x - 1)^3 (x^2 + 1)^2$. □

Основні задачі

9. Коренями многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ є $x_1, x_2, \dots, x_n$. Які корені має многочлен:

a) $a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_0$;

b) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$?

10. Доведіть, що для довільних натуральних чисел m і k:

a) многочлен $x^{3m+1} + x^{3k+2} + 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$;

b) многочлен $x^{6m} - x^{6k+3} - 2$ ділиться на $x^2 - x + 1$.

11. Знайдіть, для яких натуральних чисел m:

a) многочлен $x^{2m} + x^m + 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$;

b) многочлен $(x + 1)^m - x^m - 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$.

12. Для яких значень параметра a рівняння $2x^3 - x^2 - 7x + a = 0$ має два корені, сума яких дорівнює 1?

13. Для яких значень параметрів a та b многочлен $ax^{n+1} + bx^n + 1$ ділиться на $(x-1)^2$?

14. Доведіть, що число 1 є коренем кратності 3 многочлена

$$x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1.$$

15. Доведіть, що многочлен $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ не має кратних коренів.

16. Доведіть, що кратність ненульового кореня многочлена $x^n + ax^m + b$ не перевищує 2.

17. a) Побудуйте нормований многочлен найменшого степеня з комплексними коефіцієнтами, для якого числа 1 і $1+i$ будуть простими коренями, а число i — коренем кратності 2.

b) Виконайте те саме завдання для многочлена з дійсними коефіцієнтами.

18. Розкладіть на незвідні множники над полем комплексних і полем дійсних чисел многочлен: a) $x^6 + 27$; b) $x^5 - 1$.

19. Розкладіть многочлен $x^{2n} + 1$ на незвідні множники: a) над полем $\mathbb{C}$; b) над полем $\mathbb{R}$.

20. Розкладіть на незвідні множники над полем дійсних чисел многочлен: a) $x^4 - 10x^2 + 1$; b) $x^4 - ax^2 + 1$, $-2 < a < 2$.

21. Знайдіть найбільший спільний дільник многочлена

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$$

і його похідної.

22. Відокремте кратні множники многочлена та розкладіть його на незвідні множники:

a) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;
b) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
c) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;
d) $x^6 - 7x^5 + 17x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 16x + 16$;
e) $x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$.

Додаткові задачі

23. Коренями многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ є $x_1, x_2, \dots, x_n$. Які корені має многочлен $f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$?

24*. Розкладіть на лінійні множники над полем комплексних чисел многочлен $f(x)$, якщо:

a) $f(x)=\cos(n\arccos x)$;

b) $f(x)=\binom{2n}{0}x^n-\binom{2n}{2}x^{n-1}+\binom{2n}{4}x^{n-2}-\dots+(-1)^n\binom{2n}{2n}$.

25. Для яких значень m, n і k многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3k+2}$ ділиться на x^4+x^2+1?

26. Чи може якийсь із многочленів $(x+1)^n-x^n-1$ або $(x+1)^n+x^n-1$ ділитись на $(x^2+x+1)^3$?

27. Доведіть, що коли многочлен $f(x^n)$ ділиться на $(x-a)^k$, $a\neq 0$, то він ділиться й на $(x^n-a^n)^k$.

28. Доведіть, що многочлен $f(x)$ ділиться на свою похідну тоді й лише тоді, коли він має вигляд $f(x)=a(x-c)^n$.

29. Доведіть, що для кожного многочлена $f(x)$ число a буде коренем многочлена $\dfrac{x-a}{2}\big(f'(x)-f'(a)\big)-f(x)+f(a)$, і знайдіть кратність цього кореня.

30. Знайдіть найбільший спільний дільник многочлена $x^{m+n}-x^m-x^n+1$ і його похідної.

31*. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів x^m+1 та x^n+1.

32*. Нехай многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами при всіх дійсних значеннях x набуває лише невід'ємних значень. Доведіть, що існують такі дійсні многочлени $g(x)$ і $h(x)$, що $f(x)=\big(g(x)\big)^2+\big(h(x)\big)^2$.

Домашнє завдання

33. Коренями многочлена $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ є $x_1, x_2, \dots, x_n$. Які корені має многочлен $a_nx^n+a_{n-1}bx^{n-1}+a_{n-2}b^2x^{n-2}+\dots+a_0b^n$?

34. Визначіть, для яких натуральних чисел m многочлен $(x+1)^m-x^m-1$ ділиться на $(x^2+x+1)^2$.

35. Для яких значень параметра a рівняння $x^3 - 7x + a = 0$ має два корені, один з яких дорівнює подвоєному іншому?

36. Доведіть, що число 1 є коренем кратності 3 многочлена
$x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$.

37. a) Побудуйте нормований многочлен найменшого степеня з комплексними коефіцієнтами, для якого числа 1 і 2 будуть простими коренями, а число $1 - i$ — коренем кратності 2.

b) Виконайте те саме завдання для многочлена з дійсними коефіцієнтами.

38. Розкладіть на незвідні множники над полем комплексних і полем дійсних чисел многочлен $x^4 + 4$.

39. Розкладіть на незвідні множники над полем дійсних чисел многочлен: a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $x^{2n} + x^n + 1$.

40. Нехай $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Доведіть, що кожен ненульовий корінь многочлена $f(x) = a_1 x^{n_1} + a_a x^{n_2} + \cdots + a_k x^{n_k}$ має кратність меншу ніж k.

41. Відокремте кратні множники многочлена $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 16$ і розкладіть його на незвідні множники.

Література. [1, глава 3, §2; 5, розділ VII, §§3–5].

Заняття 17. Многочлени над $\mathbb{Q}$ і над скінченними полями

Необхідні поняття. Редукцією за модулем простого числа p многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ з цілими коефіцієнтами називається многочлен

$$[f(x)]_p = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \overline{a_n}x^n \in \mathbb{Z}_p[x],$$

коефіцієнтами якого є лишки за модулем p відповідних коефіцієнтів многочлена $f(x)$.

Необхідні твердження. **1.** Нехай нескоротний дріб p/q є коренем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ із цілими коефіцієнтами. Тоді $q \mid a_n$ і для довільного цілого числа m $(p - qm) | f(m)$. Зокрема, $p \mid a_0$.

2. *Теорема Гаусса*: якщо многочлен $f(x)$ із цілими коефіцієнтами є незвідним над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел, то він лишається незвідним і над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

3. *Ознака Айзенштайна*. Нехай $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ — многочлен із цілими коефіцієнтами. Якщо існує просте число p, яке задовольняє такі умови:

(1) старший коефіцієнт a_n не ділиться на p;

(2) усі інші коефіцієнти діляться на p;

(3) вільний член a_0 не ділиться на p^2,

то многочлен $f(x)$ є незвідним над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайдіть раціональні корені многочлена*

$$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12.$$

Розв'язання. Нехай нескоротний дріб p/q є коренем. Тоді чисельник p є дільником вільного члена 12, а знаменник q — дільником старшого коефіцієнта 6. Це дає такі 24 "кандидати в корені":

$$\frac{\pm 12}{1},\ \frac{\pm 6}{1},\ \frac{\pm 4}{1},\ \frac{\pm 3}{1},\ \frac{\pm 2}{1},\ \frac{\pm 1}{1},\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 4}{3},\ \frac{\pm 2}{3},\ \frac{\pm 1}{3},\ \frac{\pm 1}{6}. \tag{64}$$

$f(1) = 4$ і $f(-1) = 18$. Тому за твердженням 1 сума $p + q$ повинна бути дільником числа 18, а різниця $p - q$ — дільником числа 4. Після перевірки цих умов зі списку (64) залишається лише 4 “кандидати”:

$$\frac{-3}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}.$$

$f(2) = 180$. Перевірка умови $(p - 2q) \mid 180$ відкидає ще число $\dfrac{-1}{3}$. Після цього лишається лише два числа: -3 та $\dfrac{1}{2}$. Безпосередня перевірка показує, що обидва є коренями.

Таким чином, многочлен $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12)$ має два раціональні корені: -3 і $\dfrac{1}{2}$. □

Задача 2. *Розкладіть на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ многочлен $x^4 + 324$.*

Розв'язання. Многочлен $x^4 + 324$ має цілі коефіцієнти, тому, якщо він розкладається в добуток многочленів із раціональними коефіцієнтами, то розкладається й у добуток многочленів із цілими коефіцієнтами. Число $324 = 2^2 3^4$ не є четвертим степенем, тому раціональних коренів многочлен $x^4 + 324$ не має. Однак тоді він не має і дільників першого степеня. Отже, він або є незвідним, або розкладається в добуток

$$x^4 + 324 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) \tag{65}$$

двох незвідних множників другого степеня. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах цього рівняння, одержуємо таку систему рівнянь:

$$a + p = 0\,, \quad q + ap + b = 0\,, \quad aq + bp = 0\,, \quad bq = 324\,.$$

Якщо $a = 0$, то з другого рівняння випливає, що $q = -b$. Це суперечить тому, що добуток bq є додатним. Отже, $a \neq 0$. Тоді $p = -a$, із третього рівняння одержуємо, що $q = b$, друге рівняння набуває вигляду $a^2 = 2b$, а четверте — вигляду $b^2 = 324$. Позаяк $b > 0$, то $b = q = 18$.

Оскільки $q = b$ і $p = -a$, то множники в правій частині рівності (65) розрізняються лише знаком лінійного члена. тому без обмеження загальності можемо вважати, що $a > 0$. Тоді з рівності $a^2 = 2b = 36$ знаходимо: $a = 6$, звідки $p = -6$.

Таким чином, розклад (65) існує й має вигляд

$$x^4 + 324 = (x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18).$$

□

Задача 3. *Доведіть, що коли для многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ жодне з чисел $f(0)$, $f(1)$ і $f(2)$ не ділиться на 3, то $f(x)$ не має цілих коренів.*

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $f(x)$ має цілий корінь m. Тоді $f(x) = (x-m)g(x)$, де многочлен $g(x)$ також має цілі коефіцієнти. Тому $f(0) = -m \cdot n_0$, $f(1) = (1-m) \cdot n_1$, $f(2) = (2-m) \cdot n_2$, де $n_0 = g(0)$, $n_1 = g(1)$, $n_2 = g(2)$ — цілі числа. З трьох послідовних цілих $-m$, $1-m$ і $2-m$ одне ділиться на 3. Тому принаймні одне з чисел $f(0)$, $f(1)$ і $f(2)$ ділиться на 3. □

Задача 4. *Доведіть незвідність над полем $\mathbb{Q}$ многочлена*

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1.$$

Розв'язання. Застосувати ознаку Айзенштайна безпосередньо не можна. Зробимо заміну $x = y + 1$ і розглянемо многочлен

$$\widetilde{f}(y) = f(y+1) = (y+1)^4 - (y+1)^3 + 2(y+1) + 1 = y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 3.$$

Многочлен $f(x)$ буде незвідним тоді й лише тоді, коли таким буде многочлен $\widetilde{f}(y)$. Справді, якщо $f(x) = g(x)h(x)$, то $\widetilde{f}(y) = g(y+1)h(y+1))$, а якщо $\widetilde{f}(y) = u(y)v(y)$, то $f(x) = u(x-1)v(x-1)$.

У многочлена $\widetilde{f}(y)$ усі коефіцієнти, крім старшого, діляться на 3, але вільний член не ділиться на 3^2. Тому за ознакою Айзенштайна $\widetilde{f}(y)$ є незвідним, але тоді й многочлен $f(x)$ є незвідним. □

Задача 5. *Доведіть незвідність над полем $\mathbb{Q}$ многочлена*

$$f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5.$$

Розв'язання. Якщо многочлен є звідним, то звідною буде і його редукція за довільним модулем. Розглянемо редукцію нашого многочлена за модулем 2:

$$[x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5]_2 = x^5 + x^2 + 1.$$

Припустимо, що многочлен $g(x) = x^5 + x^2 + 1$ розкладається в добуток $g(x) = u(x)v(x)$. Коренів у полі $\mathbb{Z}_2$ многочлен $g(x)$ не має. Тому множники $u(x)$ і $v(x)$ не можуть бути лінійними. Незвідний многочлен степеня 2 над полем $\mathbb{Z}_2$ всього один: x^2+x+1. Однак x^5+x^2+1 не ділиться на $x^2 + x + 1$. Тому $u(x)$ і $v(x)$ повинні мати степінь ≥ 3, але це неможливо.

Отже, припущення, що $g(x)$ є звідним, приводить до суперечності, тому многочлен $x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ є незвідним. □

Задача 6. *Доведіть, що для довільних попарно різних цілих чисел* a_1, $a_2, \ldots, a_n$ *многочлен* $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ *є незвідним над полем* $\mathbb{Q}$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = g(x)h(x)$ — нетривіальний розклад многочлена $f(x)$. Оскільки $f(x)$ має цілі коефіцієнти, то можна вважати, що кожен із многочленів $g(x)$ і $h(x)$ також має цілі коефіцієнти. Із рівностей

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = -1$$

випливає, що

$$g(a_1)h(a_1) = g(a_2)h(a_2) = \cdots = g(a_n)h(a_n) = -1.$$

Тому для кожного i числа $g(a_i)$ та $h(a_i)$ дорівнюють ± 1 і є протилежними. Однак тоді $g(a_i) + h(a_i) = 0$, тобто числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є коренями многочлена $g(x) + h(x)$. З іншого боку, степінь многочлена $g(x) + h(x)$ є строго меншим за n. Позаяк кількість коренів не може перевищувати степінь многочлена, то $g(x) + h(x)$ є нульовим многочленом. Отже, $g(x) = -h(x)$ і $f(x) = -g^2(x)$, а це суперечить тому, що старший коефіцієнт многочлена $f(x)$ дорівнює 1.

Таким чином, припущення про існування нетривіального розкладу приводить до суперечності та $f(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

$\square$

Задача 7. *Знайдіть усі незвідні нормовані многочлени степеня* 2 *над полем* $\mathbb{Z}_3$.

Розв'язання. Якщо многочлен $f(x) = x^2 + ax + b$ є звідним, то він розкладається в добуток $f(x) = (x-p)(x-q)$ двох лінійних множників. Тому він буде незвідним тоді й лише тоді, коли не матиме коренів, тобто коли задовольнятиме систему нерівностей

$$f(0) \neq 0, \quad f(1) \neq 0, \quad f(2) \neq 0.$$

Для коефіцієнтів a та b це дає систему нерівностей

$$b \neq 0, \quad 1 + a + b \neq 0, \quad 1 + 2a + b \neq 0.$$

Безпосередньо перевіряємо, що ця система має 3 розв'язки: $a = 0$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 2$. Тому над полем $\mathbb{Z}_3$ є 3 незвідні нормовані многочлени степеня 2:

$$x^2 + 1, \quad x^2 + x + 2, \quad x^2 + 2x + 2. \qquad \square$$

Задача 8. *Підрахуйте кількість нормованих незвідних многочленів степеня 3 над полем $\mathbb{Z}_3$.*

Розв'язання. Нехай $x^3 + ax^2 + bx + c$ — довільний нормований многочлен степеня 3 над полем $\mathbb{Z}_3$. Задачу можна розв'язувати різними способами. Можна зауважити, що многочлен степеня 3 буде незвідним тоді й лише тоді, коли він не має лінійних множників, тобто тоді й лише тоді, коли він не має коренів. Як і в попередній задачі, це дає систему нерівностей

$$f(0) \neq 0, \quad f(1) \neq 0, \quad f(2) \neq 0$$

для коефіцієнтів a, b, c. Далі безпосередньо підраховуємо кількість розв'язків цієї системи.

Однак для многочленів більшого степеня такий метод уже не спрацьовує, оскільки звідний многочлен степеня > 3 не зобов'язаний мати корінь. Тому розглянемо інший метод, який придатний для підрахунку кількості нормованих многочленів довільного степеня.

Позаяк кожен із коефіцієнтів a, b, c можна вибирати трьома способами й незалежно від інших, то всього над $\mathbb{Z}_3$ маємо $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ нормованих многочленів степеня 3. Підрахуємо, скільки з них є звідними. Розклад нормованого многочлена в добуток незвідних нормованих многочленів є однозначним із точністю до порядку множників. Звідний многочлен степеня 3 може розкладатися або в добуток трьох лінійних множників, або в добуток лінійного множника і множника степеня 2. Над полем $\mathbb{Z}_3$ є 3 нормовані лінійні многочлени: x, $x + 1$ та $x + 2$, і 3 незвідні нормовані многочлени степеня 2 (див. задачу 7). Розклад у добуток трьох лінійних множників може мати вигляд або $(x + \alpha)^3$ (таких 3), або $(x + \alpha)^2(x + \beta)$ (таких 6), або $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$ (таких 1). Добуток лінійного множника і множника степеня 2 можна отримати дев'ятьма способами, позаяк кожен із множників можна вибрати трьома способами.

Отже, кількість нормованих незвідних многочленів степеня 3 дорівнює $27 - 3 - 6 - 1 - 9 = 8$. $\square$

Задача 9. *Розкладіть на незвідні множники многочлен $x^4 + x^3 + x + 2$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_3$.*

Розв'язання. Легко перевіряємо, що многочлен $x^4 + x^3 + x + 2$ не має коренів у полі $\mathbb{Z}_3$, а тому він не має лінійних множників. Отже, якщо він розкладається, то цей розклад має вигляд

$$x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

де обидва множники є незвідними многочленами. Повний список усіх незвідних нормованих многочленів степеня 2 над полем $\mathbb{Z}_3$ отримано в задачі 7. Він невеликий, тому можна безпосередньо перевірити подільність $x^4 + x^3 + x + 2$ на многочлени з цього списку. Це одразу дає потрібний результат:

$$x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2). \qquad \square$$

Основні задачі

10. Знайдіть раціональні корені многочлена:
a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$;
b) $6x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 12$;
c) $6x^4 - 16x^3 + 13x^2 - 16x + 12$.

11. Для яких цілих чисел m многочлен $x^4 + mx^2 + x + 1$ буде звідним над полем $\mathbb{Q}$?

12. Доведіть, що коли для многочлена $f(x)$ із цілими коефіцієнтами числа $f(0)$ і $f(1)$ є непарними, то $f(x)$ не має цілих коренів.

13. Доведіть, що в кільці $\mathbb{Q}[x]$ існують незвідні многочлени кожного натурального степеня.

14. Доведіть незвідність над полем $\mathbb{Q}$ таких многочленів:
a) $x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x - 6$;
b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
c) $x^4 - 10x + 1$;
d) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5$;
e) $x^{55} - 25$.

15. Доведіть, що незвідний над полем $\mathbb{Q}$ многочлен із цілими коефіцієнтами не може мати кратних комплексних коренів.

16. Знайдіть усі незвідні многочлени степеня ≤ 4 над полем $\mathbb{Z}_2$.

17. Підрахуйте кількість незвідних многочленів степенів 5 і 6 над полем $\mathbb{Z}_2$.

18. Доведіть, що для кожного простого числа p многочлен $x^4 + x^2 + 1$ буде звідним над полем $\mathbb{Z}_p$.

19. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_3$:
a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$;
b) $f(x) = x^3 + x + 2$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

20. Розкладіть на незвідні множники многочлен $f(x)$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_3$:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$;
b) $f(x) = x^3 + x + 2$;
c) $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$.

Додаткові задачі

21. Доведіть, що для простого числа p многочлен $x^{p^k} + x^{p^{k-1}} + \cdots + x^p + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

22. Доведіть, що для довільного натурального числа m і довільних $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{4m+1}$ із $\{1, -1\}$ многочлен

$$f(x) = x^{4m+1} + 2\varepsilon_1 x^{4m} + 3\varepsilon_2 x^{4m-1} + \cdots + (4m+2)\varepsilon_{4m+1}$$

не має цілих коренів.

23.* Нехай многочлен $f(x)$ степеня n набуває значення ± 1 більше ніж при n цілих значеннях x. Доведіть, що $f(x)$ буде незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

24.* Доведіть, що для довільних попарно різних цілих чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n многочлен $f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

25. Підрахуйте кількість незвідних многочленів степеня 7 над полем $\mathbb{Z}_2$.

26. Нехай $f(x)$ — незвідний многочлен над полем $\mathbb{Z}_p$. Доведіть, що многочлени $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+p-1)$ або всі попарно різні, або всі однакові.

27.** Доведіть, що для кожного простого числа p і кожного $a \not\equiv 0 \pmod p$ многочлен $f(x) = x^p - x - a$ є незвідним над полем $\mathbb{Z}_p$.

28. Чи правильно, що для довільного натурального числа $k > 1$ многочлен $x^k + x + 1$ буде незвідним над полем $\mathbb{Z}_2$?

Домашнє завдання

29. Знайдіть раціональні корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 14x^3 - 7x^2 + 9x - 18$.

30. Доведіть незвідність над полем $\mathbb{Q}$ таких многочленів:

a) $x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 9x - 15$;

b) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 5x + 15$.

31. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів $x^3 + x + 2$ та $x^4 + x^3 + x + 1$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_3$.

32. Знайдіть усі незвідні многочлени степеня 5 над полем $\mathbb{Z}_2$.

33. Розкладіть на незвідні множники многочлен $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{Z}_3$.

34. З'ясуйте, чи буде многочлен x^3+x^2+1 звідним над полем: a) $\mathbb{Z}_2$; b) $\mathbb{Z}_3$; c) $\mathbb{Z}_5$; d) $\mathbb{Q}$.

Література. [1, глава 3, §6; 5, розділ VII, §3].

Заняття 18. Інтерполяція. Локалізація коренів. Раціональні дроби

Необхідні поняття. Многочлен $f(x)$, який у заданих попарно різних точках x_0, x_1, …, x_n набуває відповідно заданих значень b_0, $b_1, \ldots, b_n$, називається *інтерполяційним многочленом*.

Локалізувати корені многочлена $f(x)$ означає вказати для кожного кореня многочлена обмежену область, яка містить цей корінь, причому для різних коренів ці області не повинні перетинатися.

Нехай $S = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — набір дійсних ненульових чисел. Кількість Zm таких індексів i, $1 \le i < m$, що $c_i c_{i+1} < 0$ (тобто числа c_i і c_{i+1} мають протилежні знаки), називається *числом змін знака* в наборі S. Якщо набір S містить нулі, то під числом змін знака в S розуміється число змін знака в укороченому наборі S', який одержуємо із S викреслюванням нулів. *Рядом Штурма* для многочлена $f(x)$ без кратних коренів називається такий набір многочленів

$$f_0(x) = f(x), \;\; f_1(x), \;\; \ldots, \;\; f_k(x), \tag{66}$$

який задовольняє умови:

(1) многочлен $f_k(x)$ не має дійсних коренів;

(2) при переході через корінь многочлена $f(x)$ добуток $f(x)f_1(x)$ змінює знак із „–“ на „+“;

(3) якщо $f_i(a) = 0$ для деякого i, $0 < i < k$, то $f_{i-1}(a)f_{i+1}(a) < 0$.

Для ряду Штурма (66) і для кожного дійсного числа c через $\mathrm{Zm}(c)$ позначається число змін знака в наборі $(f_0(c), f_1(c), \ldots, f_k(c))$.

Раціональним дробом називається відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ двох многочленів. Якщо $\deg f(x) < \deg g(x)$, то дріб називається *правильним*.

Раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ називається *елементарним* або *найпростішим*, якщо знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного многочлена $p(x)$ і $\deg f(x) < \deg p(x)$.

Необхідні твердження. **1.** Для довільних попарно різних точок x_0, $x_1, \ldots, x_n$ і довільних значень b_0, $b_1, \ldots, b_n$ існує єдиний інтерполяційний многочлен $f(x)$ степеня $\le n$.

2. *Метод Лагранжа*. Нехай

$$f_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Тоді многочлен

$$f(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_n f_n(x)$$

має степінь $< n$ і набуває в точках $x_1, \dots, x_n$ відповідно значень $b_1, \dots, b_n$.

3. *Метод Ньютона*. Многочлен

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) + \cdots$$
$$\cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

де

$$c_k = \frac{b_k - g_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})},$$

набуває в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ значень $b_0, b_1, \dots, b_n$.

4. Дійсний многочлен $g(x) = \dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ взаємно простий зі своєю похідною й має ті самі дійсні корені, що й $f(x)$, причому всі корені $g(x)$ є простими.

5. Якщо многочлен $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ має корінь a, то

$$|a| \le 1 + \max_{1 \le i \le n} |a_i|.$$

6. *Теорема Штурма*. Нехай многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ взаємно простий зі своєю похідною і для нього існує ряд Штурма (66). Якщо $a < b$ і $f(a) \ne 0 \ne f(b)$, то кількість коренів многочлена $f(x)$ на інтервалі (a, b) дорівнює $\mathrm{Zm}(a) - \mathrm{Zm}(b)$.

7. Якщо многочлен $f(x)$ взаємно простий зі своєю похідною, то ряд Штурма можна будувати так: $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$, а далі для $i > 0$ члени ряду визначаються рекурентно:

$$f_{i-1}(x) = q_i(x) f_i(x) - f_{i+1}(x).$$

8. Члени ряду Штурма можна множити на довільні додатні числа.

9. Кожен раціональний дріб $r(x)$ єдиним чином розкладається в суму $r(x) = p(x) + \dfrac{u(x)}{v(x)}$ многочлена і правильного дробу.

10. Кожен правильний дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів.

11. Над полем $\mathbb{C}$ кожен раціональний дріб розкладається в суму дробів вигляду $\dfrac{a}{(x-c)^k}$.

12. Над полем $\mathbb{R}$ кожен раціональний дріб розкладається в суму дробів вигляду $\dfrac{a}{(x-c)^k}$ або $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, де квадратний тричлен x^2+px+q має від'ємний дискримінант.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Побудуйте методом Ньютона многочлен $f(x)$ найменшого степеня за таблицею*

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	6	5	0	3	2

його значень.

Розв'язання. Починаємо з многочлена нульового степеня, який у точці $x=0$ набуває значення 6: $f_0(x)=6$. Потім до $f_0(x)$ додаємо доданок першого степеня, який не впливає на значення многочлена в точці $x=0$:

$$f_1(x)=f_0(x)+a_1x.$$

Значення a_1 знаходимо з рівності $f_1(1)=5$. Маємо: $6+a_1=5$, звідки $a_1=-1$. Таким чином,

$$f_1(x)=6-x.$$

До многочлена $f_1(x)$ додаємо такий доданок другого степеня, який не впливає на значення $f_1(x)$ у точках $x=0$ та $x=1$:

$$f_2(x)=f_1(x)+a_2x(x-1).$$

Множник a_2 вибираємо так, щоб виконувалася рівність $f_2(2)=0$. Маємо: $4+2a_2=0$, звідки $a_2=-2$. Тому

$$f_2(x)=6-x-2x(x-1).$$

Далі до $f_2(x)$ додаємо такий доданок третього степеня, який не змінює його значень у точках 0, 1 і 2:

$$f_3(x)=f_2(x)+a_3x(x-1)(x-2).$$

a_3 вибираємо з умови $f_3(3)=3$. Маємо: $-9+6a_3=3$, звідки $a_3=2$. Тому

$$f_3(x)=6-x-2x(x-1)+2x(x-1)(x-2).$$

Нарешті, до $f_3(x)$ додаємо доданок четвертого степеня, який дорівнює 0 у точках 0, 1, 2 і 3:

$$f_4(x)=f_3(x)+a_4x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Коефіцієнт a_4 вибираємо з умови $f_4(4) = 2$. Маємо: $26+24a_4 = 2$, звідки $a_4 = -1$.

Позаяк $f_4(x)$ набуває потрібних значень у всіх даних точках, то він і є шуканим. Таким чином,

$$\begin{gathered} f(x) = f_4(x) = \\ = 6 - x - 2x(x-1) + 2x(x-1)(x-2) - x(x-1)(x-2)(x-3) = \\ = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 11x + 6. \end{gathered}$$ □

Задача 2. *Побудуйте методом Лагранжа многочлен $f(x)$ найменшого степеня за таблицею* $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline f(x) & 2 & i & -2 & 1 \end{array}$ *його значень.*

Розв'язання. Спочатку обчислюємо "заготовки", які в одній із даних точок дорівнюють 1, а в решті точок дорівнюють 0:

$$f_1(x) = \frac{(x-i)(x+1)(x+i)}{(1-i)(1+1)(1+i)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{4};$$

$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+i)}{(i-1)(i+1)(i+i)} = \frac{x^3+ix^2-x-i}{-4i};$$

$$f_3(x) = \frac{(x-1)(x-i)(x+i)}{(-1-1)(-1-i)(-1+i)} = \frac{x^3-x^2+x-1}{-4};$$

$$f_4(x) = \frac{(x-1)(x-i)(x+1)}{(-i-1)(-i-i)(-i+1)} = \frac{x^3-ix^2-x+i}{4i}.$$

Многочлен $f(x)$ тепер знаходимо легко:

$$\begin{gathered} f(x) = 2\cdot f_1(x) + i\cdot f_2(x) + (-2)\cdot f_3(x) + f_4(x) = \\ = \frac{3-i}{4}x^3 + \frac{-1-i}{4}x^2 + \frac{5+i}{4}x + \frac{1+i}{4}. \end{gathered}$$ □

Задача 3. *Доведіть, що многочлен $f(x)$ найменшого степеня з таблицею значень* $\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline f(x) & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array}$ *можна обчислити за правилом*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}, \text{ де } \varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \quad (67)$$

(ця рівність називається інтерполяційною формулою Лагранжа).

Розв'язання. Очевидно, що

$$\frac{\varphi(x)}{x-x_k} = (x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n).$$

Крім того,

$$\varphi'(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n) + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Якщо замість x підставити x_k, то в правій частині зникають усі доданки, які містять множник $x-x_k$. Тому

$$\varphi'(x_k) = (x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).$$

Звідси випливає, що дріб $\dfrac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$ збігається з многочленом $f_k(x)$ із методу Лагранжа (твердження 2), а сума в правій частині рівності (67) — з інтерполяційним многочленом із твердження 2. □

Задача 4. *Доведіть, що коли многочлен $f(x) = \mathbb{R}[x]$ степеня $\leq n$ набуває цілих значень для $n+1$ послідовних цілих чисел, то він набуває цілих значень для всіх цілих чисел.*

Розв'язання. Нехай $a_0 = a$, $a_1 = a+1$, $\ldots$, $a_n = a+n$ — послідовні цілі числа, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — довільні цілі числа. За твердженням 1 існує єдиний многочлен $f(x) = \mathbb{R}[x]$ степеня $\leq n$, який задовольняє умову $f(a_i) = b_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. За інтерполяційною формулою Ньютона

$$f = c_0 + c_1(x-a_0) + c_2(x-a_0)(x-a_1) + \cdots + c_n(x-a_0)\cdots(x-a_{n-1}), \quad (68)$$

де коефіцієнти $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ знаходимо із СЛР

$$\begin{array}{lcl}
c_0 & = & b_0\,; \\
c_0 + c_1(a_1-a_0) & = & b_1\,; \\
c_0 + c_1(a_2-a_0) + c_2(a_2-a_0)(a_2-a_1) & = & b_2\,; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
c_0 + c_1(a_n-a_0) + \cdots + c_n(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1}) & = & b_n\,.
\end{array}$$

Ураховуючи, що $a_0 = a$, a_1, …, a_n — послідовні цілі числа, цю систему можна переписати у вигляді

$$\begin{array}{ll} c_0 & = b_0\,; \\ c_0 + 1\cdot c_1 & = b_1\,; \\ c_0 + 2\cdot c_1 + 2\cdot 1\cdot c_2 & = b_2\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ c_0 + n\cdot c_1 + n\cdot(n-1)\cdot c_2 + \dots + n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot c_n & = b_n\,. \end{array} \qquad (69)$$

Покажемо, що c_k можна записати у вигляді $c_k = \dfrac{s_k}{k!}$, де s_k — ціле число. Це правильно при малих k:

$$c_0 = b_0 = \frac{b_0}{0!} = \frac{s_0}{0!}, \quad c_1 = \frac{b_1 - c_0}{1} = \frac{b_1 - b_0}{1!} = \frac{s_1}{1!},$$

$$c_2 = \frac{b_2 - c_0 - 2c_1}{2!} = \frac{b_2 - \dfrac{s_0}{0!} - 2\dfrac{s_1}{1!}}{2!} = \frac{s_2}{2!}.$$

Очевидно, що числа s_0, s_1, s_2 є цілими. Припустимо тепер, що наше твердження вже доведене для всіх s_i, де $i < k$. Із системи (69) маємо:

$$c_k = \frac{b_k - c_0 - kc_1 - k(k-1)c_2 - \dots - k(k-1)\cdots 2c_{k-1}}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(b_k - \frac{s_0}{0!} - k\frac{s_1}{1!} - k(k-1)\frac{s_2}{2!} - \dots - k(k-1)\cdots 2\frac{s_{k-1}}{(k-1)!}\right) = \frac{s_k}{k!}.$$

Оскільки добуток m послідовних чисел завжди ділиться на $m!$, то чисельник s_k є цілим числом.

Таким чином, $c_k = \dfrac{s_k}{k!}$, де s_k — ціле число. Тоді кожен доданок

$$c_k(x - a_0)\cdots(x - a_{k-1}) = \frac{s_k}{k!}(x - a_0)\cdots(x - a_{k-1})$$

у правій частині рівності (68) при цілих значеннях x набуває цілих значень, оскільки добуток $(x - a_0)\cdots(x - a_{k-1})$ k послідовних цілих чисел ділиться на $k!$. Тому й многочлен $f(x)$ при цілих значеннях x набуває лише цілих значень. □

Задача 5. *Знайдіть кількість дійсних коренів многочлена*

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8.$$

Розв'язання. Побудуємо ряд Штурма для многочлена $f(x)$. Починаємо з $f_0(x) = f(x)$. Нагадаємо, що члени ряду Штурма можна ділити на довільні додатні числа. Оскільки $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 12$, то $f'(x)$ зручно розділити на 4 і взяти $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$. Далі маємо:

$$f_0(x) = (x-1)f_1(x) + (x^2 - 5x + 5).$$

Тому $f_2(x) = -x^2 + 5x - 5$.

$$f_1(x) = (-x-2)f_2(x) + (9x - 13).$$

Звідси $f_3(x) = -9x + 13$. Нарешті,

$$f_2(x) = \left(\frac{1}{9}x - \frac{32}{81}\right)f_3(x) + \frac{11}{81}.$$

Тому $f_4(x) = -1$.

Обчислимо тепер знаки членів ряду Штурма при $x = -\infty$ та $x = \infty$. Це легко, оскільки при $x = \pm\infty$ знак многочлена визначається знаком його старшого члена:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

.

Отже, многочлен $f(x)$ має $\mathrm{Zm}(-\infty) - \mathrm{Zm}(\infty) = 3 - 1 = 2$ дійсні корені. □

Задача 6. *Побудуйте ряд Штурма й локалізуйте дійсні корені многочлена* $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$.

Розв'язання. Ряд Штурма починаємо з многочлена $f_0(x) = f(x)$. Далі обчислюємо похідну $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 20x - 5$. Оскільки члени ряду Штурма можна ділити на додатні числа, то зручно взяти $f_1(x) = f'(x)/5 = x^4 + 4x^3 + 4x - 1$. Далі ділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$:

$$f_0(x) = (x+1)f_1(x) + (-4x^3 + 6x^2 - 8x - 2).$$

Тому можна взяти $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$. Продовжуємо ділення далі:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{11}{4}\right)f_2(x) + \left(\frac{25}{4}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

Поділивши остачу на $5/4$, беремо $f_3(x) = -5x^2 + 6x + 3$.

$$f_2(x) = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{25}\right)f_3(x) + \left(\frac{112}{25}x + \frac{16}{25}\right).$$

Після ділення остачі на 16/25 отримуємо $f_4(x) = -7x - 1$.

$$f_3(x) = \left(\frac{5}{7}x - \frac{47}{49}\right) f_4(x) + \frac{100}{49}.$$

Тому $f_5(x) = -1$.

Таким чином, ряд Штурма утворюють многочлени

$$f_0(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3, \quad f_1(x) = x^4 + 4x^3 + 4x - 1,$$
$$f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1, \quad f_3(x) = -5x^2 + 6x + 3,$$
$$f_4(x) = -7x - 1, \quad f_5(x) = -1.$$

Обчислимо знаки членів ряду Штурма в точках $x = -\infty$, $x = 0$ та $x = \infty$:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
0	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

Таким чином, многочлен $f(x)$ має $\mathrm{Zm}(-\infty) - \mathrm{Zm}(0) = 4 - 2 = 2$ від'ємних і $\mathrm{Zm}(0) - \mathrm{Zm}(\infty) = 2 - 1 = 1$ додатний дійсні корені. За твердженням 5 усі дійсні корені многочлена $f(x)$ належать проміжку $(-11, 11)$.

Щоб уточнити розташування коренів, обчислимо значення знака многочлена $f(x)$ у точках $x = -6$, $x = -1$ та $x = 1$ (точки $x = -1$ та $x = 1$ вибрані з тих міркувань, що значення $f(0) = -3$ є невеликим за абсолютною величиною, а тому $f(x)$ може мати корені в околі точки $x = 0$): $f(-6) = -953$, $f(-1) = 16$, $f(1) = 8$. Таким чином, на кінцях кожного з інтервалів $(-6, -1)$, $(-1, 0)$ і $(0, 1)$ многочлен $f(x)$ набуває значень протилежних знаків. Тому кожен із цих інтервалів містить корінь многочлена $f(x)$. Оскільки коренів усього 3, то кожен із цих інтервалів містить тільки один корінь. □

Задача 7. *Розкладіть дріб* $\dfrac{1}{x^4+1}$ *у суму елементарних дробів:* a) над полем $\mathbb{C}$; b) над полем $\mathbb{R}$; c) над полем $\mathbb{Q}$.

