Міністерство освіти України
Київський університет ім. Тараса Шевченка

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до курсу " Чисельні методи в механіці в механіці деформівного твердого тіла"

ч.1 Методи зважених нев'язок

для студентів механіко-математичного факультету

Київ " Київський університет" 1993

Вступ

Згідно з навчальним планом із спеціальності "Механіка" студенти IV курсу вивчають спеціалізований курс " Чисельні методи в механіці
в механіці деформівного твердого тіла". Під час проходження цього курсу (54 години) студенти мають освоїти сучасні чисельні методи (проекційно-варіаційні, МСЕ, МГЕ) та набути досвіду в програмній реалізації чисельних схем.

Даний методичний посібник створено на досвіді 4 річного викладання цього спец.курсу та попередній роботі в галузі сучасних аналітичних, напіваналітичних та чисельних методів стосовно задач механіки деформівного твердого тіла. В нього окрім коротких теоретичних відомостей включено приклади, що ілюструють тему, що підлягає розгляду. Приклади містять необхідні дослідження задачі, побудову алгоритму та чисельної схеми розв'язку, чисельну реалізацію та візуалізацію результатів розрахунків. Для економії місця ілюстративні програми поміщено на дискеті, що придається разом з методичним посібником. На дискеті, також, поміщено деякі сервісні програми, що можуть бути використані при індивідуальному виконанні завдань. Результати розрахунків для простоти сприймання, як правило, приводяться у вигляді малюнків та графіків. Кожна секція має самостійний характер та містить вправи які повинні виконуватися слухачами самостійно. Приклади та вправи підібрано таким чином, щоб охопити весь курс.

1 Апроксимація базисними функціями

Нехай область Ω має замкнуту границю Γ. Апроксимація φ в $\Omega \cup \Gamma$ визначається як:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m, \quad \psi|_\Gamma = \varphi|_\Gamma, \tag{1.1}$$

де $\{N_m : N_m|_\Gamma = 0;\ m = 1, 2, 3, \ldots\}$ – повна система лінійно-незалежних базисних функцій, a_m – коефіцієнти апроксимації.
Рівняння зважених нев'язок:

$$\int_\Omega W_l R_\Omega \, d\Omega \equiv \int_\Omega W_l(\varphi - \tilde{\varphi}) \, d\Omega = 0,\ l = 1, 2, \ldots, M, \tag{1.2}$$

$R_\Omega \equiv \varphi - \tilde{\varphi}$ – нев'язка апроксимації, $\{W_l;\ l = 1, 2, 3, \ldots\}$ – множина лінійно-незалежних вагових функцій.

Рівняння (1.2) таким чином зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів апроксімації:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \mathbf{f}, \tag{1.3}$$

де

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_M), \tag{1.4}$$

$$K_{lm} = \int_\Omega W_l N_m \, d\Omega, \quad 1 \le l, m \le M, \tag{1.5}$$

$$f_l = \int_\Omega W_l(\varphi - \psi)\, d\Omega, \quad 1 \le l \le M. \tag{1.6}$$

Колокація по точкам(інтерполяція).

$$W_l = \delta(x - x_l), \quad l = 1, 2, \ldots, M \tag{1.7}$$

($\delta(x)$ – дельта-функція Дірака).
В цьому випадку з (1.5)–(1.6) маємо:

$$K_{lm} = N_m|_{x=x_l}, \quad f_l = (\varphi - \psi)|_{x=x_l}, \quad 1 \le l, m \le M. \tag{1.8}$$

Колокація по підобластям(метод скінченних об'ємів).

$$W_l = \chi_l(x), \quad l = 1, 2, \ldots, M, \tag{1.9}$$

$$\chi_l(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \Omega_l \\ 1 & x \in \Omega_l \end{cases} \text{ – функція підобласті } l \text{ та } \quad \bigcup_{l=1}^{M} \Omega_l = \Omega.$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega_l} N_m\, d\Omega, \quad f_l = \int_{\Omega_l} (\varphi - \psi)\, d\Omega. \tag{1.10}$$

Метод моментів.

$$W_l = x^l, \quad l = 1, 2, \ldots, M, \tag{1.11}$$

$$K_{lm} = \int_\Omega x^l N_m\, d\Omega, \quad f_l = \int_\Omega x^l(\varphi - \psi)\, d\Omega. \tag{1.12}$$

Метод найменших квадратів.

$$W_l = \frac{\partial R}{\partial a_l}. \quad l = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.13}$$

Методи Гальоркіна.

$$W_l = N_l, \quad l = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.14}$$

$$K_{lm} = \int_\Omega N_l N_m\, d\Omega, \quad f_l = \int_\Omega N_l(\varphi - \psi)\, d\Omega. \tag{1.15}$$

Для частинного випадку: $\Omega : \{x; 0 \le x \le L\}$ та $N_m = \sin(m\pi x/L)$ маємо апроксимацію відрізком ряду Фур'є:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m \sin(\frac{m\pi x}{L}) \quad x \in [0, L], \tag{1.16}$$

та $K_{lm} = L/2\ \delta_l^m$,

$$a_m = \frac{2}{L} f_l = \frac{2}{L} \int_0^L (\varphi - \psi) \sin(\frac{m\pi x}{L}) dx, \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.17}$$

Приклад 1.1 Побудувати апроксимацію за допомогою колокації та відрізку ряду Фур'є таблично заданої функції:

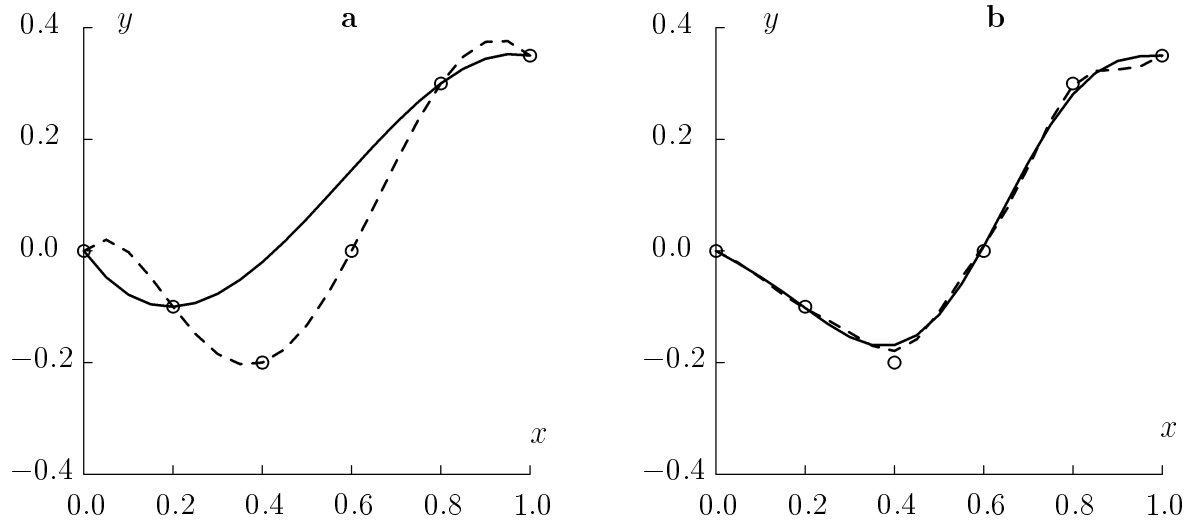


Рис. 1: Апроксимація таблично заданої функції,
(a) апроксимація по колокаціям, ∘ – таблично задані значення, — – апроксимація 2–го порядку ($M = 2$), - - – апроксимація 4–го порядку ($M = 4$),
(b) апроксимація відрізком ряду Фур'є, ∘ – таблично задані значення, — – апроксимація 3–го порядку ($M = 3$), - - – апроксимація 6–го порядку ($M = 6$).

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\varphi(x_i)$	0	-0.1	-0.2	0	0.3	0.35

Зобразити результати розрахунків на графіках та дати аналіз збіжності в залежності від порядку апроксимації.

Розв'язок. Для точного задовільнення граничних умов вибираємо $\psi = 0.35\,x$. Базисні функції поліноміальної апроксимації: $N_m = x^m(1-x), \quad m = 1, 2, \ldots, M$ (умову $N_m|_{0,1} = 0$ – виконано). В цьому випадку у відповідності з методом колокації, згідно з (1.8)

$$f_l = \varphi(\tilde{x}_l) - 0.35\,\tilde{x}_l, \quad K_{lm} = \tilde{x}_l^m\,(1 - \tilde{x}_l) \tag{1.18}$$

Для $M = 2$ покладемо $\tilde{x}_1 = x_2,\ \tilde{x}_2 = x_5$.
В цьому випадку $a_1 = -1.46,\ a_2 = 1.98$.

Для $M = 4$ покладемо $\tilde{x}_l = x_{l+1} \quad l = 1, 2, 3, 4$.
В цьому випадку $a_1 = 0.625,\ a_2 = -12.5,\ a_3 = 22.1,\ a_4 = -9.11$.

Апроксимація згідно з (1.1) має вигляд:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = 0.35\,x + \sum_{m=1}^{M} a_m\,x^m(1-x), \quad M = 2\ (4). \tag{1.19}$$

Результати розрахунків зображено на (Рис. 1(a)).
Для побудови апроксимації відрізком ряду Фур'є приймемо $N_m = \sin(m\pi x)$. В цьому випадку, згідно з (1.17):

$$a_m = 2\int_0^1 (\varphi - 0.35\,x)\sin(m\pi x)dx, \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.20}$$

Скориставшись процедурою чисельного інтегрування Гауса отримаємо:
$a_1 = -0.235,\ a_2 = -0.091,\ a_3 = 0.055,\ a_4 = 0.001,\ a_5 = -0.0023,\ a_6 = 0.00045.$
Апроксимація має вигляд:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = 0.35\,x + \sum_{m=1}^{M} a_m \sin(m\pi x). \tag{1.21}$$

Графіки, що іллюструють якість апроксимації побудовано на (Рис. 1(b)).

