КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
задачі підвищеної складності

Навчальний посібник
для студентів університетів

Під редакцією члена-кореспондента НАН України
М.О. Перестюка

КИЇВ
«ТВіМС»
2005

РЕЦЕНЗЕНТИ:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Клесов О.І.
д-р фіз.-мат. наук, проф. Станжицький О.М.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 2 від 11 жовтня 2004 року)

УПОРЯДНИКИ:

- *Капустян О.В., канд. фіз.-мат. наук*
- *Касьянов П.О.*
- *Позур С.В.*
- *Сукретна А.В.*

Підп. до друку 15.01.2005. Формат $60 \times 84/16$. Друк офс. Папір офс. №1.
Гарнітура Computer Modern LH. Друк. арк. $2,67$. Тираж 300 прим. Зам. 002
МП «ТВіМС» м. Київ, вул. Глушкова, 2.

ЗМІСТ

Вступ 4

Розділ 1. **Диференціальні рівняння першого порядку** 5

§ 1.1 Поведінка інтегральних кривих 5
§ 1.2 Лінійні рівняння 7
§ 1.3 Існування, єдиність і продовжуваність розв'язку 8
§ 1.4 Диференціальні нерівності 10
§ 1.5 Рівняння в повних диференціалах та інтегруючий множник 11
§ 1.6 Різні задачі 11

Розділ 2. **Диференціальні рівняння вищих порядків та системи звичайних диференціальних рівнянь** 13

§ 2.1 Фазові портрети 13
§ 2.2 Існування, єдиність та продовжуваність розв'язків 13
§ 2.3 Лінійні рівняння та системи 15
§ 2.4 Коливність розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку 16
§ 2.5 Крайові задачі 17
§ 2.6 Стійкість 18
§ 2.7 Різні задачі 21

Відповіді та вказівки до розв'язків 22

Список рекомендованої літератури 24

ВСТУП

В минулі роки була видана значна кількість різноманітних збірників задач з диференціальних рівнянь, які в тому чи іншому обсязі охоплюють основні розділи теорії диференціальних рівнянь, що складають базовий університетський курс.

Треба відзначити, що більшість з цих збірників спрямована на забезпечення студентів різними за умовою, але типовими по суті задачами. Водночас досвід викладання на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка свідчить про щорічне збільшення чисельності студентів, які прагнуть випробувати свої сили в розв'язанні більш складних, нетипових і нестандартних задач.

Саме цей факт разом з природним прагненням підвищення рівня підготовки студентів, залученням їх до наукової творчості, спричинив появу даного посібника.

При цьому курси математичного аналізу, алгебри та геометрії, що в учбовому процесі традиційно передують курсу диференціальних рівнянь, дали можливість не орієнтуватись на базові знання лише з однієї дисципліни – розв'язання переважної кількості задач передбачає глибоке неформальне розуміння як безпосередньо самого курсу, так і природи математичних об'єктів, та їх взаємозв'язків, якими оперують вищезазначені дисципліни.

В даний збірник увійшли задачі підвищеної складності зі збірників задач [2, 5, 6, 12], вибрані вправи з підручників [3,7, 9, 10, 11], а також задачі з диференціальних рівнянь, які пропонувалися у різні роки на студентських олімпіадах як в Україні, так і за її межами. Переважну більшість у даному збірнику складають задачі, які слугували окремими темами доповідей та дискусій на студентському гуртку з диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Зважаючи на те, що більшість задач даного посібнику є достатньо складними, водночас треба відзначити, що серед них є такі, розв'язання яких може слугувати предметом курсової роботи на другому курсі для студентів математичних спеціальностей. Саме такі задачі в тексті посібника помічені зірочкою.

До більшості задач подані відповіді або вказівки щодо їх розв'язування.

В цілому структура збірника відповідає програмі нормативного курсу «Диференціальні рівняння», що викладається на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Розділ 1
Диференціальні рівняння першого порядку

§1.1. Поведінка інтегральних кривих

1. Намалювати графік функції $y(t)$, якщо $y(0)=0$, $\dot{y}=1+\sin^2 y(t)$, $t \geq 0$.

