Лекции по комплексному анализу

Лектор — Е. П. Долженко

VI семестр

TEX-набор: Р. И. Жданов. Вёрстка: DMVN Corporation

Оглавление

1. Принцип аргумента

1.1. Логарифмический вычет

Определение. Логарифмический вычет — это интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

где Γ — простой или составной спрямляемый жорданов контур, $f(z)$ однозначна и аналитична на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$.

Таким образом, это интеграл по контуру Γ от логарифмической производной функции $f(z)$, то есть от функции

$$\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Необходимо, чтобы внутри Γ функция $f(z)$ имела бы полюсы, а на самой кривой Γ функция $f(z)$ нулей и полюсов нет.

Пусть $b_q \in \operatorname{Int}\Gamma$ — полюсы порядка p_q, $0 \leqslant q \leqslant p$, и пусть a_m — нули внутри Γ порядка k_m, $0 \leqslant m \leqslant n$.

Поскольку $\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)$ — первообразная для $\frac{f'(z)}{f(z)}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \operatorname{Ln} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma\big(\ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z)\big) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z). \tag{1}$$

С другой стороны, мы можем вычислить этот же интеграл с помощью теоремы Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} \operatorname{res}_{a_m} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{q=1}^{p} \operatorname{res}_{b_q} \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{2}$$

Пусть функция $\varphi(z)$ однозначна и аналитична на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} \operatorname{res}_{a_m} \varphi\frac{f'}{f} + \sum_{q=1}^{p} \operatorname{res}_{b_q} \varphi\frac{f'}{f}. \tag{3}$$

Пусть c — это нуль или полюс функции $f(z)$ с кратностью k (если $k > 0$, то c есть нуль, если $k < 0$, то полюс), т. е. $f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(z) \neq 0$, тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-c)^{k-1}g(z) + (z-c)^k g'(z)}{(z-c)^k g(z)} = \frac{k}{z-c} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{4}$$

$g(z) \neq 0$. Отсюда ясно, что $\operatorname{res}_c \frac{f'}{f} = k$, так как функция $\frac{g'(z)}{g(z)}$ аналитическая. Кроме того,

$$\varphi(z) - \varphi(c) = (z-c)^s h(z) \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) = \varphi(c) + (z-c)^s h(z), \quad h(c) \neq 0, \tag{5}$$

поэтому

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k\varphi(z)}{z-c} + r(z), \tag{6}$$

где $r(z)$ — аналитическая функция на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Следовательно, $\operatorname{res}_c \frac{f'}{f}\varphi = k\varphi(c)$, если точка c — нуль или полюс для $f(z)$. Осталось подставить это в формулу для интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} k_m\varphi(a_m) - \sum_{q=1}^{p} p_q\varphi(b_q). \tag{7}$$

При $\varphi(z) \equiv 1$ получаем

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z), \tag{8}$$

где $N = \sum k_m$, $P = \sum p_q$. Тем самым мы доказали следующую теорему:

Теорема 1.1 (принцип аргумента). *Если Γ — простой или составной спрямляемый жорданов контур, являющийся границей ограниченной области G, а функция $f(z)$ однозначна и аналитична на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$, кроме конечного числа полюсов внутри Γ, то разность между числом нулей и числом полюсов равна приращению* *аргумента $f(z)$, деленному на 2π при однократном обходе Γ в положительном направлении, или что то же самое, числу поворотов вектора $w = f(z)$ при таком обходе.*

Следствие 1.1. *Если $f(z)$ однозначна и аналитична на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$, $f(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$, то*

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z). \tag{9}$$

Следствие 1.2. *Конформные отображения областей сохраняют направление обхода границы ($N = 1$).*

Замечание. Принцип аргумента верен, если $f(z)$ непрерывна на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$ и аналитична внутри Γ.

Вернемся к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} k_m\varphi(a_m), \tag{10}$$

где $f(z)$ однозначна и аналитична на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$ (поэтому полюсы отсутствуют). При $\varphi(z) \equiv 1$ мы получили равенство

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z). \tag{11}$$

Пусть теперь $\varphi(z) = z$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} k_m a_m. \tag{12}$$

Если $\varphi(z) = z^2$. То

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^2\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{m=1}^{n} k_m a_m^2, \tag{13}$$

и так далее. Пусть, например, в $\operatorname{Int}\Gamma$ два нуля функции $f(z)$. Тогда мы можем найти $z_1 + z_2 = A$, $z_1^2 + z_2^2 = B$. Но так как $z_1 z_2 = \frac{1}{2}[(z_1+z_2)^2 - (z_1^2+z_2^2)]$, то нули функции $f(z)$ — это корни уравнения $z^2 - Az + \frac{1}{2}(A^2 - B) = 0$.

