МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по комплексному анализу

Лектор — Е. П. Долженко

III курс, 5 семестр, поток математиков

Москва, 2004 г.

Оглавление

Предисловие

Народ! Предупреждаем сразу: если вы хотите *знать* комплексный анализ, ботайте его по Шабату или Белошапке. Если вы хотите *сдать* экзамен, то можете рискнуть и заботать по этим лекциям. Но помните, что бреда здесь ещё больше, чем у Скляренко.

В некоторых случаях «затыкать дыры» в доказательствах полностью было бессмысленно, поскольку без нормальных и строгих определений это сделать просто невозможно. Например, в теореме Коши невозможно обойтись без таких понятий, как фундаментальная группа и гомотопия. Ну, а такого бредового «определения» римановой поверхности, которое было дано на лекциях, мы нигде не слышали.

Огромное спасибо Лене Хиль за то, что она героически записывала эти лекции.

Вопросы, комментарии, замечания и предложения направляйте на `dmvn@mccme.ru`, обновления электронной версии — на сайте `http://www.dmvn.mexmat.net`.

Набор и вёрстка: `DMVN Corporation`
Последняя компиляция: `26 марта 2005 года`
Версия: `0.62`

1. Введение. Основные понятия

1.1. Введение

1.1.1. Комплексные числа, комплексная плоскость

Определение. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары действительных чисел, на которых заданы операции:

1° Сложение — покомпонентно;

2° Умножение — по правилу $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Утверждение 1.1. *Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ образует поле.*

Рассмотрим пары вида $(x, 0) = x$. Обозначим $i := (0, 1)$. Тогда $(x, y) = x + iy$. Это и есть алгебраическая форма записи. Точнее говоря, это запись элемента (x, y) в базисе $(1, i)$ множества $\mathbb{C}$ как двумерной алгебры над полем $\mathbb{R}$.

Заметим, что $i^2 = -1$. Действительно, имеем $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$.

Пусть $z = x + iy$, тогда $\operatorname{Re} z := x$ — *действительная* часть, $\operatorname{Im} z := y$ — *мнимая* часть, а $\overline{z} := x - iy$ — число, *сопряжённое к* числу z. *Модулем* числа z называется число $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема 1.2 (Гаусса). *Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, то есть любой многочлен положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень.*

Имеют место равенства:

1° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

3° $\overline{\overline{z}} = z$;

4° $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

5° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

1.1.2. Модуль и аргумент комплексного числа

Определение. *Аргументом* числа $z \neq 0$ называется число $\arg z$, выражающее угол между осью Ox и вектором $\vec{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Также аргументом называется множество

$$\operatorname{Arg} z := \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1}$$

Замечание. Аргумент нуля не определён!

Аргумент является простейшим примером многозначной функции. При его определении следует договориться, в каких пределах меняется число $\arg z$. Разумно считать, что $\arg z \in [0, 2\pi)$, то есть для $\forall \alpha \in \operatorname{Arg} z$ имеем $\alpha \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

На комплексных числах норма вводится естественным образом: $\|z\| := |z|$, то есть поле $\mathbb{C}$ является нормированным. Другие примеры нормированных полей доставляют $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$.

Неравенство треугольника $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, которое позволяет корректно ввести норму и метрику на $\mathbb{C}$, легко доказать, исходя из геометрической интерпретации комплексных чисел, о которой речь пойдёт ниже.

1.1.3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Поставим в соответствие числу $z = x + iy$ вектор (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2$.

- Сложение комплексных чисел — это сложение соответствующих векторов;
- Операция сопряжения равносильна симметрии относительно оси Ox;
- $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ — скалярное произведение векторов;
- $\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2) = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ — ориентированная площадь параллелограмма на векторах z_1 и z_2.

Геометрический смысл умножения будет ясен позже.

Некоторые геометрические места точек на плоскости удобно записывать с помощью комплексных чисел.

Пример 1.1.

- $|z - z_0| = \text{const}$ — окружность с центром в точке z_0;
- $|z - z_1| = |z - z_2|$ — серединный перпендикуляр к отрезку z_1z_2;
- $|z - z_1| + |z - z_2| = \text{const}$ — эллипс с фокусами z_1 и z_2.

1.1.4. Тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа

Пусть $z = x + iy$. Тогда в полярных координатах имеем $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Значит,

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{2}$$

Определение. Положим $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Утверждение 1.3. *При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются.*

□ Действительно,

$$\begin{aligned} &r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = \\ &\qquad = r_1r_2\big(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right)\big) = \\ &\qquad\qquad = r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Пусть $\arg z_1 = \varphi_1$ и $\arg z_2 = \varphi_2$. Тогда

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \left\{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k\right\}. \tag{3}$$

Под сложением аргументов «arg» мы понимаем их сложение по модулю 2π. ■

Следствие 1.1. *Геометрический смысл преобразования $z \mapsto az$, $a = re^{i\varphi}$ — это композиция гомотетии с коэффициентом r и поворота на угол φ вокруг начала координат.*

Следствие 1.2. *Геометрический смысл числа $\arg\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}$ — ориентированный угол между векторами $z_1 - z_0$ и $z_2 - z_0$.*

Следствие 1.3 (Формула Муавра). $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$.

Определение. *Корнем n-й степени* из комплексного числа z называется всякое число w, для которого $w^n = z$. Множество корней из z обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Утверждение 1.4. *Если $z = 0$, то и $\sqrt[n]{z} = 0$. Если же $z \neq 0$, то существует ровно n различных корней из этого числа, и*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\exp\left(i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Пример 1.2. $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, то есть $\left\{\sqrt[3]{1}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

1.1.5. Многозначные функции и однозначные ветви на примере $\operatorname{Arg} z$

Одной из самых простых многозначных функций является функция

$$\operatorname{Arg} z := \left\{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{5}$$

Для многозначных функций запись «$f(z)$» обозначает множество значений в точке z.

Определение. Функция f многозначна, если $\operatorname{Card} f(z) > 1$ для хотя бы одной точки $z \in \mathcal{D}(f)$.

Определение. Многозначные функции f и g совпадают на множестве E, если $f(z) = g(z)$ для $\forall\, z \in E$.

Определение. Функция $f_0(z)$ — однозначная ветвь многозначной функции $f(z)$, если $f_0(z) \in f(z)$ для $\forall\, z \in \mathcal{D}(f)$.

Определение. Говорят, что $f_0(z)$ — однозначная непрерывная ветвь многозначной функции $f(z)$, если $f_0(z)$ — однозначная ветвь и f_0 непрерывна на $\mathcal{D}(f)$.

1.1.6. Метрика и топология $\mathbb{C}$. Последовательности и пределы

На множестве $\mathbb{C}$ определено расстояние $\rho(z, w) := |z - w|$. Под сходимостью будем понимать сходимость в этой метрике.

Определения открытых и замкнутых множеств, окрестностей и т. д. полностью совпадают с определениями этих понятий, данных в курсе математического анализа. Топология $\mathbb{C}$, задаваемая метрикой, совпадает со стандартной топологией $\mathbb{R}^2$. Таким образом, комплексная прямая[1] является хаусдорфовым топологическим пространством (любые две несовпадающие точки обладают непересекающимися окрестностями).

Определение. *Окрестностью* точки в $\mathbb{C}^n$ называется открытый шар с центром в этой точке.

Определение. Множество $K \subset \mathbb{C}^n$ называется *компактным*, если из любой последовательности его точек можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $z \in K$.

[1] Нехорошо называть плоскостью одномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Как следует из теоремы Больцано – Вейерштрасса, компакты в $\mathbb{C}^n$ — это в точности замкнутые ограниченные множества.

Определение. *Расстоянием* между подмножествами X и Y метрического пространства называется число

$$\rho(X,Y) := \inf\{\rho(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}. \tag{6}$$

Утверждение 1.5. *Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества в $\mathbb{C}$, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\rho(F_1,F_2) > 0$.*

□ Допустим, $\rho(F_1,F_2) = 0$. Тогда найдутся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что $\rho(x_n,y_n) \to 0$. Без ограничения общности F_1 компактно. Тогда перейдём к сходящейся подпоследовательности (и перенумеруем). Теперь можно считать, что $x_n \to x_0$ и $y_n \to x_0$. Но тогда в силу замкнутости $x_0 \in F_1$, а так как x_0 будет предельной точкой для F_2, то $x_0 \in F_2$. Противоречие. ■

Замечание. Условие компактности здесь по существу. Если потребовать только замкнутости, то утверждение перестаёт быть верным. Например, рассмотрим график функции e^x и ось Ox. Эти множества замкнуты и не пересекаются, но расстояние между ними равно нулю.

Задача 1.1. *Найти множества предельных точек для последовательностей*

$$\exp(2\pi i e \cdot n!)\,, \quad \exp\left(\pi i \cdot n\sqrt{2}\right), \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right). \tag{7}$$

Непрерывность функций определяется точно так же, как и в математическом анализе.
Пример 1.3. Непрерывными комплексными функциями являются

- Многочлены $f(z) \in \mathbb{C}[z]$;
- Дробно-рациональные функции $w(z) \in \mathbb{C}(z)$;
- $e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y)$ — периодическая функция с периодом $2\pi i$;
- $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ и $\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Многие теоремы о рядах, доказанные в курсе математического анализа, очевидным образом обобщаются на комплексный случай.
Задача 1.2. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} z^n. \tag{8}$$

Как мы потом увидим, можно пополнить пространство $\mathbb{C}$ бесконечно удалённой точкой. Тогда, по определению, $z_n \to \infty \ \Leftrightarrow\ |z_n| \to \infty$. Более подробно о топологии расширения $\overline{\mathbb{C}}$ будет сказано в главе о стереографической проекции.