2. Накресліть інтегральні лінії рівнянь:

а) $y' = \frac{xy}{|xy|}$;

б) $y' = \frac{|x+y|}{x+y}$;

в) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+|x|}{y+|y|}$;

г) $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{при } y \neq x, \\ 1, & \text{при } y = x \end{cases}$

д) $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{при } y \neq x, \\ 0, & \text{при } y = x \end{cases}$

3. Знайти рівняння геометричного місця точок, яке заздалегідь містить всі точки максимуму і мінімуму розв'язків рівняння $y' = f(x,y)$. Те ж питання для точок перегину, якщо функція $f(x,y)$ диференційована.

4. Зобразіть картину поведінки інтегральних ліній рівнянь:

а) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

в) $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}}$;

г) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

д) $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$;

е) $\frac{dy}{dx} = x^a \sin \frac{1}{x}$ – при різних значеннях a.

Зокрема, з'ясуйте картину поведінки цих інтегральних ліній при $x \to 0$.

5. Довести, що кожний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 + t^4 + \cos x}$$

обмежений.

6. Показати, що кожна інтегральна крива рівняння

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

має дві горизонтальні асимптоти.

7. Дослідити поведінку інтегральних кривих рівняння

$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$

в околі початку координат. Показати, що з кожної точки границі першого координатного кута виходить одна інтегральна крива, яка проходить всередині цього кута.

8. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\rho \in C(\mathbb{R})$, $\rho(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$. Довести, що якщо $y(x)$ та $z(x)$ розв'язки задач Коші

$$\left\{ \begin{array}{r} \dot{y} = f(y), \\ y(0) = a \end{array} \right. \quad \text{та} \quad \left\{ \begin{array}{r} \dot{z} = f(z)\rho(z), \\ z(0) = a \end{array} \right.$$

відповідно, то $\bigcup\limits_{x \in D(y)} \{y(x)\} = \bigcup\limits_{x \in D(z)} \{z(x)\}$, де $D(y)$ – область визначення функції y.

9. Нехай $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ періодична по t з періодом $T > 0$ функція. Довести, що якщо існує єдиний розв'язок рівняння $\dot{x} = f(x,t)$, що обмежений на всій осі, то він періодичний з періодом T.

10. Нехай функція $f(k)$ неперервна і $y = k_0 x$ – розв'язок рівняння $y' = f(\frac{y}{x})$. Показати, що:

1) якщо $f'(k_0) < 1$, то жодний з інших розв'язків не дотикається до прямої $y = k_0 x$ в початку координат;

2) якщо $f'(k_0) > 1$, то до цієї прямої дотикається нескінченно багато розв'язків.

11. Нехай для рівняння $\dot{x} = f(x)$ відомо, що $f(0) = 0$, $f'(0) = -k < 0$. Довести, що для довільного розв'язку цього рівняння $x(t)$ виконується $x(t)e^{kt} = O(t)$, $t \to +\infty$.

12. Доведіть, що всі розв'язки рівняння $y' = f(y)$ монотонні.

13.** Наведіть приклад рівняння $y' = f(y)$ з неперервною правою частиною, серед розв'язків якого знайдуться два, що володіють наступними властивостями: вони визначені для всіх x, монотонно зростають, а їх графіки мають єдину спільну точку.

§1.2. Лінійні рівняння

14. Нехай в рівнянні $xy' + ay = f(x)$ маємо $a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що лише один розв'язок рівняння залишається обмеженим при $x \to 0$ і знайти границю цього розв'язку при $x \to 0$.

15. Нехай в рівнянні попередньої задачі $a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що всі розв'язки цього рівняння мають одну і ту ж скінченну границю при $x \to 0$. Знайти цю границю.

16. Показати, що рівняння $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, де $|f(t)| \le M$ при $-\infty < t < +\infty$ має один обмежений при $-\infty < t < +\infty$ розв'язок. Знайти цей розв'язок. Показати, що знайдений розв'язок є періодичним, якщо функція $f(t)$ періодична.

17. Показати, що лише один розв'язок рівняння $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ прямує до скінченної границі при $x \to \infty$ і знайти цю границю. Виразити цей розв'язок через інтеграл.

18. Нехай в рівнянні $\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$, $a(t) \ge c >)$, $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Довести, що кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $t \to \infty$.

19. Нехай в рівнянні попередньої задачі маємо $a(t) \geq c > 0$ і нехай $x_0(t)$ розв'язок з початковою умовою $x_0(0) = b$. Показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\xi > 0$, що якщо замінити функцію $f(t)$ та число b менше ніж на ξ (тобто замінити їх на таку функцію $f_1(t)$ і число b_1, що $|f_1(t) - f(t)| < \xi$, $|b_1 - b| < \xi$), то розв'язок $x_0(t)$ зміниться при $t \geq 0$ менше ніж на ε. Ця властивість називається стійкістю за постійно діючим збуренням.