1.2. Теорема Руше

Теорема 1.2 (Руше). *Пусть область G ограничена простым или составным жордановым контуром Γ, функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри $\operatorname{Int}\Gamma$ и непрерывны на $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$, причем $|f(z)| > |g(z)|$ на Γ. Тогда функция $f(z)+g(z)$ имеет внутри Γ столько же нулей, сколько их имеет функция $f(z)$ (теорема «о даме с собачкой»).*

□ Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(f(z)+g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}\left[f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(f(z)) + \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right). \tag{14}$$

По условию, $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < 1$. Значит, вектор $\frac{f(z)}{g(z)} + 1$ никогда не выйдет за пределы правой полуплоскости и, следовательно, не совершит ни одного оборота вокруг нуля при обходе Γ. Значит,

$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0, \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}\big(f(z)+g(z)\big) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z). \tag{15}$$

■

Пример 2.1. Указать минимальную область, в которой находятся все нули многочлена $P(z) = z^{10} - 2z + 1$. Пусть $f(z) = z^{10}$, а $g(z) = -2z + 1$. Возьмем круг $|z| = R$. Тогда $|f(z)| = R^{10}$, и $|g(z)| = |-2z+1| < 2R+1$. Значит, нужно найти такое минимальное R, что $R^{10} > 2R + 1$. Это можно сделать приближенно ($R \approx 1,2$).

2. Аналитическое продолжение

2.1. Теоремы Пенлеве

Теорема 2.1 (Первая теорема P. Painleve). *Пусть в области G имеется замкнутое множество E нулевой длины. Тогда любая однозначная аналитическая и ограниченная функция $f(z)$ в $G \setminus E$ продолжается однозначно на E до функции, однозначной и аналитичной в G.*

Определение. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $E\subset X$. Покроем множество E множествами σ_n («кружочками»):

$$\bigcup_n \sigma_n \supset E, \quad d_n = \operatorname{diam}\sigma_n, \quad d_n<\varepsilon. \tag{1}$$

Возьмем $\inf\left\{\sum_n d_n\right\}$ и устремим $\varepsilon\to 0$. Этот предел и называется длиной по Хаусдорфу:

$$l(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf_{d_n<\varepsilon}\left\{\sum_n d_n\right\}\right). \tag{2}$$

Определение. Более общее понятие — α-мера Хаусдорфа ($\alpha\geqslant 0$):

$$l^\alpha(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\inf_{d_n<\varepsilon}\left\{\sum_n d_n^\alpha\right\}\right). \tag{3}$$

Это корректное определение, но возможно, что $l(E)=\infty$.

(далее идет блок, который лектор выдавал в виде распечаток). see `http://www.dmvn.mexmat.net`.

2.2. Аналитическое продолжение по цепи

Определение. Пусть G_0 и G_1 — выпуклые области, $G_1\cap G_0\neq\varnothing$, и функция $f_0(z)$ аналитична в G_0, а функция $f_1(z)$ аналитична в G_1 и $f_0(z)=f_1(z)$ на $G_1\cap G_0$. Тогда говорят, что f_0 аналитически продолжается в G_1 (f_1 аналитически продолжается в G_0) непосредственно.

Рассмотрим еще одну область G_2, пересекающуюся с G_1, и пусть $f_1(z)=f_2(z)$ для всех $z\in G_1\cap G_2$, тогда f_0 продолжается непосредственно на G_2, и так далее.

Определение. Пара (G,f), где G — область, а f — функция, аналитическая в G, называется *аналитическим элементом.*

Таким образом, при непосредственном продолжении мы получаем цепь аналитических элементов. (G_2,f_2) — аналитическое продолжение (G_0,f_0) (уже не непосредственное).

Процесс аналитического продолжения некоторого аналитического элемента:

Пример 2.1. Рассмотрим функцию

$$f(z)=\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}. \tag{4}$$

Этот ряд сходится в круге $|z|<1$. Можно с этого круга продолжать: для этого нужно взять точку внутри круга и разложить в ряд уже с центром в этой точке. Полученные два ряда будут совпадать на пересечении кругов, следовательно, функции в соответствующих областях будут аналитическими продолжениями друг друга. Далее можно продолжать этот процесс. В результате получим функцию $w=\operatorname{Ln}(1+z)$.