Приклад 1.2. Експериментальні значення прогину квадратної пластини наведені в таблиці:

$y \setminus x$	0	0.25	0.5	0.75	1
0	0	0	0	0	0
0.25	0	0.8	1.3	0.3	0
0.5	0	1	1.8	0.5	0
0.75	0	0.5	0.8	0.3	0
1	0	0	0	0	0

Побудувати апроксимацію експериментальних даних за допомогою відрізку ряду Фур'є.
Розв'язок. Оскільки граничне значення апроксимованої функції рівне нулеві, покладаємо $\psi = 0$ та

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{l,m=1}^{3} b_{lm} \sin(l\pi x)\sin(m\pi x), \quad M = 9. \tag{1.22}$$

Поклавши
$a_1 \equiv b_{11}, a_2 \equiv b_{12}, a_3 \equiv b_{13}, \ldots a_9 \equiv b_{33}$ та використовуючи метод Гальоркіна:
$W_1 = N_1 = \sin(\pi x)\ \sin(\pi y), W_2 = N_2 = \sin(\pi x)\ \sin(2\pi y), W_3 = N_1 = \sin(2\pi x)\ \sin(\pi y), \ldots W_9 = N_1 = \sin(3\pi x)\ \sin(3\pi y),$

отримаємо

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{9} b_m N_m - \varphi \right) W_l \, dxdy = 0, \tag{1.23}$$

та

$$K_{lm} = \int_0^1 \int_0^1 N_m W_l \, dxdy, \quad f_l = \int_0^1 \int_0^1 \varphi W_l \, dxdy, \quad 1 \le l, m \le 9. \tag{1.24}$$

Базисні (вагові) функції ортогональні, та $K_{lm} = 1/4\,\delta_l^m$. Якість апроксимації проілюстровано на (Рис. 2(a),(b)) де зображено значення апроксимації в перерізах $x = 0.5$ та $y = 0.5$ та експерементальні вихідні дані. На (Рис. 3) зображено повну апроксимацію експериментальних даних прогину пластини.

Вправи.

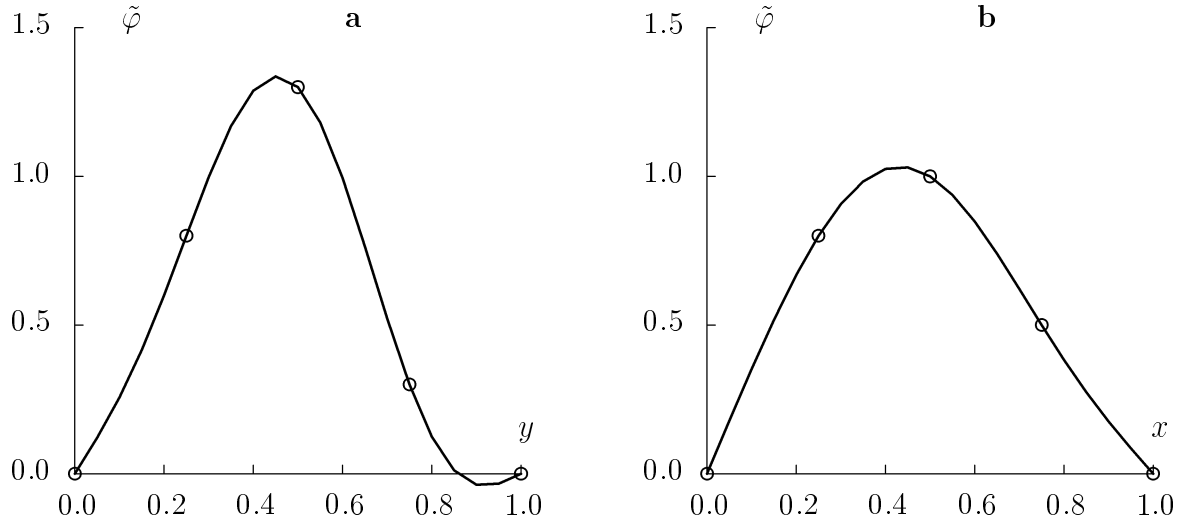


Рис. 2: Якість апроксимації експериментального прогину пластини,
(a) значення в розрізі $y = 0.5$, (b) значення в розрізі $x = 0.5$,
$\circ$ – задані значення. — – апроксимація.

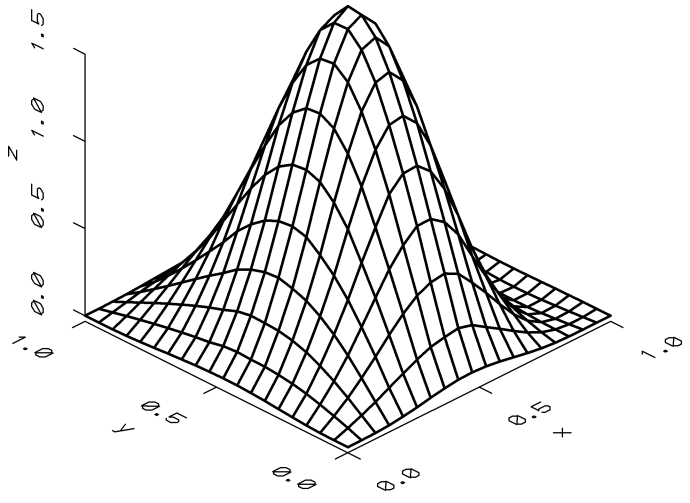


Рис. 3. Апроксимація експериментальних даних прогину пластини.

1.1 Для прикладу 1.2 побудувати 6 елементну поліноміальну апрксимацію використовуючи колокації по внутрішнім точкам. Побудувати графіки та проаналізувати якість апроксимації.

1.2 Апроксимувати по методу Гальоркіна таблично задану функцію:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\varphi(x_i)$	0	-0.1	-0.2	0	0.3	0.35

використавши відповідний набор поліномів. Побудувати графіки та проаналізувати якість апроксимації.

2 Апроксимація розв'язків диференційних рівнянь

Нехай функція φ має задовольняти лінійному диференціальному рівнянню:

$$A(\varphi) \equiv \Lambda\varphi + p = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2.1}$$

та граничним умовам

$$B(\varphi) \equiv \Upsilon\varphi + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.2}$$

де Λ та Υ – лінійні диференціальні оператори.

Поклавши нев'язку рівняння для апроксимації $\tilde{\varphi}$:

$$R_\Omega \equiv \Lambda\tilde{\varphi} + p \quad \text{в } \Omega, \tag{2.3}$$

запишемо рівняння зважених нев'язок диференціального рівняння:

$$\int_\Omega R_\Omega \, W_l \, d\Omega, \quad l = 1, \ldots, M, \tag{2.4}$$

використавши вагові функції W_l (див. (1.2)).

Апроксимацію розв'язку згідно з (1.1) шукаємо у вигляді розкладу по базисним функціям N_m:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m \, N_m, \tag{2.5}$$

Якщо покласти:

$$\Upsilon\psi = -r, \quad \Upsilon N_m = 0, \quad m = 1, \ldots, M \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.6}$$

коефіцієнти апроксимації задовольнятимуть СЛАР:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{2.7}$$

$$K_{lm} = \int_\Omega W_l \Lambda N_m \, d\Omega, \quad f_l = -\int_\Omega W_l p \, d\Omega - \int_\Omega W_l \Lambda\psi \, d\Omega, \tag{2.8}$$

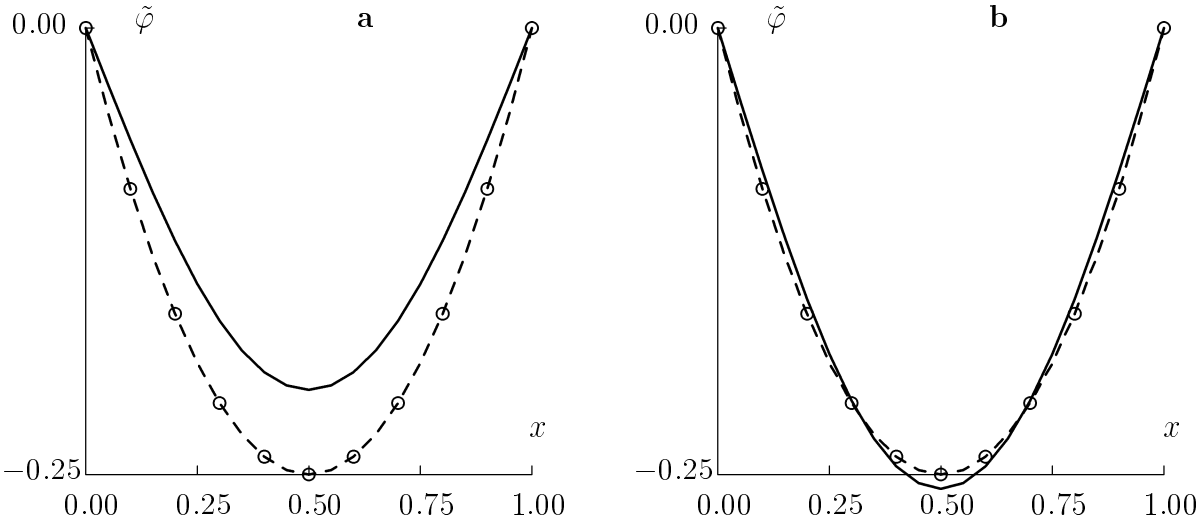


Рис. 4: Апроксимація розв'язку граничної задачі з прикладу 2.1 відрізком ряду Фур'є, (**a**) апроксимація по колокаціям, (**b**) апроксимація по Гальоркіну,
$\circ$ – точний розв'язок, — – одноелементна апроксимація, - - – двохелементна апроксимація.

Приклад 2.1 Побудувати апроксимацію відрізком ряду Фур'є розв'язку граничної задачі:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi|_0 = \varphi|_1 = 0. \tag{2.9}$$

Скористатись методами колокації та Гальоркіна. Порівняти апроксимацію з точним розв'язком.

Розв'язок. Точний розв'язок задачі має вигляд:

$$\varphi = x(x-1). \tag{2.10}$$

Оскільки граничні умови однорідні, покладемо $\psi \equiv 0$ та запишемо згідно з (1.17) апроксимацію у вигляді:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{M} a_m \sin((2m-1)\pi x), \quad x \in [0,1]\,, \tag{2.11}$$

$(N_m|_{0,1} = 0, \quad N_m(0.5-x) = N_m(0.5+x))$.

Поклавши для одноелементної апроксимації $\tilde{x_1} = 0.5$, згідно з (1.7), (2.7) матимемо:

$K_{11} = -\pi^2$, $f_1 = 2$, та $\tilde{\varphi} = -(2/\pi^2)\sin(\pi x)$.

Для двохелементної апроксимації покладемо $\tilde{x_1} = 0.2$, $\tilde{x_1} = 0.4$, оскільки з умови зрозуміло, що розв'язок має бути симетричним відносно $x = 0.5$. Графіки апроксимацій приведено на (Рис. 4(a)).