Розв'язання. а) Над полем $\mathbb{C}$ коренями знаменника $x^4 + 1$ є корені четвертого степеня з -1. Тому

$$x^4+1=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right),$$

а розклад дробу $\dfrac{1}{x^4+1}$ у суму елементарних дробів має вигляд

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{a}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}}+\frac{b}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}}+\frac{c}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}+\frac{d}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

Щоб позбавитися знаменників, помножимо обидві частини цієї рівності на x^4+1:

$$\begin{aligned}1=a\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\\ +b\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\\ +c\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\\ +d\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Щоб знайти коефіцієнти a, b, c, d, в отриману рівність підставляємо замість x корені многочлена x^4+1.

Після підстановки $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ дістаємо:

$$1=a\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\cdot i\sqrt{2},\ \text{звідки}\ a=-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{8}.$$

Після підстановки $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ дістаємо:

$$1=b\cdot(-\sqrt{2})\cdot i\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}),\ \text{звідки}\ b=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{8}.$$

Після підстановки $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ маємо:

$$1=c\cdot(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})\cdot(-i\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}),\ \text{звідки}\ c=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{8}.$$

Після підстановки $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ отримуємо:

$$1=d\cdot(-i\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\cdot\sqrt{2},\ \text{звідки}\ d=-\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{8}.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{x^4+1} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}} \right).$$

b) *I спосіб*. Щоб знайти розклад у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{R}$, треба в попередньому розкладі згрупувати доданки, що відповідають комплексно спряженим кореням многочлена x^4+1. Оскільки

$$-\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}} = \frac{2(2-\sqrt{2}x)}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

$$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}} = \frac{2(2+\sqrt{2}x)}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$

то над полем $\mathbb{R}$ маємо розклад

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2-\sqrt{2}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{2+\sqrt{2}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right). \tag{70}$$

II спосіб. У попередньому способі розклад у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{R}$ шукали обхідним шляхом — через використання вже відомого розкладу в суму елементарних дробів над полем $\mathbb{C}$. Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє знайти розклад дробу в суму елементарних дробів над $\mathbb{R}$ безпосередньо. Над полем $\mathbb{R}$ знаменник x^4+1 так розкладається в добуток незвідних многочленів:

$$x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1). \tag{71}$$

Тому розклад дробу $\frac{1}{x^4+1}$ у суму елементарних дробів над $\mathbb{R}$ має вигляд

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \tag{72}$$

Помноживши обидві частини рівності на x^4+1, одержимо:

$$1 = (ax+b)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (cx+d)(x^2-\sqrt{2}x+1) =$$

$$= (a+c)x^3+(\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d)x^2+(a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d)x+(b+d).$$

Прирівнюючи в обох частинах рівності коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо для невідомих коефіцієнтів a, b, c, d систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & c & & & = & 0\,, \\ \sqrt{2}a & + & b & - & \sqrt{2}c & + & d & = & 0\,, \\ a & + & \sqrt{2}b & + & c & - & \sqrt{2}d & = & 0\,, \\ & & b & & & + & d & = & 1\,. \end{array}$$

Із цієї СЛР знаходимо: $a = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $d = \dfrac{1}{2}$. Підставивши ці значення у (72), знову отримуємо розклад (70).

c) Многочлен x^4+1 не має раціональних коренів. Із рівності (71) також випливає, що він не має дільників степеня 2 із раціональними коефіцієнтами. Тому він є незвідним над полем $\mathbb{Q}$, але тоді дріб $\dfrac{1}{x^4+1}$ є елементарним над полем $\mathbb{Q}$. □

Задача 8. *Доведіть, що коли над полем $\mathbb{C}$ знаменник*

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

не має кратних коренів, то правильний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можна записати у вигляді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)g'(x_k)}\,.$$

Розв'язання. Оскільки дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — правильний, то

$$\deg f(x) < \deg g(x) = n.$$

Тому многочлен $f(x)$ повністю визначається своїми значеннями $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$ у точках x_1, x_2, …, x_n. За інтерполяційною формулою Лагранжа (задача 3) маємо рівність

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{g(x)}{(x - x_k)g'(x_k)}\,,$$

яка рівносильна твердженню задачі. □

Основні задачі

9. Побудуйте методом Ньютона многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

.

10. Побудуйте методом Лагранжа многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3

,

11. Побудуйте методом Ньютона многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	1	2	4	$\ldots$	2^n

.

12. Доведіть, що над скінченним полем P із q елементів кожна функція $f : P \to P$ однозначно зображується у вигляді многочлена степеня $< q$.

13. Доведіть, що для довільної точки a і довільних значень b_0, b_1, b_2, $\ldots$, b_n існує єдиний многочлен $f(x)$ степеня $\leq n$, який задовольняє умови $f(a) = b_0$, $f'(a) = b_1$, $\ldots$, $f^{(n)}(a) = b_n$.

14. Доведіть, що коли многочлен $f(x)$ степеня n набуває цілих значень при $x = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, то він набуває цілих значень при всіх квадратах натуральних чисел.

15. Нехай ε — первісний корінь степеня n з 1, а многочлен $f(x)$ меншого ніж n степеня набуває в точках 1, ε, ε^2, $\ldots$, ε^{n-1} значень $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Обчисліть $f(0)$.

16. Знайдіть кількість дійсних коренів многочлена:

a) $x^3 - 7x - 7$;
b) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$;
c) $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$.

17. Побудуйте ряд Штурма й локалізуйте дійсні корені многочлена:

a) $x^4 - x - 1$;
b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;
c) $2x^5 - 10x^3 - 10x^2 + 2$.

18. Знайдіть кількість дійсних коренів многочлена

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

19. Нехай $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — фіксовані попарно різні точки з інтервалу $(0,1)$. Доведіть, що можна так вибрати константи a_0, a_1, …, a_n, що формула наближеного інтегрування $\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ буде точною для всіх многочленів степеня $\le n$.

20. За допомогою схеми Горнера розкладіть у суму елементарних дробів дріб: a) $\dfrac{x^3+4x^2+2x+1}{(x+1)^5}$; b) $\dfrac{x^4-2x^2+3}{(x-1)^6}$.

21. Розкладіть у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{R}$ дріб $\dfrac{x^5-x+1}{(x^2+1)^n}$.

22. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розкладіть у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{R}$ дріб: a) $\dfrac{2(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}$;

b) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; c) $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$; d) $\dfrac{2x}{(x-1)(x^4-1)}$.

23. Використовуючи задачу 8, розкладіть у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{R}$ дріб:

a) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$; b) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)(x-4)}$; c) $\dfrac{x^2}{(x+1)(x-2)(x-3)}$.

24. Розкладіть дріб $\dfrac{1}{x^{2n}+1}$ у суму елементарних дробів: a) над полем $\mathbb{C}$; b) над полем $\mathbb{R}$.

Додаткові задачі

25. Побудуйте над полем $\mathbb{Z}_p$ многочлен найменшого степеня за таблицею його значень

x	1	2	3	…	$p-1$
$f(x)$	1	1/2	1/3	…	$1/(p-1)$

26.* Нехай $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Знайдіть многочлен найменшого степеня за таблицею значень:

x	1	ε	ε^2	…	ε^{n-1}
$f(x)$	1	2	3	…	n

27. Доведіть, що многочлен $f(x)$ найменшого степеня, який у точках 1, 2, …, n набуває відповідно значень 1, 1/2, …, $1/n$, має вигляд $f(x) = \dfrac{n! - (1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{n!\,x}$.

28.** Доведіть, що комплексні точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є вершинами правильного n–кутника з центром у точці x_0 тоді й лише тоді, коли для кожного многочлена $f(x)$ степеня $< n$ виконується рівність $f(x_0) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x$

29.* Знайдіть многочлен $f(x)$ степеня $2n$, який при діленні на

$$x(x-2)\cdots(x-2n)$$

дає в остачі 1, а при діленні на

$$(x-1)(x-3)\cdots(x-(2n-1))$$

дає в остачі -1.

30. a)* Для многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$ нехай $S_0(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ — множина його "нулів", а $S_1(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 1\}$ — множина його "одиниць". Доведіть, що коли для многочленів f і g виконуються рівності $S_0(f) = S_0(g)$, $S_1(f) = S_1(g)$, то $f = g$.

b) Чи можна 0 і 1 із попереднього пункту замінити довільними двома різними числами?

31. Розкладіть у суму елементарних дробів дріб $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$.

32. Нехай $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$. Виразіть через $f(x)$ суму:

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-c_k}\,; \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x-c_k}\,.$$

33.* Нехай $f(x)$ — нормований многочлен степеня n із попарно різними коренями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для кожного m, $0 \le m < n$, обчисліть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k^m}{f'(x_k)}$.

34. Обчисліть n-ту похідну функції $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Домашнє завдання

35. Побудуйте методом Ньютона многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

.

36. Побудуйте методом Лагранжа многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	1	i	-1	$-i$
$f(x)$	1	2	3	4

.

37. Побудуйте методом Ньютона многочлен $f(x)$ найменшого степеня за даною таблицею його значень:

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	1	a	a^2	$\ldots$	a^n

.

38. Знайдіть кількість дійсних коренів многочлена $x^4-4x^3-4x^2+$ $+4x+1$.

39. Побудуйте ряд Штурма й локалізуйте дійсні корені многочлена $x^4-2x^3+x^2-2x+1$.

40. Розкладіть дріб $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ у суму елементарних дробів: a) над полем $\mathbb{C}$; b) над полем $\mathbb{R}$.

41. Використовуючи задачу 8, розкладіть у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{C}$ дріб $\dfrac{x^2}{x^4-1}$.

Література. [5, розділ VII, §4].

Відповіді і вказівки

Заняття 1. **8.** a) $1+18i$; b) $10-11i$; c) $\frac{13}{2}-\frac{i}{2}$; d) $-\frac{1}{25}-\frac{32i}{25}$; e) $5+5i$; f) 2. **9.** a) $-i$; b) i; c) -1. **10.** $x=2$, $y=-3$. **11.** a) $z_1=i$, $z_2=1+i$; b) $z_1=2+i$, $z_2=2-i$. **13.** a) $x_{1,2}=\pm(2-i)$; b) $x_1=-1+2i$, $x_2=3-i$; c) $x_1=2+i$, $x_2=5-3i$; d) $x_1=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$, $x_2=1-i$. **14.** a) $3+4i$; b) $3-4i$. **15.** a) $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$; b) 1, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** a) Коло радіусом 1 з центром у початку координат; b) внутрішність круга радіусом 2 з центром у початку координат; c) смуга, обмежена прямими $x=\pm1$, включаючи ці прямі; d) дві паралельні прямі $y=\pm1$. **17.** a) Внутрішність круга радіусом 1 із центром у точці $1+i$; b) півплощина зліва від уявної осі Oy. **18.** a) $\sqrt{13}-1$; b) $2+3\sqrt{5}$. **19.** Усі точки дійсної осі, за винятком точки $z=1$. **20.** Вершини прямокутника з центром у початку координат. *Вказ*. У чотирикутнику з вершинами z_1, z_1+z_2, $z_1+z_2+z_3$, $z_1+z_2+z_3+z_4$ протилежні сторони рівні, тому він є паралелограмом. Отже, числа z_1, z_2, z_3, z_4 розбиваються на дві пари протилежних. Однак тоді в чотирикутнику з вершинами z_1, z_2, z_3, z_4 діагоналі мають однакову довжину, причому для кожної з них початок координат є серединою. **22.** *Вказ*. Розташуйте трикутник на комплексній площині так, щоб дві вершини з координатами a і b лежали на дійсній осі, а третя — з координатою ic — на уявній осі. Використовуючи зад. 21, покажіть, що висоти перетинаються в точці $-iab/c$. **23.** Коло радіусом $r=\sqrt{c-|z_0|^2}$ із центром в z_0, якщо $c\geq|z_0|^2$, і $\varnothing$ у протилежному разі. **24.** $a>0$ або $a=0, b=0$. **25.** *Вказ*. Розкладіть $(\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}i)^n$ за формулою бінома Ньютона і покажіть, що коли $(\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}i)^n=A+Bi$, то $(-\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}i)^n$ дорівнює $A-Bi$ при парних n і $-A+Bi$ при непарних n. **26.** a) Внутрішність смуги, що лежить між прямими $y=-x\pm1$; b) еліпс $\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}=1$; c) гіпербола $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1$. **28.** *Вказ*. $bc+ad=(a+b)(c+d)-ac-bd$. **29.** a) $-9+2i$; b) 4; c) $2i^{k-1}$, де k — це остача від ділення n на 4. **30.** a) $x_1=2+i$, $x_2=1-3i$; b) $x_1=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$, $x_2=2$. **31.** a) $z_1=2$, $z_2=1-i$; b) немає розв'язків. **32.** $5-12i$. **33.** 1, 3, $i\sqrt{3}$, $4+i\sqrt{3}$, $1+2i\sqrt{3}$, $3+2i\sqrt{3}$. **34.** a) Круг із центром у точці $-3-4i$ радіусом 5, включаючи межу; b) кільце, обмежене колами радіусом 1 та 2 з центром в точці $2i$, включаючи коло радіуса 1, але не включаючи коло радіуса 2; c) внутрішність смуги, обмеженої прямими $y=0$ та $y=1$. **35.** У паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів сторін.

Заняття 2. **11.** a) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; b) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; c) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+$

$+ i\sin\frac{7\pi}{4})$; d) $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$; e) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$.
12.a) $4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; b) $2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{3\varphi}{2}+i\sin\frac{3\varphi}{2})$. *Вказ*. a) Зведіть до зад. 1.b. **13.** a) -2^{50}, b) -2^6; c) $\cos\frac{\pi n}{3}+i\sin\frac{\pi n}{3}$;d) $(\sqrt{3}-2)^{12}$. **14.** $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2})$. *Вказ*. Використайте зад. 1.b. **15.** a) $\sin^5 x-$ $-10\sin^3 x\cos^2 x+5\sin x\cos^4 x$; b) $\cos^5 x-10\sin^2 x\cos^3 x+5\sin^4 x\cos x$. **16.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x-10\operatorname{tg}^3 x+5\operatorname{tg} x}{5\operatorname{tg}^4 x-10\operatorname{tg}^2 x+1}$. **18.** a) $\frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x)$; b) $\frac{1}{16}(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x)$. **19.** a) Півплощина, що лежить нижче прямої $y+x=2$; b) круг радіусом $\sqrt{2}$ з центром у точці $z=2$; c) квадрат із вершинами $2-i, 1+2i, -2+i, -1-2i$; d) круг радіусом $\sqrt{13}$ із виколотим центром у початку координат. **20.** a) $\cos\frac{\pi+4\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$, $k=0,1,2$; в алгебричній формі $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$; в алгебричній формі $1+i, -1+i, 1-i, -1-i$;
c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, $k=0,\dots,5$; в алгебричній формі $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
d) $\frac{1}{3}\left(\cos(\frac{-\pi+4\pi k}{6})+i\sin(\frac{-\pi+4\pi k}{6})\right)$, $k=0,1,2$; в алгебричній формі $\frac{\sqrt{3}}{6}-$ $-\frac{i}{6}$, $\frac{i}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{i}{6}$; e) $2\left(\cos\frac{\pi+4\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}\right)$, $k=0,1,2$; в алгебричній формі $\sqrt{3}+i$, $-2i$, $-\sqrt{3}+i$. **21.** a) $2\left(\cos\frac{-\pi+6\pi k}{30}+i\sin\frac{-\pi+6\pi k}{30}\right)$, $k=0,\dots,9$. b) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi+4\pi k}{12}+i\sin\frac{-\pi+4\pi k}{12}\right)$; $k=0,\dots,5$;
c) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{5\pi+24\pi k}{96}+i\sin\frac{5\pi+24\pi k}{96}\right)$; $k=0,\dots,7$. **22.** z — дійсне додатне, або z — дійсне від'ємне і n — непарне. **24.** a) правильна, b) правильна для непарних n, c) правильна для $k=1$. *Вказ*. c) Якщо $k\neq 1$, то ліва й права частини мають різну потужність. **25.** a) $i\operatorname{ctg}\left(\frac{(1+2k)\pi}{2n}\right)$, $k=0,\dots,n-1$; b) $\operatorname{ctg}\left(\frac{(1+2k)\pi}{2n}\right)$, $k=0,\dots,n-1$. **27.** $-2^{12}(2+\sqrt{3})^6$. **28.** $\arg z\in\{\pi/4,\pi,5\pi/4,3\pi/2\}$. **30.** $\frac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}$. *Вказ*. Використайте зад. 10. **31.** $\arg z_1=\arg z_2$ або $z_1z_2=0$. *Вказ*. З'ясуйте геометричний зміст числа $\min\left(|z_1|,|z_2|\right)\cdot|\arg z_1-\arg z_2|$. **32.** *Вказ*. Рівність $|z_2-z_1|^2=|z_2-z_0^2|+|z_1-z_0|^2$ означає, що точки z_0, z_1, z_2 є вершинами прямокутного трикутника з катетами z_1-z_0 і z_2-z_0. **33.** *Вказ*. Нехай $a=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тоді $\frac{1+ix}{1-ix}=a_k^2$, де $a_k=\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2n}+1\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2n}$, $k=0,1,\dots,n-1$. Звідси $x_k=\operatorname{tg}\frac{\varphi+2k\pi}{2n}$, $k=0,1,\dots,n-1$. **34.** $a_n=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$. *Вказ*. Геометрична прогресія $b_n=cq^n$ задовольняє рекурентне співвідношення $b_{n+1}=2b_n-2b_{n-1}$ тоді й лише тоді, коли її знаменник q є коренем рівняння $q^2=2q+2$, тобто коли $q=1\pm i$. Запишіть a_n у вигляді $a_n=c_1(1+i)^n+c_2(1-i)^n$, знайдіть з умови $a_0=a_1=1$ коефіцієнти c_1 і c_2 і перейдіть до тригонометричної форми. **36.** a) 2^{150}; b) $2^{15}i$; c) 0, якщо n — непарне; 2, якщо $n=4k$; -2, якщо $n=4k+2$.