20. Нехай $a(x)$, $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $a(x) \geq 0$, $f(x) = o(a(x))$ при $x \to +\infty$ та $\int\limits_0^\infty a(x)dx = \infty$. Довести, що для кожного розв'язку $y(x)$ рівняння $y' + a(x)y = f(x)$ виконується $\lim\limits_{y \to +\infty} y(x) = 0$.

21. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

§1.3. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язку

22.* Нехай $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, існує $T > 0$ таке, що $f(x + T, y) \equiv f(x, y)$ та існують y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$ такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ $f(x, y_1)f(x, y_2) < 0$, функція f ліпшицева по y. Довести, що існує T-періодичний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$.

23. Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \sin(xy)y - y^3, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

існує для всіх $x \geq 0$.

24. Чи існує розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

на $[-1;1]$?

25. Довести, що розв'зок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

існує на $[x_0; +\infty)$.

26. Довести, що диференціальне рівняння $y'(1 - \operatorname{arctg} x - x\sin(xy')) = 1$ не має неперервно диференційованих розв'язків, які визначені на $[0; +\infty)$.

27. Визначити максимальний інтервал продовжуваності вправо розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

28.* При яких умовах на $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ всі розв'язки диференціального рівняння $\dot{x} = ax^{1/3} + f(x)$ єдині?

29. Побудуйте приклад двох рівнянь $y' = f_1(y) \geq 0$ і $y' = f_2(y) \geq 0$ з неперервними правими частинами, для яких через кожну точку площини проходить єдина інтегральна крива і притому таких, що для рівняння $y' = \max\{f_1(y), f_2(y)\}$ ця єдиність не гарантується. Продумайте варіанти цієї задачі.

30. Нехай $f(x,y)$ неперервна по x, y і при кожному x не зростає при зростанні y. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y' = f(x,y)$ задовольняють одній і тій самій початковій умові $y(x_0) = y_0$, то вони співпадають при $x \geq x_0$.

31. При яких a кожний розв'язок наступних рівнянь продовжується на нескінченний інтервал $-\infty < x < +\infty$:

а) $y' = |y|^a$;
б) $y' = (y^2 + e^x)^a$;
в) $y' = |y|^{a-1} + x|\sqrt[3]{y}|^{2a}$?

32. Довести, що розв'язок рівняння $y' = xy + e^{-y}$ з довільною початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$.

33. Нехай на всій площині x, y функції $f(x,y)$ та $f'_y(x,y)$ неперервні і $f'_y(x,y) \le k(x)$, функція $k(x)$ неперервна. Довести, що розв'язок рівняння $y' = f(x,y)$ з будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \le x < +\infty$.

§1.4. Диференціальні нерівності

34.* Функція $f(x,y)$ неперервна і монотонно спадає по y в смузі $a \le x \le b$, $y \in \mathbb{R}$. Нехай $y(x)$ та $z(x)$ неперервно диференційовані на $[a;b]$ та задовольняють співвідношенням $y' = f(x,y)$, $z' \le f(x,z)$. Довести, що якщо $z(a) \le y(a)$, то $z(x) \le y(x)$ скрізь $[a;b]$. Показати, що без умови монотонності це, взагалі кажучи, не так.

35. Довести нерівність Гронуолла-Беллмана. Нехай $u(t) \ge 0$ та $f(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$ та $u(t), f(t) \in C([t_0; +\infty))$, причому при $t \ge t_0$ виконується нерівність $u(t) \le C + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau$, де C додатна стала. В такому випадку при $t \le t_0$ маємо $u(t) \le C \exp \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$.

36. Довести аналог леми Гронуолла-Беллмана. Нехай $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t) \in C([a;b])$ та $\chi(t) > 0$ при $a \le t \le b$, причому $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \varphi(s)\chi(s)ds$, $a \le t < b$. Тоді $\varphi(t) \le \psi(t) + \int\limits_{a}^{t} \psi(s) \exp\Big[\int\limits_{s}^{t} \chi(\tau)d\tau\Big]ds$ при $a \le t \le b$.

37. Нехай $f(x)$ така додатнозначна функція, визначена на $\mathbb{R}$, що при всіх x $\dot{f} > f(x)$. Для яких k існує N таке, що $f(x) > e^{kx}$ при $x > N$?