Формули для апроксимації по Гальоркіну легко отримати з (1.14), (2.7). Оскільки базисні функції ортогональні, матриця жорсткості є однодіагональною.

Для одноелементної апроксимації:

$K_{11} = -\pi^2/2$, $f_1 = 4/\pi$, та $\tilde{\varphi} = -(8/\pi^3)\sin(\pi x)$.

Для двохелементної апроксимації:

$K_{11} = -\pi^2/2$, $K_{12} = K_{21}$, $K_{22} = -9\pi^2/2$, $f_1 = 4/\pi$, $f_2 = 4/(3\pi)$.

Наближення апроксимації до точного розв'язку проілюстровано на (Рис. 4(b)).

Приклад 2.2 Деяка задача одновимірної стаціонарної теплопровідності з розподіленим джерелом тепла описується рівнянням та граничними умовами:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi + 1 = 0, \quad \varphi|_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\right)\Big|_1 = 0. \tag{2.12}$$

Знайти наближений розв'язок за допомогою метода Гальоркіна.

Розв'язок. Точний розв'язок задачі має вигляд:

$$\varphi = \cos x + \left(\frac{1 + \sin 1 - \cos 1}{1 + \sin 1 + \cos 1}\right) \sin x - 1. \tag{2.13}$$

Виберемо базисні функції:

$$N_m = x^m \left(x - \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)\right), \quad m = 1, \ldots, M, \tag{2.14}$$

так, що $N_m|_0 = 0, \quad (dN_m/dx + N_m)|_1 = 0.$

Коефіцієнти апроксимації задовольняють (2.7), та згідно з (2.8):

$$\begin{aligned} K_{lm} \;=\; & \int_0^1 x^l(x - (1 + 1/(1+l)))(x^{m+1} - (1 + 1/(1+m))x^m + m(m+1)x^{m-1} - \\ & m(m-1)(1 + 1/(1+m))x^{m-2})\, dx, \quad 1 \le l, m \le M, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$f_l = -\int_0^1 x^l \left(x - \left(1 + \frac{1}{1+l}\right)\right) dx, \quad 1 \le l \le M. \tag{2.16}$$

Приклад 2.3 В двовимірній стаціонарній задачі теплопровідності на границях квадратної пластини зі стороною 2 задано розподіл температури: на $x = \pm 1 \;:\; 1 - y^2$, на $y = \pm 1 \;:\; 1 - x^2$. Використавши метод Гальоркіна розшукати розподіл температури в пластині.

Розв'язок. Розподіл температури в пластині повинен задовольняти граничній задачі:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 \le x, y \le 1, \tag{2.17}$$

$$\varphi|_{x=\pm 1} = 1 - y^2, \quad -1 \le y \le 1 \quad , \varphi|_{y=\pm 1} = 1 - x^2, \quad -1 \le x \le 1. \tag{2.18}$$

Вибір $\psi = 2 - x^2 - y^2$ дозволить точно задовольнити граничним умовам, якщо $N_m|_\Gamma = 0$, $m = 1, \ldots, M$. Очевидно, що розв'язок задачі (2.17) – (2.18) має бути парним по x та y , тому візьмемо за базисні функції:

$$\begin{aligned} N_1 = \cos(\pi x/2)\cos(\pi y/2), \quad N_2 = \cos(\pi x/2)\cos(3\pi y/2), \\ N_3 = \cos(3\pi x/2)\cos(\pi y/2), \quad N_4 = \cos(3\pi x/2)\cos(3\pi y/2), \; \ldots . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Згідно з (2.8) використовуючи симетрію N_m (по методу Гальоркіна $W_l = N_l$) маємо:

$$K_{lm} = 4\int_0^1 dx \int_0^1 N_l \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right) dy, \quad l, m = 1, \ldots, M, \tag{2.20}$$

$$f_l = 16 \int_0^1 dx \int_0^1 N_l \, dy, \quad l = 1, \ldots, M. \tag{2.21}$$

Використавши процедури чисельного інтегрування та розв'язавши СЛАР порядка 4 (для $M = 4$) отримаємо коефіцієнти апроксимації. Розв'язок визначається виразом (2.5). Чисельні значення апроксимації розподілу температури приведені на (Рис. ??). Граничні умови згідно з вибором ψ та N_m задовольняються точно, відносна середньоквадратична похибка не більша за 0.001.

Вправи.

2.1 Розподіл згинаючого моменту $M(x)$ в балці що знаходіться в статичній рівновазі під дією поперечної нагрузки $b(x)$ задовольняє рівнянню: $d^2M/dx^2 = b$. Балка одиничної довжини вільно спирається на фундамент та несе навантаження $b = \sin(\pi x)$. Обчислити розподіл згинаючого моменту використавши методи Гальоркіна та колокації. Порівняти апроксимації з точним розв'язком.

2.2 Поперечний прогин w точок балки на пружній основі (модель Вінклера) описується рівнянням:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = b, \tag{2.22}$$

де EI – жорсткість балки на згин, k– коефіцієнт жорсткості основи, b– згинаюче навантаження.

Відшукати по методу Гальоркіна апроксимацію прогину для балки одиничної довжини з приведеними характеристиками: $EI = 1$, $k = 1$, $b = const = 1$. Вважати, що кінцями балка вільно опирається на фундамент.

2.3 Розв'язати задачу прикладу 2.3 за допомогою методу колокації по внутрішнім точкам. Порівняти розв'язки.

3 Одночасна апроксимація розв'язків диференційних рівнянь та граничних умов

Задамо апроксимацію виразом:

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{M} a_m \, N_m, \tag{3.1}$$

Розв'язок граничної задачі (2.1) – (2.2) можна відшукати не накладаючи граничні умови (2.6) на N_m. Введемо в розгляд нев'язку граничних умов:

$$R_\Gamma \equiv \Upsilon \tilde{\varphi} + r = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.2}$$

Рівняння зважених нев'язок матиме вигляд:

$$\int_\Omega R_\Omega \, W_l \, d\Omega + \alpha \int_\Gamma R_\Gamma \, \bar{W}_l \, d\Gamma = 0, \quad l = 1, \ldots, M, \tag{3.3}$$

де $\bar{W}_l$ – вагові граничні функції (визначені взагалі кажучи лише на Γ), α – коефіцієнт штрафу (визначає співвідношення вагів граничної нев'язки та нев'язки рівняння).

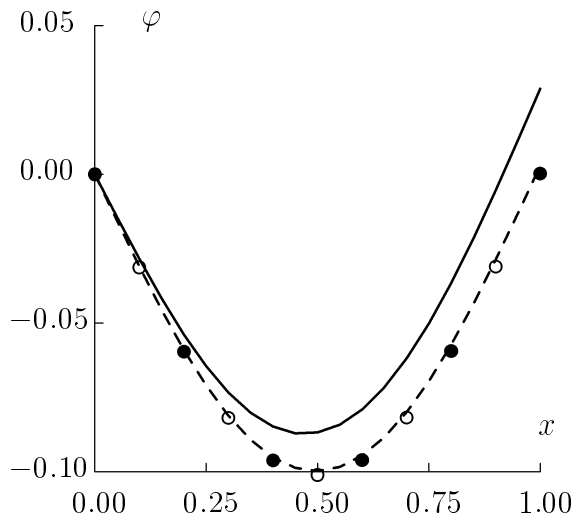


Рис. 5: Залежність поліноміальної апроксимації від коефіцієнту штрафа,
○ – точний розв'язок, апроксимації: • – $\alpha = 10$, - - – $\alpha = 1$, — – $\alpha = 0.1$.

(3.3) для лінійних операторів Λ та Υ приводиться до СЛАР

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{3.4}$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \Lambda N_m \, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} \bar{W}_l \Upsilon N_m \, d\Gamma, \tag{3.5}$$

$$f_l = -\int_{\Omega} W_l p \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l r \, d\Gamma. \tag{3.6}$$

Приклад 3.1 Методом зважених нев'язок знайти розподіл згинаючого моменту в задачі з прикладу 2.1 використавши апроксимацію що автоматично задовольняє граничній умові при $x = 0$ але не задовольняє автоматично граничній умові на $x = 1$. Розглянути випадки $\alpha = 0.1,\ 1,\ 10,\ 100$.
Розв'язок. Точний розв'язок гранично' задачі

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \sin(\pi x), \qquad M|_0 = M|_1 = 0, \tag{3.7}$$

має вигляд $M = -(1/\pi^2)\sin(\pi x)$.

Скористаємось для апроксимації базисними функціями $N_m = x^m$ (що забезпечують автоматичне задовольнення граничних умов при $x = 0$) та покладемо $\bar{W}_l \equiv N_l|_{\Gamma}$. Скориставшись методом Гальоркіна отримаємо:

$$K_{lm} = \int_0^1 m(m-1)x^{l+m-2}\, dx + \alpha, \quad f_l = \int_0^1 x^l \sin(\pi x)\, dx. \tag{3.8}$$

Апроксимація має вигляд $\tilde{M} = \sum_{m=1}^{5} a_m x^m$.

Результати обрахунків приведено на (Рис. 5).

Приклад 3.2 Однорідна тонка пружня пластина з жорсткістю на згин D вільно спирається вздовж сторін Γ та знаходиться під дією розподіленого рівномірного згинаючого навантаження інтенсивності одиниця. Малі прогини точок такої пластини описуються рівнянням

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = \frac{1}{D}, \quad -1 \le x, y \le 1, \tag{3.9}$$

та граничними умовами:

$$\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.10}$$

(D – жорсткість пластини на згин, n – зовнішня нормаль до Γ).

Знайти поліноміальну апроксимацію прогину квадратної пластини $|x|, |y| \le 1$ для $D = 1$. Дослідити задовільнення граничних умов при збільшенні порядку апроксимації.

Розв'язок. Виберемо парну по x та y апроксимацію, що автоматично задовольняє суттєвим граничним умовам ($\varphi|_\Gamma = 0$):

$$\tilde{\varphi} = (1-y^2)(1-x^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + \ldots), \tag{3.11}$$

Оскільки з постановки задачі випливають умови симетрії:

$$\varphi(x,y) = \varphi(-x,y) = \varphi(x,-y) = \varphi(y,x); \tag{3.12}$$

достатньо розглянути лише 1/8 частину пластини: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$.