35. a) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; b) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; c) $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$; d) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. **37.** a) $6\sin x\cos^5 x - 20\sin^3 x\cos^3 x + 6\sin^5 x\cos x$; b) $-\sin^6 x\cos^6 x - 15\sin^2 x\cos^4 x + 15\sin^4 x\cos^2 x$. **38.** a) Півплощина, що лежить нижче прямої $y = x + 2$; b) круг радіусом 8 з центром у початку координат; квадрат із вершинами $1 \pm i$, $3 \pm i$; d) круг радіусом 5 із виколотим центром у початку координат. **39.** a) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$; c) $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}, -\frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; e) $3i$, $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$. **40.** a) $\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi+8\pi k}{32} + i\sin\frac{-\pi+8\pi k}{32})$, $k = 0, \ldots, 7$; b) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{-5\pi+24\pi k}{72} + i\sin\frac{-5\pi+24\pi k}{72}\right)$; $k = 0, \ldots, 5$; c) $\frac{1}{\sqrt[6]{3}}\left(\cos\frac{-\pi+4\pi k}{24} + i\sin\frac{-\pi+4\pi k}{24}\right)$; $k = 0, \ldots, 12$. **41.** $\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Заняття 3. 7. a) $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, первісними будуть $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $1, i, -1, -i$, первісними будуть i та $-i$; c) 1, $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, i, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, первісними будуть $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** a) 8; b) 8; c) 24. **10.** *Вказ.* Використайте зад. 9. **11.** 0, якщо $n \nmid k$; n, якщо $n \mid k$. *Вказ.* $\varepsilon_m^k = \varepsilon_1^{mk}$. **12.** a) $(-1)^{n-1}$, b) -1 при $n = 2$, 1 в інших випадках. *Вказ.* Обернений до (первісного) кореня степеня n з 1 знову буде (первісним) коренем степеня n з 1. **13.** a) 1; b) 0; c) 0; d) -1. **14.** $-n(1-\varepsilon)^{-1}$. *Вказ.* Розкладіть у суму геометричних прогресій $(1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{n-1}) + (\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}) + \cdots + (\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-1}) + \varepsilon^{n-1}$. **15.** a) -1; b) 0; c) 0; d) 0. *Вказ.* a), b) Розгляньте $\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n} + i\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{n}$. c) Перепишіть у вигляді $\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n} - \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}$ і використайте пункт a). **16.** a) $\frac{(n+1)\sin nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2(x/2)}$; b) $\frac{(n+1)\sin nx - n\cos(n+1)x}{4\sin^2(x/2)}$. *Вказ.* Розгляньте суму $\sum_{k=1}^{n} k\cos kx + i\cdot\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$ і використайте вказівку до зад. 14. **17.** a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$. *Вказ.* $\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\cos kx + i\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\sin kx = z(1+z)^n$, де $z = \cos x + i\sin x$. Далі використайте зад. 1.b. **18.** a) $\frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$; b) $\frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. *Вказ.* a) Доведіть, що $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$, і використайте задачу 6. **19.** $a = 0$. *Вказ.* Нехай $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тоді точка $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ відображається в точку $(1+r)(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$, яка не належить кругу $|z| \leq 1$. **20.** Орієнтований кут $z_2 z_3 z_1$. **21.** *Вказ.* Використайте зад. 20. **22.** *Вказ.* Нехай $z = 3/5 + (4/5)i = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Якщо z є коренем з 1 якогось степеня, то α є раціональним кратним числа

π і серед чисел $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}3\alpha$, ... лише скінченна кількість різних. Однак коли $\operatorname{tg}\psi = \frac{2^k m}{n}$, де $k > 0$ і m, n — непарні, то $\operatorname{tg}2\psi = \frac{2^{k+1}mn}{n^2+2^k m^2}$, де числа mn і $n^2+2^k m^2$ — знову непарні. Тому числа $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}2\alpha, \ldots, \operatorname{tg}2^l\alpha$, ... — всі різні. **23.** $\sqrt{n}$, якщо n — непарне; $\sqrt{n(1+(-1)^t)}$, якщо $n = 2t$. *Вказ*. Оскільки для довільного цілого m $\overline{\varepsilon^m} = \varepsilon^{-m}$, то $\overline{S} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{-k^2}$. Крім того, із $\varepsilon^{(n+m)^2} = \varepsilon^{m^2}$ випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{(m+k)^2}.$$

Тому

$$|S|^2 = \overline{S} \cdot S = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{-k^2} S = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varepsilon^{-k^2} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{(k+m)^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{2km+m^2} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\varepsilon^{m^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{2km} \right) = n + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\varepsilon^{m^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{2km} \right).$$

Якщо n — непарне, то $\varepsilon^{2m} \neq 1$ і $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{2km} = 0$. Тому в цьому випадку $|S|^2 = n$. Якщо ж $n = 2t$, то $\sum\limits_{m=1}^{n-1} \left(\varepsilon^{m^2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{2km} \right) = \varepsilon^{t^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{nk} = (-1)^t \cdot n$. **24.** $x_k = -\left(\sin \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{2n}\right)\left(\sin \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi - 2n\alpha}{2n}\right)^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Вказ*. Покладіть $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $b = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Тоді $2\cos\varphi = a + a^{-1}$, $2\cos(\varphi + k\alpha) = ab^k + a^{-1}b^{-k}$, а тому початкове рівняння можна переписати у вигляді $a(1+bx)^n + a^{-1}(1+b^{-1}x)^n = 0$. **25.** a) $\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2\sin \frac{1}{2} x}$;

b) $\dfrac{a^{n+2}\cos nx - a^{n+1}\cos(n+1)x - a\cos x + 1}{a^2 - 2a\cos x + 1}$. *Вказ*. b) Використайте вказівку до зад. 14. **26.** *Вказ*. $\frac{\sin nx}{\sin x}$ — многочлен степеня $\frac{n-1}{2}$ від $\sin^2 x$ зі старшим коефіцієнтом $(-4)^{(n-1)/2}$ і коренями $\sin^2 \frac{2\pi i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$. **27.** *Вказ*. Нехай $\sum_a, \sum_b, \sum_c$ — суми із a), b) і c), відповідно. a) За допомогою формули бінома Ньютона покажіть, що

$$3\sum_a = (1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\overline{\varepsilon})^n,$$

де $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ — первісний корінь степеня 3 з 1, і обчисліть праву частину цієї рівності за допомогою формули Муавра. b), c) Використайте рівності $\operatorname{Im}\big((1+\varepsilon)^n\big) = \sin\frac{2\pi}{3}\sum_b - \sin\frac{2\pi}{3}\sum_c = \sin\frac{n\pi}{3}$ і

$\sum_a + \sum_b + \sum_c = 2^n$. **28.** *Вказ*. Умову $z_1 - z_3 = k(z_2 - z_3)$ перепишіть у вигляді $z_1 - kz_2 + (k-1)z_3 = 0$. **29.** *Вказ*. Зведіть до зад. 2.35. **30.** При $a = 1$ — серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями z_1 і z_2; при $a \neq 1$ — коло, для якого відрізок з кінцями $\frac{z_1+az_2}{1+a}$ і $\frac{z_1-az_2}{1-a}$ є діаметром. **31.** $t^3 - t^2 - 2t + 1$. *Вказ*. Довжина сторони правильного 14–кутника, вписаного в коло радіусом 1, дорівнює $2\sin\frac{\pi}{14} = -2\cos\frac{4\pi}{7} = -\big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\big)$, де $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{7} = i\sin\frac{4\pi}{7}$ — один із первісних коренів степеня 7 із 1. Оскільки $\frac{\varepsilon^7-1}{\varepsilon-1} = \varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1$, то кожен первісний корінь степеня 7 із 1 є коренем многочлена $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Розділивши цей многочлен на x^3, після очевидних перетворень отримаємо вираз $\big(x + \frac{1}{x}\big)^3 + \big(x + \frac{1}{x}\big)^2 - 2\big(x + \frac{1}{x}\big) - 1$. Отже, $2\cos\frac{4\pi}{7} = \big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\big)$ є коренем многочлена $z^3 + z^2 - 2z - 1$. Однак тоді $2\sin\frac{\pi}{14} = -2\cos\frac{4\pi}{7}$ буде коренем многочлена $t^3 - t^2 - 2t + 1$. **32.** a) 16; b) 16. **33.** $2(1-\varepsilon)^{-1}$. *Вказ*. $\varepsilon^n = -1$. **34.** a) 1; b) 0. **35.** *Вказ*. Розбийте всі корені на пари спряжених і доведіть, що $\frac{1}{1-\varepsilon_k} + \frac{1}{1-\overline{\varepsilon_k}} = 1$. **36.** *Вказ*. Якщо $1 \le m < n$, то $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{km} = \varepsilon^m \cdot \frac{1-\varepsilon^{mn}}{1-\varepsilon^m} = 0$. **37.** *Вказ*. Використайте рівність $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$ і зад. 5.a. **38.** $\frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$. *Вказ*. Перепишіть суму у вигляді $\sum_{k=1}^{2n} \sin^2 kx - \sum_{k=1}^{n} \sin^2 2kx$ і використайте зад. 37.b. **39.** $\frac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \sin\frac{n\pi}{6}$. *Вказ*. Обчисліть за формулою бінома Ньютона і формулою Муавра $(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}})^n$.

Заняття 4. **6.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1/3$, $x_4 = -3/2$; c) $\varnothing$; d) $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$; e) $x_3 = 13$, $x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2$, $x_5 = -34$. **7.** a) $x_1 = -1 + x_3 + 2x_4$, $x_2 = -3 + x_3 + 2x_4$; b) $x_1 = 6 - x_5$, $x_2 = -5 + x_5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - x_5$; c) $\varnothing$; d) $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/6 - 3/2x_4$, $x_3 = 1/6 + 1/2x_4$. **8.** $\varnothing$. *Вказ*. Помножте третє рівняння на 10, четверте — на 10^{-1}, і зробіть заміну $y_1 = 1000x_1$, $y_2 = 0,001x_3$, $y_3 = 0,1x_3$, $y_4 = 10x_4$. **9.** a) $x_k = n/2 - k + 1$; b) $x_1 = -a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n}$, $x_2 = a_1 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{2n}$, $\ldots$, $x_{2n-1} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n}$, $x_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1}$. *Вказ*. a) Додайте всі рівняння до першого. b) Спочатку від кожного рівняння, починаючи з першого, відніміть наступне; потім до останнього рівняння додайте всі рівняння з непарними номерами; нарешті, від кожного рівняння, починаючи з передостаннього, відніміть наступне. **10.** Ні. *Вказ*. Кожен набір формул можна розглядати як СЛР. Ці СЛР не еквівалентні. **11.** a) Якщо $\lambda \neq 5$, то СЛР несумісна, якщо $\lambda = 5$, то $x_1 = -4 + x_3$, $x_2 = 11/2 - 2x_3$; b) якщо $\lambda = -3$, то СЛР несумісна, якщо $\lambda \neq -3$, то $x_1 = \frac{-1}{\lambda+3}$, $x_2 = \frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}$, $x_1 = \frac{-\lambda-11}{3(\lambda+3)}$. **12.** a) Якщо $\lambda \neq 0$, то СЛР несумісна, якщо $\lambda = 0$, то $x_1 = \frac{-1}{2}(7 + 19x_3 + 7x_4)$,

$x_2 = \frac{-1}{2}(3+13x_3+5x_4)$; b) якщо $\lambda = 8$, то $x_2 = 4+2x_1-2x_4$, $x_3 = 3-2x_4$, якщо $\lambda \neq 8$, то $x_2 = 4-2x_4$, $x_3 = 3-2x_4$; c) якщо $\lambda = 0$, то СЛР несумісна, якщо $\lambda = 6$, то $x_1 = -1-2x_2-x_3$, якщо $\lambda \neq 0$ та $\lambda \neq 6$, то $x_1 = \frac{-1}{\lambda}$, $x_2 = \frac{-2}{\lambda}$, $x_3 = \frac{-1}{\lambda}$. **13.** a) Якщо $\lambda = 1$, то СЛР несумісна, якщо $\lambda \neq 1$, то $x_1 = \frac{43-8\lambda}{8-8\lambda} - \frac{9}{8}x_3$, $x_2 = \frac{5}{4-4\lambda} + \frac{1}{4}x_3$, $x_4 = \frac{5}{\lambda-1}$; b) якщо $\lambda = 8$, то $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \frac{3}{2}x_2$, якщо $\lambda \neq 8$, то $x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$. **14.** У загальному випадку ні. **15.** СЛР має бути однорідною. **16.** Якщо переставити два стовпці, то в кожному розв'язку переставляться відповідні компоненти; якщо стовпець помножити на число $k \neq 0$, то в кожному розв'язку відповідна компонента поділиться на k; якщо до i–го стовпця додати j–й, помножений на k, то в кожному розв'язку від j–ї компоненти відніметься i–та, помножена на k. **17.** *Вказ.* За допомогою алгоритму Гаусса покажіть, що елементарними перетвореннями рядків кожну матрицю можна звести до східчастого вигляду, у якому в кожному рядку перший ненульовий елемент дорівнює 1, причому ця одиниця є єдиним ненульовим елементом у своєму стовпці. Якщо однорідні СЛР із матрицями коефіцієнтів A та B рівносильні, то ці східчасті вигляди для матриць A та B будуть збігатися. **18.** *Вказ.* Додайте до j-го рядка i-й, потім відніміть від i-го рядка новий j-й, потім додайте до j-го рядка новий i-й, нарешті, помножте i-й рядок на -1. **20.** a) Якщо $b(a-1) \neq 0$, то $x_1 = \frac{2b-1}{b(a-1)}$, $x_2 = \frac{1}{b}$, $x_3 = \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$; якщо $a = 1$, $b = 1/2$, то $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = 2$; в інших випадках СЛР несумісна. b) Якщо $b(a-1)(a+2) \neq 0$, то $x_1 = x_3 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$, $x_2 = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+3)}$; якщо $a = -2$, $b = -2$, то $x_1 = x_3 = -1-2x_2$, $x_2 = 2$; якщо $a = 1$, $b = 1$, то $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; в інших випадках СЛР несумісна. **21.** a) $x_1 = -5+3k-2l$, $x_2 = 5-2k$, $x_3 = l$, $k, l \in \mathbb{Z}$; b) $x_1 = k$, $x_2 = 0$, $x_3 = 11(2k-1)$, $x_4 = -8(2k-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **22.** Вектори $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — ортогональні. *Вказ.* Позначимо $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Тоді систему можна переписати у вигляді $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c$. **23.** *Вказ.* Дана система рівносильна системі, складеній з рівнянь $(a+1)x = (b+1)y = (c+1)z = (d+1)u = (e+1)v$ і одного з даних рівнянь. **24.** *Вказ.* Нехай $d = a_{ij}$ і $a_{ik} = dq + r$ $(0 \leq r < |d|)$. Якщо від k–го стовпця відняти j–й, помножений на q, то на місці ik одержимо r. Тому $r = 0$. Отже, усі елементи i–го рядка діляться на d. Аналогічно доводиться, що всі елементи j–го стовпця діляться на d. Нехай тепер m — довільне та $a_{mj} = td$. Якщо від m–го рядка відняти i–й, помножений на $t-1$, то в новому m–му рядку на місці mj одержимо d. Тому довільний елемент $a'_{ml} = a_{ml} - (t-1)a_{il}$ нового рядка ділиться на d. Позаяк a_{il} також ділиться на d, то a_{ml} ділиться на d. **25.** a) $x_3 = \frac{1}{11}(x_1 - 9x_2 - 2)$, $x_4 = \frac{1}{11}(-5x_1 + x_2 + 10)$,

$(0, 1, -1, 1)$; b) СЛР несумісна. **26.** a) x^2+3x+4; b) x^3+3x^2+4x+5; c) $2x^4-x^3-3x^2-2x+1$. **27.** a) Якщо $\lambda \neq 0, -3$, то $x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \frac{\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$; якщо $\lambda = 0$ або $\lambda = -3$, то СЛР несумісна. b) Якщо $\lambda \neq 1, -3$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$; якщо $\lambda = 1$, то $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$; якщо $\lambda = -3$, то СЛР несумісна. c) Якщо $\lambda \neq 0, -3$, то $x_1 = 2-\lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$, $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$; якщо $\lambda = 0$, то $x_1 = -x_2 - x_3$, якщо $\lambda = -3$, то $x_1 = x_2 = x_3$.

Заняття 5. **7.** a) $(7, 19, -1, -2)$; b) $(7, 19, -1, -2)$. **12.** a) Так; b) так; c) ні; d) так. **13.** a) Так; b) ні. **14.** Ні. **15.** *Вказ.* Розгляньте лінійну комбінацію нових векторів із коефіцієнтами γ, β, α, відповідно. **16.** a) $\lambda = 15$; b) λ — довільне. **17.** a) Так; b) так; c) ні. **18.** *Вказ.* a) Векторне рівняння $x_1\mathbf{v}_1 + \cdot + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ рівносильне ОСЛР з невідомими $x_1, \ldots, x_n$ і цілими коефіцієнтами. Якщо ця ОСЛР невизначена над $\mathbb{R}$, то вона буде такою і над $\mathbb{Q}$. **19.** *Вказ.* Припустивши, що два вектори $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ $(i > j)$ лінійно виражаються через попередні, знайдіть зображення вектора $\mathbf{u}$ з виразу для $\mathbf{v}_j$ і підставте отримане зображення у вираз для $\mathbf{v}_i$. **20.** a) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$; b) так. **21.** Лише тривіальні. **23.** *Вказ.* Характеристичні вектори $\mathbf{m}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ множин M_k лінійно залежні. У нетривіальній лінійній комбінації $a_1\mathbf{m}_1 + \cdots \mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{0}$ зберіть окремо члени з додатними і з від'ємними коефіцієнтами. **24.** $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 3, 4)$. **26.** λ — довільне. **27.** a) Ні; b) так. **28.** Ні.

Заняття 6. **3.** a) Усі вектори вигляду $(a, 0, b, 0, c)$; b) усі вектори вигляду (a, b, c, b, a); c) усі вектори з нульовою сумою координат. **10.** a) Наприклад, $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$; b) наприклад, $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. **11.** a) Будь–яка трійка векторів, крім $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ і $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$; b) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$; c) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$; $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$. **12.** a) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ — МЛНЗ-підсистема, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; b) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — МЛНЗ-підсистема, $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; c) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — МЛНЗ-підсистема, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$. **14.** a) Система містить рівно r ненульових векторів, причому вони лінійно незалежні. b) Система містить рівно $r+1$ ненульових векторів, причому два з них пропорційні. c) Або система містить рівно $r+2$ ненульових векторів, причому три з них пропорційні, або $r+1$ ненульових векторів, причому серед них є три, які лінійно залежні, але серед цих трьох немає пропорційних. *Вказ.* a) Використайте зад. 13. **15.** Усі підсистеми із $k-1$ векторів. **16.** a) 2; b) 2; c) 4. **17.** a) Зменшиться не більше ніж на 1; b) зменшиться не більше ніж на 2. **18.** a) 2; b) 4; c) 3; d) 3; e) 2; f) 1. **19.** a) 5; b) 3; c) 4. **20.** a) 4; b) 2. **21.** a) 2 при $\lambda = 3$, 3 при $\lambda \neq 3$; b) 3 при $\lambda = 0, -2, -4$ та 4 в інших випадках; c) 2 при $\lambda = 0$, 3 при $\lambda \neq 0$.