1.1.7. Кривые, пути и области

Определение. *Кривая* — непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Кривая называется *жордановой*, если она не имеет самопересечений. Кривая называется *замкнутой*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Определение. Множество E называется связным, если его нельзя разбить на два непустых открытых относительно E подмножества. Множество E называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой в E.

Замечание. С тем же успехом в определении связного множества можно открытые множества заменить на замкнутые.

Определение. *Область* — непустое открытое связное множество.

Утверждение 1.6. *Если множество линейно связно, то оно связно.*

□ В самом деле, допустим, что множество E линейно связно и несвязно, то есть разбивается на два открытых: $E = A \sqcup B$. Пусть $x \in A$, а $y \in B$. Соединим эти точки непрерывной кривой $\gamma\colon [0,1] \to E$, причём $\gamma(0) = x$, а $\gamma(1) = y$. Рассмотрим $t_A := \sup\{t \in [0,1]\colon \gamma(t) \in A\}$. Если $\gamma(t_A)$ лежит в B, то лежит там вместе с окрестностью. Так как прообраз открытого множества при непрерывном отображении открыт, то точка t_A отображается в B вместе со своей окрестностью в $[0,1]$, то есть интервалом. Но это противоречит определению t_A. Если же $t_A \in A$, то по аналогичным соображениям получаем противоречие с тем, что t_A есть точная верхняя грань. ■

Задача 1.3. *Докажите, что замыкание связного множества M связно.*

Решение. Допустим, что $\operatorname{Cl} M = A \sqcup B$. Положим $A_M := A \cap M$, а $B_M := B \cap M$. В силу определения индуцированной топологии, множества A_M и B_M открыты в M. Они, очевидно, не пересекаются, поэтому одно из них пусто, иначе M не было бы связным. Пусть, например, A_M пусто. Тогда A не содержит точек из M и является открытым подмножеством в замыкании. Но это противоречит определению замыкания. ■

Задача 1.4. *Рассмотрим замыкание графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$, $x > 0$ на плоскости. Это эквивалентно добавлению отрезка $[-1, 1]$ на оси Oy. В силу предыдущей задачи это множество связно. Докажите, что оно но не линейно связно.*

Итак, мы видим, что линейная связность — более сильное условие. Однако, как показывает следующая теорема, для областей эти понятия равносильны.

Теорема 1.7. *Область D в $\mathbb{C}^n$ является линейно связным множеством.*

□ Рассмотрим произвольные точки x и y в области D и докажем, что их можно соединить кривой. Пусть E — множество тех точек, до которых можно дойти из точки x. Оно непусто, так как $x \in E$, и открыто, так как если $z \in E$, то $U(z) \subset D$, а окрестность U линейно связна, поэтому $U(z) \subset E$. По аналогичным соображениям $D \setminus E$ открыто. Таким образом, мы разбили D на два непересекающихся открытых множества, что противоречит связности D. ■

Теорема 1.8. *Открытое множество в $\mathbb{C}^n$ разбивается на не более чем счётное число непересекающихся областей.*

□ Рассмотрим открытое множество E и разобьём его на классы эквивалентности относительно линейной связности. Очевидно, что такое отношение будет симметричным, рефлексивным и транзитивным. Каждый класс будет областью. В каждом классе, очевидно, есть точка с рациональными координатами, значит, самих классов не более чем счётное число. ■

Замечание. Вообще говоря, следствие справедливо в полном сепарабельном метрическом пространстве.

Определение. *Континуумом* называется связный компакт, состоящий более чем из одной точки.

Утверждение 1.9. *Континуум имеет мощность континуум, чем и оправдывает своё название.*

□ Рассмотрим континуум K. Пространство $\mathbb{C}^n$ является полным пространством, а замкнутое подмножество полного пространства полно. Таким образом, K является полным метрическим пространством. Если K не более чем счётно, то его можно представить в виде не более чем счётного объединения нигде не плотных множеств — его точек. Тогда K было бы множеством первой категории, но по теореме Бэра это невозможно. ■

Определение. Область G называется *n-связной*, если ∂G распадается на n континуумов, и не распадается на большее их число.

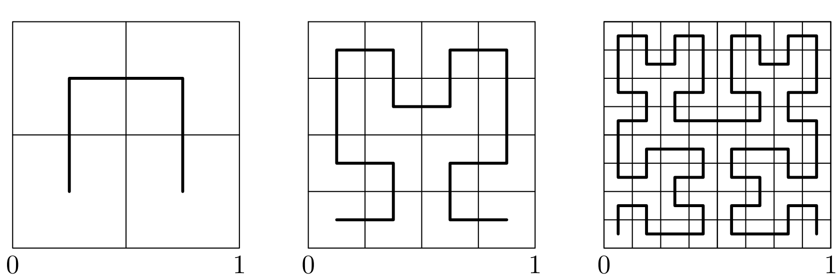
Несложно придумать пример ограниченной области с бесконечным числом компонент границы. Возьмём единичный круг и выкинем из него последовательность кругов радиуса $\frac{1}{10^n}$ с центрами в точках $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Они заведомо не пересекаются, и граница каждого из них является континуумом.

Теорема 1.10 (Жордана). *Любая замкнутая жорданова кривая разбивает плоскость на два непересекающихся множества, границей каждого из которых она является.*

Доказательства этой теоремы в нашем курсе не будет.

1.1.8. Кривая Пеано и жорданова кривая положительной площади

Кривая Пеано является отображением отрезка $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1]^2$. На рисунке показано 3 итерации её построения. Каждая следующая итерация может быть получена из предыдущей таким образом: берём образ при n-й итерации, уменьшаем вдвое по каждому измерению, а затем 4 копии этого множества располагаем во всех четвертях единичного квадрата. При этом первая копия поворачивается на $-\frac{\pi}{2}$, последняя — на $\frac{\pi}{2}$. Затем соединяем отрезками соответствующие концы кусков кривой. Параметризуется эта кривая очевидным образом: отрезок $[0, 1]$ дробится на 4^n частей, каждая из которых параметризует прямолинейный кусочек кривой Пеано.



Утверждение 1.11. *На плоскости существует жорданова кривая кривая положительной площади.*

Честно говоря, я не понял, как оно там строится. Кроме того, не совсем ясно, почему получаемое множество вообще измеримо. Есть хорошая (но редкая) книжка «Контрпримеры в анализе», там есть этот пример, но её у меня в данный момент нет, и переписать доказательство неоткуда.

1.1.9. Спрямляемые кривые. Натуральная параметризация

Определение. *Длина* кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — это число

$$|\gamma| := \sup \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|, \tag{9}$$

где точная верхняя грань берётся по всем разбиениям отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0, , \ldots, t_n = b$.

Определение. Говорят, что кривая *спрямляема*, если её длина конечна.

Определение. Говорят, что кривая γ имеет *натуральную* параметризацию, если $[a,b] = [0, |\gamma|]$, и для любых точек s_1 и s_2 выполнено неравенство

$$|z(s_1) - z(s_2)| \leqslant |s_1 - s_2|. \tag{10}$$

Для «хороших» кривых у этого неравенства есть очень простой смысл: $|\dot{z}(t)| \equiv 1$.

Куда более практичным является следующее определение натуральной параметризации:

Определение. Пусть $\gamma\colon [0,L] \to \mathbb{C}$. Параметризация называется *натуральной*, если для всякого $s \in [0,L]$ длина ограничения кривой на отрезок $[0,s]$ равна s.

Определение. Две параметризации одной и той же кривой $z(t_1)\colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ и $z(t_2)\colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ назовём *эквивалентными*, если существует непрерывная и строго монотонная функция $\theta\colon [\alpha_1, \beta_1] \mapsto [\alpha_2, \beta_2]$, такая что $\theta(\alpha_1) = \alpha_2,\ \theta(\beta_1) = \beta_2$ и $z(t_2) = z\big(\theta(t_1)\big)$.

Задача 1.5. *Доказать эквивалентное определение длины кривой:*

$$|\gamma| = \lim_{\lambda_T \to 0} \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|. \tag{11}$$

Задача 1.6. *Доказать, что спрямляемая кривая имеет касательную почти всюду.*

Указание. Здесь нужно вспомнить два факта: во-первых, спрямляемая кривая — это функция ограниченной вариации, и во-вторых, теорему из курса действительного анализа о том, что функции ограниченной вариации дифференцируемы почти всюду. Отсюда сразу следует утверждение задачи, но доказательство второго факта отнюдь не тривиально и потому здесь не приводится.

Задача 1.7. *Доказать, что длина кривой не зависит от параметризации.*

Указание. Нужно воспользоваться тем, что для каждой частичной суммы при одной параметризации можно найти такое разбиение второго отрезка параметризации, что эти суммы совпадут.

Определение. Кривая γ называется *гладкой*, если функция γ дифференцируема на $[a,b]$ и $\gamma'(t) \neq 0$ для $\forall\, t \in [a,b]$.

Задача 1.8. *Доказать, что длина гладкой кривой γ вычисляется по формуле*

$$|\gamma| = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\, dt. \tag{12}$$

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать только *правильные* параметризации кривых, то есть $\gamma(t) \neq \mathrm{const}$ ни на каком интервале отрезка параметризации.

