

УДК 539.3

Федорченко Л. М.¹, аспірант
Жук Я. О.¹, д.ф.-м.н., проф.

Аналіз напружено-деформівного ста-ну ортотропної циліндричної оболонки при різних способах закріплення контуру

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4е
e-mail: fedorchenko555@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

L.N. Fedorchenko¹, graduate student,
Y.A. Zhuk¹, Dr.Sci.(Phys.-Math.), Prof.

The analysis of stress-strain state of orthotropic cylindrical shell with different method of fixing circuit

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: fedorchenko555@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

Розглядається вплив умов закріплення ортотропної оболонки обертання з ортотропною електропровідністю на її напружено-деформівний стан в нестационарному магнітному полі. Проведено аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: ортотропна оболонка, магнітне поле, магнітопружність.

The solving of boundary value problems of magnetoelasticity theory of thin shells with finite electrical conductivity in a nonlinear formulation is connected with the large computational difficulties. This is because of the fact that the system is related, which describes the stress-strain state of the shell.

It consists of the equations of motion and electrodynamics. The volume force of Lorentz is present in the equations of motion. The electrodynamics equations contain the derivatives of displacements in time.

Besides, it is a nonlinear mixed hyperbolic-parabolic system of differential equations of the eighth order with variable coefficients. The volumetric forces of Lorentz are nonlinear. They are changing depending on the deformation of the middle surface and changes of the time coordinate.

The offered technique for solving nonlinear problems of numerical of magnetoelasticity shell theory is based on the consistent application of finite-difference scheme of Newmark, the method of quasilinearization and the method of discrete-orthogonalization.

In article the influence of the method of fixing the orthotropic shell with orthotropic electroconductivity to her stress-strain state in the no stationary magnetic field is considered. The analysis results has been carried.

Key Words: orthotropic shell, magnetic field, magnetoelasticity.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України М.О.Перестюк

Вступ

Циліндричні оболонки обертання мають широке застосування у вигляді структурних елементів у різних сучасних технологіях, вимоги до яких зростають. Тому виникає велика необхідність у розробці ефективних методів проведення аналізу напружено-деформівного стану струмопровідної ортотропної циліндричної оболонки обертання, яка знаходиться в магнітному полі в осесиметричній постановці.

В даній статті приведено розв'язувальну систему рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних циліндричних оболонок обертання та запропонована методика її розв'язання. Проведено аналіз впливу різних способів закріплення контуру на напружено-

деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки обертання в нелінійному магнітному полі.

При побудові розв'язувальної системи ортотропної циліндричної оболонки враховується також ортотропна електропровідність.

Постановка задачі. Розглянемо гнучку ортотропну циліндричну оболонку змінної товщини з ортотропною електропровідністю. Вважаємо, що тіло знаходиться у зовнішньому магнітному полі під дією механічних навантажень. Нехтуємо впливом процесів поляризації і намагнічування.

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної системи координат s і θ , де s –

довжина дуги меридіана, θ – центральний кут. Координатні лінії $s = const$, $\theta = const$ є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} діелектричної проникливості ε_{ij} та магнітної проникливості μ_{ij} . Розглядаємо тіла з ромбічною кристалічною структурою. Виходячи з кристалографії [2] тензори ε_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} приймають діагональний вигляд.

Враховуючи діагональний вигляд тензорів, геометрію циліндричної оболонки і згідно роботам [1,3] розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричної ортотропної оболонки обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta}{r} w - \frac{1}{2} g_s^2, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -F_s - h J_{\text{ост}} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= \frac{\nu_\theta e_\theta}{r e_s} N_s + e_\theta h \frac{w}{r} - F_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\text{ост}} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_3 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - \\ &- 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + \\ &+ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= Q_s + N_s g_s - \frac{\nu_s M_s}{r}, \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \\ &+ \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Де u , w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; g_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; $r(s)$ – радіус кола оболонки; ν_s , ν_θ – коефіцієнти Пуассона;

e_s , e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_θ – компонента напруженості електричного поля; B_γ – нормальна складова магнітної індукції; B_s^+ , B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; $J_{\text{ост}}$ – складова густини стороннього електричного струму.

Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку описує напружено-деформівний стан гнучкої струмонесучої ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю.

Алгоритм чисельного розв'язання осесиметричних задач оболонок обертання.

Крайові задачі даного класу розв'язується чисельно відповідно до методики, яка ґрунтується на основі послідовного застосування схеми Ньюмарка [6], методу квазілінеаризації [4] та методу дискретної ортогоналізації [5].

На першому кроці, у системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, щоб відокремити змінні за часом, використовуємо неявну схему Ньюмарка для інтегрування магнітопружних рівнянь.