23. *Вказ*. Використайте зад. 22. **24.** Дві. **25.** n при $\lambda = \frac{1}{2}$ і $n+1$ при $\lambda \neq \frac{1}{2}$. *Вказ*. Починаючи з кінця, від кожного стовпця відніміть попередній, помножений на λ. **27.** *Вказ.* Це очевидно, якщо A — нульова. Нехай тепер $\mathbf{c}_i = (c_1, \ldots, c_n)$ — ненульовий рядок. Тоді кожен рядок матриці A буде пропорційним $\mathbf{c}_i$. Нехай $\mathbf{c}_k = b_k \mathbf{c}_i$. Тоді $a_{ij} = b_i c_j$ для всіх i, j. **28.** *Вказ.* Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — вектор-рядки матриці A, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ — МЛНЗ-підсистема $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_{i,j} \mathbf{a}_j$ $(i = 1, \ldots, m)$. Позначимо через B_j матрицю з рядками $\beta_{1j}\mathbf{a}_1, \ldots, \beta_{mj}\mathbf{a}_m$. Тоді $\mathrm{rank}(B_j) = 1$ і $A = B_1 + \cdots + B_r$. З іншого боку, нехай $\mathrm{rank}(B_j) = 1$ $(j = 1, \ldots, k)$ і $A = B_1 + \cdots + B_k$. Виберемо в кожній B_j ненульовий рядок $\mathbf{b}_j$. Із зад. 27 випливає, що кожен рядок матриці A буде лінійною комбінацією рядків $\mathbf{b}_j, \ldots, \mathbf{b}_k$. Тому $\mathrm{rank}(A) \leq k$. **29.** *Вказ.* За допомогою індукції за порядком матриці покажіть, що узгодженими елементарними перетвореннями рядків і стовпців кососиметричну матрицю можна звести до клітинно-діагонального вигляду, у якому усі ненульові клітини на діагоналі мають вигляд $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **30.** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$; $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4$; $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. **31.** a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ — МЛНЗ-підсистема, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; b) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — МЛНЗ-підсистема, $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. **32.** a) 3; b) 4. **33.** a) 2 при $\lambda = 2$, 3 при $\lambda \neq 2$; b) 1 при $\lambda = 1$, 2 при $\lambda = -1$ і 3 при $\lambda \neq \pm 1$. *Вказ.* b) Додайте всі стовпці до першого і подвоєний третій до другого. **36.** Якщо система лінійно незалежна або отримується з лінійно незалежної системи приєднанням нульових векторів.

Заняття 7. **8.** Ранг розширеної матриці повинен при викреслюванні k–го стовпця зменшуватися на одиницю. **9.** *Вказ.* Ранг системи дорівнює $n-1$, тому ФСР складається з одного вектора $\mathbf{f}_1$, а кожен розв'язок системи має вигляд $\alpha \mathbf{f}_1$, де $\alpha \in P$. **10.** a) $\{(0,0,0)\}$; b) $\{(8t_1 - 7t_2, -6t_1 + 5t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in P\}$; c) $\{(t_1 - t_2, t_1 - 5t_3, t_1, t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in P\}$. **11.** a) $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{f}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{f}_4 = (0,0,0,1)$; b) $\mathbf{f}_1 = (2,0,-5,7)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,5,-7)$; c) $\mathbf{f}_1 = (1,0,2,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,5,0)$, $\mathbf{f}_3 = (0,0,-9,1)$; d) $\mathbf{f}_1 = (-4,1,0,-\frac{1}{2},0)$, $\mathbf{f}_2 = (-2,0,1,-\frac{1}{2},0)$. **12.** a) $(0,0,0,0)$, ФСР: $\varnothing$; b) $(-26x_3 + 17x_4, 7x_3 - 5x_4, x_3, x_4)$, ФСР: $\mathbf{f}_1 = (-26,7,1,0)$, $\mathbf{f}_2 = (17,-5,0,1)$; c) $(x_1, 2x_1 - x_5, -4x_5, 0, x_5)$, ФСР: $\mathbf{f}_1 = (1,2,0,0,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,-1,-4,0,1)$; d) $(x_1, 2x_1, 0, 0)$, ФСР : $\mathbf{f}_1 = (1,2,0,0)$. **14.** Нехай m — кількість рівнянь, n — кількість невідомих, r — ранг основної матриці. a) $r = n$; b) $m = r$ (див. зад. 13). У цьому випадку кількість розв'язків або завжди дорівнює 1, або завжди дорівнює ∞; c) $n > r$; d) $n = m = r$. **15.** Рядки матриці A ФСР не утворюють, рядки матриці B — утворюють. *Вказ.* Знайдіть ранг основної матриці даної СЛР і кожної з матриць A та B, а потім перевірте, чи є рядки матриць розв'язками системи.

16. a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \quad x_3 \qquad\qquad &= 0\,, \\ x_1 \qquad - 16x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0\,; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 15x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0\,, \\ 2x_1 - x_2 + \quad x_3 \qquad\qquad &= 0\,, \\ x_1 \qquad - 16x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0\,. \end{aligned}$

17. $x_1 + 8x_4 = -8$, $x_2 - 4x_4 = 3$, $x_3 - 8x_4 = 6$. **18.** Розширена матриця системи n лінійних рівнянь із двома невідомими має ранг 2 і вектори $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — попарно лінійно незалежні. *Вказ.* Застосуйте теорему Кронекера – Капеллі. **19.** Система трьох лінійних рівнянь із двома невідомими, розширена матриця якої має ранг 3, а три матриці коефіцієнтів при невідомих для довільної пари рівнянь мають ранг 2. *Вказ.* Застосуйте теорему Кронекера – Капеллі. **20.** Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, розширена матриця якої маї ранг 3, а матриці коефіцієнтів при невідомих для довільної пари рівнянь та всіх трьох рівнянь мають ранг 2. *Вказ.* Застосуйте теорему Кронекера–Капеллі. **21.** Система чотирьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, розширена матриця якої має ранг 4, а матриці коефіцієнтів при невідомих довільних трьох рівнянь мають ранг 3. *Вказ.* Застосуйте теорему Кронекера–Капеллі. **22.** Чотири площини, що проходять через одну точку, причому жодні три з них не проходять через одну пряму. **23.** *Вказ.* Використайте теореми Кронекера–Капеллі й той факт, що визначник матриці дорівнює 0 тоді й лише тоді, коли її вектор–стовпці лінійно залежні. **24.** *Вказ.* Нехай СЛР S_1 і S_2 рівносильні. Оскільки при дописуванні якогось рівняння СЛР S_1 до S_2 ранг матриці СЛР S_2 не змінюється, то дописане рівняння повинне бути лінійною комбінацією рівнянь СЛР S_2. Достатність випливає із зад. 5.22. **25.** a) $\{(0,0,0)\}$, ФСР: $\varnothing$; b) $(x_1, 0, 0, 0, -2x_1)$, ФСР: $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0,-2)$; c) $(x_1, -x_3 + x_5, x_3, x_4, x_5)$, ФСР: $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,-1,1,0,0)$, $\mathbf{f}_3 = (0,0,0,1,0)$, $\mathbf{f}_4 = (0,1,0,0,1)$. **26.** *Вказ.* Ранг основної матриці дорівнює кількості невідомих. **27.** Четвертий рядок разом із довільними двома з перших трьох рядків. *Вказ.* Знайдіть ранг даної СЛР і ті вектор–рядки матриці, які є розв'язками СЛР. Якщо ранг відібраної системи векторів-рядків дорівнює кількості розв'язків у ФСР, то знайдіть усі МЛНЗ-підсистеми відібраної системи векторів-рядків.

Заняття 8. **11.** a) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{pmatrix}$. **13.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 10039 & -3990 \\ 23275 & -9246 \end{pmatrix}$. *Вказ.* c) Використайте a) і b). **14.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Вказ.* Обчисліть спочатку добуток двох останніх множників. **15.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** *Вказ.* Застосуйте індукцію. **18.** *Вказ.* $A = \frac{1}{2}(A + A^{\top}) + \frac{1}{2}(A - A^{\top})$. **20.** *Вказ.* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0$. **21.** Якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $(AB)^2 \neq A^2B^2$. **22.** *Вказ.* У добутку $(a{\cdot}A{\cdot}a^{\top}){\cdot}a^{\top}$ останнє множення не є матричним. **23.** a) Усі елементи AB змінять знак на протилежний; b) усі елементи AB заміняться на спряжені; c) усі елементи AB помножаться на c; d) i-й рядок матриці AB помножиться на c; e) i-й стовпець матриці AB помножиться на c; f) стовпці матриці AB запишуться у зворотному порядку; g) переставляться місцями i-й і j-й рядки матриці AB; h) переставляться місцями i-й та j-й стовпці матриці AB; i) до i-го рядка матриці AB додасться j-й, помножений на число c. *Вказ.* d) – i) Перетворення рядків (стовпців) множника можна замінити множенням із потрібного боку на відповідну елементарну матрицю. **24.** a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. **25.** a) $\begin{pmatrix} a+b & 3a/2 \\ a & b \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. *Вказ.* b) Дану матрицю можна записати у вигляді $2E + B$, де $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. X буде переставною з $2E + B$ тоді й лише тоді, коли X буде переставною з B. **26.** *Вказ.* Якщо $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $BX = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $XB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$. **57.** *Вказ.* Розгляньте, коли A комутує з матричною одиничкою e_{ij}. **29.** *Вказ.* Використайте зад. 28. **30.** *Вказ.* Ранг добутку не перевищує рангів множників. **31.** *Вказ.* a) Елементарними перетвореннями рядків зведіть до вигляду $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. b) Стовпці матриці $\begin{pmatrix} AB \\ B^2 \end{pmatrix}$ є лінійними комбінаціями стовпців матриці $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. **32.** Невироджені матриці й тільки вони. *Вказ.* Якщо i–й рядок матриці X є лінійною комбінацією $\mathbf{a}_i = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + {}+c_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + c_n\mathbf{a}_n$ решти рядків, то для матриць A і B, в яких i–й рядок дорівнює $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ і $(c_1,\ldots,c_{i-1},1,c_{i+1},\ldots,c_n)$ відповідно, буде $AX = BX$. **34.** $\begin{pmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 0 & \binom{n}{1} & \ldots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{n}{1} \end{pmatrix}$. *Вказ.* Запишіть матрицю B у вигляді $B = E + A$, де A — матриця із зад. 16, і використайте тотожність $\binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n}{k+1}$. **36.** *Вказ.* Рядки матриці A, тому $ad - bc = 0$. Далі використайте зад. 35. **37.** *Вказ.* Використайте зад. 36. **38.** a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a^2 = -bc$; b) $\pm E$ або $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a^2 = 1 - bc$. **40.** $\begin{pmatrix} ab & a(1-b) \\ b(1-a) & (1-a)(1-b) \end{pmatrix}$. *Вказ.* Розв'язком першого рівняння буде $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 - x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$. Підстановка цього розв'язку в друге рівняння дає рівняння $(x_1+x_2)(x_1+x_3) = x_1$. Покладіть $x_1 + x_2 = a$, $x_1 + x_3 = b$. **41.** Усі діагональні матриці і тільки вони. **42.** *Вказ.* Елементарними перетвореннями рядків (або стовпців) невироджену матрицю можна звести до одиничної. **43.** *Вказ.* Використайте зад. 10. **44.** $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$. **46.** *Вказ.* Скористайтеся рівностями $A\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ $(i = 1,\ldots,k)$, де A — основна матриця систем. **47.** *Вказ.* Якщо $\mathbf{x}$ є лінійною комбінацією стовпців матриці B, то $\mathbf{x}$ має вигляд $\mathbf{x} = B \cdot \mathbf{y}$, звідки $AB \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Позаяк $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B$, то лінійне перетворення з матрицею A діє ін'єктивно на образі перетворення з матрицею B. Тому $B \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$. **48.** *Вказ.* a) Обчисліть степені A; b) і c) випливають з a). **49.** $\le n^2$. *Вказ.* Циркулянт повністю визначається елементами першого рядка. **50.** *Вказ.* Нехай $A = (a_{ij})$. Тоді

$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ і $A^\top \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$, звідки $b_1 y_1' + \dots + b_m y_m' = \mathbf{y}_0^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{y}_0^\top A\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_0 = c_1 x_1' + \dots + c_n x_n'$. **51.** *Вказ.* Нехай $\mathbf{y}$ — довільний розв'язок однорідної СЛР $A^\top A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Тоді $\mathbf{y}^\top A^\top \cdot A\mathbf{y} = 0$, звідки $\mathbf{y}^\top A^\top = \mathbf{0}$ і $\mathbf{y}^\top A^\top \cdot \mathbf{b} = 0$ для довільного вектора $\mathbf{b}$. Однак тоді $\mathbf{b}^\top A \cdot \mathbf{y} = 0$. Оскільки $\mathbf{y}$ є довільним розв'язком СЛР $A^\top A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{b}^\top A$ є лінійною комбінацією рядків матриці $A^\top A$. Однак тоді $A^\top \mathbf{b}$ є лінійною комбінацією стовпців матриці $(A^\top A)^\top = A^\top A$. Тому система $(A^\top A)\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$ є сумісною.

52. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$. *Вказ.* c) Використайте a) і b). **53.** $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{pmatrix}$. *Вказ.* Обчисліть спочатку добуток двох середніх множників. **54.** $\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, де F_n — n–те число Фібоначчі. **55.** a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **25.** a) $\begin{pmatrix} b-a & 2a/3 \\ a & b \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} b-a & a \\ 2a & b \end{pmatrix}$. **57.** *Вказ.* Обчисліть елементи головної діагоналі добутків $AA^\top$ і $A^\top A$. **58.** *Вказ.* Якщо $A = (a_{ij})$, то $\operatorname{sp}(AA^\top) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

Заняття 9. **7.** a) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$. **8.** a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -a & -a(1-a) & -a(1-a)^2 & -a(1-a)^3 \\ 0 & 1 & -a & -a(1-a) & -a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a & -a(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-4} & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

13. a) Знак кожного елемента зміниться на протилежний; b) кожен елемент заміниться спряженим числом; c) i-й стовпець поділиться на число c; d) знак кожного елемента з парною сумою індексів змінити на протилежний; e) рядки перепишуться у зворотному порядку; f) переставляться місцями i–й та j–й рядки; g) від j–го стовпця відніметься i–й, помножений на число c; h) кожен елемент заміниться елементом, симетричним даному відносно побічної діагоналі; i) до кожного стовпця додадуться всі попередні стовпці. *Вказ.* d) Розкладіть перетворення матриці A в композицію двох перетворень: спочатку поміняйте знаки елементів на протилежні в усіх рядках із непарними номерами, а потім — у всіх стовпцях із парними номерами. h) Розкладіть перетворення матриці A в композицію трьох перетворень: спочатку A транспонуйте, потім перепишіть у зворотному порядку стовпці, а потім у зворотному порядку — рядки. i) Перетворення рядків матриці A рівносильне множенню матриці A зліва на матрицю із зад. 10.а. **14.** *Вказ.* Якщо один із множників є невиродженою матрицею, то ранг добутку збігається з рангом другого множника. **15.** *Вказ.* Порівняйте ранги матриць AB і BA з рангами матриць A і B. **17.** *Вказ.* Покажіть, що коли $A = A^\top$, то $(A^{-1})^\top$ також буде матрицею, оберненою до A. **26.** *Вказ.* Обчисліть добуток $(E-J_n)\cdot(E-\frac{1}{n-1}J_n)$. **20.** Наприклад, $A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & \sin 2\pi/3 \\ -\sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}$, $B = E$. *Вказ.* Для невиродженої матриці A рівність $(A+E)^{-1} = A^{-1}+E^{-1}$ рівносильна рівності $A^2+A+E = 0$. **21.** *Вказ.* Якщо $a_kA^k+\cdots+a_1A+a_0E = 0$, то $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_kA^{k-1}+\cdots+a_1E)$. **22.** *Вказ.* $(E-A)^{-1} = E+A+\cdots+A^{k-1}$. **23.**

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \dots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \dots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Вказ. Якщо $\epsilon^m \neq 1$, то $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{mk} = 0$. **25.**

$$\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \dots & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \dots & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \dots & 3\cdot 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \dots & n\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

25. $E - k(A-E)$, де $k = 1 + a_1 + \cdots + a_n$. *Вказ.* $A = E + (1,1,\dots,1)^\top \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)$. **26.** $A^{-1} = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. *Вказ.* Нехай $s_{pq} = \sum_{k=p}^{q}(-1)^{k+p} \cdot \binom{q}{k}\cdot\binom{k}{p}$. Очевидно, що $s_{pq} = 0$ при $p < q$ і $s_{pp} = 1$. Нарешті, якщо $p > q$, то $s_{pq} = \sum_{k=p}^{q}(-1)^{k+p}\cdot\binom{q}{p}\cdot\binom{q-p}{k-p} = \binom{q}{p}\cdot\sum_{i=0}^{q-p}(-1)^i\cdot\binom{q-p}{i} = 0$. **27.** *Вказ.* Достатність умови очевидна. Для доведення необхідності позначимо через $d(\mathbf{v})$ кількість додатних координат вектора $\mathbf{v}$ з невід'ємними координатами. Тоді для додатних $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ маємо $d(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k) \geq \max(d(\mathbf{v})_1, \dots, d(\mathbf{v})_k)$. Позаяк рядки матриці $E = A^{-1}A$ є лінійними комбінаціями рядків матриці A з коефіцієнтами з відповідних рядків матриці A^{-1}, то в кожному рядку матриці A не більше одного додатного коефіцієнта. **30.** *Вказ.* За теоремою про ранг матриці матриця A має m лінійно незалежних стовпців. Нехай їх номери $j_1, \dots, j_m$. Квадратна матриця C, утворена цими стовпцями, буде невиродженою. Тоді за матрицю B можна взяти матрицю розміром $n\times m$, j_k–й рядок якої збігається із k–м рядком матриці C^{-1}, а решта рядків — нульові. **31.** *Вказ.* Нехай $A = C(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тоді згідно зад. 12.48 $A = a_1E + a_2P + a_3P^2 + \cdots + a_nP^{n-1}$. Позаяк $P^n = E$, то матричне рівняння $A\cdot(x_1E+x_2P+\dots+x_nP^{n-1})=E$ зводиться до СЛР $A^{\top}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, де $\mathbf{b}=(1,0,\dots,0)^{\top}$. За теоремою Кронекера – Капеллі ця СЛР є визначеною. **32.** a^{-1}. *Вказ.* Нехай $A^{-1}=(b_{ij})_n$. Тоді з рівності $A^{-1}A=E$ випливає, що $(b_{k1}+b_{k2}+\dots+b_{kn})a=1$.

33. a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&1&1\\13&10&-11\\7&7&-7\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-8&29&-11\\5&-18&7\\1&-3&1\end{pmatrix}$.

34. a) $\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-2&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1&0&-3&-9\\0&1&-7&-21\\3&12&-92&-279\\-1&-4&31&94\end{pmatrix}$. **35.** a) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}2-n&1&1&\dots&1\\1&2-n&1&\dots&1\\1&1&2-n&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&\dots&2-n\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1&-a&0&\dots&0&0\\0&1&-a&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1&-a\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$. **36.** a) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&2\\-3&-3\\2&1\end{pmatrix}$.

37. a) Кожен елемент поділиться на число a; b) i–й рядок поділиться на число c; c) знак кожного елемента з непарною сумою індексів зміниться на протилежний; d) переставляться місцями i–й та j–й стовпці; e) від j–го рядка відніметься i–й, помножений на число c. **38.** *Вказ.* Множення на невироджену матрицю не змінює рангу другого множника.