Задача 1.9. *Доказать, что для любой параметризации кривой существует эквивалентная правильная параметризация.*

1.2. Стереографическая проекция

1.2.1. Формулы стереографической проекции

Рассмотрим сферу S^2 единичного радиуса с центром в начале координат и плоскость $\pi := Oxy$. Пусть $P(0,0,1)$ — северный полюс сферы. Возьмём на сфере любую точку M и через точки P и M проведём прямую, которая при условии $M \neq P$ пересекает π в точке M'. Это так называемая *стереографическая* проекция сферы на плоскость. Очевидно, отображение взаимно однозначное. Получим координатные формулы для стереографической проекции.

Пусть M имеет координаты (ξ, η, ζ), а M' имеет координаты (x, y) на плоскости. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $P(0,0,1)$ и $M'(x,y,0)$:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1}. \tag{13}$$

Преобразуя его, получаем

$$\xi = x(1-\zeta), \quad \eta = y(1-\zeta). \tag{14}$$

Отсюда получаем выражения для координат точки M':

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{15}$$

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}. \tag{16}$$

Так как точка M лежит на сфере, то $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$. Учитывая это и подставляя выражения для ξ и η, получаем выражения для координат точки M через координаты точки M':

$$\xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}. \tag{17}$$

В комплексных числах — совсем просто:

$$\xi + i\eta = \frac{2z}{|z|^2+1}, \quad \zeta = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}. \tag{18}$$

Замечание. Можно также рассматривать другие виды стереографической проекции. Например, можно положить сферу на плоскость так, чтобы она касалась её южным полюсом. При этом немного изменятся формулы, но все свойства останутся прежними.

1.2.2. Расширенная комплексная плоскость

При стереографической проекции одна из точек на сфере, а именно северный полюс, не имеет образа на плоскости. Если точка на плоскости стремится к бесконечности (по модулю), то её прообраз на сфере, очевидно, стремится к полюсу. Это наблюдение побуждает выполнить совершенно естественную операцию: добавить к $\mathbb{C}$ бесконечно удалённую точку. Тогда стереографическая проекция будет биективным отображением $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на S^2. Окрестностями ∞ будем назвать множества точек $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > r\}$. Построенное таким образом топологическое пространство будем обозначать через $\overline{\mathbb{C}}$. Отображение стереографической проекции, доопределённое в точке P, будет гомеоморфизмом. Пополненную комплексную плоскость часто называют *сферой Римана*.

Замечание. Операция, которая была проделана выше, называется *компактификацией*, так как некомпактное многообразие $\mathbb{C}$ превращается в компактное S^2. Иногда его ещё называют *проективизацией*, ибо полученное множество, как легко видеть, есть не что иное, как комплексная проективная прямая $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Определение. *Сферическим расстоянием* между двумя точками на $\overline{\mathbb{C}}$ называется расстояние между соответствующими точками на сфере (длина дуги большого круга). *Хордальным расстоянием* между точками на $\overline{\mathbb{C}}$ называется длина хорды, соединяющей их образы на сфере.

Замечание. Хордальная метрика плоха тем, что она не является инвариантной относительно сдвигов: вообще говоря, $\rho(x+z, y+z) \neq \rho(x, y)$.

Замечание. Любая рациональная функция непрерывно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Пример 2.1. Рассмотрим отображение $w = \frac{1}{z}$, доопределим его: $0 \leftrightarrow \infty$. Тогда оно будет непрерывным.

Задача 1.10. *Вывести формулу для сферического расстояния.*

1.2.3. Свойства стереографической проекции

В следующей теореме прямую на плоскости мы считаем окружностью бесконечного радиуса.

Теорема 1.12 (Круговое свойство). *Стереографическая проекция осуществляет биекцию между окружностями на сфере Римана и окружностями на плоскости.*

□ Запишем общее уравнение окружности на плоскости:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0. \tag{19}$$

Подставляя координаты стереографической проекции, получаем

$$A\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}+B\frac{\xi}{1-\zeta}+C\frac{\eta}{1-\zeta}+D=0. \tag{20}$$

Теперь вспомним, что $\xi^2+\eta^2=1-\zeta^2$. Подставим это выражение в уравнение и преобразуем его:

$$B\xi+C\eta+(A-D)\zeta+(A+D)=0. \tag{21}$$

Получилось линейное уравнение, задающее некоторую плоскость. В пересечении этой плоскости со сферой Римана получится окружность.

Остаётся заметить, что образом прямой на плоскости будет окружность на сфере, проходящая через северный полюс P. Действительно, если $A=0$, то точка $(0,0,1)$ удовлетворяет полученному уравнению. ■

1.2.4. Постоянство растяжений

Сейчас мы покажем, что при стереографической проекции имеет место так называемое постоянство растяжений: бесконечно малые вектора dz при проекции растягиваются «одинаково по всем направлениям», то есть $|dM(z)|=K(z)|dz|$, где функция $K(z)$ зависит только от точки z и не зависит от направления вектора dz.

Предварим эти формулы одной фразой из курса дифференциальной геометрии: Именно, покажем, что стереографическая проекция индуцирует на сфере конформно-евклидову метрику.

Утверждение 1.13. *Для стереографической проекции функция $K(z)$ равна $\frac{2}{1+|z|^2}$.*

□ Имеем

$$d\xi=\frac{\partial\xi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}\,dy=\quad\frac{2(y^2-x^2+1)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy, \tag{22}$$

$$d\eta=\frac{\partial\eta}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}\,dy=-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx+\frac{2(x^2-y^2+1)}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy, \tag{23}$$

$$d\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\,dy=\quad\frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx+\frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy. \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Отсюда

$$|dM(z)|^2=(d\xi)^2+(d\eta)^2+(d\zeta)^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\quad\Rightarrow\quad|dM(z)|=\frac{2}{1+|z|^2}\cdot|dz|. \tag{26}$$

■

1.2.5. Угол с вершиной в бесконечности

Пусть на плоскости заданы две ориентированные прямые, проходящие через точку a, и угол между ними равен α. Напомним, что углом между прямыми называется такой угол, при повороте на который вокруг точки a одна из прямых переходит в другую (так, чтобы ориентации совпали).

Пусть $a=0$. Сделаем стереографическую проекцию этих прямых. Они перейдут в два больших круга ω_1 и ω_2 сферы, проходящих через северный полюс P. Очевидно, что угол между окружностями по модулю равен α, а по ориентации — противоположен ему, то есть равен $-\alpha$. Это число мы и примем за определение угла с вершиной в бесконечности. Покажем, что эта величина не зависит от точки a. В самом деле, осуществим параллельный перенос на плоскости так, чтобы точка a переехала в нуль. Угол и его ориентация при этом не изменится, а при проекции поменяется только знак.

Разумно поставить вопрос: а чему равен угол между параллельными прямыми? Стереографические проекции параллельных прямых имеют общую касательную, а потому угол между ними равен нулю.

Определение. Углом между кривыми в бесконечности называется угол между их касательными в точке ∞, если смотреть из центра сферы.

Определение. Отображение двумерных ориентируемых поверхностей называется *конформным*, если оно обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов по модулю и ориентации.

Если меняется ориентация углов, то говорят, что это конформное отображение *второго рода*.

Замечание. Из конформности в каждой точке не вытекает глобальная конформность. Пример: e^z конформна в каждой точке $\mathbb{C}$. Но оно не является взаимно-однозначным отображением в силу периодичности.

Теорема 1.14. *Стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми.*

□ Доказательство, которое было дано на лекциях, мне не понравилось, тем более, что мы в предыдущем пункте уже вывели формулы для метрики на сфере, конформно-эквивалентной евклидовой. Рассмотрим кривые

$\vec{r}_1(t) = \big(x_1(t), y_1(t)\big)$ и $\vec{r}_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$ на плоскости, пересекающиеся в точке z. Из постоянства растяжений касательных векторов очевидным образом следует сохранение углов: $\cos\varphi = \frac{(dr_1, dr_2)}{|dr_1|\cdot|dr_2|}$. В силу постоянства растяжений

$$\cos\varphi = \frac{K(z)(dx_1dx_2 + dy_1dy_2)}{\sqrt{K(z)(dx_1^2 + dy_1^2)}\cdot\sqrt{K(z)(dx_2^2 + dy_2^2)}} = \frac{dx_1dx_2 + dy_1dy_2}{\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2}\cdot\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}. \tag{27}$$

Правая часть последнего равенства есть в точности выражение для угла между кривыми на плоскости. ■

1.2.6. Симметрии сферы Римана и отображение $\frac{1}{z}$

Рассмотрим пару точек M и M^* на сфере, симметричных относительно экватора (плоскости $O\xi\eta$). Пусть они имеют координаты $M(\xi,\eta,\zeta)$ и $M^*(\xi,\eta,-\zeta)$. Пусть z и z^* — их прообразы при стереографической проекции. Тогда

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \quad z^* = \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta} \quad \Rightarrow \quad z^*\cdot\overline{z} = \frac{\xi^2+\eta^2}{1-\zeta^2}. \tag{28}$$

Снова вспоминая, что $\xi^2 + \eta^2 = 1 - \zeta^2$, получаем, что $z^*\cdot\overline{z} = 1$. Это свойство можно положить в основу определения симметрии на расширенной плоскости.

Определение. Точки z и z^* называются *симметричными* (относительно единичной окружности), если

$$z^*\cdot\overline{z} = 1. \tag{29}$$

В общем случае, для окружности произвольного радиуса r, справа от знака равенства стоит число r^2.