На наступному кроці застосовуємо метод квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації. Спочатку, за початкове наближення за часом вибирається розв'язок лінійної задачі, на наступному етапі – обираються розв'язки отримані на попередньому кроці. Така схема значно зменшується кількість ітерацій, необхідних для розв'язання цієї задачі.

Числовий приклад.

Розглянемо задачу про напружено-деформівний стан циліндричної оболонки з кадмію змінної товщини $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0.3 \sin \frac{\pi s}{l})$ м (l – довжина оболонки). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження $P_\gamma = 1 \cdot 10^3$ н/м² і зовнішнього електричного струму $J_{\text{ов}} = 1 \cdot 10^5 \sin(\omega t)$ А/м². Дослідимо вплив

закріплення контурів на напружено-деформівний стан даної оболонки.

Розглянемо, для прикладу, наступні випадки граничних умов:

$$1) u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$2) u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = \vartheta_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$3) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$4) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0;$$

$$E_\theta = -0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) + \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \quad \text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$5) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, \vartheta_s = 0;$$

$$E_\theta = -0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) + \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \quad \text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

Параметри оболонки і матеріалу взяті наступні:

$$S_0 = 0i; S_N = 0,5i; \omega = 314,16\tilde{n}^{-1}; B_s^\pm = 0,1\Gamma$$

$$e_s = 8,1 \cdot 10^{10} \tilde{I} / i^2; e_\theta = 2,82 \cdot 10^{10} \tilde{I} / i^2;$$

$$\nu_s = 0,3; \nu_\theta = 0,3; \rho = 8640 \tilde{e} \tilde{a} / i^3;$$

$$\mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \tilde{A} i / i; \sigma_1 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \tilde{n}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} c$.

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків. На Рис.1-5 приведені графіки зміни прогину w в залежності від часу t на лівому контурі при $s = 0i$. На Рис. 1 та Рис. 2 зображено зміну прогину для першого та другого випадку граничних умов. На лівому контурі у обох випадках задаються граничні умови у переміщеннях і зусиллях. Графіки подібні, але оскільки у першому випадку на правому кінці маємо шарнірне закріплення, а у другому випадку жорстке закріплення, то на графіках спостерігаються деякі відмінності. На Рис.1 відношення прогину $w/h \approx 1,76$, а на Рис.2

$w/h \approx 1,78$, що відповідає геометричній нелінійності. На Рис. 3. представлено результати при жорсткому защемленні зліва. Графік отримали випуклим угору. Максимальні значення досягаються при $t = 4 \cdot 10^{-3} c$. Абсолютне значення $w/h \approx 1,73$. На Рис. 4 представлений результат для випадку 4. У цьому випадку, зліва маємо граничну умову у зусиллях і моментах, а також умова не протікання струму через контур в нелінійній формі. Максимальне значення досягається на 4 ітерації, а потім зростає. Абсолютне значення $w/h \approx 1,73$. На Рис.5 представлений результат для випадку 5, у якому зліва задається жорстке защемлення з вільним переміщенням по s . У цьому випадку відношення прогину $w/h \approx 0,66$ виходить за межі геометрично-нелінійної теорії і є лінійним.