Если продолжить аналитически функцию куда только возможно, получим полную аналитическую функцию (вообще говоря, многозначную).

2.3. Аналитическое продолжение элемента по цепи

Определение. Пусть (f_1,g), (f_2,G) — аналитические элементы, причем $g\subset G$. Тогда (f_1,g) называется *подчиненным* элементом.

Обычно в этом случае

$$g=\{z\colon |z-a|<r,\ a=a_1+ia_2;\ r,a_1,a_2\in\mathbb{Q}\} \tag{5}$$

рациональный элемент. Рациональный элемент хорош своей универсальностью, он определяется тремя рациональными числами.

Можно продолжать через бесконечность: рациональный элемент с центром в ∞ выглядит так:

$$g=\{z\colon |z|>r,\ r\in\mathbb{Q}\}. \tag{6}$$

Пример 3.1. У функции

$$w=\frac{1}{1+\sqrt{z}} \tag{7}$$

в точке $z=1$ — две ветви. На куске римановой поверхности, где $\sqrt{1}=-1$, будет полюс первого порядка.

Определение. Точка называется *изолированной особой точкой многозначного характера*, если ни в какой её окрестности функция не распадается на однозначные аналитичные ветви (т. е. функцию нельзя сделать однозначной аналитической ни в какой проколотой окрестности точки).

Если после k оборотов получилась исходная ветвь и k — минимальное число с таким свойством, то точка называется точкой ветвления $(k-1)$-го порядка.

Пример 3.2. $z_0 = 0$ точка ветвления 1-го порядка функции $f(z) = \sqrt{z}$.

Определение. Если a точка ветвления k-го порядка и существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$, то точка называется алгебраической точкой ветвления k-го порядка.

Ряды Пюизо:

$$w = \sin \sqrt[3]{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\frac{2n-1}{3}}}{(2n-1)!}. \tag{8}$$

2.4. Аналитическое продолжение вдоль пути

Пусть G выпуклая область, тогда аналитический элемент (G_0, f_0) продолжается вдоль пути L (до аналитического элемента $(\widetilde{G}, \widetilde{f})$), если этот путь можно разбить дугами $\smile z_0z_1$, $\smile z_1z_2, \ldots$ таким образом, что найдётся элемент (G_k, f_k) такой, что $G_{k-1} \cap G_k \supset (\smile z_{k-1}z_k)$ и (G_k, f_k) получается из (G_{k-1}, f_{k-1}) непосредственным продолжением.

Замечание. В $G_{k-1} \cap G_k$ можно вписать ломаную, что следует из выпуклости G_k.

Если элемент (G_0, f_0) продолжается до любой точки, предшествующей z, но не продолжается в точку z, то z — особая точка.

Теорема 2.2 (о монодромии). *Пусть G — односвязная область, G_0 — односвязная выпуклая область. Если элемент (G_0, f_0) продолжается вдоль любого непрерывного пути, лежащего в G, то полученная в результате продолжения функция будет однозначной аналитической.*

□

1° Продолжение вдоль кривой можно заменить продолжением вдоль ломаной.

2° Будем доказывать от противного: предположим, что продолжение вдоль замкнутой конечнозвенной ломаной дает разные элементы (если идти вдоль ломаной в разные стороны). Можно считать, что ломаная не имеет самопересечений. Разбив внутренность на треугольники, получаем, что существует треугольник, продолжение вдоль которого дает разные элементы. Проводим медиану. По какому-то из двух получившихся треугольников получаются различные элементы, и так далее.

3° В результате получаем последовательность вложенных отрезков на стороне (делим пополам всегда одну и ту же сторону треугольника), которая имеет общую точку ζ. Продолжим (G_0, f_0) в ζ и обратно посредством (G_k, f_k). Тогда существует треугольник $\Delta_k \subset \cup G_k$. А это противоречит теореме единственности, так как по Δ_k существуют разные продолжения.

■

Пример 4.1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — точки ветвления. В области $G \setminus h$, где h — ломаная, соединяющая точки ветвления, функция распадается на однозначные ветви. (внутри полученной односвязной области нет точек ветвления). Например, для функции $\sqrt{z}$.