Точка 0 симметрична точке ∞, так как $z^* = \frac{1}{\overline{z}}$.

Из свойств стереографической проекции получаем, что преобразование $\frac{1}{z}$ сохраняет углы. В самом деле, мы показали, что оно соответствует зеркальной симметрии сферы, которая, разумеется, сохраняет углы, а при проекции углы тоже не поменяются. По аналогичным соображениям она обладает круговым свойством.

В завершение этой темы отметим, что преобразование $z\mapsto z^*$ является конформным автоморфизмом сферы.

2. Функции комплексного переменного

2.1. Голоморфные функции и их простейшие свойства

2.1.1. Предел функции, непрерывность. Модуль непрерывности

Предел функции в точке определяется также, как в математическом анализе.

Определение. Модулем непрерывности функции $f\colon D\to\mathbb{C}$ на множестве D называется число

$$\omega_f(D,\delta) := \sup\left\{|f(x)-f(y)| \text{ по всем точкам } x,y\in D\colon |x-y|<\delta\right\}. \tag{1}$$

Очевидно, модуль непрерывности есть неубывающая функция от параметра δ. В дальнейшем, если из контекста понятно, о какой функции и о каком множестве идёт речь, мы будем опускать индекс «f» и первый аргумент функции ω.

Утверждение 2.1. *Если множество D выпукло, то $\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$.*

□ Пусть $z', z''\in D$, и точка z лежит на отрезке $[z', z'']$. Тогда, по определению выпуклого множества, $z\in D$. Пусть $|z'-z| = \delta_1$ и $|z-z''| = \delta_2$. Имеем

$$|f(z')-f(z'')| = |f(z')-f(z)+f(z)-f(z'')| \leqslant |f(z')-f(z)| + |f(z)-f(z'')| \leqslant \omega(\delta_1)+\omega(\delta_2). \tag{2}$$

Остаётся перейти к точной верхней грани по всем точкам z' и z'', для которых $|z'-z''|\leqslant\delta_1+\delta_2$. ■

Следствие 2.1. *Если множество D выпукло, то $\omega(n\cdot\delta)\leqslant n\cdot\omega(\delta)$.*

Следствие 2.2. *Если $\omega_f(D,\delta) = \overline{o}(\delta)$, то $f\equiv\mathrm{const}$.*

□ В самом деле, если это условие выполнено, то

$$\frac{|f(z')-f(z'')|}{|z'-z''|} \leqslant \frac{\omega_f(D, |z'-z''|)}{|z'-z''|} \to 0, \quad |z'-z''|\to 0. \tag{3}$$

Таким образом, $f'\equiv 0$. Этого, как мы скоро увидим, достаточно для того, чтобы $f\equiv\mathrm{const}$. ■

Задача 2.1. *Доказать, что если множество D выпукло и ограничено, а функция $f\colon D\to\mathbb{C}$ не постоянна, то найдётся константа C такая, что $\omega_f(D,\delta)\geqslant C\cdot\delta$.*

2.1.2. Комплексная дифференцируемость

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки z_0. *Комплексной производной* функции f в точке z_0 называется следующий предел (если он существует):

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{4}$$

Также, как и в курсе математического анализа, доказываются все свойства производной (арифметические операции, дифференцируемость сложной и обратной функций).

Существование предела можно переписать так: $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$ при $\Delta z \to 0$. Это означает, что приращение функции есть комплексный дифференциал. Такие функции называются комплексно-дифференцируемыми или, короче, $\mathbb{C}$-дифференцируемыми.

Определение. Говорят, что функция f *голоморфна (аналитична)* в точке z_0, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $f(z)$, определённая в окрестности ∞, называется голоморфной в бесконечности, если функция $f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна в точке 0.

Пример 1.1. Найдём производную функции $f(z) = z$. Имеем $\frac{z+h-z}{h} = 1$, поэтому $f' = 1$.

Пример 1.2. Попробуем теперь продифференцировать функцию $f(z) = \overline{z}$. Имеем $\frac{\overline{z+h-\overline{z}}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$. Пойдем по разным направлениям: на вещественной оси имеем $h = \Delta x$ и $\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, а на мнимой $h = i\Delta y$ и $\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$, то есть предела не существует.

2.1.3. Условие Коши – Римана

Теорема 2.2. *Функция $f(z) = u\,(x, y) + iv\,(x, y)$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в ней выполняется условие Коши – Римана (Даламбера – Эйлера):*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{5}$$

$\square$ Необходимость: Пусть $\exists\, f'(z_0) = a + ib$, тогда

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\rho) = \Delta u + i\Delta v = (a + ib)\,(\Delta x + i\Delta y) + o(\rho), \text{ где } \rho = |\Delta z| \to 0, \tag{6}$$

откуда

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\rho), \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\rho). \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда следует, что функции u и v дифференцируемы. Полученные равенства представляют собой условие Коши – Римана, т. к.

$$\begin{cases} a\Delta x = u_x, \quad b\Delta x = v_x, \\ a\Delta y = v_y, \quad b\Delta y = -u_y. \end{cases} \tag{8}$$

Тем самым необходимость доказана. Попутно доказана и достаточность, так как все рассуждения обратимы. $\blacksquare$

Теорема 2.3 (Лумана – Меньшова). *Если функция f непрерывна в области D и в каждой точке области выполняется условие Коши – Римана, то она $\mathbb{C}$-дифференцируема в области D.*

Замечание. На самом деле эта теорема верна и в ещё более слабых предположениях: условие Коши – Римана выполняется почти всюду (относительно лебеговой меры), а функция a priori может быть не дифференцируемой в счётном числе точек области.

Замечание. Из одного лишь условия Коши – Римана не вытекает комплексная дифференцируемость. Пример: $f(z) = 0$ на осях, $f(z) = 1$ иначе.

2.1.4. Формальные частные производные

Пусть f — $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция. Напишем её дифференциал: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Имеем

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2}, \\ dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}. \end{cases} \tag{9}$$

Подставляя dx и dy в выражение для дифференциала, получим

$$df = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}. \tag{10}$$

Введём специальные обозначения для дифференциальных операторов.

Определение. *Формальными частными производными* $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ называются выражения в скобках в формуле (10).

Условие Коши – Римана в терминах формальных частных производных записывается так: $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Условие комплексной дифференцируемости означает, что функция не зависит от $\overline{z}$.

Если комплексная производная существует, то её можно вычислить по одной из двух формул: либо $\frac{df}{dx}$, либо $\frac{df}{idy}$, так как по условию Коши – Римана $\frac{df}{dx} = \frac{df}{idy}$:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{idx} = \frac{du}{idy} + \frac{dv}{dy} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{11}$$

2.1.5. Сопряжённые гармонические функции

Определение. Вещественная функция $u = u(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если $u \in \mathbf{C}^2(D)$ и в этой области выполнено *условие Лапласа:*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{12}$$

Утверждение 2.4. *Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфна в области D, то функции u и v гармоничны в этой области.*

☐ Напишем условие Коши – Римана и два раза продифференцируем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Складывая равенства, получаем, что $\Delta u = \Delta v = 0$, что и требовалось. Остаётся только обосновать существование второй производной, но это будет сделано позднее. ■

Определение. *Сопряжёнными* гармоническими функциями называются гармонические функции, являющиеся вещественной и мнимой частями некоторой голоморфной функции.

Вреде бы он этого не доказывал, но в прошлом году оно на лекциях было... Пусть остаётся для полноты, но мелким шрифтом.

Утверждение 2.5. *Если функция u гармонична в односвязной области D, то найдётся функция $f = u + iv$, голоморфная в области D.*

☐ В силу условия Коши – Римана дифференциал искомой функции равен

$$df = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy. \tag{14}$$

Положим $P(x, y) := -u'_y$ и $Q(x, y) = u'_x$. Функции P, Q, Q'_x и P'_y непрерывны в односвязной области D. Продифференцируем форму $Pdx + Qdy$:

$$d\,(P\,dx + Q\,dy) = (P'_x\,dx + P'_y\,dy) \wedge dx + (Q'_x\,dx + Q'_y\,dy) \wedge dy = P'_y\,dy \wedge dx + Q'_x\,dx \wedge dy = (Q'_x - P'_y)\,dx \wedge dy. \tag{15}$$

Она будет полным дифференциалом, если $Q'_x - P'_y = 0$. Покажем, что верно и обратное. Если $Q'_x - P'_y = 0$, то по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{D} (Q'x - P'_y)\,dx\,dy = 0, \tag{16}$$

а из критерия потенциальности поля (вспомните математический анализ!) следует, что если интеграл по замкнутому контуру нулевой, то поле потенциально, то есть его компоненты являются частными производными некоторой функции. Таким образом можно построить требуемую функцию v:

$$v(x, y) := \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy. \tag{17}$$

Из того же критерия следует, что интеграл не зависит от выбора пути интегрирования. ■

Замечание. В многосвязной области такое утверждение не верно. Пример: функция $u = \ln r$.

Задача 2.2. *Выразить оператор Лапласа через формальные частные производные* $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Тут есть некоторое количество задач, которых на лекциях этого года их не было, но они были 2 года назад. Возможно, Долженко любит давать их на экзаменах.