38. Нехай $f \in C^1([a;b])$, $f(a) = 0$ та, крім того, існує $\lambda > 0$ таке, що для всіх $x \in [a;b]$ $|f'(x)| \le \lambda |f(x)|$. Чи вірно, що $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$?

§1.5. Рівняння в повних диференціалах та інтегруючий множник

39. Нехай рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ має інтегруючий множник $\mu(x,y)$, після множення на який його ліва частина обертається у повний диференціал деякої функції $z(x,y)$. Доведіть, що за цих умов функція $\mu(x,y)\cdot f(z(x,y))$, де $f(z)$ довільна неперервна функція від z буде також інтегруючим множником цього рівняння.

40.* Доведіть, що якщо рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ з неперервно диференційованими коефіцієнтами $M(x,y)$, $N(x,y)$, які задовольняють умові $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ і задані в однозв'язній області, володіє замкнутою інтегральною кривою, то всередині цієї кривої знайдеться принаймні одна точка (x_0, y_0), для якої $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$.

41. Знайдіть інтегруючий множник для лінійного рівняння, що записано у вигляді $dy - [a(x)y + b(x)]dx = 0$.

42. Нехай $M(x,y)$ та $N(x,y)$ двічі неперервно диференційовані в прямокутнику $Q = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$, причому $N \neq 0$. Доведіть, що при цій умові для існування в Q неперервного інтегруючого множника $\mu \neq 0$ для рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, що залежить лише від x, необхідно і достатньо, аби в Q

$$N\Big(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\Big) \equiv \frac{\partial N}{\partial y}\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big).$$

§1.6. Різні задачі

43. Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$ – T-періодичні розв'язки рівняння $y' = y^2 + f(x)$, $f(x+T) = f(x)$. Довести, що $\int\limits_0^T (y_1(x) + y_2(x))dx = 0$.

44.* Нехай $f(x)=\frac{4x}{3-y(x)}$, де $y(x)$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y'(1+x^2)(1-y)=2xy(x^2+2), \\ y(1)=-2. \end{cases}$$

Знайти найбільше значення $f(x)$.

45. Знайти розв'язки рівняння $f'(x)+xf(-x)=P$, $P\in\mathbb{R}$.

46. Довести, що рівняння $y'=y^2+P(x)y+T(x)$ не має періодичних розв'язків, якщо неперервні на $(-\infty;+\infty)$ коефіцієнти $P(x)$ та $T(x)$ рівняння такі, що $P^2(x)<4T(x)$.

47. Знайти всі $f\in C^2(\mathbb{R})$ такі, що для всіх $x\in\mathbb{R}$

$$(f(x))^2=\int\limits_0^x \big(f^2(t)+(f'(t))^2\big)dt+2004.$$

48. Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'=xe^{x/y}$.

49.* Нехай k – компактна підмножина півплощини $\{(x,y)|\ y>0\}$. Довести, що існує точка $A\in\{(x,y)|\ y>0\}$, яка володіє властивістю: будь-яку точку k можна з'єднати з A інтегральною кривою рівняння $y'=e^{x^2}\sqrt{\ln(1+|y|)}$, $x\in\mathbb{R}$.

50. Довести, що рівняння $x^2+y^2+(y')^2=1$ не має особливих інтегральних кривих.

51. Задане рівняння $\dot{x}=f(x)$, $x>0$, $f\in C\left(\mathbb{R}_+\right)$. Навести необхідні і достатні умови того, що для всіх x_0, $y_0\in\mathbb{R}_+$ має місце

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t,x_0)}{x(t,y_0)}=1.$$

Розділ 2

Диференціальні рівняння вищих порядків та системи звичайних диференціальних рівнянь

§2.1. Фазові портрети

52. Довести, що якщо особлива точка рівняння $(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$ є центром, то це рівняння в повних диференціалах. Навпаки не вірно.

53. Довести, що якщо рівняння попередньої задачі не є рівнянням в повних диференціалах, але має інтегруючий множник, який неперервний в околі початку координат, то особлива точка – фокус (якщо $an \neq bm$).

54. Може траєкторія системи $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, $x(1) = y(1) = 1$ потрапити за скінченний час в точку $(a - 1, a)$ для деякого $a \in \mathbb{R}$?