Легко отримати:

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 2a_1(y^2-1) + 10a_2(y^2-1) + 2a_3y^2(y^2-1) + 10a_4y^2(y^2-1) + \ldots, \tag{3.13}$$

Для запису співвідношення зважених нев'язок скористаємось методом колокацій по точкам $\{\tilde{x}_l \in \Omega,\ \bar{x}_s \in \Gamma,\ l+s = M\}$. В цьому випадку:

$$K_{lm} = \Delta\Delta N_m|_{\tilde{x}_l}, \quad f_l = 1, \quad K_{sm} = \left.\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}_s}, \quad f_s = 0, \quad l+s, m \le M. \tag{3.14}$$

Результати розрахунків приведено на (Рис. 6).

На (Рис. 7) проілюстровано задовільнення натуральних граничних умов $\partial^2\varphi/\partial n^2|_\Gamma = 0$ в залежності від порядку апроксимації. В першому випадку $M = 4$, точки колокації в середині області: $\tilde{x}_1 = (0.25,\ 0.25), \tilde{x}_2 = (0.75,\ 0.25)$ та $\bar{x}_1 = (1.0,\ 0.25), \bar{x}_2 = (1.0,\ 0.75)$ – на границі. В другому випадку ($M = 3$) при тих же токах колокації по області прийнято лише одну точку на границі $\bar{x}_1 = (1.0,\ 0.5)$.

Вправи.

3.1 Розшукати по методу Гальоркіна чотириелементну поліноміальну апроксимацію розв'язку задачі кручення стержня з квадратним розрізом що визначається рівнянням:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 1, \quad -1 \le x, y \le 1, \tag{3.15}$$

та граничними умовами: $\varphi|_\Gamma = 0$. Використати апроксимацію що автоматично задовольняє граничним умовам на $x = \pm 1, |y| \le 1$. Перевірити якість виконання граничних умов на решті границі.

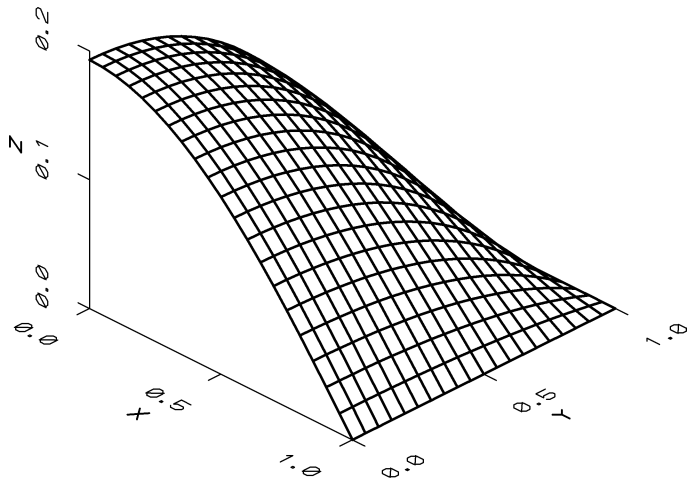


Рис. 6. Апроксимація по колокаціям прогину пластини з прикладу 3.2.

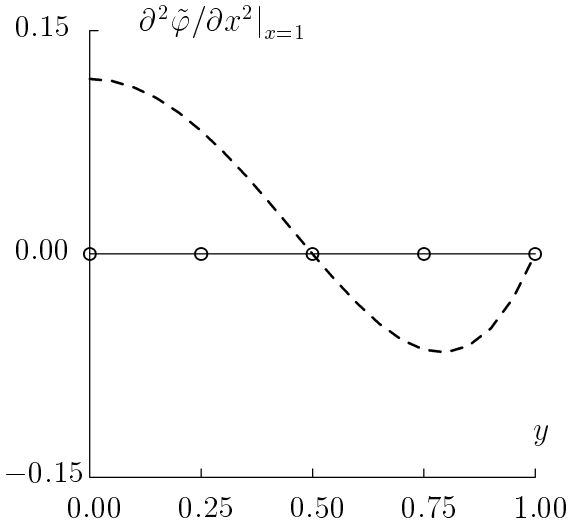


Рис. 7: Граничне значення $\partial^2\tilde{\varphi}/\partial x^2|_{x=1}$ в задачі про згин пластини з прикладу 3.2 — – точне значення, ○ – для чотириелементної апроксимації, - - – для триелементної апроксимації.

3.2 Побудувати апроксимацію розв'язку граничної задачі:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \varphi = x^2, \quad \varphi\big|_{x=0} = 0, \quad \varphi\big|_{x=1} = 1, \tag{3.16}$$

Скористатись апроксимацією що не задовольняє автоматично жодній граничній умові.

3.3 Розв'язати задачу з прикладу 3.2, вважаючи, що пластина консольно закріплена по контуру:

$$\varphi\big|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0 \tag{3.17}$$

Густина згинаючої сили: $\sin(\pi x)$. Тип апроксимації та системи базисних та вагових функцій вибрати на свій розсуд.

4 Натуральні граничні умови.

Приклад 4.1 Рівняння, що описує розподіл температури T в в'язкій рідині, що протікає між двома паралельними пластинами ($y = 0$ та $y = 2H$) має вигляд:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{4U^2\mu}{H^4k}(H-y)^2, \tag{4.1}$$

де μ – коефіцієнт в'язкості, k – коефіцієнт теплопрофідності рідини, U – максимальна швидкість в потоці. Нехай $\mu = 0.1$, $k = 0.08$, $U = 3.0$. На нижній пластині підтримується постійна температура $T = 0$, верхня – термоізольована. Знайти апроксимацію розв'язку задачі скориставшись слабким формулюванням.

Розв'язок. Перейдемо до формулювання задачі в безрозмірних змінних поклавши $\breve{y} = (y/2H), \breve{T} = (TH^4k/64U^2\mu)$:

$$\frac{d^2\breve{T}}{d\breve{y}^2} = -(0.5-\breve{y})^2. \tag{4.2}$$

Співвідношення зважених нев'язок має вигляд:

$$\int_0^1 W_l\frac{d^2\tilde{T}}{dy^2}\,dy + \int_0^1 W_l(0.5-y)^2\,dy + \bar{W}_l\tilde{T}\bigg|_{y=0} - \bar{W}_l\frac{d\tilde{T}}{dy}\bigg|_{y=1} = 0. \tag{4.3}$$

Проінтегрувавши перший інтеграл по частинам

$$\int_0^1 W_l\frac{d^2\tilde{T}}{dy^2}\,dy = \bar{W}_l\frac{d\tilde{T}}{dy}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{dW_l}{dy}\frac{d\tilde{T}}{dy}\,dy, \tag{4.4}$$

та поклавши: $N_m\big|_0 = 0$, $W_l\big|_0 = 0$, $\bar{W}_l\big|_1 = W_l\big|_1$
матимемо

$$\int_0^1 \frac{dW_l}{dy}\frac{d\tilde{T}}{dy}\,dy + \int_0^1 W_l(0.5-y)^2\,dy = 0. \tag{4.5}$$

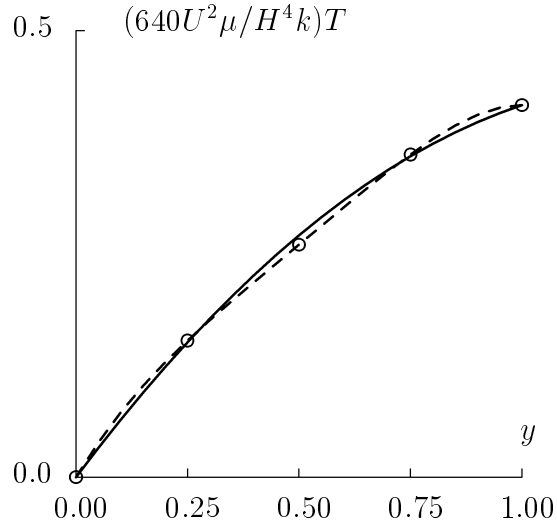


Рис. 8: Апроксимація розв'язку задачі в слабкому формулюванні з прикладу 4.1
$\circ$ – точний розв'язок, — – двоелементна апроксимація, - - – чотириелементна апроксимація.

Використавши апроксимацію (3.1) отримаємо СЛАР (3.4) , де

$$K_{lm} = \int_0^1 \frac{dW_l}{dy}\frac{dN_m}{dy}\,dy, \quad f_l = \int_0^1 W_l(0.5-y)^2\,dy. \tag{4.6}$$

Побудуємо поліноміальну апроксимацію по методу Гальоркіна:

$$N_m = W_m = \bar{W}_m = y^m, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4.7}$$

Легко отримати:

$$K_{lm} = \frac{lm}{l+m-1}, \quad f_l = \frac{0.25}{l+1} - \frac{1}{l+2} + \frac{1}{l+3}. \tag{4.8}$$

Розв'язок задачі для різних порядків апроксимації представлено на (Рис. 8). Зауважимо, що для $M = 4$, $dT/dy|_1 = -2.22\ 10^{-16}$, тоді як для $M = 2$, $dT/dy|_1 = 1.66\ 10^{-2}$.

Вправи.

4.1. Повернутись до розгляду задачі з вправи 2.2. Розшукати натуральні граничні умови цієї задачі. Розв'язати цю задачу в слабкому формулюванні, вважаючи, що кінці балки вільні. Використати апроксимацію, що не задовольняє автоматично натуральним граничним умовам.

4.2. Знайти апроксимацію розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності в квадратній пластині без внутрішніх джерел тепловиділення (див. приклад 2.3). На сторонах $y = \pm 1$ підтримується постійна температура $100C$, а на сторонах $x = \pm 1$ задано імпедансну умову $\partial\varphi/\partial n = 1 - \varphi$. Використати рівняння зважених нев'язок в слабкому формулюванні.