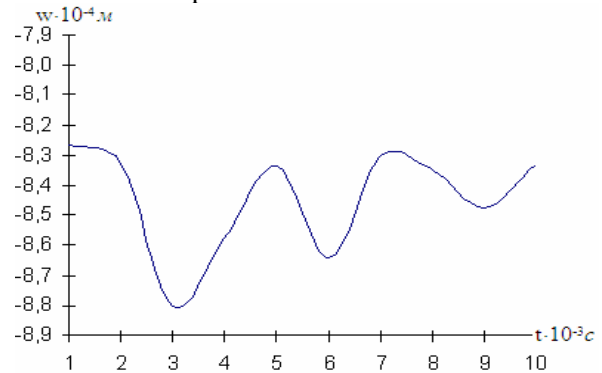


Рис.1. Випадок 1

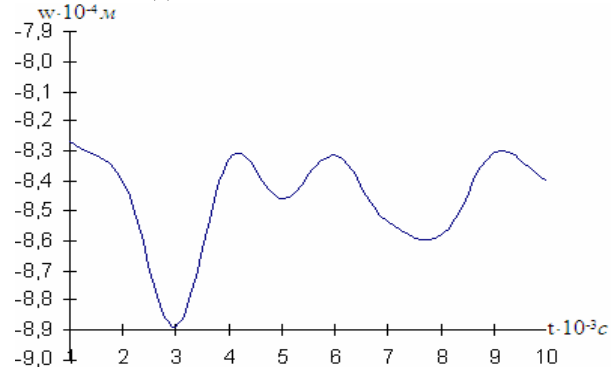


Рис.2 Випадок 2

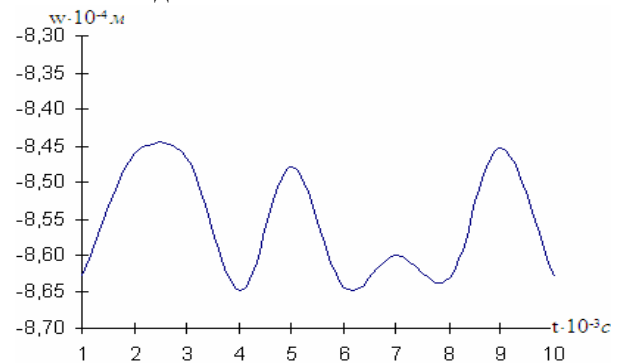


Рис.3 Випадок 3

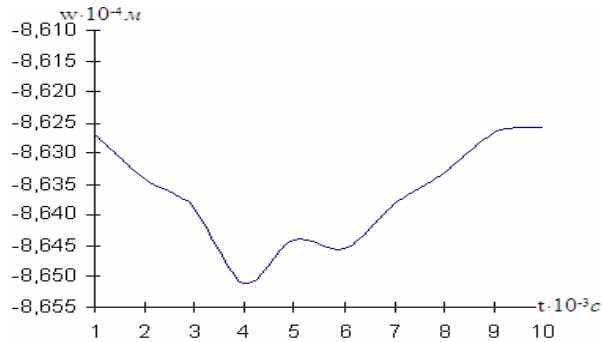


Рис.4 Випадок 4

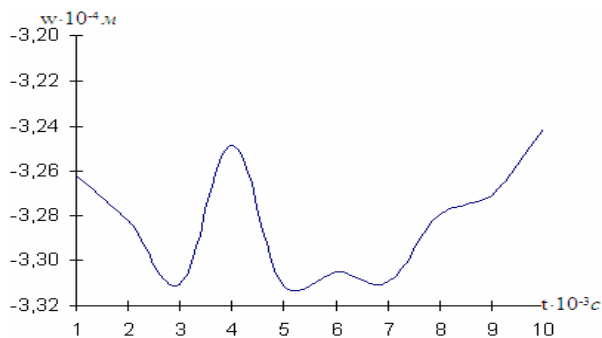


Рис.5 Випадок 5

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости [Учебник.] / Я.М Григоренко, Л.В Мольченко – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с.
2. Келли А. Кристаллография и дефекты в кристаллах. / А.Келли, Г. Гровс – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Мольченко Л. В. Гибкие оболочки вращения в магнитном поле: монография. [Электронный учебник] / Л.В Мольченко – К., 2013. – 196 с. Режим доступа до учебника: <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>
4. Bellman R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary / R. Bellman, R. Kalaba - Value Problems - Rand Corp., 1965. - P. 208.
5. Grigorenko Ya. M. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. / Ya.M. Grigorenko, A.Ya. Grigorenko, G.G .Vlaikov - Kiev: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2009. - P.550.
6. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics / N.M. Newmark //J. End Mech. Div. Proc. ASCE. 1959. – 85, No 3. P. 67-94.

Висновки

В даній статті проведено аналіз впливу граничних умов на напружено-деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив способу закріплення ортотропної оболонки обертання на її напружено-деформівний стан. Приведені результати дають можливість стверджувати про ефективність даного підходу до розв'язання задач з урахуванням ортотропії, які є досить новим класом задач магнітопружності. У статті продемонстровано, що дана методика може бути застосована при різних граничних умовах, і, зокрема, при нелінійних.

References

1. GRIGORENKO, Ya. and MOL'CHENKO, L. (2010) *Osnovi teorii plastin i obolonok s elementami magnitoprzhnosti*. Kiev: Kievskiy universitet. – p.403.
2. KELLI, A. and GROVS, G. (1974) *Kristallografiya i defekti v kristalah*. Moskva: Mir. – p.496.
3. MOL'CHENKO, L. (2013) *Gibkie obolochki vrashchehiya v magnitnom pole*. [Online], Kiev. – p. 196. Available from <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>
4. BELLMAN, R. and KALABA, R. (1965) *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems* - Rand Corp. - p. 208.
5. GRIGORENKO, Ya. GRIGORENKO A. and VLAIKOV G. (2009) *Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models*. - Kiev: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Sciences of Ukraine. - p.550.
6. NEWMARK N. (1959) *A Method of Computation for Structural Dynamics* //J. End Mech. Div. Proc. ASCE. – 85, No 3 p. 67-94.

Надійшла до редколегії 26.03.2015