Заняття 10. **10.** a) (1 3)(2 6)(4 5 7); b) (1 4 8 3 2 6 5)(7);
c) $(1\ n{+}1)(2\ n{+}2)\cdots(n\ 2n)$; d) $(1\,4\,7\dots3n{-}2)(2\,5\,8\dots3n{-}1)(3\,6\,9\dots3n)$.

11. a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&4&6&2&3&1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&3&1&7&4&6&5&2\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&8&9&2&3&7&6&1&5\end{pmatrix}$.

12. a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&6&4&5\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&6&3&7&1&5&2\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&4&6&1&2\end{pmatrix}$.

13. a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&7&4&1&6&2&5\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&7&1&6&2\end{pmatrix}$.

14. a) $(3\ 4)(4\ 5)(3\ 4)$; b) $(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)$.
15. a) $(1\ 7)(1\ 6)(3\ 4)(3\ 5)$; b) $(1\ 3)(1\ 5)(1\ 2)(4\ 7)(4\ 6)$.
16. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
17. a) $(1\ 10\ 11\ 5)(2\ 9\ 6\ 3\ 8\ 4\ 7)$, 28; b) $(1\ 5\ 7\ 9\ 10)(3\ 11\ 6)(4\ 10)(8)$, 30; c) $(1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 9\ 11)(3\ 12)(6\ 8)$, 4; d) $(1\ 12\ 3\ 7\ 9)(2\ 10\ 4)(5\ 11\ 6\ 8)$, 60. **18.** a) $\pi = (1\ 2k{+}1\ k{+}1)(2\ 2k{+}2\ k{+}2)\cdots(k\ 3k\ 2k)$, цикловий тип $(0,0,k,0,\ldots,0)$, порядок 3. b) Якщо $n = 2k$, то $\pi = (1\ 2n\ n\ n{+}1)(2\ 2n{-}1\ n{-}1\ n{+}2)\cdots(k\ 3k{+}1\ k{+}1\ 3k)$, цикловий тип $(0,0,0,k,0,\ldots,0)$, порядок 4; якщо $n = 2k{-}1$, то $\pi = (1\ 2n\ n\ n{+}1)\cdots(k{-}1\ 3k\ k{+}1\ 3k{-}2)(k\ 3k{-}1)$, цикловий тип $(0,1,0,k-1,0,\ldots,0)$, порядок 4. **19.** a) $\pi^{1000} = \pi$; b) $\pi^{1000} = \pi^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\pi^{1000} = \pi^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & 12 & 10 & 6 & 4 & 8 & 9 & 3 & 11 & 7 \end{pmatrix}$. **20.** a) τ^4 має 1 цикл довжиною 15 і порядок 15; τ^5 має 5 циклів довжиною 3 і порядок 3; τ^6, τ^9 і τ^{12} мають по 3 цикли довжиною 5 і порядок 5. b) τ^4 і τ^{12} мають по 4 цикли довжиною 4 і порядок 4; τ^5 і τ^9 мають 1 цикл довжиною 16 і порядок 16; τ^6 має 2 цикли довжиною 8 і порядок 8. **21.** a) і c) — непарні; b) і d) — парні. **22.** a) 17; b) 17; c) 22. **23.** a) $(k-1)(n-k+1)$; непарна, якщо n і k — парні; парна в усіх інших випадках. b) $(k-1)(2n-k)/2$; парна, якщо або $k = 4m+1$, або $k = 4m$ і n — парне, або $k = 4m+2$ і n — непарне, і непарна в усіх інших випадках. **24.** a) $3n(n-1)/2$; парна, якщо $n = 4k$ або $n = 4k+1$, і непарна в інших випадках. b) $3n(n+1)/2$; парна, якщо $n = 4k$ або $n = 4k+3$, і непарна в інших випадках. c) $n(3n+1)/2$; парна, якщо $n = 4k$ або $n = 4k+1$, і непарна в інших випадках. **25.** a) $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$; b) $(-1)^{[\frac{n}{2}]\cdot[\frac{n+1}{2}]}$; c) $(-1)^{[\frac{n+2}{4}]} = (-1)^{\frac{1}{2}[\frac{n}{2}][\frac{n+2}{2}]}$; d) $(-1)^{[\frac{n+1}{4}]}$. **26.** a) 6; b) 6; c) 30. **28.** a) $\binom{n}{2}$; b) $k-1$; c) $n-k$; d) $\binom{n}{2}-k$; e) зміниться на 1. **29.** *Вказ.* Використайте зад. 28 d). **31.** $\frac{n!}{2}\binom{n}{2}$. *Вказ.* Перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ разом мають $\binom{n}{2}$ інверсій. **33.** *Вказ.* Із зад. 8 випливає, що при множенні на транспозицію кількість циклів змінюється на 1. **34.** *Вказ.* b) Використайте вказ. до зад. 33. **35.** *Вказ.* a) Використайте рівність $(1\ i)(1\ j)(1\ i) = (i\ j)$. b) Використайте рівність $(i\ j\ k\ m)(i\ j\ k\ m)(i\ k\ j\ m) = (i\ j)$. c) Використайте рівність $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)^{-(k-1)}(1\ 2)(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)^{k-1} = (k\ k{+}1)$. **36.** (n,k) циклів довжиною $\frac{n}{(n,k)}$. **37.** *Вказ.* Цикл непарної довжини є парною підстановкою. **38.** $(-1)^{l_2+l_4+l_6+\cdots}$. **39.** *Вказ.* Нехай $\pi = \binom{i}{a_i}_{i\geq 1}$, $\pi^{-1} = \binom{i}{b_i}_{i\geq 1}$. Якщо $i < j$, але $a_i > a_j$, то $a_j < a_i$, але $b_{a_j} = j > b_{a_i} = i$. Тому при переході до оберненої підстановки кількість інверсій не зменшується.

40. *Вказ*. Розбийте всі перестановки на два класи: ті, у яких число n стоїть на останньому місці, і решту. **41**. *Вказ*. Використайте зад. 40, попередній пункт і тотожність $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}$. **42.** *Вказ.* a) Розбийте всі перестановки чисел $1,2,\dots,n,n+1$ на класи залежно від місця, на якому стоїть число $n+1$; b) використайте a). **43.** $n-1$. *Вказ.* Використайте зад. 33. **45.** *Вказ.* Використайте зад. 8. **46.** *Вказ.* Використайте зад. 45. **36**. *Вказ*. a) Використайте рівності $(a\ b)(a\ c)=(a\ b\ c)$ і $(a\ b)(c\ d)=(a\ b\ c)(a\ d\ c)$. b) Використайте рівність $(a\ c\ b\ d\ e)(a\ e\ d\ c\ b)=(a\ b\ c)$ і пункт a). **48.** *Вказ*. Доведіть, що кожен цикл можна розкласти в добуток двох елементів порядку ≤ 2. **49**. a)$1/k$; b) $1+1/2+1/3+\dots+1/n$. *Вказ*. a) Усього є $\frac{n!}{k(n-k)!}$ різних циклів довжиною k і кожен такий цикл зустрічається в $k(n-k)!$ підстановках. b) Усього є $\frac{n!}{k(n-k)!}$ різних циклів довжиною k і кожен такий цикл зустрічається в $k(n-k)!$ підстановках. **50.** *Вказ*. a) Якщо НСК$(1,2,3,\dots,n)=p_1^{k_1}\cdots p_{\pi(n)}^{k_{\pi(n)}}$, то $p_i^{k_i}\le n$ для кожного i. Тому НСК$(1,2,3,\dots,n)\le n^{\pi(n)}$; b) якщо $k_1+\dots+k_m=n$, то НСК$(k_1,\dots,k_n)\le k_1\cdots k_m\le\left(\frac{k_1+\dots+k_m}{m}\right)^m=\left(\frac{n}{m}\right)^m<e^{n/e}$, оскільки функція $y=\left(\frac{n}{x}\right)^x$ досягає максимуму в точці $x=\frac{n}{e}$. **51.** *Відп.* $n!/2$. *Вказ.* Кількість a_k тих підстановок з S_n, у яких два дані елементи належать циклу довжини k, дорівнює $(k-1)\cdot\binom{n-2}{k-2}\cdot(k-2)!\cdot(n-k)!=(k-1)(n-2)!$ (починаємо цикл із меншого з даних елементів; спочатку вибираємо місце для другого даного елемента, потім добираємо решту елементів циклу й розставляємо їх у циклі; елементи, що не потрапили в цикл, можна переставляти довільно). **52.** Якщо π і τ комутують і мають взаємно прості порядки, то для довільного натурального числа m підстановки π і τ^m також комутують і мають взаємно прості порядки. Нехай тепер елементи a_1 і a_i циклу $(a_1a_2\dots a_k)$ підстановки π належать одному циклу підстановки τ. Замінивши в разі потреби τ на τ^{i-1}, можна вважати, що $a_i=\tau(a_1)$. Оскільки $\big(\tau(a_1)\,\tau(a_2)\dots\tau(a_k)\big)$ також є циклом π, то він збігається з циклом $(a_1a_2\dots a_k)$. Тому цикл $\big(a_1\,\tau(a_1)\dots\big)$ підстановки τ містить лише точки з $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$. Позаяк цикл комутує лише зі своїми степенями, то цикл $\big(a_1\,\tau(a_1)\dots\big)$ повинен бути циклом якогось степеня циклу $(a_1a_2\dots a_k)$. Однак тоді довжина циклу $(a_1\,\tau(a_1)\dots)$ ділить k, що суперечить взаємній простоті порядків $|\pi|$ і $|\tau|$. **53.** Застосуйте індукцію. **54.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&5&2&3&4&1&6\end{pmatrix}$. **55.** $\pi^{200}=\pi^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&2&10&7&3&6&12&8&9&5&11&4\end{pmatrix}$. **56.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&7&1&6&4&3\end{pmatrix}$.

57. Якщо $k = 2m$, то

$$(1\ k)(2\ k{-}1)\cdots(m\ m{+}1)(k{+}1\ 2k{+}1)(k{+}2\ 2k{+}2)\cdots(2k\ 3k),$$

цикловий тип $(0, 3m, 0, \ldots, 0)$, порядок 2; якщо $k = 2m + 1$, то

$$(1\ k)(2\ k{-}1)\cdots(m\ m{+}2)(m{+}1)(k{+}1\ 2k{+}1)(k{+}2\ 2k{+}2)\cdots(2k\ 3k),$$

цикловий тип $(1, 3m+1, 0, \ldots, 0)$, порядок 2. **58.** τ^4 має 2 цикли довжиною 9 і порядок 9; τ^5 має 1 цикл довжиною 18 і порядок 18; τ^6 і τ^{12} мають по 6 циклів довжиною 3 і порядок 3; τ^9 має 9 циклів довжиною 2 і порядок 2. **59.** a) $\frac{n(3n+1)}{2}$. Перестановка парна, якщо n має вигляд $n = 4m$ або $4m + 1$, і непарна в інших випадках. b) $(n-1)(n-k+1)$. Перестановка непарна тоді й лише тоді, коли n і k — парні. **60.** a) 20; b) 42. **61.** a) 6; b) 18. **62.** $(n-1)!$.

Заняття 11 . 7. a) Не входить; b) входить зі знаком +; c) не входить. **8.** a) $i = 1$, $j = 5$; b) $i = 1$, $j = 5$. **9.** x^4 входить із коефіцієнтом -2, x^3 — з коефіцієнтом 4. **11.** *Вказ.* Зведіть до випадку, коли в першому рядку і у першому стовпці стоять одиниці. **17.** a) a_n; b) $(-1)^n(x^n - a_1a_2\cdots a_n)$. **13.** 0. **14.** a) Помножиться на $(-1)^n$; b) не зміниться; c) помножиться на $(-1)^n$; d) помножиться на $(-1)^{[n/2]}$; e) не зміниться; f) помножиться на $(-1)^{[n/2]}$; g) не зміниться; h) помножиться на $(-1)^{n-1}$. *Вказ.* b) Це — частковий випадок зад. 4.b (для $a = -1$); c) це — композиція перетворень із a) і b); f) це — композиція перетворень із d) та e); h) цикл довжини n розкладається в добуток $n-1$ транспозицій. **15.** *Вказ.* До останнього стовпця додайте відповідні кратні попередніх стовпців. **16.** *Вказ.* Розкладіть кожен стовпець у суму двох. **17.** a) $\sin(\alpha-\beta)$; b) 0. **19.** a) -3; b) $-3i\sqrt{3}$. **20.** a) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; b) $(1 + a^2 + b^2 + c^2)^3$. c) 1; e) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$. **21.** *Вказ.* Доведіть, що рядки матриці A лінійно незалежні. **22.** *Вказ.* Розгляньте визначник транспонованої матриці. **23.** n і розмістити в якомусь рядку або стовпці. *Вказ.* Якщо нулів менше ніж n, то в розкладі визначника є ненульовий доданок $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$. Якщо елементи, що зустрічаються в цьому доданку, дорівнюють $n!$, а всі інші ненульові елементи дорівнюють 1, то визначник не дорівнює 0. **24.** a) Добуток усіх доданків дорівнює $-\Big(\prod\limits_{i,j} a_{ij}\Big)^2$; b) застосуйте індукцію. **25.** a) $a_1a_2\cdots a_n + x(a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1})$; b) $1 + x_1y_1$ при $n = 1$, $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$ при $n = 2$, 0 при $n > 2$. *Вказ.* Розкладіть кожний стовпець у суму 2 стовпців, а визначник — у суму 2^n доданків. **26.** *Вказ.* Використовуючи теореми Кронекера – Капеллі, покажіть, що або вектори (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) — пропорційні, або однорідна система $a_i x + b_i y + c_i z = 0$, $i = 1, 2, 3$, має розв'язок вигляду $(x_0, y_0, 1)$. **27.** *Вказ.* Запишіть рівняння серединного перпендикуляра до відрізка з кінцями (x', y') та (x'', y''). Точка $A = (x, y)$ буде лежати на колі, що проходить через точки $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ і $A_3 = (x_3, y_3)$, тоді й лише тоді, коли серединні перпендикуляри до відрізків A_1A_2, A_2A_3 і A_3A перетинаються в одній точці. Далі використайте зад. 26. **28.** *Вказ.* Із зад. 27 випливає, що в рівнянні кола $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ коефіцієнти a та b будуть раціональними. **29.** 0. *Вказ.* Розкладіть кожен стовпець у суму $n-1$ стовпців, а визначник — у суму $(n-1)^n$ визначників. **30.** *Вказ.* Виконуючи елементарні перетворення над полем $\mathbb{C}$, маємо: $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B \\ B+iA & A-iB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ 0 & A-iB \end{vmatrix}$. **32.** 0. *Вказ.* Рядки лінійно залежні. **33.** a) Помножиться на a^n; b) не зміниться; c) не зміниться; d) для парного порядку стане дорівнювати 0, для непарного — помножиться на 2. *Вказ.* b) Це — композиція перетворень із зад. 14.e та зад. 4.c; d) розкладіть за першим рядком у суму двох визначників і використайте зад. 14.g і зад. 14.h. **34.** a) $a^2+b^2+c^2+1$; b) 0; c) $-2\sin(a-c)\sin(c-b)\sin(b-a)$.

Заняття 12. **5.** a) 0; b) 0; c) 80; d) 1; e) 12; f) $-16i$; g) $abc - x(ab + ac + bc)$; h) $-ayz - bxz - cxy$; i) $\frac{28}{81}$. **37.** a) -2639; b) -18016. **7.** a) 6; b) 394; c) -7497. **8.** $x = 0$, $x = 4$. **9.** a) $n!$; b) $(-1)^{n(n-1)/2}n$; c) $\big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$; d) $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\cdots(x_n - a_{n-1,n})$. *Вказ.* a) Додайте до кожного рядка перший; b) відніміть від кожного рядка (починаючи з другого) попередній; c) додайте спочатку всі рядки до першого; d) відніміть від кожного рядка (починаючи з другого) попередній. **10.** a) x^2z^2; b) $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$. *Вказ.* b) Додайте всі рядки до першого, винесіть спільний множник, від кожного стовпця відніміть перший, розкрийте за першим рядком, а потім від кожного рядка відніміть попередній. **11.** $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$. *Вказ.* Від кожного рядка відняти наступний, а потім до кожного стовпця додати перший. **12.** a) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$; b) $\prod_{i=1}^{n}(a_i a_{2n+1-i} - b_i b_{2n+1-i})$. *Вказ.* a) Розкладіть за останнім рядком; b) переставте останній рядок на друге місце й останній стовпець на друге місце. **13.** a) n; b) f_{n+1} — $(n+1)$–е число Фібоначчі. *Вказ.* Розкладіть за останнім рядком і знайдіть рекурентне співвідношення для числа ненульових членів. **14.** Покажіть, що використовуючи лише додавання до одного рядка кратного іншого, таку матрицю можна спочатку звести до унітрикутної, а потім

— до одиничної. **15.** *Вказ.* Позаяк $\det A \neq 0$, то рядки матриці A лінійно незалежні. Віднімаючи від рядків матриці C відповідні лінійні комбінації рядків матриці A, можемо зробити на місці C нульову матрицю. Оскільки елементарні перетворення рядків відповідають множенню зліва на елементарні матриці, то це рівносильне відніманню від рядка (C, D) рядка $(CA^{-1}A, CA^{-1}B)$. **33.** *Вказ.* a) Із зад. 15 випливає, що $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B)$. **17.** *Вказ.* Розкладіть кожен рядок матриці $E + B^{\top}A$ у суму двох рядків. **19.** a) -384600; b) 29400000; c) $1/43200$. **20.** a) -160; b) 1; c) 1932. **21.** a) $\prod_{k=1}^{n}(1 - a_{kk}x)$; b) $(-1)^{n(n+1)/2}(n+1)^{n-1}$. *Вказ.* a) Відніміть від кожного стовпця, починаючи з останнього, попередній, помножений на x; b) додайте спочатку всі рядки до першого. **22.** $(-1)^{n-1}n$. **23.** $x^{n-1}(x + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$. *Вказ.* Розкладіть кожен рядок $(a_i a_1, \ldots, a_i^2 + x, \ldots, a_1 a_n)$ у суму двох рядків $(a_i a_1, \ldots, a_i^2, \ldots, a_i a_n)$ і $(0, \ldots, x, \ldots, 0)$, а визначник — у суму 2^n визначників.