5 Метод граничного розв'язку

Якщо для довільних m $A(N_m) = 0$, рівняння зважених нев'язок має вигляд (3.3):

$$\int_\Gamma R_\Gamma \, \bar{W}_l \, d\Gamma, \quad l = 1, \ldots, M, \tag{5.1}$$

Приклад 5.1

Розв'язати задачу стаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 \le x, y \le 1, \tag{5.2}$$

$$\varphi|_{x=\pm 1} = 0, \quad \partial\varphi/\partial n - \varphi|_{y=\pm 1} = 1 - x^2. \tag{5.3}$$

Розв'язок. Скористаємось поліноміальною апроксимацією:

$$\tilde{\varphi} = \sum_m a_m N_m, \quad N_m = \Re(\Im) z^m, \quad z = x + i\,y. \tag{5.4}$$

Оскільки z^m –аналітична функція, $\Delta \Re z^m = 0$, $\Delta \Im z^m = 0$ для довільного m. Розв'язок має бути парним по x та y, тому візьмемо за базисні функції:

$$\begin{aligned}
N_1 &\equiv \Re z^0 = 1, \\
N_2 &\equiv \Re z^2 = x^2 - y^2, \\
N_3 &\equiv \Re z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \\
N_4 &\equiv \Re z^4 = x^6 - 15x^2y^4 + 15x^4y^6 - y^6.
\end{aligned}$$

Рівняння зважених нев'язок для цієї задачі з врахуванням симетрії:

$$\int_0^1 \bar{W}_l \tilde{\varphi}\big|_{x=1} \, dy + \int_0^1 \bar{W}_l \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} - \tilde{\varphi}) \right)\Big|_{y=1} dx = \int_0^1 \bar{W}_l\big|_{y=1} (1 - x^2) \, dx. \tag{5.5}$$

Нехай $\bar{W}_l = N_l|_\Gamma$, тоді:

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l \, N_m|_{x=1} \, dy + \int_0^1 N_l \left(\frac{\partial N_m}{\partial y} - N_m \right)\Big|_{y=1} dx, \quad l, m = 1, 2, \ldots, M, \tag{5.6}$$

$$\int_0^1 N_l\big|_{y=1} (1 - x^2) \, dx, \quad l = 1, 2, \ldots, M. \tag{5.7}$$

Результати розрахунків приведено на (Рис. **??**).

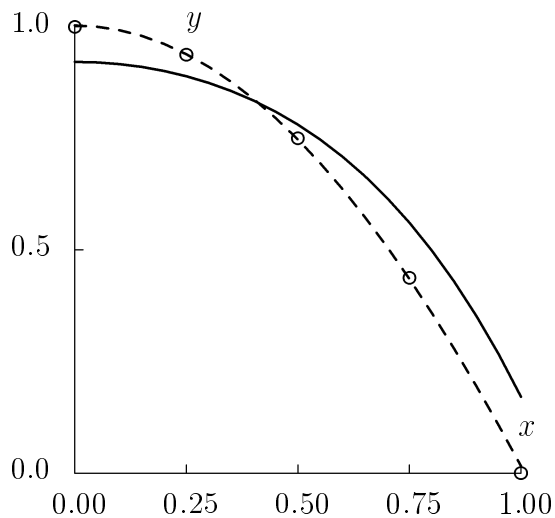
На (Рис. **??**) проілюстровано задовільнення граничних умов в залнжності від порядку апроксимації на $y = 1$, $0 \le x \le 1$ (a) та $x = 1$, $0 \le y \le 1 (b)$.

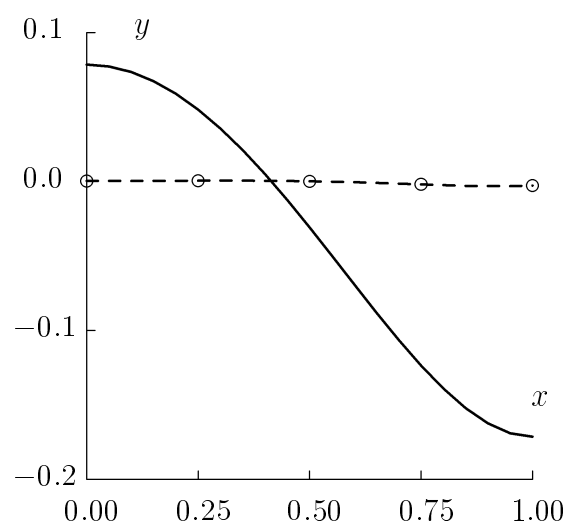
Приклад 5.2

Знайти апроксимацію розв'язку задачі кручення стержню з еліптичним перерізом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2, \quad x^2 + (y/2)^2 \le 1, \tag{5.8}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0, \quad \Gamma: \; x^2 + (y/2)^2 = 1. \tag{5.9}$$


1.0
0.5
0.0
y
x
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


0.1
0.0
−0.1
−0.2
y
x
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

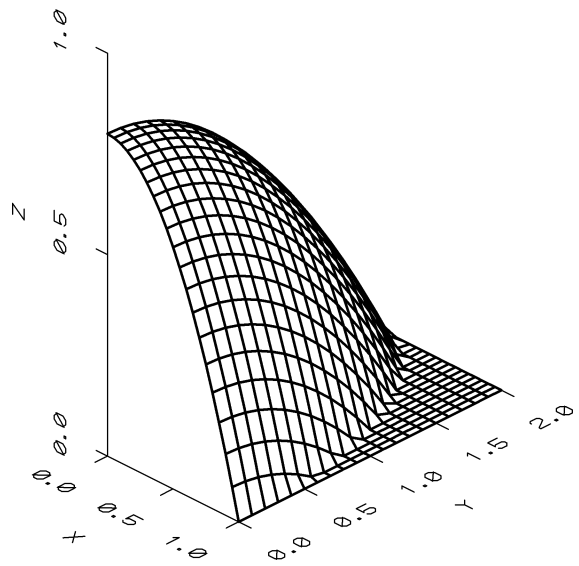


Рис. 9. Чотириелементна апроксимація в задачі про кручення з прикладу 5.2

Розв'язок. Перейдемо до задачі з однорідним рівнянням, виділивши частинний розв'язок: $\varphi = \check{\varphi} - (x^2 + y^2)/2$:

$$\frac{\partial^2 \check{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \check{\varphi}}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + (y/2)^2 \leq 1, \tag{5.10}$$

$$\check{\varphi}|_\Gamma = (x^2 + y^2)/2. \tag{5.11}$$

Скористаємось системою базасних функцій (5.5) з прикладу 5.1. Задовольняючи граничні умови згідно з симетрією задачі по методу колокацій по точкам границі: $\bar{x}_1 = (1.0,\ 0.0)$, $\bar{x}_2 = (0.5,\ 1.732)$, $\bar{x}_3 = (0.866,\ 1.0)$, $\bar{x}_4 = (0.0,\ 2.0)$, очевидно:

$$K_{lm} = N_m|_{\bar{x}_l}, \quad f_l = \left.\frac{x^2 + y^2}{2}\right|_{\bar{x}_l}, \quad l, m = 1, 2, 3, 4. \tag{5.12}$$

Результати розрахунків приведено на (Рис. 9). Граничні умови для чотириелементної апроксимації виконуються з похибкою ~ 0.0001.

Вправи.

5.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 5.2. Вважаючи, що переріз стержня – рівносторонній трикутник зі стороною 1 знайти апроксимацію розв'язку по методу Гальоркіна та колокацій. Дослідити виконання граничних умов. Порівняти розв'язки.

6 Апроксимація розв'язків систем диференційних рівнянь

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) \equiv \mathbf{\Lambda}\vec{\varphi} + \vec{p} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \tag{6.1}$$

з граничними умовами

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \mathbf{\Upsilon}\vec{\varphi} + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma, \tag{6.2}$$

де $\mathbf{\Lambda}$ та $\mathbf{\Upsilon}$ – лінійні диференціальні оператори, та:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \begin{bmatrix} A_1(\vec{\varphi}) \\ A_2(\vec{\varphi}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1(\vec{\varphi}) \\ B_2(\vec{\varphi}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Апроксимація розшукується в вигляді:

$$\vec{\varphi} \approx \vec{\tilde{\varphi}} = \vec{\psi} + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{N_m a_m}, \quad \vec{\psi}^T = (\psi_1, \psi_1, \ldots), \quad \mathbf{a}_m^T = (a_m^1, a_m^2, \ldots), \tag{6.4}$$

$$\mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} N_{m,1} & 0 & & 0 \\ 0 & N_{m,2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.5}$$

Ввівши системи просторових та граничних вагових матричних функцій:

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} W_{l,1} & 0 & & 0 \\ 0 & W_{l,2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_l = \begin{bmatrix} \bar{W}_{l,1} & 0 & & 0 \\ 0 & \bar{W}_{l,2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

запишемо рівняння зважених нев'язок:

$$\int_\Omega \mathbf{W}_l\, \mathbf{A}(\vec{\varphi})\, d\Omega + \alpha \int_\Gamma \bar{\mathbf{W}}_l\, \mathbf{B}(\vec{\varphi})\, d\Gamma = \mathbf{0}, \quad l = 1, \ldots, M, \tag{6.7}$$

Приклад 6.1

Рівняння прогину балки на пружній основі (2.22) може бути записано у вигляді:

$$EI\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -M, \quad \frac{d^2M}{dx^2} - k\varphi = b. \tag{6.8}$$

Для балки одиничної довжини з приведеними характеристиками: $EI = 1,\ k = 1, b = x(x-1)$ побудувати апроксимацію розв'язку якщо обидва кінці балки вільно оперті ($\varphi|_{x=0,1} = M|_{x=0,1} = 0$).

Розв'язок. Очевидно:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \mathbf{\Lambda}\vec{\varphi} + \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 & d2/dx^2 \\ d2/dx^2 & -1 \end{bmatrix} \vec{\varphi} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{6.9}$$

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=0,1} \vec{\varphi} = 0, \quad \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} M \\ \varphi \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Покладемо $N_m^{M(\varphi)} = W_m^{M(\varphi)} = \sin(m\pi x)$, $\psi^{M(\varphi)} = 0$ (згідно з методом Гальоркіна). Граничні умови виконуються автоматично та рівняння зважених нев'язок (6.7) має вигляд:

$$\int_0^1 \mathbf{N}_l \, \mathbf{\Lambda} \vec{\tilde{\varphi}} \, dx + \int_0^1 \mathbf{N}_l \, \vec{p} \, dx = \mathbf{0}, \tag{6.11}$$

або

$$\sum_{m=1}^{M} \left(\int_0^1 \mathbf{N}_l \, \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}_m \, dx \right) \vec{a}_m + \int_0^1 \mathbf{N}_l \, \vec{p} \, dx = \mathbf{0}, \tag{6.12}$$

що зводиться до СЛАР:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{a} = \mathbf{f}, \tag{6.13}$$

де

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_l = -\int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M & 0 \\ 0 & N_l^\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} dx, \tag{6.14}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{K}_{M2} & \dots & \mathbf{K}_{MM} \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M & 0 \\ 0 & N_l^\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d^2/dx^2 \\ d^2/dx^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_m^M & 0 \\ 0 & N_m^\varphi \end{bmatrix} dx. \tag{6.16}$$