55. Намалювати розташування інтегральних кривих в околі початку координат для наступних рівнянь:

а) $y' = \frac{xy}{x+y}$;
б) $y' = \frac{xy}{y-x^2}$;
в) $y' = \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$;
г) $y' = \frac{2xy}{y+x^2}$;
д) $y' = \frac{y^2}{y+x^2}$.

§2.2. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язків, їх обмеженість та періодичність

56. Чи може функція $x(t) = e^{-1/t}$ при $t > 0$, $x(t) = 0$, $t = 0$ бути розв'язком диференціального рівняння $x^{(2004)} + a(t)x = 0$ при $t \geq 0$, де $a(t)$ – нескінченно гладка функція на $\mathbb{R}$?

57. При яких a кожний розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}, \\ z' = y(1 + z^2)^a \end{cases}$$

подовжується на нескінченний інтервал?

58. Дана система у векторному записі $y' = f(x, y)$, що задовольняє умовам теореми існування в околі кожної точки (x, y). Нехай в області $|y| > b$ при всіх x $y \cdot f(x, y) \geq k(x)|y|^2$, де $\| \cdot \|$ операція скалярного добутку, а функція $k(x)$ неперервна. Довести, що розв'язок з будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує при $x_0 \geq x < +\infty$.

59. Доведіть, що будь-який розв'язок рівняння $\ddot{x} + e^t x = 0$ обмежений на $\mathbb{R}_+$.

60. Нехай $y \in C^2(\mathbb{R})$ задовольняє рівняння $y'' + y = -xg(x)y'$, де функція y невід'ємна та $g \in C(\mathbb{R})$. Довести, що тоді $y(x)$ обмежена.

61. Нехай $a(t),\ f(t) \in C(\mathbb{R}),\ a \geq 1,\ f > 0,\ \int\limits_0^\infty f(\xi)d\xi = \infty$. Довести, що кожний розв'язок рівняння $\ddot{x}(t) + a(t)f(x(t)) = 0$ обмежений зверху при $t \to +\infty$.

62. Нехай $\dot{x} = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),\ f(t, 0) \equiv 0$ і відомо, що $\exists\ L > 0$ таке, що $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x - y\| \geq 2\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \ln \|x - y\|$. Чи буде розв'язок $x(t)$ продовжуваним на $[0; +\infty)$?

63. Розглянемо систему $\dot{x} = xy - y,\ \dot{y} = x^3 - x^2$. Вказати всі початкові умови, для яких відповідні розв'язки обмежені.

64. Розглянемо рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = 0$. Нехай p, q, r додатні періодичні по x функції з періодом T. Скільки T-періодичних по x розв'язків має рівняння?

65. Що можна сказати, якщо в умовах попередньої задачі ми маємо неоднорідне рівняння $(p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y = f(x)$?

66. Довести, що рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ має частковий розв'язок $y(x) \neq 0$, що прямує до π при $x \to +\infty$.

§2.3. Лінійні рівняння і системи

67. Відомо, що два часткові розв'язки $u(x)$ і $v(x)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ задовольняють умові $u(x)v(x) \equiv 1$. Знайти рівняння, що пов'язує коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$.

68. При якому μ частковий розв'язок рівняння $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0$ є поліномом третього степеня?

69. При яких a і b кожний розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ задовольняє співвідношенню $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

70. Для заданого $b > 0$ підібрати таке a, при якому розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ якомога швидше прямує до нуля.

71. Нехай y та z розв'язки рівнянь $y'' + q(x)y = 0$ та $z'' + Q(x)z = 0$ зі співпадаючими початковими умовами $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$, і на інтервалі (x_0, x_1) маємо $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Довести, що на цьому інтервалі відношення $z(x)/y(x)$ спадає.

72. Дано рівняння $y'' + ay' + by = f(x)$, причому $|f(x)| \leq m$, $x \in \mathbb{R}$, а корені характеристичного рівняння $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Знайти розв'язок, обмежений при $-\infty < x < \infty$. Показати, що:

а) всі інші розв'язки необмежено наближуються до цього розв'язку при $x \to +\infty$;

б) якщо $f(x)$ періодична, то цей розв'язок також періодичний.

73.* Нехай на деякому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$ $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння $y'' = f(x)y$, де $f(x) \in C(\mathbb{R})$. Припустимо, що $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ $\forall\, x \in I$. Довести, що існує така додатна константа C, що на I функція $z(x) = C\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ задовольняє рівнянню $z'' + \frac{1}{z^3} = f(x)z$.