Задача 2.3. *Пусть функция w $\mathbb{R}$-дифференцируема. Доказать, что она $\mathbb{C}$-дифференцируема, если существует один из следующих пределов:*

$$\lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|, \quad \lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{18}$$

Задача 2.4. *Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой. Доказать, что множество предельных точек $\left\{\frac{\Delta f}{\Delta z}\right\}$ есть либо точка, либо окружность. Найти её центр и радиус.*

Задача 2.5. *Функция $f = u + iv$ голоморфна в области D, и $f \neq 0$. Доказать, что линии уровня функций u и v (то есть $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$) пересекаются под прямым углом.*

Задача 2.6. *Доказать инвариантность условия Коши – Римана относительно вращения плоскости: Тогда условие Коши – Римана запишется следующим образом: $\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial v}{\partial \overline{s}}$, $\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} = -\frac{\partial u}{\partial \overline{s}}$, где $|\overline{s}| = 1$ и $|\overline{n}| = 1$. В частности, записать условие Коши – Римана в полярных координатах.*

2.1.6. Полианалитические функции

Определение. Функция f называется *полианалитической* (точнее, *n-аналитической*), если $\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0$.

Полианалитические функции имеют вид

$$w(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z) + \overline{z}^2\varphi_2(z) + \ldots + \overline{z}^{n-1}\varphi_{n-1}(z), \tag{19}$$

где $\varphi_i(z)$ — аналитические функции.

2.2. Конформность и дифференцируемость

2.2.1. Геометрический смысл комплексной производной

Выясним геометрический смысл аргумента и модуля комплексной производной. Рассмотрим $\mathbb{R}$-дифференцируемую функцию $w = f(z)$. У неё есть дифференциал $df = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — некоторое линейное преобразование плоскости. Функция будет $\mathbb{C}$-дифференцируемой $\Leftrightarrow$ $df = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ вследствие условия Коши – Римана. Линейное преобразование такого вида, очевидно, есть умножение на число $a+ib$. Таким образом, «в первом приближении» происходит растяжение в $|f'(z_0)|$ раз и поворот на угол $\arg f'(z_0)$, если, конечно, $f'(z_0) \neq 0$.

Таким образом, голоморфные функции обладают свойством постоянства растяжений и сохранения углов.

Если же $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0)$, а $f^{(k)} \neq 0$, то по формуле Тейлора

$$\Delta w = c_k(\Delta z)^k + c_{k+1}(\Delta z)^{k+1} + \ldots, \tag{20}$$

поэтому происходит увеличение углов в k раз.

Задача 2.7. *Доказать, что если функция обладает свойством постоянства растяжений и сохраняет углы, то она аналитична.*

Решение. Откройте лекции В. К. Белошапки (см. `http://www.dmvn.mexmat.net`) на странице 15 и прочтите *Предложение 1.3* и *Утверждение 3.3.* Мне лень их переписывать оттуда... ■

2.2.2. Основные теоремы о конформных отображениях

Теорема 2.6 (Х. Бор, 1918 г.). *Если функция f в области G является однолистным гомеоморфизмом и имеет постоянство растяжений в каждой точке, причём коэффициент растяжения k не равен нулю, то либо f, либо $\overline{f}$ аналитична в G.*

В 1919 году Радемахером было доказано ещё более сильное утверждение: было убрано требование $k \neq 0$.

Теорема 2.7 (Д. Е. Меньшов, 1923 – 1926 г.). *Если функция f в области G является гомеоморфизмом и сохраняет углы (как по ориентации, так и по величине), то она аналитична в G.*

Теорема 2.8 (Б. Риман). *Пусть область G односвязна и граница ∂G состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение этой области на единичный круг $\{z\colon |z| < 1\}$.*

Таких отображений на самом деле существует бесконечно много. Анри Пуанкаре доказал, что если зафиксировать прообраз нуля, то есть такую точку a, что $f(a) = 0$, и число $\alpha = \arg f'(a)$, то такое отображение единственно. Это и есть *нормировка конформного отображения* (один из способов).

Теорема 2.9 (Каратеодори). *Пусть D_1 и D_2 — односвязные области с жордановыми границами, и $f\colon D_1 \to D_2$ — конформное отображение. Тогда f продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$.*

Эта теорема позволяет ввести ещё одно условие нормировки. Фиксируем точки

$$a_1 \in D_1, \quad b_1 \in \partial D_1, \quad a_2 \in D_2, \quad b_2 \in \partial D_2.$$

Отображение f, такое что $f(a_1) = a_2$ и $f(b_1) = f(b_2)$, единственно.

Теорема 2.10 (принцип симметрии). *Пусть граница области D_1 содержит участок прямой или окружности γ_1, а D_1^* — симметричная относительно γ_1 область, и $D \cap D^* = \varnothing$; Пусть (D_2, D_2^*, γ_2) — набор с теми же свойствами. Пусть функция $f\colon D_1 \to D_2$ — конформное отображение, продолжаемое по непрерывности до взаимно-однозначного соответствия границ: $f\colon \gamma_1 \to \gamma_2$. Тогда продолженное по симметрии отображение f даёт конформное отображение $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \mapsto D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$.*

2.3. Дробно-линейные преобразования

2.3.1. Определение и свойства

Определение. *Дробно-линейным преобразованием (ДЛП)* называется функция вида

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{21}$$

Замечание. Мы хотим, чтобы ДЛП были гомеоморфизмами из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Если же $ad - bc = 0$, то числитель и знаменатель дроби пропорциональны, следовательно, дробь сокращается и $w(z) = \mathrm{const}$. А постоянное отображение не является гомеоморфизмом.

Теорема 2.11. *Все ДЛП образуют группу относительно композиции.*

□ Очевидно: перемножить и посмотреть, что получится. ■

Можно доказать, что конформными автоморфизмами сферы Римана являются дробно-линейные преобразования, и только они. Поэтому мы будем группу ДЛП обозначать через $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

Рассмотрим группу $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$. Зададим отображение $\varphi\colon \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto w(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{22}$$

Легко видеть, что это гомоморфизм групп. Найдём его ядро. $\mathcal{A} \in \mathrm{Ker}\,\varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi(\mathcal{A}) = \mathrm{id}$, то есть $\frac{az+b}{cz+d} \equiv z$. При постоянном отображении $0 \mapsto 0$, поэтому $\frac{b}{d} = 0$, а так как $\infty \mapsto \infty$, то $\frac{a}{c} = 0$. Значит, $b = 0,\ d \neq 0$, и $a = 0,\ c \neq 0$. Так как $1 \mapsto 1$, то $\frac{a}{d} = 1$, а значит, $a = d$. Значит, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\lambda\mathcal{E} \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$. По теореме о гомоморфизме

$$\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbf{PSL}_2(\mathbb{C}). \tag{23}$$

2.3.2. Простейшие ДЛП и их геометрический смысл

Определение. Простейшими ДЛП назовём:

1. Сдвиг на вектор b: $\Pi_1(z) := z + b$;
2. Поворот на угол $\arg a$ и растяжение в $|a|$ раз: $\Pi_2(z) := az$;
3. *Инверсия*: композиция двух симметрий относительно единичной окружности и относительно вещественной оси: $\Pi_3(z) := \frac{1}{z}$.

Покажем, что преобразование $\frac{1}{z}$ действительно есть композиция двух симметрий. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\Pi_3(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}. \tag{24}$$

Теорема 2.12. *Любое ДЛП разлагается в композицию простейших.*

□ Основная идея: поделить числитель на знаменатель нацело. Пример: $w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(z+1)-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$. В общем виде всё аналогично, только формулы страшнее. Для нашего примера имеем $z \mapsto z_1 := z + 1$, затем $z_1 \mapsto z_2 := \frac{1}{z_1}$, далее $z_2 \mapsto z_3 := -2z_2$, и наконец, $z_3 \mapsto w = z_3 + 1$ — это композиция простейших ДЛП. ■

2.3.3. Свойство конформности для ДЛП

Теорема 2.13. *ДЛП сохраняют углы между кривыми.*

□ Достаточно доказать утверждение для простейших ДЛП. Для первых двух всё очевидно. Докажем для инверсии. Мы уже знаем, что преобразование $\frac{1}{\bar{z}}$ соответствует зеркальной симметрии сферы Римана, и потому сохраняет углы. Значит, $\frac{1}{z}$ тоже сохраняет углы, так как сопряжение, очевидно, обладает этим свойством. ■

Замечание. ДЛП сохраняют углы не только по величине, но и по направлению.

2.3.4. Круговое свойство ДЛП

Теорема 2.14. *ДЛП переводят окружности в окружности (прямая — тоже окружность).*

□ Снова достаточно рассмотреть простейшие ДЛП. Для первых двух всё очевидно, а для инверсии достаточно снова вспомнить круговое свойство стереографической проекции и симметрии сферы. ■

2.3.5. Свойство 3 точек для ДЛП

Определение. *Двойным отношением 4 точек* называется число

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}. \tag{25}$$

Лемма 2.15. *Двойное отношение сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.*

□ Не верите — подставьте и убедитесь в том, что оно действительно сохраняется. ■

Теорема 2.16. *Для любых 3 различных точек z_1, z_2, z_3 и любых 3 различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛП, переводящее z_i в w_i.*

□ По лемме двойное отношение инвариантно относительно ДЛП, то есть

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z] = [w_1 : w_2 : w_3 : w]. \tag{26}$$

Рассмотрим это выражение как уравнение на z и w. Координаты точки w однозначно определяются по координатам точки z (причём дробно-линейной функцией), если z_i и w_i фиксированы. Поэтому, если мы знаем, что $z_i \mapsto w_i$, то образ любой другой точки z однозначно определяется. ■

Задача 2.8. *Четыре точки лежат на одной окружности ⇔ их двойное отношение вещественно.*

2.3.6. Неподвижные точки ДЛП

Линейное отображение вида $w(z) = az + b$ при $a \notin \{0, 1\}$, очевидно, имеет две неподвижные точки: $\left\{\frac{b}{1-a}, \infty\right\}$. Если $a \to 1$, то бесконечность становится «двойной» неподвижной точкой. Если $a = 1$ и $b = 0$, то все точки неподвижны.