Таким чином:

$$\vec{f}_l = -\int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ N_l^\varphi b \end{bmatrix} dx, \quad \mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \begin{bmatrix} N_l^M N_m^M & N_l^M d^2 N_m^\varphi / dx^2 \\ N_l^\varphi d^2 N_m^M / dx^2 & -N_l^\varphi N_m^\varphi \end{bmatrix} dx. \tag{6.17}$$

Ортогональність базисних функцій дозволяє в даному випадку порахувати (6.17) аналітично:

$$\vec{f}_l = -\frac{1}{m\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{m+1} + \{((m\pi)^2 - 2)(-1)^m + 2\} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

$$\mathbf{K}_{lm} = \frac{\delta_m^l}{2} \begin{bmatrix} 1 & -(m\pi)^2 \\ -(m\pi)^2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

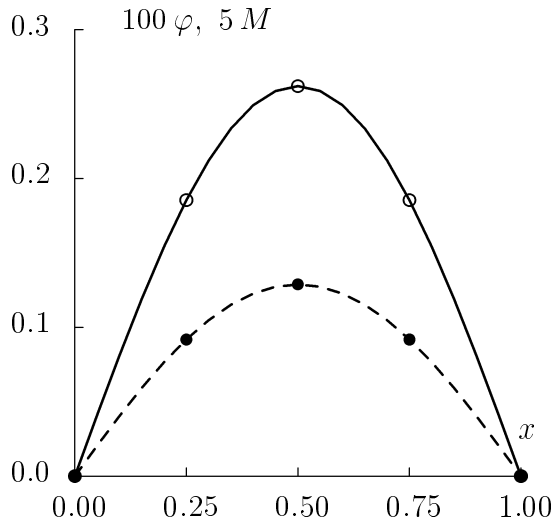


Рис. 10: Апроксимація прогину балки та моменту з прикладу 6.1,
○ – точні значення прогину, ● – точні значення моменту,
апроксимації: — – прогину, - - – моменту.

Як видно, K має блочно-діагональну структуру. Розв'язок:

$$\begin{bmatrix} a_l^{\varphi} \\ a_l^{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/(1+(l\pi)^4)\left\{(-1)^{l+1}/(l\pi) + \{((l\pi)^2-2)(-1)^l+2\}/(l\pi)^3\right\} \\ (l\pi)^2 a_l^{\varphi}. \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Результати розрахунків для чотириелементної апроксимації приведено на (Рис. 10).

Приклад 6.2

В двовимірній ламінарній течії ідеальної нестискаємої рідини потенціал φ та компоненти швидкості $u,\ v$ задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} u = \partial\varphi/\partial x \\ v = \partial\varphi/\partial y \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Побудувати апроксимацію для $u,\ v,\ \varphi$ в квадраті $-1 \le x,\ y \le 1$, якщо

$$u|_{x=\pm 1} = 0, \quad v|_{y=-1} = 0, \quad v|_{y=1} = x. \tag{6.22}$$

Розв'язок. Очевидно, що $v(-x,y) = -v(x,y),\ u(-x,y) = u(x,y)$. Скористаємось методом граничного розв'язку. Візьмемо за базисні функції для апроксимації φ дійсні та уявні частини аналітичних функцій z^m (див. (5.1)):

$$\begin{aligned} N_1^{\varphi} &= x, \\ N_2^{\varphi} &= xy, \\ N_3^{\varphi} &= x^3 - 3xy^2, \\ N_4^{\varphi} &= x^3y - xy^3, \\ N_5^{\varphi} &= x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4, \end{aligned} \tag{6.23}$$

базисні функції для розкладу u та v визначимо з перших двох рівнянь (6.22):

$$\begin{array}{ll}
N_1^u = \partial N_1^\varphi/\partial x = 1, & N_1^v = \partial N_1^\varphi/\partial y = 0, \\
N_2^u = \partial N_1^\varphi/\partial x = y, & N_2^v = \partial N_1^\varphi/\partial y = x, \\
N_3^u = \partial N_3^\varphi/\partial x = 3x^2 - 3y^2, & N_3^v = \partial N_3^\varphi/\partial y = -6xy, \\
N_4^u = \partial N_4^\varphi/\partial x = 3x^2y - y^3, & N_4^v = \partial N_4^\varphi/\partial y = x^3 - 3xy^2, \\
N_5^u = \partial N_5^\varphi/\partial x = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, & N_5^v = \partial N_5^\varphi/\partial y = 20xy^3 - 20x^3y.
\end{array} \tag{6.24}$$

Апроксимація таким чином може бути записана у вигляді:

$$\vec{\tilde{\varphi}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M} a_m \mathbf{N}_m, \quad \mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} N_m^u \\ N_m^v \\ N_m^\varphi \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

Такий вигляд апроксимації для довільних чисел a_m задовольняє рівнянню:

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) = \mathbf{\Lambda}\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\partial/\partial x \\ 0 & 1 & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \end{bmatrix} \vec{\tilde{\varphi}} = \mathbf{0}. \tag{6.26}$$

Симетрія задачі дає можливість задавольняти граничні умови лише на частині границі. Рівняння зважених граничних нев'язок має вигляд:

$$\sum_{m=1}^{M} \left\{ \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m\big|_{y=-1}\, dx + \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m\big|_{x=1}\, dy + \right.$$

$$\left. \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_m\big|_{y=1}\, dx \right\} a_m - \int_0^1 \bar{\mathbf{W}}_l\big|_{y=1} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} dx = 0. \tag{6.27}$$

(6.27) визначає СЛАР:

$$\mathbf{K}\vec{a} = \vec{f}, \tag{6.28}$$

з компонентами:

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l^v\, N_m^v\big|_{y=-1}\, dx + \int_0^1 N_l^u\, N_m^u\big|_{x=1}\, dy + \int_0^1 N_l^v\, N_m^v\big|_{y=1}\, dx, \tag{6.29}$$

$$f_l = \int_0^1 x\, N_l^v\big|_{y=1}\, dx. \tag{6.30}$$

Розрахунки проведено для шестиелементної апроксимації. розподіл горизонтальної u та вертикальної v складових вектора швидкості в потоці приведено на (Рис. 12) – (Рис. 11). На (Рис. 13 a, b) проілюстровано задовільнення граничних умов.

На (Рис. **??**) зображено лінії тока, що визначаються як інтеграл рівняння $dx/u = dy/v$.

Вправи.

6.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 6.1. Розв'язати задачу вважаючи, що кінці балки консольно закріплені.

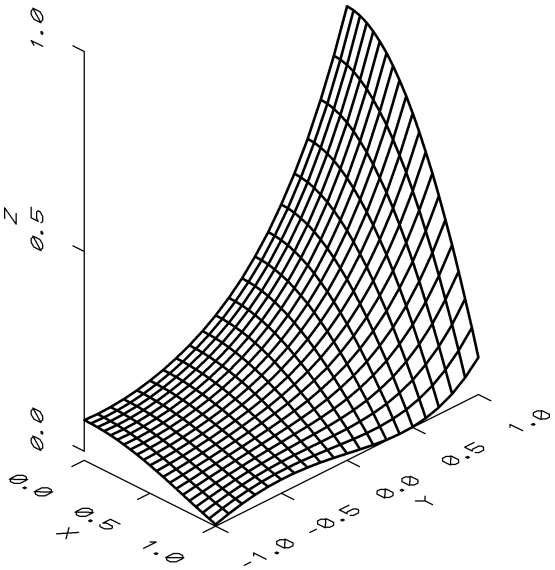


Рис. 11. Апроксимація вертикальної компоненти швидкості з прикладу 6.2

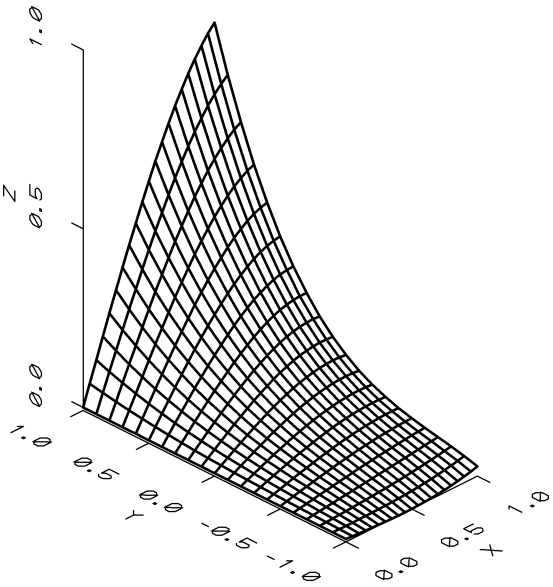


Рис. 12. Апроксимація горизонтальної компоненти швидкості з прикладу 6.2

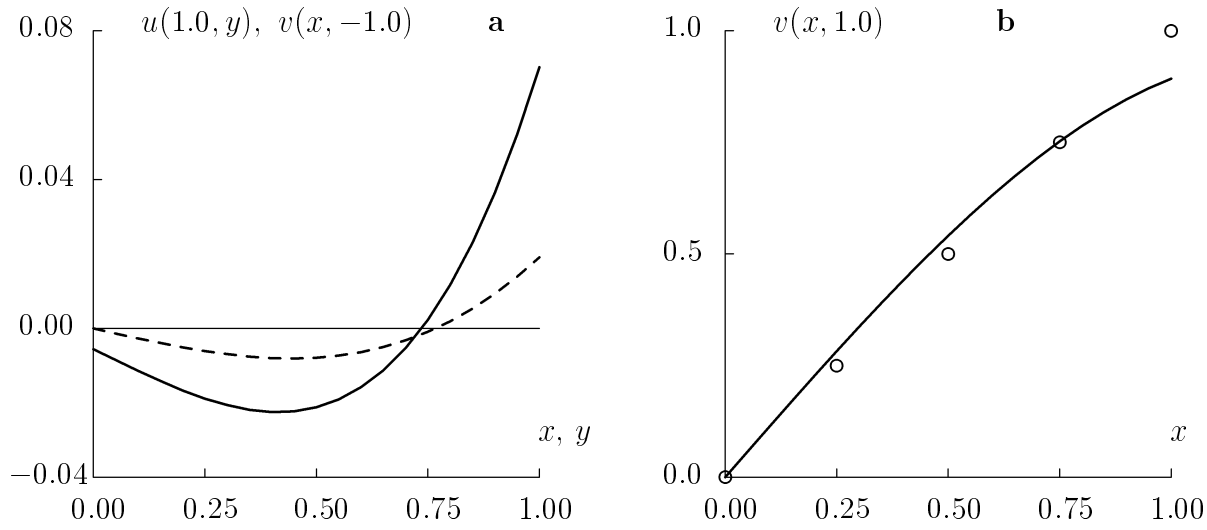


Рис. 13: Виконання граничних умов в задачі з прикладу 6.2,
(a): — – $u(1.0, y)$, - - – $v(x, -1.0)$,
(b): ∘ – точний розв'язок, — – $v(x, 1.0)$.