2.5. Модулярная функция

Замечание. Эту тему лучше почитать в Шабате (1 том).

(стр.31) (здесь много картинок)

Замечание. В действительном анализе верна теорема (Лагранжа) о среднем:

$$\exists c \in [a, b]\colon \quad f(a) - f(b) = f'(c)(b-a). \tag{9}$$

В комплексном анализе эта формула неверна:

$$\Delta = [0, 2\pi], \quad f(t) = e^{it}. \tag{10}$$

Тогда $f(2\pi) - f(0) = 0$, но $f'(t) = ie^{it}$, $\quad |f'(t)| = 1 \forall t$.

Теорема о среднем в комплексном анализе также не верна, поскольку действительнозначные функции могут иметь разные «средние» точки. Аналогом теоремы о среднем в комплексном случае можно считать следующее неравенство: если $f \in A(G)$, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(\zeta)\, d\zeta, \tag{11}$$

отсюда

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \max\{|f'(\zeta)|,\, \zeta \in [a, b]\} \cdot (b - a). \tag{12}$$

Модулярная функция для круга. (стр.33)

Теорема 2.3 (Малая теорема Пикара). *Любая целая трансцендентная (т. е. отличная от полинома) функция принимает бесконечное число раз каждое комплексное значение, кроме разве лишь одного такого значения.*

Пример 5.1.

1. $f(z) = e^z \neq 0$ точка $w = 0$ — исключительное значение
2. $f(z) = \cos(z)$ — не имеет исключительных значений (обратная функция $z = \arccos w$ всюду определена).

Значение, которое принимается конечное число раз или не принимается вообще, называется *пикаровским исключительным значением.*

□ Пусть $f(z)$ — целая функция. Рассмотрим функцию $w = \omega(f(z))$ (для простоты будем считать, что $f(z)$ не принимает значения $0, 1, \infty$). Берем любую кривую, не проходящую через точки $0, 1, \infty$. Наша функция аналитична вблизи этой кривой и продолжается аналитически вдоль нее. Выполнены условия теоремы о монодромии, поэтому $w = \omega\big(f(z)\big)$ — однозначная аналитическая функция. Так как $w = |\omega(f(z))|$, то по теореме Лиувилля $\omega\big(f(z)\big) \equiv \mathrm{const}$. Применим ω^{-1} (это однозначная функция):

$$\omega^{-1}(\omega(f(z))) = f(z) = \omega^{-1}(c). \tag{13}$$

Таким образом, получаем, что $f(z) = \mathrm{const}$. Противоречие. ■

Теорема 2.4 (Большая теорема Пикара). *Пусть a — существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любой точки $w \in \mathbb{C}$, кроме разве лишь одного значения, найдётся последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) = w$ для всех n.*

Пример 5.2.

1. Для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ пикаровским исключительным значением является точка $a = 0$.
2. $f(z) = P(z)e^{\frac{1}{z}}$

3. Конформные отображения. Теорема Римана

3.1. Компактные семейства аналитических функций

Замечание. Этот материал намного лучше изложен в лекциях Белошапки (5 семестр).

Пусть $G \subset \mathbb{C}$. Пространство аналитических в G функций $A(G)$ счетно-нормированное, а потому метризуемо:

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}. \tag{1}$$

Сходимость в $A(G)$ эквивалентна сходимости по этой метрике.

Определение. Семейство функций $E \subset A(G)$ называется компактным, если

$$\forall f_n \in E \quad f_{n_k} \to_A (G) f \in A(G)$$

Теорема 3.1 (Теорема Монтеля, критерий компактности). *Семейство $E \subset A(G)$ компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено на каждом компакте $K \subset G$, т. е.*

$$\forall f \in E \quad \|f\|_{C(K)} \leqslant B(K)$$

(Иначе говоря, $\|f\|_n \leqslant c_n \, \forall n$).

□ **1°** Необходимость. Пусть существует компакт $K \subset G$, для которого неравенства нет. Тогда найдется последовательность функций $f_n \in E$ и точек $z_n \in K$ такие, что $|f_n(z_n)| > n$. Тогда из $\{f_n(z)\}$ нельзя выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K.