Для дробно-линейных отображений неподвижными являются корни уравнения $cz^2 + (d - a)z - b = 0$.

2.3.7. Автоморфизмы единичного круга

На лекциях оно было, но без доказательств. Но они не повредят. Тут есть ссылка на принцип максимума, который был доказан в конце курса. Заодно здесь доказана лемма Шварца.

Через Δ обозначим открытый единичный круг.

Лемма 2.17 (Шварц). *Пусть функция $f\colon \Delta \to \Delta$ голоморфна в Δ. Пусть $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$. Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$, причём если существует точка $z_0 \in \Delta$ такая, что $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) = e^{i\theta} z$.*

□ Рассмотрим функцию $\varphi(z) := \frac{f(z)}{z}$. Поскольку $f(0) = 0$, то нуль будет устранимой точкой для $\varphi(z)$. Значит, φ голоморфна в круге Δ.

Возьмём замкнутый круг радиуса $\rho < 1$. По принципу максимума функция φ достигает своего максимума на границе этого круга. Но так как $|f(z)| \leqslant 1$, то

$$|\varphi(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{\rho}. \tag{27}$$

Устремляя ρ к единице, получаем $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$, следовательно, $|f(z)| \leqslant |z|$.

Пусть теперь $|f(z_0)| = |z_0|$ в некоторой точке z_0. Из доказанного выше следует, что $|\varphi| \leqslant 1$. В точке z_0 функция $|\varphi|$ достигает значения 1, а больше единицы быть не может. Значит, по принципу максимума $\varphi = \mathrm{const}$ и $|\varphi| = 1$, то есть $\varphi(z) = e^{i\theta}$. Тогда $f(z) = e^{i\theta} z$ — поворот на угол θ. ■

Обозначим через G_2 группу отображений следующего вида:

$$G_2 := \left\{ T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a} z} \right\}, \text{ где } |a| < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Теорема 2.18. $\mathrm{Aut}(\Delta) \cong G_2$. *Эта группа действует на Δ транзитивно.*

□ Пусть $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ — конформный автоморфизм круга. Пусть $\varphi(0) = a$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование $T \in G_2$, заданное формулой $T(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Оно переводит точку a в нуль, то есть композиция $\Phi := T \circ \varphi$ оставляет нуль на месте: $\Phi(0) = 0$. Применим к отображению Φ лемму Шварца. Она утверждает, что

$$|\Phi(z)| \leqslant |z|. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим обратное отображение Φ^{-1}. Это тоже будет некоторый автоморфизм круга, сохраняющий нуль, и к нему тоже можно применить лемму Шварца, откуда

$$|\Phi^{-1}(w)| \leqslant |w|. \tag{30}$$

Подставим в эту формулу $\Phi(z)$ вместо w. Так как $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}$, то

$$\left|\Phi^{-1}\big(\Phi(z)\big)\right| \leqslant |\Phi(z)| \;\Rightarrow\; |z| \leqslant |\Phi(z)|. \tag{31}$$

Тем самым мы получили обратное неравенство к (29). Значит, $|\Phi(z)| = |z|$ для любой точки z. По второму утверждению леммы Шварца $\Phi(z) = e^{i\theta}z$. Значит, $\varphi = T^{-1} \circ \Phi$ — отображение, являющееся композицией некоторого поворота и дробно-линейного отображения, то есть $\varphi \in G_2$. Следовательно, $\mathrm{Aut}(\Delta) \cong G_2$.

Транзитивность следует из того, что любую точку можно перевести в нуль соответствующим преобразованием, а затем с тем же успехом можно нуль отправить куда угодно. ■

Дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на единичный круг имеют вид

$$\left\{T(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}\right\}, \text{ где } |a| < 1, \operatorname{Im} a > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Для полноты картины сообщим без доказательства тот факт, что группа конформных отображений $\mathbb{C}$ (не расширенной!) есть группа линейных преобразований вида $w(z) = az + b$.

2.4. Элементарные комплексные функции

2.4.1. Экспонента

Определение.

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{33}$$

Экспонента голоморфна во всём $\mathbb{C}$ (но не расширенном). Так как $w'(z) = e^z$, то отображение конформно в каждой точке.

Из определения следует, что эта функция имеет период $2\pi i$. Областью однолистности для e^z будет любая область, не содержащая различных точек, отличающихся на её период.

Задача 2.9. *Рассмотрим* $D = \{z = x + iy \colon x \in (0, \ln 2),\ y \in (0, \pi)\}$. *Найти* $\exp(D)$.

Решение. $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Имеем $R = e^x, R \in (1, 2)$, а угол меняется от 0 до π.

2.4.2. Комплексный логарифм

Определение. *Логарифм* комплексного числа определяется так: $w = \ln z \;\Leftrightarrow\; e^w = z$.

Если в определении $z = 0$, то $\ln z$ не определён, так как $w = u + iv$ и $|e^w| = e^u > 0$ для любого w. Если $z \neq 0$, то $z = re^{i\varphi}$ и $e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$. Поэтому $e^u = r,\ u = \ln r,\ v = \varphi$. Следовательно,

$$\ln z = \ln r + i\operatorname{Arg} z. \tag{34}$$

Определим функцию $\operatorname{Ln} z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тут есть три подхода.

1° Многозначные функции: каждому значению аргумента $z \in \mathbb{C}^*$ ставим в соответствие множество

$$\operatorname{Ln} z := \{\ln r + i\,(\varphi + 2n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{35}$$

2° Непрерывная ветвь: фиксируем некоторую область в $D \subset \mathbb{C}^*$ такую, чтобы функция φ была непрерывной. Любые две ветви отличаются на 2π. Существование ветви зависит от D.

3° Римановы поверхности: мы хотим построить новое топологическое пространство, такое, что на нём функция будет однозначной. Для логарифма риманова поверхность строится так: берём счётное множество $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ экземпляров множества $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ («листов»), вырезаем из каждого луч $(0, \infty)$, а потом склеиваем их так, чтобы получилось что-то вроде винтовой лестницы: к «правому берегу» разреза поверхности s_n приклеиваем «левый берег» разреза листа s_{n+1}.

На новой поверхности определим логарифм так: пусть $z \in s_n$. Положим $\operatorname{Ln} z := \ln r + i\,(\varphi + 2n\pi)\,,\ \varphi \in (-\pi; \pi]$. Такая функция будет непрерывной, так как в любой точке склейки листов значения углов совпадают: $\varphi = \pi + 2\pi n$ на s_n и $\varphi = -\pi + 2\pi(n+1) = \pi + 2\pi n$ на s_{n+1}.

Я понимаю, что без картинки сложно осознать, как это всё устроено. Но времени рисовать её у меня пока нет.

Определение. Степенная функция с комплексным показателем определяется так:

$$z^a := e^{a \ln z}. \tag{36}$$

Задача 2.10. *Найти все значения i^i.*

Решение. Имеем $i^i = e^{i \ln i} = \exp\left[i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)\right] = \exp\left[-\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right]$. ■

2.4.3. Функция Жуковского

Определение. *Функцией Жуковского* называется функция $w := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Функция Жуковского осуществляет непрерывное отображение $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Выясним, в каких точках отображение конформно. Если $z \to 0$, то $w \sim \frac{1}{2z}$, а это конформное отображение. Если $z \to \infty$, то $w \simeq \frac{z}{2} - k$, так что в 0 и на ∞ отображение конформно. Рассмотрим остальные точки: $w' \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, то есть $w' = 0$ при $z = \pm 1$ — в этих точках конформность нарушается.

Найдём области однолистности функции (биективности). Это любая область, не содержащая одновременно точек z и $\frac{1}{z}$. Открытый единичный круг и верхняя полуплоскость являются примерами таковых областей.

Задача 2.11. *Найти такие области, что функция Жуковского является конформным отображением этих областей.*

Решение. Рассмотрим семейство концентрических окружностей внутри единичного круга. Выясним, куда они переходят. Уравнение окружности радиуса r: $z = re^{i\varphi}$ где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Имеем

$$w(z) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]. \tag{37}$$

Получился эллипс с полуосями $a := \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ и $b := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)$. Найдём его фокусное расстояние: $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, откуда получаем, что фокусы находятся в точках ± 1. Рассмотрим предельные случаи. Пусть $r \to 0$, тогда $a \to \frac{1}{2\pi}$ и $b \to \frac{1}{2\pi}$ — в пределе получаем окружность. Если же $r \to 1$, то $a \to 1$ и $b \to 0$, то есть область стягивается к отрезку $[-1, 1]$. Таким образом, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. ■

Фактически мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.19. *Функция Жуковского конформно отображает единичный круг на область $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.*

Функция $z(w) := w + \sqrt{w^2 - 1}$ является обратной к функции Жуковского. Знак выбран так, чтобы z лежало в единичном круге.