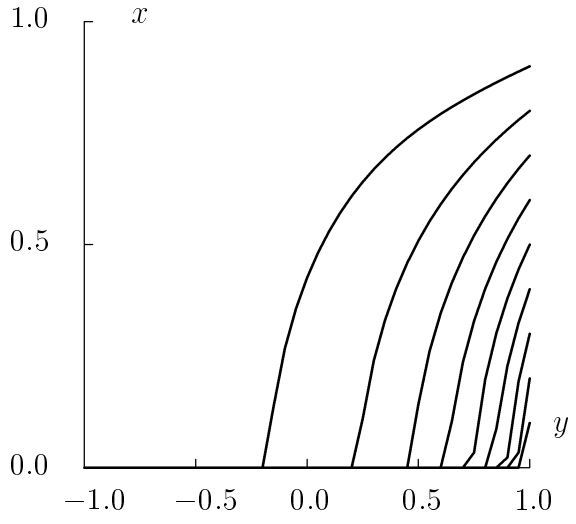


Рис. 14. Лінії току в задачі з прикладу 6.2

6.2. Розв'язати задачу з прикладу 6.2 для граничних умов:

$$u\big|_{x=\pm 1,\,|y|\ leq 1} = 0, \quad v\big|_{y=-1,\,-1\le y\le 0} = 0, \quad v\big|_{y=-1,\,0\le y\le 1} = x, \quad v\big|_{y=1,\,|y|\ leq 1} = x.$$

6.3. Записати рівняння стаціонарної теплопровідності (приклад 5.1) у вигляді двох рівнянь: закону Фур'є (залежність інтенсивності теплового потоку від величини температури) та рівняння балансу тепла. Знайти апроксимацію розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності для еліптичного диску $x^2 + (y/2)^2 \le 1$ з граничними умовами:

$$\varphi\big|_{\Gamma_\varphi} = 1, \quad \Gamma_\varphi:\ x \ge 0,\ x^2 + (y/2)^2 = 1,$$

$$\varphi\big|_{\Gamma_q} = 1, \quad \Gamma_q:\ x \le 0,\ x^2 + (y/2)^2 = 1.$$

7 Двовимірні задачі лінійної теорії пружності

Позначимо:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}^T &\equiv (u, v), \\ \vec{\varepsilon}^T &\equiv (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}) = \mathbf{L}\vec{\tilde{\varphi}}, \\ \vec{\sigma}^T &\equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$\vec{\varphi}$ – вектор переміщень, $\vec{\varepsilon}$ – вектор деформацій, $\vec{\sigma}$ – вектор напружень, та

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x, \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Рівняння рівноваги (Ламе):

$$\mathbf{A}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y + X \\ \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}\vec{\varphi} + \mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{7.3}$$

граничні умови:

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y - \bar{t}_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{t}_y \end{bmatrix} = \sigma_n - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{B}(\vec{\varphi}) \equiv \begin{bmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{на } \Gamma_\varphi, \tag{7.5}$$

$\vec{\bar{t}}^T = (\bar{t}_x, \bar{t}_y)$ – заданий вектор напружень на частині поверхні Γ_σ, $\vec{\bar{u}}^T = (\bar{u}, \bar{v})$ – заданий вектор переміщень на частині поверхні Γ_φ, $\Gamma_\sigma \bigcup \Gamma_\varphi = \Gamma$. Апроксимацію запишемо у вигляді:

$$\vec{\varphi} \approx \vec{\tilde{\varphi}} = \vec{\psi} + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{N}_m \mathbf{a}_m, \quad \vec{\tilde{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{L}\vec{\tilde{\varphi}}. \tag{7.6}$$

Нехай

$$\vec{\psi} = \vec{\bar{u}}\big|_{\Gamma_\varphi}, \quad \mathbf{N}_m\big|_{\Gamma_\sigma} = \mathbf{0}. \tag{7.7}$$

Рівняння зважених нев'язок:

$$\int_\Omega \mathbf{W}_l\,\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}\vec{\tilde{\varphi}}\,d\Omega + \int_\Omega \mathbf{W}_l\,\mathbf{X}\,d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l\,\vec{\tilde{\sigma}}_n\,d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l\,\vec{\bar{t}}\,d\Gamma = \mathbf{0}, \quad l = 1,\ldots,M, \tag{7.8}$$

Легко пересвідчитись, що це рівняння за допомогою теореми Остроградського-Гауса перетворюється до рівняння в слабкому формулюванні:

$$-\int_\Omega (\mathbf{L}\,\mathbf{W}_l)^T\,\vec{\tilde{\sigma}}\,d\Omega + \int_\Omega \mathbf{W}_l\,\mathbf{X}\,d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma+\Gamma_\varphi} \mathbf{W}_l\,\vec{\tilde{\sigma}}_n\,d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l\,\vec{\bar{t}}\,d\Gamma = \mathbf{0}, \tag{7.9}$$

Покладемо:

$$\mathbf{W}_l\big|_{\Gamma_\sigma} = -\,\bar{\mathbf{W}}_l\big|_{\Gamma_\sigma}, \quad \mathbf{W}_l\big|_{\Gamma_\varphi} = 0. \tag{7.10}$$

Рівняння зважених нев'язок матиме вигляд:

$$\int_\Omega (\mathbf{L}\,\mathbf{W}_l)^T\,\vec{\tilde{\sigma}}\,d\Omega - \int_\Omega \mathbf{W}_l\,\mathbf{X}\,d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{W}}_l\,\vec{\bar{t}}\,d\Gamma = \mathbf{0}, \tag{7.11}$$

або покомпонентно:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial W_l^u}{\partial x}\tilde{\sigma}_x + \frac{\partial W_l^u}{\partial y}\tilde{\sigma}_{xy}\right) d\Omega - \int_\Omega W_l^u\,X\,d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} W_l^u\,\bar{t}_x\,d\Gamma = 0, \tag{7.12}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial W_l^v}{\partial x}\tilde{\sigma}_{xy} + \frac{\partial W_l^v}{\partial y}\tilde{\sigma}_y\right) d\Omega - \int_\Omega W_l^v\,Y\,d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} W_l^v\,\bar{t}_y\,d\Gamma = 0, \tag{7.13}$$

Таким чином, граничні умови що задані на Γ_σ є натуральними.

Приклад 7.1

Пластина, що має форму квадрату $|x|$, $|y| \le 1$ навантажена по сторонам $y = \pm 1$ стискаючими силами, що розташовані в її площині та мають інтенсивність $1 - x^2$. Сторони $x = \pm 1$ можуть вільно ковзати вздовж направляючих. Визначити розподіл переміщень, напружень та деформацій в пластині для $\nu = 1/3$.

Розв'язок. Як слідує з постановки задачі:

$$u\big|_{\Gamma_\varphi} = 0, \quad \Gamma_\varphi : \{x = \pm 1, -1 \le y \le 1\},$$

$$\sigma_{ny}\big|_{\Gamma_\sigma^1} = 0, \quad \Gamma_\sigma^1 : \{x = \pm 1, -1 \le y \le 1\}, \tag{7.14}$$

$$\vec{\sigma_n}\big|_{\Gamma_\sigma^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\sigma^2 : \{y = \pm 1, -1 \le x \le 1\}, \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Очевидно, що розв'язок задачі має задовольняти умовам симетрії:

$$u(x,y) = -u(-x,y) = u(x,-y), \quad v(x,y) = v(-x,y) = -v(x,-y). \tag{7.15}$$

Виберемо базисні функції у відповідності до (7.15):

$$N_1^u = \sin(\pi x),\ N_2^u = \sin(\pi x)\,\cos(\pi y/2)\ N_3^u = \sin(2\pi x),$$

$$N_4^u = \sin(2\pi x)\ \cos(\pi y/2),\ N_5^u = \sin(\pi x)\ \cos(\pi y),\ N_6^u = \sin(2\pi x)\ \cos(\pi y), \tag{7.16}$$
$$N_1^v = \sin(\pi y/2),\ N_2^v = \sin(\pi y/2)\ \cos(\pi x/2)\ N_3^v = \sin(\pi y),$$
$$N_4^v = \sin(\pi y)\ \cos(\pi x/2),\ N_5^v = \sin(\pi y/2)\ \cos(\pi x),\ N_6^v = \sin(\pi y)\ \cos(\pi x),$$

та скористаємось методом Гальоркіна:

$$-\bar{\mathbf{W}}_l = \mathbf{W}_l = \mathbf{N}_l, \quad \mathbf{N}_l = \begin{bmatrix} N_l^u & 0 \\ 0 & N_l^v \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Згідно з (7.11) отримаємо СЛАР (6.13) з компонентами:

$$\mathbf{K}_{lm} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} N_{l,x}^u N_{m,x}^u + (1-\nu)/2 N_{l,y}^u N_{m,y}^u & \nu N_{l,x}^u N_{m,y}^v + (1-\nu)/2 N_{l,y}^u N_{m,x}^v \\ (1-\nu)/2 N_{l,x}^v N_{m,y}^u + \nu N_{l,y}^v N_{m,x}^u & (1-\nu)/2 N_{l,x}^v N_{m,x}^v + N_{l,y}^v N_{m,y}^v \end{bmatrix} dxdy \tag{7.18}$$

$$\mathbf{f}_l = \frac{1-\nu^2}{E} \int_0^1 \mathbf{N}_l|_{y=1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^2-1 \end{bmatrix} dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ N_l^v|_{y=1}\,(x^2-1) \end{bmatrix} dx. \tag{7.19}$$

Знайшовши $\mathbf{a}_l{}^T = (a_l^u, a_l^v), l = 1, 2, \ldots, M,$ апроксимацію компонентів вектора переміщень визначимо як:

$$\tilde{u} = \sum_{m=1}^{M} a_l^u N_l^u, \quad \tilde{v} = \sum_{m=1}^{M} a_l^v N_l^v, \tag{7.20}$$

компоненти вектора напружень:

$$\tilde{\sigma}_x = \sum_{m=1}^{M} (a_l^u N_{l,x}^u + \nu a_l^v N_{l,y}^v),$$
$$\tilde{\sigma}_y = \sum_{m=1}^{M} (\nu a_l^u N_{l,x}^u + a_l^v N_{l,y}^v), \tag{7.21}$$
$$\tilde{\sigma}_{xy} = (1-\nu)/2 \sum_{m=1}^{M} (a_l^u N_{l,y}^u + a_l^v N_{l,x}^v).$$

Переміщення, шо виникають в пластині винесені на (Рис. 15) – (Рис. 16). Картину деформування проілюстровано на (Рис. 18). На (Рис. 17($\mathbf{a}, \mathbf{b}$)) приведено граничні напруження на контурі пластини. Як видно, дотичні та нормальні напруження близькі до заданих. Слід зауважити, що дана задача є змішаною. На частині контура $x = \pm 1, -1 \le y \le 1$ задано $u = 0$. Як бачимо (Рис. 15($\mathbf{a}$)), ця умова призвела до того, що нормальні напруження на цій частині границі міняють знак (від стиску на $y = 0$ до розтягу на $y = 1$). Отже, для повного розв'язку цієї задачі необхідно знайти частину границі на якій $\tilde{\sigma}_x|_{x=1} = 0$ так, щоб на решті відрізку $\tilde{\sigma}_x|_{x=1} \le 0$.