Заняття 13. **7.** *Вказ.* Застосуйте індукцію, розкриваючи мінор за довільним рядком. **8.** a) $c(-9, -2, 3)$; b) $c(-158, 25, -119, 225)$. **9.** *Вказ.* Розкрийте визначник за цим рядком. **10.** *Вказ.* Використайте рівність $A \cdot (A^*)^{\top} = \det A \cdot E$. **11.** a) i–й стовпець не зміниться, а інші стовпці помножаться на c; b) A^* помножиться на c^{n-1}; c) усі елементи змінять знак на протилежний і переставляться i-й та j-й стовпці; d) до j–го стовпця додасться i–й, помножений на c. **12.** *Вказ.* a) Перейдіть до логарифмів. b) Матриця A^{-1} має цілі коефіцієнти. **13.** Розкладіть у лівій частині кожен стовпець у суму двох стовпців, а визначник — у суму 2^n визначників. **14.** a) $D_{n+1} = a_n y_1 y_2 \cdots y_n + x_n D_n = a_n y_1 y_2 \cdots y_n + a_{n-1} y_1 \cdots y_{n-1} x_n + \cdots + a_1 y_1 x_2 \cdots x_n + a_0 x_1 x_2 \cdots x_n$; b) $D_n = a_1 a_2 \cdots a_n - D_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_n - a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n$. c) $D_{n+1} = a_n D_n - a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n - (a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1})$. *Вказ.* Розкрийте визначник за останнім стовпцем. **15.** a) $2^{n+1} - 1$; b) $8 \cdot 4^{n-1} - 2^n$; c) $\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ при $\alpha \neq \beta$, $(n+1)\alpha^n$ при $\alpha = \beta$. *Вказ.* a) $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$; b) $D_n = 6D_{n-1} - 8D_{n-2}$; c) $D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$. **16.** $\prod_{k=1}^{n} k!$. **17.** a) $x = \cos(\beta - \alpha)$, $y = \sin(\beta - \alpha)$. b) $x = \frac{1}{3}(a + b + c)$, $y = \frac{1}{3}(a - b + \varepsilon(c - b))$, $z = \frac{1}{3}(a - c + \varepsilon(b - c))$. **18.** $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. **19.** *Вказ.* Використайте теорему Кронекера – Капеллі. **20.** *Вказ.* Необхідність умови випливає з теореми про ранг матриці. Нехай тепер $a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}$ — рядки мінора M, утвореного перетином лінійно незалежної системи рядків $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ з лінійно незалежною системою стовпців $b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}$.

Оскільки $\operatorname{rank} A = k$, то кожен рядок матриці є лінійною комбінацією рядків $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. Тому кожен рядок підматриці A', утвореної стовпцями $b_{j_1}, \dots, b_{j_k}$, є лінійною комбінацією рядків $a'_{i_1}, \dots, a'_{i_k}$ і ранг A' дорівнює рангу системи рядків $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. З іншого боку, стовпцевий ранг A' дорівнює k. Отже, рядки $a'_{i_1}, \dots, a'_{i_k}$ лінійно незалежні та $M \neq 0$. **21.** Використовуючи зад. 13, обчисліть двома способами $\det(a_{ij} + 2x)$. **22.** *Вказ.* Використайте результат зад 13. **23.** 0 при $r < n-1$, 1 при $r = n-1$, n при $r = n$. *Вказ.* У випадку $r = n-1$ використайте зад. 1. **24.** *Вказ.* b) Якщо $|A| = 0$, то це випливає із зад. 23. Якщо $|A| \neq 0$, то використайте рівність $A^* = |A| \cdot A^{-1}$. **25.** *Вказ.* Нехай A — матриця порядку n. Матриця A вироджена, тому $A(A^*)^\top = (A^*)^\top A = 0$. Якщо $\operatorname{rank} A < n-1$, то $A^* = 0$. Нехай тепер $\operatorname{rank} A = n-1$. Тоді однорідна система лінійних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ має одновимірний підпростір розв'язків $\langle(1, \dots, 1)\rangle$. Звідси та з рівності $A(A^*)^\top = 0$ випливає, що всі стовпці матриці A^* пропорційні вектору $(1, \dots, 1)^\top$. Аналогічно із системи $A^\top\mathbf{x} = \mathbf{0}$ випливає, що всі рядки матриці A^* пропорційні вектору $(1, \dots, 1)$. **26.** *Вказ.* Покажіть, що при такому перетворенні найбільший спільний дільник мінорів даного порядку k не зменшується. **27.** *Вказ.* Нехай C_i — рядок, який одержується з рядка C довжиною n викреслюванням i–ї координати. Доведіть, що існує i, для якого $A_i B_i^\top \neq -1$, а потім, використовуючи зад. 17, знайдіть у матриці $E + B^\top A$ ненульовий мінор порядку $n-1$. **28.** *Вказ.* A можна звести до верхнього трикутного вигляду, використовуючи лише додавання до рядків лінійних комбінацій попередніх рядків. Перейдіть від елементарних перетворень рядків до множення зліва на відповідні елементарні матриці. **29.** *Вказ.* Нехай $\operatorname{rank} A = k$. За допомогою формули Біне – Коші доведіть, що кожна з матриць $AA^\top$ та $A^\top A$ містить ненульовий мінор порядку k. **30.** $1/n!$. *Вказ.* Отримайте рекурентне співвідношення $D_n = \frac{1}{1!}D_{n-1} - \frac{1}{2!}D_{n-2} + \frac{1}{3!}D_{n-3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}D_1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ і використайте тотожність $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. **31.** $n^{n/2}$. *Вказ.* Обчисліть $|A^2|$. **32.** *Вказ.* Нехай $A = (a_{ij})$. Розкладіть матрицю $(a_{i\pi(j)})$ у добуток $(a_{i\pi(j)}) = AB_\pi$, де матриця $B_\pi = (b_{ij})$ має вигляд: $b_{ij} = 1$, якщо $i = \pi(j)$, і $b_{ij} = 0$ в інших випадках. Тоді $\det B_\pi = \operatorname{sign}\pi$, а початковій сумі можна надати вигляду $\det(a_{ij}) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \det B_\pi$. **33.** *Вказ.* Використайте зад. 15 і теорему про визначник добутку. **36.** *Вказ.* Дійсний визначник порядку $2n$ буде сумою двох квадратів. Використайте зад. 30. **37.** *Вказ.* Розгляньте співвідношення

$$\begin{array}{lcl} hf & = & g \\ h'f+hf' & = & g' \\ h''f+2h'f'+hf'' & = & g'' \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \binom{n}{0}h^{(n)}f+\binom{n}{1}h^{(n-1)}f'+\binom{n}{2}h^{(n)}f''+\dots+\binom{n}{n}hf^{(n)} & = & g^{(n)} \end{array}$$

як систему лінійних рівнянь відносно невідомих $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ і знайдіть $f^{(n)}$ за формулою Крамера. **38**. *Вказ.* Якщо матриця A елементарними перетвореннями зводиться до трикутного вигляду $\begin{pmatrix} a'_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{pmatrix}$, то аналогічними перетвореннями $A \times B$ зводиться до блочно–трикутного вигляду $\begin{pmatrix} a'_{11}B & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn}B \end{pmatrix}$. **39.** *Вказ.* Позначимо через $C_k = (x_{ij}^{(k)})$ суму всіх можливих добутків $D_1D_2\cdots D_n$, де кожен із множників D_i дорівнює A або B, причому рівно k множників дорівнюють B. Зокрема, $C_0 = A^n$, $C_n = B^n$. Тоді $(aA+B)^n = a^nA^n + a^{n-1}C_1 + \dots + aC_{n-1} + B^n$. Нехай $a_0, a_1, \dots, a_n$ — ті значення a, для яких $(aA+B)^n = 0$. Тоді для довільних i, j маємо однорідну СЛР $a_r^n x_{ij}^{(0)} + a_r^{n-1}x_{ij}^{(1)} + \dots + a_r x_{ij}^{(n-1)} + x_{ij}^{(n)} = 0$ $(r = 0, 1, \dots, n)$, основна матриця якої є матрицею Вандермонда. **41.** $c(370, 132, 130, -215)$. **43.** Від j–го рядка відніметься i–й, помножений на c. **44.** a) $D_n = n + xD_{n-1} = x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + (n-1)x + n = \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$; b) $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} = 5\cdot 2^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1}$. *Вказ.* b) Розкладіть за останнім рядком. **45.** $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$. **46.** a) $(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta)$, $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$; b) $(3, 2, 1)$.

Заняття 14. **12**. *Вказ.* $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Обидва множники парні, причому один із них ділиться на 4, а інший — на 3. **13.** n не ділиться на 6. **15.** $x \equiv 27 \pmod{40}$. **16.** 1. **17.** a) $\overline{4}$; b) $\overline{5}$.

18. a) $\begin{array}{c|ccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$;

b) $\begin{array}{c|cccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}$, $\begin{array}{c|cccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$.

19. a) $x \equiv 0 \pmod 7$, $y \equiv 4 \pmod 7$; b) $x \equiv 3 \pmod 5$, $y \equiv 5 \pmod 5$, $z \equiv 3 \pmod 5$; c) $x \equiv 11 \pmod{19}$, $y \equiv 17 \pmod{19}$, $z \equiv 2 \pmod{19}$; d) $x \equiv 1 \pmod{13}$, $y \equiv 9 \pmod{13}$, $z \equiv 9 \pmod{13}$; e) $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 6 + 4z \pmod 7$, z — довільне, $t \equiv 6 \pmod 7$. **20.** a) $p \neq 3$; b) $\varnothing$; c) $p = 3$. *Вказ.* Обчисліть визначник основної матриці. **21.** 3. *Вказ.* Порахуйте мінори порядку 3 матриці, рядками якої є дані вектори. **22.** Для n вільних від квадратів. **23.** a) $x \equiv \pm 5 \pmod{13}$; b) $x \equiv \pm 8 \pmod{31}$; c) $x_1 \equiv 1 \pmod{17}$, $x_2 \equiv 14 \pmod{17}$; d) $x \equiv 3 \pmod{11}$. **24.** *Вказ.* При діленні на 8 квадрат може давати в остачі лише 0, 1 або 4. **25.** *Вказ.* Якщо $x^2 \equiv -1 \pmod p$, то з малої теореми Ферма випливає $1 \equiv x^{p-1} \equiv$ $\equiv (x^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$. Тому $(p-1)/2$ — парне. **26.** При $n = 1$ — єдиний розв'язок $x \equiv 1 \pmod 2$; при $n = 2$ — два розв'язки: $x \equiv \pm 1 \pmod 4$; при $n \geq 3$ — чотири розв'язки: $x \equiv \pm 1 \pmod{2^n}$, $x \equiv 2^{n-1} \pm 1 \pmod{2^n}$. *Вказ.* Якщо $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 2^n m$, то одне з чисел $x-1$, $x+1$ має ділитися на 2^{n-1}. **27.** $n \equiv pa - (p-1)2^a$ $\pmod{p(p-1)}$, де $a = 0, 1, \ldots, p-2$. *Вказ.* Розділіть n на $p-1$ з остачею. **28.** *Вказ.* Якщо СЛР визначена за модулем кожного простого числа, то за теоремою Крамера її визначник не дорівнює 0 і не ділиться на жодне просте число. Тому цей визначник дорівнює ± 1. **29.** Ні. *Вказ.* СЛР $2x = 2$ є визначеною над $\mathbb{Z}$ і невизначеною за модулем 2. **30.** Ні. *Вказ.* СЛР $4x = 2$ є сумісною за модулем довільного простого числа p, але не має цілих розв'язків. **31.** *Вказ.* Коефіцієнти нетривіальної лінійної комбінації над $\mathbb{Q}$ можна вважати цілими і взаємно простими в сукупності. **32.** *Вказ.* Відповідний ненульовий мінор матриці, рядками якої є дані вектори, ділиться лише на скінченну кількість простих чисел. **33.** *Вказ.* Запишіть матрицю A у вигляді $A = E + (A - E)$ і обчисліть степені матриці $A - E$. **34.** *Вказ.* Спочатку покажіть, що для непарного числа n вигляду $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ $(k_1, \ldots, k_m \geq 1)$ конґруенція $x^2 \equiv 1 \pmod n$ має 2^m розв'язків. Використовуючи цей факт і зад. 26, покажіть, що коли розв'язків більше ніж два, то їх кількість кратна 4 і вони розпадаються на пари протилежних за модулем n. **35.** a) $\overline{29}$; b) $\overline{46}$. **37.** a) $x \equiv 6 \pmod 7$, $y \equiv 6 \pmod 7$, $z \equiv 4 \pmod 7$; b) $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 4 \pmod 7$, $z \equiv 2$ $\pmod 7$. **38.** a) $x \equiv 4 \pmod{11}$, $y \equiv 8 \pmod{11}$, $z \equiv 1 \pmod{11}$; b) $x \equiv 8$ $\pmod{11}$, $y \equiv 10 \pmod{11}$, $z \equiv 10 \pmod{11}$. **40.** a) $x \equiv 6 \pmod{13}$;

b) $x \equiv 14 \pmod{21}$; c) $\varnothing$; d) $x_1 \equiv 4, x_2 \equiv 12 \pmod{19}$; e) $x_1 \equiv 3, x_2 \equiv 7$, $x_3 \equiv 9 \pmod{19}$. **41.** $x \equiv \pm 1 \pmod{p^n}$. *Вказ.* Якщо $p \neq 2$, то одне з чисел $x+1$, $x-1$ взаємно просте з p. **42.** Визначена за модулем $p \neq 2$; несумісна за модулем $p = 2$. **43.** 3. *Вказ.* Розгляньте визначник матриці, рядками якої є дані вектори.

Заняття 15. **8.** $f(x) = (x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$. **9.** a) 1; b) $-1-44i$. **10.** 4. **11.** a) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 5$, $f''(1) = 20$, $f'''(1) = 60$, $f^{(4)}(1) = 120$, $f^{(5)}(1) = 120$. b) $(x-1-2i)^4+(4+5i)(x-1-2i)^3+(-4+15i)(x-1-2i)^2+(-16+8i)(x-1-2i)+(-12-2i)$, $f(x_0) = -12-2i$, $f'(x_0) = -16+8i$, $f''(x_0) = -8+30i$, $f^{(3)}(x_0) = 24+30i$, $f^{(4)}(x_0) = 24$. **12.** $x^5+13x^4+67x^3+178x^2+246x+139$. *Вказ.* Зробіть заміну $x+3 = y$. **13.** $a = 3$, $b = -4$. **14.** a) x^2+1; b) 1; c) x^3-x+1; d) x^2+x+1; e) 1. **15.** a) $x^3+1 = -f(x)+(x+1)g(x)$; b) $1 = -(x+1)f(x)+(x^3+x^2-3x-2)g(x)$; c) $x^2+x+1 = \frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}(x+1)g(x)$. **16.** a) $x+1 = xf(x)+(x^2+1)g(x)$, b) $1 = (x^3+x)f+(x^4+x+1)g$. **17.** $1 = (4-3x)f(x)+(3x^2+2x+1)g(x)$. **18.** 1. **19.** Якщо $m = 0$, то $q = p-1$; якщо $m \neq 0$, то $p = 2-m^2$, $q = 1$. **20.** *Вказ.* Застосуйте індукцію за n. **21.** *Вказ.* Якщо $u(x) = q(x)g(x)+r(x)$, то $u(x)f(x)+v(x)g(x) = r(x)f(x)+(q(x)f(x)+v(x))g(x)$. **22.** $u(x) = -6x^2+11x-4$, $v(x) = 6x^3+x^2-1$. *Вказ.* НСД$(x^3,(1-x)^2) = 1$. Знайдіть лінійне зображення $1 = u_1(x)x^3+v_1(x)(1-x)^2$. **23.** $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$. *Вказ.* Запишіть $f(x)$ у вигляді $f(x) = (x-1)(x-3)g(x)+ax+b$. **24.** *Вказ.* Якщо $f(x^n)$ ділиться на $x-1$, то $f(1) = 0$. А тому $f(x) = (x-1)g(x)$. **25.** $\deg f(x) < 7$. **26.** $u(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+k-1}{k}(1-x)^k$, $v(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k-1}{k}x^k$. *Вказ.*. Можна вважати, що $\deg u(x) < n$, $\deg v(x) < m$. Нехай $u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, $b(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$. Коефіцієнти b_0, b_1, $\ldots$, b_{m-1} легко знаходимо з рівності $1 = u(x)x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k \cdot \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^i$, якщо скористатися тотожністю $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n-1+i}{i}\binom{n}{k-i} = 0$. Щоб знайти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, зробіть заміну $1-x = y$. **27.** $f(x) = (x+1+i)\big(4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)\big)+(8-6i)$. **28.** $f(x) = (x+i)^5-5i(x+i)^4-11(x+i)^3+13i(x+i)^2+8(x+i)+(1-2i)$, $f(i) = 1-2i$, $f'(i) = 8$, $f''(i) = 26i$, $f'''(i) = -66$, $f^{(4)}(i) = -120i$, $f^{(5)}(i) = 120$. **29.** a) $x+1$; b) x^3+1; c) x^3-1. **30.** $3x+2 = (-x^2+x+1)f(x)+(x^3+2x^2-5x-4)g(x)$. **31.** $1 = (x+1)f(x)+x^2g(x)$. **32.** $x^{(n,m)}-1$. *Вказ.* Остача від ділення x^m-1 на x^n-1 дорівнює x^r-1, де r — остача від ділення m на n.

Заняття 16. **9.** a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n$. **11.** a) $3 \nmid m$; b) $m = 6n+1$ або $m = 6n+5$. **12.** $a = -3$. **13.** $a = n$,

$b=-n-1$. **15.** *Вказ.* $f(x)-f'(x)=\frac{x^n}{n!}$. **16.** *Вказ.* Похідна не має ненульових кратних коренів. **17.** a) $x^4-(2+3i)x^3-(2-5i)x^2+(4-i)x-(1+i)$; b) $x^7-3x^6+6x^5-8x^4+9x^3-7x^2+4x-2$. **18.** a) $(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$; b) $(x-1)\left(x-(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})\right)\left(x-(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})\right)\times$
$\times\left(x-(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5})\right)\left(x-(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5})\right)=$
$=(x-1)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)=\left(x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\right)$. **19.** a) $\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\right.$
$\left.-i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$; b) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2-\left(2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)x+1\right)$. **20.** a) $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$; b) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$. **21.** $(x-1)^3(x+1)$. **22.** a) $(x+1)^4(x-4)$; b) $(x+1)^4(x-2)^2$; c) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$; d) $(x^2+x+1)(x-2)^4$; e) $(x+3)^2(x-1)^3$. **23.** $x_1-a, x_2-a, \dots, x_n-a$. **24.** a) $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$; b) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\mathrm{ctg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$. *Вказ.* a) Корені $f(x)$ знаходимо з рівності $n\arccos x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Крім того, із задачі 2.17.а випливає, що $\cos(n\arccos x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}\cdot(1-x^2)^{2k}$, тому старший коефіцієнт $f(x)$ дорівнює $\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$. b) Якщо покласти $x=\mathrm{ctg}^2\varphi$, то рівність $f(x)=0$ рівносильна рівності $\mathrm{Re}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}=0$, звідки $2n\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0,1,\dots,n-1$. **25.** Числа m, $n+1$ і k повинні мати однакову парність. *Вказ.* Розкладіть x^4+x^2+1 у добуток двох многочленів степеня 2. **26.** Ні. *Вказ.* В обох випадках перша і друга похідні не мають спільних коренів. **27.** *Вказ.* Якщо $f(x^n)$ ділиться на $(x-a)^k$, то $\left(f(x^n)\right)'=f'(x^n)nx^{n-1}$ ділиться на $(x-a)^{k-1}$. Тоді $f'(x^n)$ ділиться на $(x-a)^{k-1}$. Аналогічно доводиться, що $f''(x^n)$ ділиться на $(x-a)^{k-2}, \dots, f^{(k-1)}(x^n)$ ділиться на $x-a$, і т.д. Отже, $f(a^n)=f'(a^n)=f''(a^n)=\dots=f^{(k-1)}(a^n)=0$. Тому a^n є для $f(x)$ коренем кратності $\geq k$ і $f(x)=(x-a^n)^k g(x)$. Однак тоді $f(x^n)=(x^n-a^n)^k g(x^n)$. **29.** $k+3$, де k — показник кратності a як кореня $f'''(x)$. **30.** $x^{(n,m)}-1$. *Вказ.* $x^{m+n}-x^m-x^n+1=(x^m-1)(x^n-1)$. Для знаходження кратних множників використайте задачу 32. **31.** $x^{\text{НСД}(n,m)}+1$, якщо числа $\frac{n}{(n,m)}$ і $\frac{m}{(n,m)}$ — непарні, і 1 — у протилежному випадку. *Вказ.* Можна вважати, що многочлени належать $\mathbb{C}[x]$. Розглянемо спочатку випадок, коли НСД$(n,m)=1$. Тоді існують такі p і q, що $pm+qn=1$. Нехай ε — корінь НСД(x^m+1, x^m+1). Тоді $\varepsilon^m=\varepsilon^n=-1$, звідки $\varepsilon=\varepsilon^{pm+qn}=(-1)^{m+n}$. Оскільки $\varepsilon^m=-1$, то $\varepsilon\neq 1$. Отже, $\varepsilon=-1$. Але -1 є коренем многочленів x^m+1 і x^n+1 тоді й лише тоді, коли m і n — непарні. Випадок НСД$(n,m)=d$ зводиться до попереднього випадку заміною $y=x^d$.