Задача 2.12. *Куда функция Жуковского отображает верхнюю полуплоскость?*

2.4.4. Тригонометрические и гиперболические функции

Определение.

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{38}$$

Определение.

$$\operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{39}$$

3. Интеграл по комплексному переменному

3.1. Основные свойства интеграла по кривой

3.1.1. Определение интеграла

Пусть $\gamma(t)\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ — непрерывная кривая. Введём обозначения: *разбиение*

$$T := \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}, \tag{1}$$

его *диаметр* $\lambda_T := \max\limits_j \Delta t_j$. Пусть $z_j := \gamma(t_j)$, и $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$.

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ — произвольная функция на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим разбиение с отмеченными точками $Q_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Составим интегральную сумму:

$$S(T) := \sum_{j=1}^{n} f(Q_j)\Delta z_j. \tag{2}$$

Определение. *Интегралом* называется предел $S = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} S(T)$, если этот предел существует. Обозначение:

$$S = \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz. \tag{3}$$

Замечание. Мы рассматриваем разбиение именно отрезка параметризации, а не самой кривой, так как она может иметь самопересечения.

Задача 3.1.

1. *Теорема существования: Если кривая γ спрямляема, и $f \in \mathbf{C}[a,b]$, то $\int\limits_{\gamma} f\, d\gamma$ существует.*
2. *Если f непрерывна, а γ — гладкая кривая, то $\int\limits_{\gamma} f\, dz = \int\limits_{a}^{b} f(t)\gamma'(t)\, dt$.*

3.1.2. Простейшие свойства интеграла

Теорема 3.1. *Если функция f интегрируема вдоль кривой γ, то она ограничена на ней.*

□ Пусть функция неограничена, тогда существует последовательность точек t_n такая, что $|f\big(\gamma(t_n)\big)| > n$ при $t_n \to \tau$. Рассмотрим разбиение $\{t_k\}$. Пусть $\{t_n\} \subset [t_{k_0}, t_{k_0+1}]$. Тогда одно из слагаемых интегральной суммы стремится к бесконечности:

$$f\big(z(t_n)\big)\big(z(t_{k_0+1}) - z(t_{k_0})\big) \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

■

Замечание. Может оказаться, что $z(t_{k_0+1}) - z(t_{k_0}) = 0$ в силу того, что кривая может иметь самопересечения. Тогда добавим ещё одну точку разбиения между t_{k_0} и t_{k_0+1} и выберем тот из двух отрезков, на который попала точка τ.

Теорема 3.2. *Значение интеграла не зависит от выбора параметризации кривой.*

Я ни хрена не понял, что там он наговорил... По-моему, доказательством там и не пахнет.

Сформулируем некоторые очевидные свойства интеграла.

- Линейность: $\int\limits_{\gamma}(\alpha f + \beta g)\, dz = \alpha \int\limits_{\gamma} f\, dz + \beta \int\limits_{\gamma} g\, dz$.
- Ориентированность: $\int\limits_{-X} f\, dz = -\int\limits_{X} f\, dz$.
- Аддитивность: $\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f\, dz = \int\limits_{\gamma_1} f\, dz + \int\limits_{\gamma_2} f\, dz$.

Свойство аддитивности мы берём в качестве определения интеграла по формальной сумме кривых.

3.1.3. Достаточные условия интегрируемости

Определение. *Полным колебанием* функции f на множестве E называется число

$$\Omega(f, E) := \sup\left\{|f(x') - f(x'')|, \text{ где } x', x'' \in E\right\}. \tag{5}$$

Рассмотрим спрямляемую кривую γ и разбиение T отрезка параметризации этой кривой. Пусть $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ — некоторая функция. Через Ω_k будем обозначать колебание функции f на куске $\gamma\big([t_{k-1}, t_k]\big)$ этой кривой, а через L_k — длину этого куска кривой.

Утверждение 3.3. *Пусть кривая γ спрямляема, и функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Пусть γ_k — куски разбиения кривой. Тогда для каждого «куска» γ_k выполнено неравенство*

$$\frac{1}{2}\big(\Omega(u) + \Omega(v)\big) \leqslant \Omega(f) \leqslant \Omega(u) + \Omega(v). \tag{6}$$

□ Имеем

$$\Omega(f) = \sup|f(z') - f(z'')| = \sup\big|\big(u(z') - u(z'')\big) + i\big((v(z') - v(z'')\big)\big| \leqslant \\ \leqslant \sup|u(z') - u(z'')| + \sup|v(z') - v(z'')| = \Omega(u) + \Omega(v), \tag{7}$$

и таким образом второе неравенство доказано. После сложения очевидных неравенств

$$\begin{cases}\Omega(u) \leqslant \Omega(f)\\ \Omega(v) \leqslant \Omega(f)\end{cases} \tag{8}$$

получаем первое неравенство. ■

Теорема 3.4 (Первый критерий интегрируемости). *Функция f интегрируема на спрямляемой кривой γ тогда и только тогда, когда $\sum \Omega_k L_k \to 0$ при $\lambda_T \to 0$.*

Теорема 3.5 (Второй критерий интегрируемости). *Функция f интегрируема на спрямляемой кривой γ тогда и только тогда, когда множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль.*

3.1.4. Примеры

Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — спрямляемая кривая.

Пример 1.1. Найдём интеграл $\int\limits_\gamma 1\,dz$. Имеем

$$\int\limits_\gamma 1\,dz = \lim_{\lambda_T\to 0} \sum 1\big(\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\big). \tag{9}$$

Промежуточные слагаемые погибают, остаётся

$$\int\limits_\gamma 1\,dz = \gamma(\beta) - \gamma(\alpha). \tag{10}$$

Пример 1.2. Найдём интеграл $\int\limits_\gamma z\,dz$. Так как функция непрерывна и не важно, какую промежуточную точку брать на каждом кусочке кривой, будем брать среднее арифметическое значений на концах отрезков разбиения. Пусть $z_i := \gamma(t_i)$.

$$\sum_{j=1}^n \frac{(z_j + z_{j-1})}{2}(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{(z_j^2 - z_{j-1}^2)}{2} = \big\{ \text{ всё сокращается } \big\} = \frac{1}{2}\left(z_n^2 - z_0^2\right) = \frac{\gamma(\beta)^2 - \gamma(\alpha)^2}{2}. \tag{11}$$

Пример 1.3. Вычислим интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Это гладкая кривая, параметризуем её и посчитаем: Уравнение окружности запишется в виде $z = a + re^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Имеем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}}{\left(re^{i\varphi}\right)^{n+1}}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^n}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi}\,d\varphi = \begin{cases}1, & n = 0;\\ 0, & n \neq 0,\end{cases} \tag{13}$$

так как это интеграл от sin, cos по периоду.

3.1.5. Связь комплексного интеграла с вещественными интегралами

Утверждение 3.6. *Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, а $\gamma = z(t)$ — спрямляемая кривая. Тогда*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy, \tag{14}$$

причём интегралы в правой части существуют тогда и только тогда, когда существует интеграл в левой части.

□ Обозначим $f_k := f\big(z(\tau_k)\big)$. Тогда

$$\sum f_k \Delta z_k = \sum (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k) \to \int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy. \tag{15}$$

Второе утверждение очевидно. ■

Теперь найдём аналог криволинейного интеграла первого рода.

Определение.

$$\int\limits_\gamma f(z)\,|dz| := \lim_{\lambda_T\to 0}\sum f\big(z(\tau_k)\big)|z(t_{k-1})-z(t_k)|. \tag{16}$$

Утверждение 3.7.

$$\int\limits_\gamma f(z)\,|dz| = \int\limits_0^{|\gamma|} f\big(z(s)\big)\,ds. \tag{17}$$

□ Имеем

$$\int\limits_0^{|\gamma|} f\big(z(s)\big)\,ds = \lim_{\lambda_T\to 0}\sum f\big(z(\sigma_k)\big)\Delta s_k. \tag{18}$$

Так как предел не зависит от разбиения и промежуточных точек, Положим $\sigma_k := \tau_k$, $s_k := \tau_k$. Тогда $\Delta s_k = |\gamma_k|$. Тогда

$$\Big|\int\limits_\gamma f\,|dz| - \int\limits_0^{|\gamma|} f\big(z(s)\big)\,ds\Big| = \lim\sum f\big(z(\tau_k)\big)\big(|\gamma_k| - |z(t_k)-z(t_{k-1})|\big) \leqslant \sup_\gamma |f|\cdot o(1)\to 0. \tag{19}$$

■

Утверждение 3.8. *Пусть γ — спрямляемая кривая. Тогда интеграл $\int f\,dz$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int f\,|dz|$.*

□ Вытекает из критерия Лебега. ■

Утверждение 3.9. *Оценка интеграла: пусть $|f|\leqslant M$ на γ. Тогда*

$$\Big|\int\limits_\gamma f\,dz\Big| \leqslant \int\limits_\gamma |f|\,dz \leqslant \int\limits_\gamma |f|\,|dz| \leqslant M\cdot|\gamma|. \tag{20}$$

□ В самом деле,

$$\Big|\int\limits_\gamma f\,dz\Big| = \Big|\lim_{\lambda_T\to 0}\sum f_k\Delta z_k\Big| \leqslant \sum |f_k|\cdot|\Delta z_k| \leqslant M\cdot|\gamma|. \tag{21}$$

■

3.1.6. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 3.10. *Пусть кривая γ спрямляема и существуют интегралы $\int\limits_\gamma f_n\,dz$. Если $f_n \overset{\gamma}{\rightrightarrows} f$, то*

$$\int\limits_\gamma f_n\,dz \to \int\limits_\gamma f\,dz, \quad n\to\infty. \tag{22}$$

□ Пусть $\mathcal{B}(f)$ — множество точек разрыва[2] функции f. Покажем, что $\mathcal{B}(f)\subset\bigcup\mathcal{B}(f_n)$, чтобы применить критерий Лебега. Действительно, пусть $b\in\mathcal{B}(f)$. Тогда в любой окрестности $U(b)$ найдутся точки t, s такие, что $|f\big(z(t)\big) - f\big(z(s)\big)| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$. Но в силу равномерной сходимости найдётся такой номер n_0, что все функции f_n отличаются от f меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$ при $n\geqslant n_0$. Значит, точка b будет точкой разрыва для функций f_n при $n\geqslant n_0$. Тем самым доказано, что интеграл $\int\limits_\gamma f\,dz$ существует.