2° Достаточность. Пусть $G = \{z\colon |z-a| < R\}$, $R > 0$.

$$|f(z)| \leqslant C(K)\,\forall K \subset G\,\forall f \in E$$

Пусть $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{R}{2}$ $z \in K := \{z\colon |z-a| < R-\varepsilon\}$. По интегральной формуле Коши

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=R-\varepsilon} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{2}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=R-\varepsilon} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \tag{3}$$

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{C(K)}{\varepsilon^2} 2\pi(R-\varepsilon) =: F, \quad \omega(f_n, K, \delta) \leqslant F\delta \tag{4}$$

Таким образом $\{f_n\}$ — равномерно непрерывное семейство функций. По теореме Арцела этого достаточно для компактности в пространстве непрерывных функций... ■

(стр.38-39)

3.2. Применения принципа компактности

Теорема 3.2 (Витали). *Пусть последовательность функций, однозначных и аналитических в области G является компактным семейством, причем f_n сходится в каждой точке множества $E \subset$ ($E \subset G$ имеет хотя бы одну предельную точку внутри G). Тогда $f_n(z)$ сходится в топологии пространства $A(G)$ к функции f однозначной и аналитической в G.*

□ Последовательность $\{f_n(z)\}$ компактна, поэтому для любого компакта $K \subset G$ существует предел $f_{n_k}(z) \overset{K}{\rightrightarrows} f(z)$. Функция $f(z)$ однозначна и аналитична в G. Докажем, что и вся последовательность сходится к $f(z)$ в топологии $A(G)$. От противного: пусть существует компакт $K^* \subset G$ и подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, такая что

$$|f_{n_k'}(z_{n_k'}) - f(z_{n_k'})| > d = \text{const} > 0, \tag{5}$$

где $z_{n_k} \in K^*$. Из последовательности $f_{n_k'}$ выделим подпоследовательность $f_{n_k''}$, такую что

$$f_{n_k''} \xrightarrow{A(G)} g(z), g(z) \in A(G)$$

(Это можно сделать, так как $f_{n_k'}$ — компактное семейство.) Поскольку $g(z) = f(z)$ на E по условию, то по теореме единственности $g(z) = f(z) \forall z \in G$. Отсюда $f_{n_k''} \overset{K}{\rightrightarrows} f(z)$, что противоречит (5). ■

Теорема 3.3 (Гурвица о нулях последовательности аналитических функций). *Пусть функции $f_n(z)$ — аналитические в G и $f_n(z) \xrightarrow{A(G)} f \in A(G)$, $n \to \infty$; $f \not\equiv 0$. Пусть Γ — простой или составной спрямляемый жорданов контур в G, такой, что $\operatorname{Int}\Gamma \subset G$. При этом $f(z) \neq 0$ на Γ. Тогда при $n > N$ функция $f_n(z)$ имеет внутри Γ столько же нулей, сколько и функция $f(z)$ (с учетом кратности).*

□ Положим $m := \min\{|f(z)|, z \in \Gamma\}$. Так как Γ — компакт, то $f_n(z) \overset{\Gamma}{\rightrightarrows} f(z)$, тогда существует $N(f, \Gamma)$, такое что при $n > N, |f_n(z) - f(z)| < m$, $\forall z \in \Gamma$.

$$f(z) = f_n(z) + (f(z) - f_n(z))$$

По теореме Руше функция $f_n(z)$ имеет внутри Γ столько же нулей, сколько и $f(z)$, что и требовалось. ■

Теорема 3.4 (о последовательностях однолистных аналитических функций). *Пусть последовательность однолистных функций в области G сходится по топологии пространства $A(G)$ к функции $f(z) \not\equiv$ const. Тогда $f(z)$ также однолистна в области G. (Однолистность: $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$).*

□ От противного: предположим, что существуют $a, b \in G$, $a \neq b$ и $f(a) = f(b) = A$. Рассмотрим последовательность $f_n(z) - A$.

$$f_n(z) - A \to 0, \quad z \to a,\ z \to b,\ n \to \infty. \tag{6}$$

Нули $f(z) - A$ изолированы. Пусть $D(a, R)$, $D(b, R)$ — окрестности точек a, b. Возьмем столь малое R, чтобы $\overline{D}(a, R), \overline{D}(b, R) \subset G$, и $\overline{D}(a, R) \cap \overline{D}(b, R) = \varnothing$, причем $f_n(z) - A \neq 0$ при $z \in \overline{D}(a) \setminus \{a\}$ и $z \in \overline{D}(b) \setminus \{b\}$. По теореме Гурвица при $n > N$ функция $f_n(z) - A$ имеет в $D(a, R)$ и в $D(b, R)$ по крайней мере по одному нулю.