74. Знайти ненульовий розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 0.$$

75. Нехай $y = f(x)$ розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$(3x^2 + x - 1)y'' - (9x^2 + 9x - 2)y' + (18x + 3)y = 6(6x + 1)$$

такий, що $y(0) = 1$ та $(y(-1) - 2)(y(1) - 6) = 1$. Знайти такі a, b, $c \in \mathbb{Z}$, що $(y(-2) - a)(y(2) - b) = c$.

76.* Нехай диференціальне рівняння $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ має розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, визначені на $\mathbb{R}$ і такі, що $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Нехай $f(x) = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$. Знайти константи A та B такі, щоб $f(x)$ була розв'язком наступного диференціального рівняння $y' + Ap(x)y = Br(x)$.

77. Доведіть, що для розв'язку задачі Коші $\ddot{x} - e^t x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x} = a$ існує єдине значення a, при якому розв'язок $x(t)$ прямує до нуля при $t \to +\infty$.

78. Знайти всі розв'язки рівняння $y'(x) = ay(x) + by(c - x)$, що існують при $-\infty < x < +\infty$ (a, b і c – сталі).

§2.4. Коливність розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку

79. Оцінити зверху і знизу відстань між двома сусідніми нулями будь-якого тотожно не рівного нулеві розв'язку наступних рівнянь на заданому відрізку:

а) $y'' + 2xy = 0$, $20 \le x \le 45$;
б) $xy'' + y = 0$, $25 \le x \le 100$;
в) $y'' - 2xy' + (x + 1)^2 y = 0$, $4 \le x \le 19$;
г) $y'' - 2e^{\lambda} y' + e^{2\lambda} y = 0$, $2 \le x \le 6$.

80. Довести, що будь-який розв'язок рівняння $y'' + xy = 0$ на відрізку $-25 \le x \le 25$ має не менше 15 нулів.

81. Покажіть, що при необмеженому зростанні x послідовні нулі будь-якого ненульового розв'язку рівняння $y'' + xy = 0$ необмежено зближуються.

82. Нехай x_1, x_2, ...– розташовані в порядку зростання послідовні нулі розв'язку рівняння $y'' + q(x)y = 0$, де $q(x) > 0$; при $x_1 \le x < \infty$ функція $q(x)$ неперервна і зростає. Довести, що $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (тобто відстань між сусідніми нулями спадає).

83. Довести, що якщо в умовах попередньої задачі $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = C$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$.

84. Нехай виконані умови задачі 81 і нехай $b_n = \max\limits_{x_n \le x \le x_{n+1}} |y(x)|$. Довести, що $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$.

85. Нехай в задачі 82 границя C скінченна. Довести, що $b_n \to B > 0$ при $n \to \infty$ (в позначеннях задачі 83).

86. Нехай $q(t) \in C((0; +\infty) \to \mathbb{R})$. Довести, що коли $\varliminf\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) > 1/4$, то кожен розв'язок рівняння $\ddot{x} + q(t)x = 0$ має безліч нулів на $(0; +\infty)$. Якщо ж $\varlimsup\limits_{t\to\infty} t^2 q(t) < 1/4$, то на півосі $(0; +\infty)$ множина нулів кожного розв'язку рівняння обмежена.

§2.5. Крайові задачі

87. Довести, що крайова задача

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

де $q \in C([0;1])$, $q(t) > 0$ на $[0, 1]$ та $\int\limits_0^1 q(t)dt < 1$ має лише нульовий розв'язок.

88. Нехай x_1, x_2, a, $b \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, $q \in C([x_1, x_2])$, $q(x) \leq 0$, $x \in [x_1, x_2]$. Довести, що існує розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(x_1) = a, \ y(x_2) = b. \end{cases}$$

89. Функція $f(x) \in C^2((a;b)) \cap C([a;b])$ задовольняє рівнянню $f'' = e^x f$ і умовам $f(a) = f(b) = 0$. Знайти $f(x)$. Скільки розв'язків має задача?

90. При яких a крайова задача $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ не має розв'язків крім тривіального?

91. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі $y'' + y = f(x)$, $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

92. Оцінити згори і знизу розв'язок задачі $x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $y(x)$ обмежений при $x \to 0$ та $x \to \infty$ і його першу похідну, якщо відомо, що $0 \leq f(x) \leq m$.