Вправи.

7.1. Повернутись до розгляду задачі з прикладу 7.1. Врахувавши зауваження в кінці розв'язку побудувати чисельну схему так, щоб на відзках границі $x = \pm 1, |y| \le 1$ нормальні напруження були стискаючими. Модифікувати програму з додатку А для отримання чисельних даних. Перевірити виконання граничних умов.

7.2. Квадратна пластина з прикладу 7.1 защімлена по бічним сторонам та знаходиться під дією однорінного навантаження одиничної інтенсивності по обом координатним напрямкам. Дві інші сторони звільнені від навантаження. Знайти апроксимацію розв'язку використавши слабке формулювання рівняння зважених нев'язок.

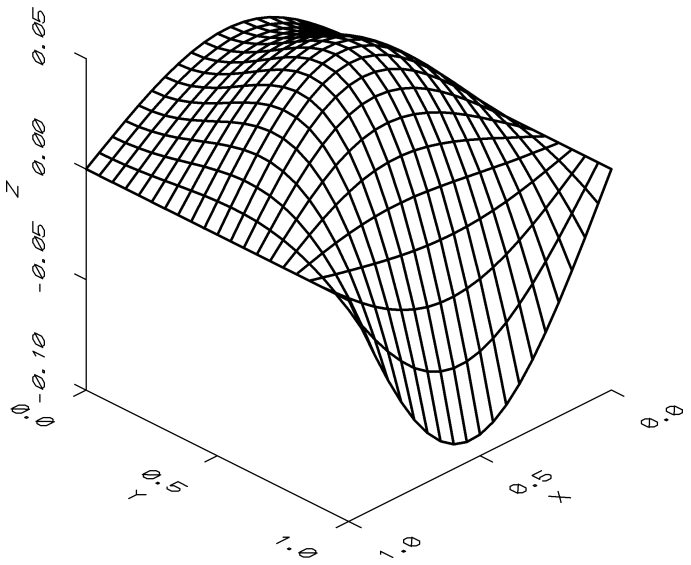


Рис. 15. Переміщення u в пластині з прикладу 7.1.По вісі z відкладено $(1-\nu^2)/E\tilde{u}$.

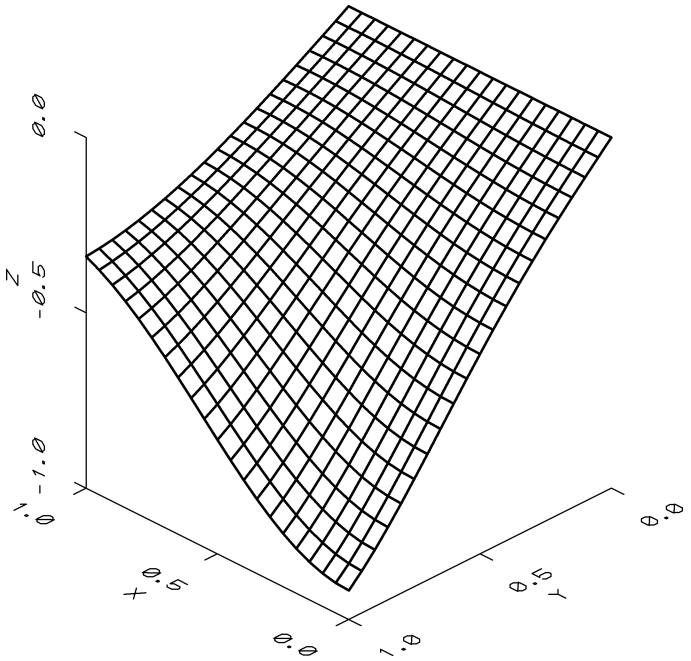


Рис. 16. Переміщення v в пластині з прикладу 7.1.По вісі z відкладено $(1-\nu^2)/E\tilde{v}$.

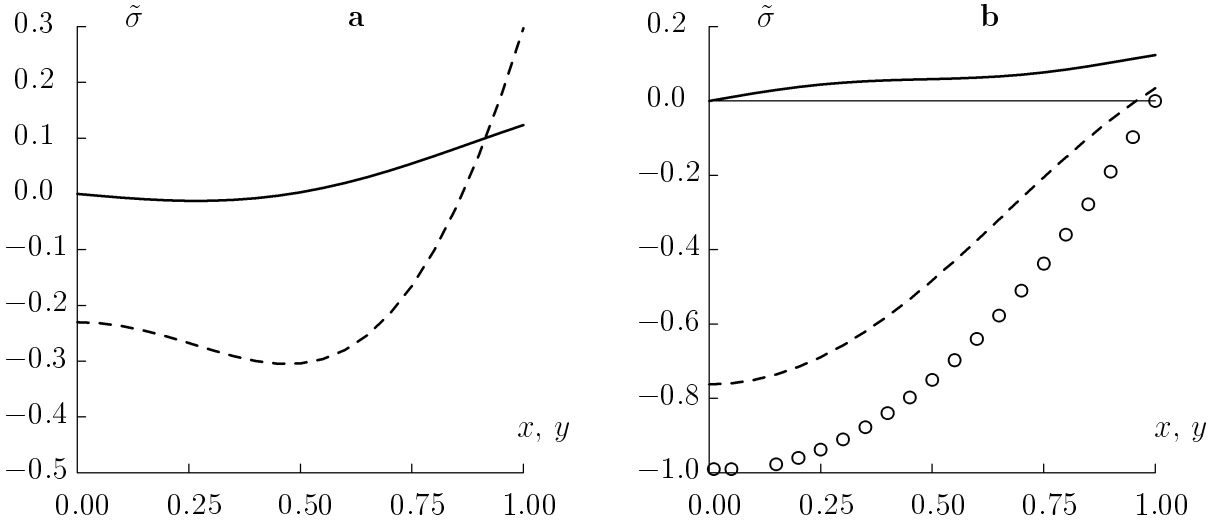


Рис. 17: Граничні напруження в задачі про деформування пластини з прикладу 7.1,
(**a**) – нормальні напруження $\tilde{\sigma}_x|_{x=1}$ на лінії ковзання (- -), та дотичні напруження $\tilde{\sigma}_{xy}|_{y=1}$ на лінії нормального навантаження (—),
(**b**) – перевірка задовільнення натуральних граничних умов:
$bf\circ$ – точне значення заданих нормальних напружень $\tilde{\sigma}_y|_{y=1}$, - - – їх апроксимація,
— – апроксимація дотичних напружень на лінії ковзання $\tilde{\sigma}_{xy}|_{x=1}$.

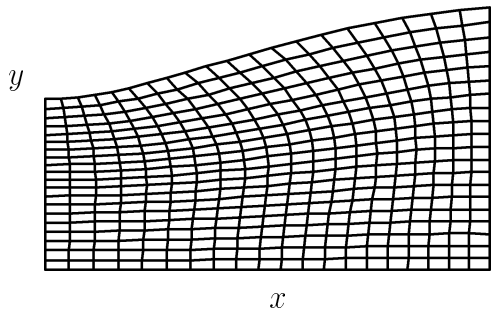


Рис. 18. Двовимірне деформування пружньої пластини з прикладу 7.1

8 Апроксимація розв'зку нелінійних граничних задач

Якщо в (2.1), (2.2) Λ та Υ – нелінійні диференціальні оператори, використання апроксимації (2.5) приводить до системи нелінійних алгебраїчних рівняннь:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a}). \tag{8.1}$$

Система (8.1) може бути розв'язана методом простих ітерацій:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^{n-1})\mathbf{a}^n = \mathbf{f}(\mathbf{a}^{n-1}). \tag{8.2}$$

Приклад 8.1

Рівняння

$$\exp(-\varphi)\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 1 \tag{8.3}$$

виникає в одновимірних задачах стаціонарної теплопровідності в хімічно-активному середовищі, якщо інтенсивність тепловиділення залежить від величини температури. Знайти розподіл температури в такома середовищі ($0 \le x \le 1$), якщо граничні умови: $\varphi|_{x=0,1} = 0$.

Розв'язок. Шукаємо апроксимацію у вигляді:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m, \tag{8.4}$$

Виберемо $N_m|_{x=0,1} = 0$. Рівняння зважених нев'язок в цьому випадку:

$$\sum_{m=1}^{M}\left(\int_0^1 \frac{d^2 N_m}{dx^2} W_l\, dx\right) a_m = \int_0^1 W_l \exp\left(\sum_{s=1}^{M} N_s a_s\right) dx. \tag{8.5}$$

Для апроксимації відрізком ряду Фур'є по методу Гальоркіна ($N_m = W_m = \sin(m\pi x)$) матимемо:

$$K_{lm} = -\delta_l^m (\pi m)^2/2, \quad f_l = \int_0^1 \sin(l\pi x)\exp\left(\sum_{s=1}^{M} a_s \sin(s\pi x)\right) dx, \tag{8.6}$$

та згідно з методом простих ітерацій (8.2):

$$a_l^{(n)} = -\frac{2}{(\pi m)^2}\int_0^1 \sin(l\pi x)\exp\left(\sum_{s=1}^{M} a_s^{(n-1)} \sin(s\pi x)\right) dx, \tag{8.7}$$

де n – порядок ітерації.

Виберемо за початкову ітерацію: $\mathbf{a}^{(0)T} = (0, 0, \ldots, 0)$. Збіжність розв'язку в залежності від номера ітерації проілюстрована на (Рис. 19).

Приклад 8.2