Остаётся показать, что этот интеграл равен пределу интегралов от f_n. Имеем

$$\Big|\int f_n\,dz - \int f\,dz\Big| = \Big|\int (f_n - f)\,dz\Big| \leqslant \sup_\gamma |f_n - f|\cdot|\gamma| \to 0, \quad n\to\infty. \tag{23}$$

■

[2]От английского «break point». Обозначение $E(f)$, которое было на лекциях, крайне неестественно.

Таким образом, пространство $\mathcal{R}(\gamma)$ интегрируемых на спрямляемой кривой γ функций является банаховым относительно чебышевской (равномерной) нормы. Полнота гарантируется только что доказанной теоремой.

Интеграл является ограниченным функционалом на этом пространстве. Очевидно, его норма не превосходит длины кривой по оценочному свойству.

Задача 3.2. *Доказать, что на самом деле норма интеграла равна длине кривой.*

3.1.7. Вычисление интегралов. Первообразная. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 3.11. *Пусть дана кривая* $z(t)\colon [\alpha, be] \to \mathbb{C}$, *и* $z(t) \in \mathbf{C}^1[\alpha,\beta]$. *Тогда*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t). \tag{24}$$

☐ Имеем

$$\lim \sum f_k \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} z'(t)\,dt - z'(t_k) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt \right) = \lim \sum f_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(z'(t) - z'(t_k)\big)\,dt. \tag{25}$$

Так как кривая гладкая, то $|z'(t) - z'(t_k)| \to 0$ при $\lambda_T \to 0$. А так как функция f ограничена, то и вся сумма стремится к нулю. ■

Определение. *Производной* функции F по множеству E в точке a называется число

$$F'_E(a) := \lim_{\substack{z\to a,\\ a,z\in E}} \frac{F(z) - F(a)}{z - a}. \tag{26}$$

Определение. *Первообразной* функции f называется такая функция F, что $F' = f$.

Теорема 3.12 (Формула Ньютона – Лейбница). *Пусть* $\gamma = z(t)$ *— гладкая кривая,* $f \in \mathbf{C}(\gamma)$ *и* $f = F'_\gamma$. *Тогда*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big). \tag{27}$$

☐ Имеем

$$\frac{d}{dt}F\big(z(t)\big) = \lim_{\tau\to t} \frac{F\big(z(\tau)\big) - F\big(z(t)\big)}{\tau - t} \cdot \frac{z(\tau) - z(t)}{z(\tau) - z(t)} = f\big(z(t)\big)z'(t). \tag{28}$$

По предыдущей теореме и обычной формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big). \tag{29}$$

■

3.2. Интегральная теорема Коши

3.2.1. Шаг 0: интеграл от линейных функций

Утверждение 3.13. *Пусть* $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ *замкнутая спрямляемая кривая, то есть* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. *Тогда*

$$\int\limits_\gamma (az + b)\,dz = 0. \tag{30}$$

☐ Мы знаем, что $\int\limits_\gamma 1\,dz = \gamma(\beta) - \gamma(\alpha)$ и $\int\limits_A^B z\,dz = \frac{\gamma(\beta)^2 - \gamma(\alpha)^2}{2}$. Но так как $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, то оба интеграла равны нулю. В силу линейности и исходный интеграл равен нулю. ■

Возникает следующая естественная гипотеза: поскольку интеграл от любой линейной функции по замкнутой спрямляемой кривой равен нулю, то можно предположить, что оно верно для любой голоморфной функции. Интегральная теорема Коши подтверждает эту гипотезу.

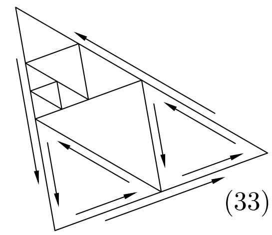
3.2.2. Шаг 1: интегральная теорема Коши для односвязной области

Лемма 3.14 (Гурса). *Пусть $\triangle$ — треугольник, лежащий в области D вместе с внутренностью, и $f(z)$ голоморфна в окрестности $\triangle$. Тогда*

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\,dz = 0. \tag{31}$$

$\square$ Обозначим $\triangle_0 := \triangle$, P_0 — периметр $\triangle_0$, а

$$I_0 := \Big|\int\limits_{\triangle} f(z)\,dz\Big|. \tag{32}$$



Поделив стороны $\triangle_0$ пополам и соединив между собой точки деления, получим ещё четыре треугольника. Обозначим через $\triangle_1$ «центральный» треугольник. Интеграл по всему контуру равен сумме интегралов по всем 4 треугольникам. Значит, хотя бы одно слагаемое не меньше четверти интеграла I_0. Обозначим его I_1, а соответствующий контур — через $\triangle_1$. Итак, имеем

$$I_1 := \Big|\int\limits_{\triangle_1} f(z)\,dz\Big| \geqslant \frac{I_0}{4}. \tag{33}$$

Продолжая процесс, получим последовательность вложенных треугольников $\triangle_0 \supset \triangle_1 \supset \ldots \supset \triangle_n \to a$, где a — некоторая точка в треугольнике, причём

$$I_n \geqslant \frac{I_0}{4^n}. \tag{34}$$

Имеем $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + o(z-a) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$. Как мы уже убедились, интеграл от линейной функции $f'(a)(z-a)$ по $\triangle_n$ равен нулю. Значит, вклад в интеграл может дать только нелинейное слагаемое $o(\ldots)$. Далее заметим, что $(z-a)$ не превосходит периметра треугольника, по которому мы интегрируем. Учитывая это, имеем

$$\frac{I_0}{4^n} \leqslant I_n = \Big|\int\limits_{\triangle_n} o(z-a)\,dz\Big| = \Big|\int\limits_{\triangle_n} \alpha(z)(z-a)\,dz\Big| \leqslant \frac{P_0}{2^n}\cdot\frac{P_0}{2^n}\max_{\triangle_n}|\alpha(z)| \to 0. \tag{35}$$

Умножая неравенство на 4^n, получаем $I_0 \leqslant P_0^2 \cdot \max\limits_{\triangle_n}|\alpha(z)| \to 0$. Значит, $I_0 = 0$. $\blacksquare$

Следствие 3.1. *Если D — односвязная область, а $f(z)$ голоморфна в D и γ — замкнутая ломаная в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{36}$$

$\square$ Разобьём многоугольник, образованный ломаной, на треугольники. По лемме Гурса интеграл по каждому из них равен нулю, но ориентации на «стыках» разные, поэтому суммарный интеграл равен 0. $\blacksquare$

Следствие 3.2 (интегральная теорема Коши). *Если D — односвязная область, и $f(z)$ голоморфна в D, а γ — спрямляемая кривая в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{37}$$

Замечание. Для многосвязной области эта теорема неверна. Пример: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Следствие 3.3. *Если граница области D есть простая замкнутая спрямляемая кривая, а функция $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, то $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.*

$\square$ Если $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, то она дифференцируема в некоторой окрестности $\overline{D}$. Значит, к ней можно применить уже доказанную теорему. Остаётся убедиться в том, что эта область односвязна (докажите это!). $\blacksquare$

Верен и более общий результат:

Теорема 3.15. *Если граница области D есть простая, замкнутая спрямляемая кривая, а функция $f(z)$ голоморфна в D и непрерывна на $\overline{D}$, то $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.*

Задача 3.3. *Доказать эту теорему для круга.*

3.2.3. Шаг 2: интегральная теорема Коши для многосвязной области

Определение. Область D называется *правильной*, если она ограничена и её граница ∂D состоит из конечного числа попарно не пересекающихся простых, замкнутых, спрямляемых кривых. Будем говорить, что границы правильной области *ориентированы положительно*, если при обходе границы область остаётся слева.

Теорема 3.16. *Если D — правильная область с положительно ориентированной границей γ, и $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, то* $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

□ Мы не будем проводить строгое доказательство, а приведём лишь его основную идею. Она заключается в том, чтобы перейти от многосвязного контура к односвязному. Пусть в области имеется k «дырок». Проведём разрез от некоторой точки на внешней границе до некоторой точки внутренней границы (одной из её компонент). Дырок станет на одну меньше, и так далее. В итоге получится односвязная область и k лишних разрезов. Но они не помешают: когда мы будем интегрировать по ним, то два раза пройдём по одним и тем же точкам в противоположных направлениях, то есть интегралы по разрезам уничтожатся. А по границе полученной односвязной области интеграл равен нулю. Значит, и интеграл по границе исходной области равен нулю. ■

Замечание. Справедливо усиление теоремы, когда $f(z)$ голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$.