93.** Довести, що власні значення крайової задачі $y^{(\mathrm{IV})} - \lambda q(x) y = 0$, $x \in (a, b)$, $y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$ є простими, тобто всі власні підпростори є одновимірними. Тут q – гладка додатна функція.

§2.6. Стійкість

94. Визначити область асимптотичної стійкості для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y + \alpha z, \\ \dot{z} = \beta y - z, \end{cases}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.

95. Довести, що коли в системі рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x); \end{cases}$$

функція f така, що $f(0)=0$, $xf(x)>0$, $x\neq 0$, то положення рівноваги цієї системи стійке.

96. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y); \end{cases}$$

де $\operatorname{sign} f_i(z) = \operatorname{sign} z$, $i=\overline{1,4}$.

97. Нехай положення рівноваги системи $\dot{x}=Ax$ та $\dot{y}=By$, де A, B – сталі матриці, стійке за Ляпуновим. Чи можна стверджувати те саме відносно системи $\dot{z}=(A+B)z$?

98.* Довести, що якщо $y\equiv 0$ асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, то тоді $a_k a_{k+3} < a_{k+1}a_{k+2}$, $k=\overline{0,n-3}$.

99. Нехай $x\in\mathbb{R}^n$, A стала матриця $n\times n$. Довести, що із стійкості системи $\dot{x}=Ax$ випливає стійкість системи $\dot{y}=[A+B(t)]y$ при $B(t)\in C([t_0;+\infty))$ і $\int\limits_{t_0}^{\infty}\|B(\tau)\|d\tau<\infty$.

100. Нехай виконані умови попередньої задачі і система $\dot{x}=Ax$ асимптотично стійка. Тоді, якщо $B(t)\to 0$, $t\to\infty$, то буде асимптотично стійкою збурена система $\dot{y}=[A+B(t)]y$. Довести це.

101. Нехай система $\dot{x}=Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$ стійка. Довести стійкість тривіального розв'язку системи $\dot{x}=Ax+f(t,x)$ у випадку, коли $f(t,x)\in C([0;+\infty)\times B_r^n(0)\to\mathbb{R}^n)$, $\|f(t,x)\|\leq g(t)\|x\|$, $\int\limits_0^{\infty} g(t)dt<\infty$.

102. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, залежної від параметра λ, при $\lambda\leq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z + \lambda\sin x, \\ \dot{y} = z - x + \lambda(\sqrt[3]{1+3y} - \cos z), \\ \dot{z} = y - z + \ln(1+\lambda z). \end{cases}$$

103. Довести, що початок координат – стійке положення рівноваги системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y^2 + z^2), \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$$

104. Знайти положення рівноваги рівняння $\ddot{x}+\dot{x}^3 \sin x = 0$ і визначити, чи є вони стійкими.

105. Коло $x^2 + y^2 = 1$ є граничним циклом векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1). \end{cases}$$

З'ясуйте, чи є цей граничний цикл стійким, нестійким або напівстійким?

106. Побудувати приклад системи $\dot{y} = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ лише з одним стійким розв'язком, для якої, проте, розв'язок з будь-якою початковою умовою існує, єдиний і обмежений для всіх x.

107. Нехай розв'язок системи $\dot{y} = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ з будь-якою початковою умовою прямує до нуля при $x \to +\infty$ та $y \equiv 0$ є розв'язком цієї системи. Тоді розв'язок $y = 0$ може не бути стійким (побудуйте приклад). Нехай додатково відомо, що розв'язок $y \equiv 0$ стійкий. Чи зобов'язані тоді всі розв'язки з достатньо близькими до нуля початковими даними також бути стійкими? Окремо розберіть випадки $n = 1$ та $n > 1$.

108. Покажіть, що якщо всі розв'язки системи $\dot{y} = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, для яких $|y(x_0)| < M$, рівномірно прямують до нуля при $x \to +\infty$, то всі розв'язки для яких виконана нерівність $|y(x_0)| < M$, стійкі.

§2.7. Різні задачі

109. Знайти загальний розв'язок рівняння $y = xy' + x^2y''$.

110. Довести, що рівняння $y''+(xe^{-x}+1)y'+e^{-x}y = 0$, $y''+e^xy+xy = 1$ не мають спільних розв'язків.

111. Знайти всі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} y'' + \frac{(y')^2}{y} = x' + \frac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$$

де x, y - функції від t.