32. *Вказ.* Якщо $f(x)$ набуває лише невід'ємних значень, то всі його дійсні корені мають парну кратність. Тому $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = g^2(x)h(x)$, де многочлен $h(x)$ не має дійсних коренів. Розіб'ємо комплексні корені многочлена $h(x)$ на пари спряжених: z_1 і $\overline{z_1}$, ..., z_k і $\overline{z_k}$. Нехай $(x-z_1)\cdots(x-z_k) = u(x)+iv(x)$, де $u(x)$ та $v(x)$ — дійсні многочлени. Тоді $(x-\overline{z_1})\cdots(x-\overline{z_k}) = u(x)-iv(x)$ і $h(x) = (u(x)+iv(x))(u(x)-iv(x)) = u^2(x)+v^2(x))$. **33.** $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n$. **33.** $m = 6n+1$. **35.** $a = \pm 6$. **37.** a) $x^4-(5-2i)x^3+(8-8i)x^2-(4-10i)x-4i$; b) $x^6-7x^5+22x^4-40x^3+44x^2-28x+8$. **38.** $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. **39.** a) $(x-1)(x-2)(x-3)$; b) $\prod_{k=0}^{n-1}\Big(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\Big)$. **40.** *Вказ.* Застосуйте індукцію за параметром k. Оскільки розглядаються лише ненульові корені, то можна вважати, що $n_1 = 0$. Тоді за припущенням ненульові корені похідної $f'(x)$ мають кратність меншу ніж $k-1$. **41.** $(x-1)^2(x+2)^4$.

Заняття 17. **10.** a) $-1,-2,-3,4$; b) -2; c) 2. **11.** $m = -1,-3$. *Вказ.* Лінійним множником може бути лише $x \pm 1$. Розклад на множники степеня 2 може мати вигляд $(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$ або $(x^2+ax-1)(x^2+bx-1)$. Далі знайдіть у цих розкладах коефіцієнти при x^3 і x. **12.** *Вказ.* Нехай $\frac{p}{1}$ — цілий корінь $f(x)$. Тоді p повинно бути одночасно непарним, оскільки $p \mid f(0)$, і парним, оскільки $(p-1) \mid f(1)$. **13.** За ознакою Айзенштайна для довільного простого числа p многочлен x^n+p буде незвідним над $\mathbb{Q}$. **14.** *Вказ.* c) Розкладіть на незвідні множники над $\mathbb{R}$. d) $[f(x)]_2 = (x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, але $[f(x)]_3$ не має лінійних множників. e) Якщо $x^{55}-25 = g(x)h(x)$, то можна вважати, що степінь m множника $g(x)$ задовольняє нерівність $1 \le m \le 27$. Оскільки над полем $\mathbb{C}$ $x^{55}-25 = \prod_{k=0}^{54}\big(x-\sqrt[55]{25}\big(\cos\frac{2k\pi}{55}+i\sin\frac{2k\pi}{55}\big)\big)$, то $g(x)$ є добутком якихось m множників із цього розкладу. Однак тоді модуль вільного члена $g(x)$ належить інтервалу $(1,5)$ і не є дільником числа 25. **15.** *Вказ.* Якщо $f(x)$ — незвідний, то НСД$(f(x), f'(x)) = 1$; якщо він має кратні корені, то НСД$(f(x), f'(x)) \neq 1$. **16.** $x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1$. **17.** 6 степеня 5 і 9 степеня 6. **18.** *Вказ.* Використайте розклад $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. **19.** a) $x+2$; b) $x+1$. **20.** a) $(x+2)^2$; b) $(x+1)(x^2+2x+2)$; c) $(x+1)^4$. **21.** *Вказ.* $f(x) = \frac{x^{p^{k+1}}-1}{x^{p^{k-1}}-1}$. Зробіть заміну $x = y+1$ і застосуйте ознаку Айзенштайна для p. **22.** *Вказ.* Якщо n — корінь, то непарне число $-f(1) = f(n)-f(1) = (n^{4m+1}-1)+2\varepsilon_1(n^{4m}-1)+\cdots+(4m+1)\varepsilon_{4m}(n-1)$ ділиться на $n-1 = 4m$. **23.** *Вказ.* Нехай $n = 2m$ (випадок $n = 2m+1$ розглядається аналогічно). Якщо $f(x)$ розкладається в добуток $f(x) = g(x)h(x)$, то принаймні один із множників має степінь $\le m$. Нехай це $g(x)$. У тих цілих точках, у яких $f(x)$ набуває значення ± 1, $g(x)$ також набуває значення ± 1. Але тоді $g(x)$ або принаймні в $m+1$ точці набуває значення 1, або принаймні в $m+1$ точці набуває значення -1. У першому випадку $g(x) = 1$, у другому — $g(x) = -1$. **24.** *Вказ.* Многочлен $f(x)$ набуває лише додатних значень, а тому не має дійсних коренів. Нехай $f(x) = g(x)h(x)$ — нетривіальний розклад $f(x)$. Тоді кожен із множників $g(x)$ і $h(x)$ також не має дійсних коренів, а тому є знакопосталим. Можна вважати, що $g(x) > 0$ і $h(x) > 0$. Оскільки $f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = 1$, то $g(a_1) = \cdots = g(a_n) = 1$, $h(a_1) = \cdots = h(a_n) = 1$. Якби степінь якогось із многочленів $g(x)$ і $h(x)$ був менший n, то цей многочлен тотожно дорівнював би 1. Отже, $\deg g(x) = \deg h(x) = n$. Оскільки числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є цілими коренями кожного з многочленів $g(x) - 1$ і $h(x) - 1$, то маємо розклади $g(x) - 1 = a(x - a_1)\cdots(x - a_n)$ і $h(x) - 1 = b(x - a_1)\cdots(x - a_n)$, де a і b — цілі числа. Звідси отримуємо: $(x - a_1)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1 = 1 + (a + b)(x - a_1)\cdots(x - a_n) + ab(x - a_1)^2 \cdots (x - a_n)^2$. Коефіцієнт при x^{2n} у лівій частині дорівнює 1, а в правій — ab. Тому $ab = 1$. Однак тоді $a + b = 0$. Ця система рівнянь для a і b є несумісною над $\mathbb{Z}$. Отже, припущення про звідність $f(x)$ приводить до суперечності. **25.** 18. **26.** *Вказ.* Якщо $a \not\equiv b \pmod p$ і $f(x + a) = f(x + b)$, то для $c = b - a$ маємо: $f(x) = f(x + c) = f(x + 2c) = \cdots = f(x + (p - 1)c)$. **27.** *Вказ.* Нехай $g(x)$ — незвідний дільник $f(x)$. За теоремою Ферма $x^p \equiv x \pmod p$, тому многочлен $x^p - x - a$ не має коренів в $\mathbb{Z}_p$. Отже, $\deg g(x) > 1$. З теореми Ферма і того, що біноміальний коефіцієнт $\binom{p}{i}$ ділиться на p при $i \neq 0, p$ також випливає, що для довільного k $f(x + k) = (x + k)^p - (x + k) - a = x^p + k^p - (x + k) - a = f(x)$. Тому многочлени $g(x + 1), \ldots, g(x + p - 1)$ також будуть незвідними дільниками $x^p - x - a$. Згідно із задачею 26 усі ці дільники або попарно різні (і тоді $x^p - x - a$ має ділитися на їх добуток, що неможливо, оскільки степінь цього добутку $\geq 2n$), або однакові. В останньому випадку кожен елемент поля $\mathbb{Z}_p$ буде коренем многочлена $g(x) - g(0)$. Однак тоді $\deg g(x) \geq n$. Отже, $g(x) = f(x)$. **28.** Ні. *Вказ.* $x^8 + x + 1 = (x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$. **29.** -3. **30.** *Вказ.* b) Застосуйте редукцію за модулем 2. **31.** $x + 1$. **32.** $x^5 + x^3 + 1$, $x^5 + x^2 + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$. **33.** $2(x + 2)(x + 1)^2$. **34.** a), c), d) — ні; b) — так. *Вказ.* Многочлен степеня 3 буде звідним тоді й лише тоді, коли він має корінь.

Заняття 18. **9.** $x + 1 + \frac{1}{24}x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. **10.** $-\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}x + 15$. **11.** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$. **14.** *Вказ.* До многочлена $f(x^2)$ застосуйте задачу 4. **15.** $f(0) = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$.

Вказ. За інтерполяційною формулою Лагранжа (задача 3) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\varphi(x)}{(x-\varepsilon^{k-1})\varphi'(\varepsilon^{k-1})}$, де $\varphi(x) = (x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1}) = x^n-1$. **16.** a) 3; b) 0; c) 3. **17.** a) $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = 4x^3-1$, $f_2(x) = 3x+4$, $f_3(x) = 1$. Два дійсні корені в інтервалах $(-1,0)$ і $(1,2)$. b) $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = 2x^3-3x^2-3x+1$, $f_2(x) = 9x^2-3x-5$, $f_3(x) = 9x+1$, $f_4(x) = 1$. Чотири дійсні корені в інтервалах $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$. c) $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = x^4-3x^2+1$, $f_2(x) = 4x^3-8x+3$, $f_3(x) = 4x^2+3x-4$, $f_4(x) = x$, $f_4(x) = 1$. П'ять дійсних коренів у інтервалах $(-2,-3/2)$, $(-3/2,-1)$, $(0,1/2)$, $(1/2,1)$, $(1,2)$. **18.** 0, якщо n — парне; 1 від'ємний, якщо n — непарне. *Вказ.* Усі дійсні корені містяться на проміжку $(-\infty,-\varepsilon)$, де ε — достатньо мале додатне число. За ряд Штурма на $(-\infty,-\varepsilon]$ можна взяти набір $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$, $f_2(x) = -f(x)+f'(x) = -\frac{x^n}{n!}$. **19.** *Вказ.* Запишіть рівність $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ для кожного з многочленів $1, x, \ldots, x^n$. **20.** a) $\frac{2}{(x+1)^5} - \frac{3}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}$; b) $\frac{2}{(x-1)^6} + \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$. **21.** $\frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{2x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}}$. **22.** a) $\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$; b) $\frac{-1}{4(x+1)} + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)^2}$; c) $\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$; d) $\frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}$. **23.** a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{5}{2(x-3)} + \frac{2}{x-4}$; c) $\frac{1}{12(x+1)} - \frac{4}{3(x-2)} + \frac{9}{4(x-3)}$.

24. a) $-\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}$;

b) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)x}{x^2-\left(2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)x+1}$. *Вказ.* a) Використайте задачу 8.

b) Об'єднайте в попередньому результаті доданки із комплексно спряженими коефіцієнтами. **25.** x^{p-2}. *Вказ.* Застосуйте теорему Ферма. **26.** $\frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$. *Вказ.* ε є первісним коренем степеня n з одиниці. Тому $(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1}) = x^n-1$. За інтерполяційною формулою Лагранжа відповідний многочлен дорівнює $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^k}\cdot\frac{1}{n\varepsilon^{k(n-1)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{\varepsilon^{k(n-1)}}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon^{km}x^{n-1-m}\right) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\varepsilon^{kr}\right)x^{n-r}$. Ураховуючи результат задачі 3.14, останню суму можна переписати у вигляді $\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{r=1}^{n-1}\frac{n}{1-\varepsilon^r}x^{n-r}\right) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-\varepsilon^k}{\sin^2(\pi k/n)}x^k$. **27.** *Вказ.* Застосуйте метод Ньютона і математичну індукцію. **28.** *Вказ.* Заміною $y = x - x_0$ задача зводиться до випадку $x_0 = 0$. Тому достатність умови випливає із задачі 15. Для доведення достатності зауважимо, що для довільних значень $b_1, \ldots, b_n$ існує многочлен $f(x)$ степеня $< n$, який у даних точках $x_1, \ldots, x_n$

набуває відповідно значень $b_1, \ldots, b_n$. З умови та інтерполяційної формули Лагранжа (задача 3) випливає, що для $f(x)$ виконується рівність

$$f(0) = \frac{1}{n}\bigl(b_1 + \cdots + b_n\bigr) = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

де $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Оскільки b_k довільні, то

$$\frac{\varphi(x)}{(x-x_1)\varphi'(x_1)} = \cdots = \frac{\varphi(x)}{(x-x_n)\varphi'(x_n)} = \frac{1}{n}.$$

Розглянемо тепер многочлен $g(x) = n\bigl(\varphi(0) - \varphi(x)\bigr) + x \cdot \varphi'(x)$. Тоді $g(x_1) = \cdots = g(x_n) = 0$. Однак $\deg g(x) < n$. Тому многочлен $g(x)$ — нульовий. Підставляючи у вираз для $g(x)$ замість $\varphi(x)$ його розклад $\varphi(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ за степенями x, отримаємо: $g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (k-n) x^k$. Отже, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Однак тоді $\varphi(x) = x^n + a_0$, звідки випливає, що $x_1, \ldots, x_n$ — це корені степеня n із числа $-a_0$, а тому є вершинами правильного n–кутника з центром у точці 0. **29.** $1 - \frac{2x}{1} + \frac{4x(x-1)}{2!} - \frac{8x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + \frac{2^{2n}x(x-1)\cdots(x-2n+1)}{(2n)!}$. *Вказ.* Знайдіть значення $f(x)$ у точках $0, 1, 2, \ldots, 2n$, а потім знайдіть інтерполяційний многочлен методом Ньютона. **30.** b) Так. *Вказ.* a) Досить показати, що $|S_0(f) \cup S_1(f)| > \deg f$, і використати єдиність інтерполяційного многочлена. Нехай $\deg f = n$. За основною теоремою алгебри $f(x) = a_0 \prod\limits_{\alpha \in S_0(f)} (x-\alpha)^{k_\alpha}$, $f(x) - 1 = a_0 \prod\limits_{\beta \in S_1(f)} (x-\beta)^{m_\beta}$. Тому

$$f'(x) = \bigl(f(x)-1\bigr)' = \prod_{\alpha \in S_0(f)} (x-\alpha)^{k_\alpha - 1} \cdot \prod_{\beta \in S_1(f)} (x-\beta)^{m_\beta - 1} \cdot h(x).$$

Множник $\prod\limits_{\alpha \in S_0(f)} (x-\alpha)^{k_\alpha - 1}$ має степінь $n - |S_0(f)|$, а множник $\prod\limits_{\beta \in S_1(f)} (x-\beta)^{m_\beta - 1}$ — степінь $n - |S_1(f)|$. Тому $\bigl(n - |S_0(f)|\bigr) + \bigl(n - |S_1(f)|\bigr) \le n-1$, що й дає потрібну нерівність. **31.** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{x-k}$. *Вказ.* Використайте задачу 8. **32.** a) $\frac{f'(x)}{f(x)}$; b) $\frac{xf'(x)}{f(x)} - n$. *Вказ.* b) Використайте рівність $\frac{c_k}{x-c_k} = \frac{x}{x-c_k} - \frac{x-c_k}{x-c_k}$ і результат попереднього пункту. **33.** 0, якщо $m < n-1$; 1, якщо $m = n-1$. *Вказ.* $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. За інтерполяційною формулою Лагранжа (задача 3) $x^m = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^m \frac{f(x)}{(x-x_k)f'(x_k)}$. Прирівняйте коефіцієнти при x^{n-1} зліва і справа.

34. $y^{(n)} = \dfrac{n!\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Вказ.* Розкладіть $\frac{1}{x^2+1}$ у суму елементарних дробів над полем $\mathbb{C}$. Тоді $y^{(n)} = \frac{i}{2}(-1)^n n!\Big(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}}\Big)$. **35.** $x^3 - 9x^2 + 21x - 8$. **36.** $\frac{5}{2} - \frac{1-i}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1+i}{2}x^3$. **37.** $1 + \frac{(a-1)x}{1!} + \frac{(a-1)^2x(x-1)}{2!} + \cdots + \frac{(a-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$. **38.** 4. **39.** $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, $f_2(x) = x^2 + 5x - 3$, $f_3(x) = -9x + 5$, $f_4(x) = -1$. Два дійсні корені в інтервалах $(0,1)$ і $(1,2)$. **40.** a) $\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4(x+i)} - \frac{1}{4(x-i)}$; b) $\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}$. **41.** $\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$.

Література

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. — М.: Факториал Пресс, 2001.

2. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин — М.: Физматлит, 1980.

3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд — М.: Добросвет, 1998.

4. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. 3-е изд. / Л. И. Головина — М.: Наука, 1979.

5. Завало С. Т. Курс алгебри / С. Т. Завало — К.: Вища щкола, 1985.

6. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов — М.: Наука, 1975.

7. Калужнін Л. А. Лінійні простори. 2-ге вид, перероб. / Л. А. Калужнін, В. А. Вишенський, Ц. О. Шуб — К.: ВПЦ “Київ. ун-т”, 2010.

8. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II: Линейная алгебра / А. И. Кострикин — М.: Физматлит, 2004.

9. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И Мальцев — М.: Наука, 1970.

10. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков — М.: Наука, 1974.

11. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина — М.: Наука, 1987.

12. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг — М.: Мир, 1980.

13. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев — М.: Наука, 1984.

14. Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский — М.: Наука, 1977.