112. Знайти всі розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0, \\ \dot{y} + \frac{1}{y}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) = 0. \end{cases}$$

113. При яких n існує рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, у якого $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ і будь-який $y(x)$, визначений на інтервалі I, задовольняє нерівності $y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}$ при всіх $x_1, x_2 \in I$.

114. Накресліть схему поведінки на всій площині інтегральних ліній рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}+x^2+y^2-1$. Покажіть, що воно має фокус в початку координат і граничний цикл $x^2 + y^2 = 1$.

115. Накресліть схему поведінки на всій площині інтегральних ліній рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x} + (y - x)^2 + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{3}.$$

Доведіть, що воно має дві особливі точки – сідло $(0, 0)$ і фокус $(1, 1)$.

116.** Навести приклад того, що теорема Пікара не має місця для нескінченної (зліченної) системи диференціальних рівнянь. Запропонувати якісь достатні умови для існування і для єдиності розв'язку задачі Коші для нескінченної системи рівнянь з нескінченним числом шуканих функцій $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Відповіді та вказівки до розв'язків

1. Дослідити $y(t)$ на монотонність та опуклість.

2. Скористатись методом ізоклін.

3. $f(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$.

4. Скористатись теоремою про неявну функцію.

5. Скористатись формулою Ньютона-Лейбніца.

6. Див. вказівку до задачі 4.

7. Див. вказівку до задачі 4.

8. Зробити заміну незалежної змінної.

10. Знайти кут між інтегральною кривою та прямою $y=kx$.

11. Скористатись нерівністю Гронуола-Белмана (задача 35).

13. В якості множини нулів функції f взяти канторову множину.

14 - 20. Проаналізувати формулу розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння.

21. $y(x)=\int\limits_0^\infty e^{-s-\sin s\cos(s+2x)}\sin(x+s)ds$.

22. Скористатись теоремою Брауера про нерухому точку.

23. Скористатись теоремою про продовжуваність розв'язку задачі Коші.

24. Скористатись теоремою про порівняння.

25. Дослідити знак правої частини рівняння.

26. Довести, що жодна неперервна функція $f\in C([0,+\infty))$ не може задовольняти співвідношення $f(x)(1-\operatorname{arctg}x-x\sin(xf(x)))=1$ $\forall\ x\geq 0$.

27. Показати, що розв'язок не може вийти з деякого кута з вершиною в початку координат.

28. Або $a=0$, або $f(0)\neq 0$.

34. Використати задачу 30.

35–37. Використати задачу 34.

38. Так.

44. Проінтегрувати.

46. Застосувати теорему Ролля.

48. Підібрати заміну.

53. Знайти інтегруючий множник.

54. Так.

56. Ні.

58. Оцінити $|y(x)|$.

59. Заміною звести до простішого вигляду.

62. Оцінити $|y(x)|$.

63. Звести до рівняння.

66. Знайти перший інтеграл.

67–72. Скористатись виглядом ФСР.

78. Впровадити деяку заміну.

79–86. Скористатись теоремою Штурма.

87. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

89. $f(x) \equiv 0$ - єдиний розв'язок.

91. $\frac{1}{2} \sin (x - s)$.

92. Записати розв'язок за допомогою функції Гріна.

94. Скористатись критерієм Рауса-Гурвіца.

95. Побудувати функцію Ляпунова.

96. Побудувати функцію Ляпунова.

97. Ні.

98. Скористатись критерієм Рауса-Гурвіца.

99. Скористатись інтегральним представленням розв'язку та нерівністю Гронуола-Беллмана.

105. Звести систему до рівняння з періодичними коефіцієнтами.

114. Порівняти нахил інтегральних кривих цього рівняння з нахилом в цій же точці інтегральних кривих рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

115. Порівняти нахил інтегральних кривих цього рівняння з нахилом в цій же точці інтегральних кривих рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y-x}$.

Список рекомендованої літератури

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000. — 368 с.

2. *Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. К.: Вища шк., 1972. — 154 с.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. 1967. — 472 с.

4. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Т.С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. — 326 с.

5. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями М.: УРСС, 2002. — 256 с.

6. *Перестюк М.О., Свіщук М.Я.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. К.: ТВіМС, 2004. — 224 с.

7. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. — 236 с.

8. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. — 331 с.

9. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння в задачах. К.: Либідь., 2003. — 504 с.

10. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 2003. — 600 с.

11. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1952. — 416 с.

12. *Филлипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000. — 176 с.