Мы получили, что существуют $z_a \in D(a)$, $z_b \in D(b)$, такие что $f_n(z_a) - A = f_n(z_b) - A = 0$. То есть $z_a \neq z_b$, но $f_n(z_a) = f_n(z_b)$. Противоречие с однолистностью функции $f_n(z)$. ■

Замечание. Условие $f(z) \not\equiv \text{const}$ существенно.

Пример 2.1.

$$f_n(z) = \frac{z}{n} + 1, \quad G = \{|z| < 1\}.$$

$$f_n \xrightarrow{A(G)} 1, \quad n \to \infty.$$

3.3. Отображения посредством аналитических функций

Лемма 3.5 (о локальном обращении). *Пусть $f(z)$ — однозначная и аналитичная в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, причем $f(z) - f(a)$ имеет в точке a нуль k-го порядка ($k \geqslant 1$). Тогда $\exists \varepsilon_0, \delta_0 \geqslant$, такое что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\,(\delta < \delta_0)$ такое, что при $b = f(a)$ и $w \in D(a, \delta)$ уравнение $f(z) = w$ имеет в круге $D(a, \varepsilon_0)$ ровно k корней с учетом кратности; причем, на самом деле, все они лежат в круге $D(a, \varepsilon)$. При этом, если $w \neq b$, то все эти корни простые (а при $w = b$ это один k-кратный корень).*

□ Существует ε_0, такое что при $0 < |z - a| \leqslant \varepsilon_0$, $f(z) \neq a$ и $f'(z) \neq 0$. (Если $f(z) = f(a)$ в сколь угодно близких к a точках $D(a, R)$, то $f(z) \equiv \text{const}$ по теореме единственности. Если $f'(z) = 0$ в сколь угодно близких к a точках $D(a, R)$, то из $f' = 0$ следует $f \equiv \text{const}$ (снова по теореме единственности).

$$\delta_0 := \min |f(z) - f(a)| : z \in \partial D(a, \varepsilon_0)$$

Пусть $b = f(a)$. Берем $w \in D(a, \delta_0)$. Надо решить уравнение $f(z) - w = 0$. Применим теорему Руше:

$$f(z) - w = (f(z) - f(a)) + (b - w), \ |f(z) - f(a)| \geqslant \delta_0 > |w - b|.$$

тогда функция $f(z) - w$ имеет в круге $D(a, \varepsilon_0)$ столько же нулей, сколько функция $f(z) - f(a)$, т. е. k штук с учетом кратности (по условию и по выбору ε_0). Если $w \in D(b, \delta_0)$, $w \neq b$, то все эти нули простые, так как при $z \neq b$, $f'(z) \neq 0$. Далее все то же самое для $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\delta < \delta_0$. ■

Следствие 3.1. *Образом области при конформном отображении является областью.*

Решение уравнения $f(z) - w = 0$ есть обратная функция в точке w: $z = f^{-1}(w)$. Обратная функция, несмотря на многозначность, является непрерывной.

Теорема 3.6 (Принцип открытости). *Если в области G задана непостоянная однозначная аналитичная функция f, то $f(g)$ открыто, где$g \subset G$, $\quad g$ — открытое множество.*

Теорема 3.7 (Принцип области). *Если непостоянна $f(z)$, однозначна и аналитична в области G, то $f(G)$ — также область.*

□ То, что множество $f(G)$ открыто, следует из принципа открытости. Докажем[1], что $f(G)$ связно. Пусть $b_1, b_2 \in f(G)$, а $a_1, a_2 \in G$ — какие-либо прообразы точек b_1, b_2 соответственно. Так как G — область, то a_1 и a_2 можно соединить кривой $L = z(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, $z(t) \in G$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$, и $a_1 = z(\alpha), a_2 = z(\beta)$. Рассмотрим кривую $w = f\big(z(t)\big)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, и $f(z(t)) \in f(G)$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$, и $b_1 = f\big(z(\alpha)\big), b_2 = f\big(z(\beta)\big)$. Эта кривая непрерывна и соединяет b_1 и b_2 в G. Значит, $f(G)$ связно, что и требовалось доказать. ■

В качестве ещё одного следствия можно доказать одну уже известную нам теорему.

Следствие 3.2 (Принцип максимума модуля). *Для любой точки $z \in G$ найдётся точка z такая, что $|f(z)| > |f(a)|$, и если $f(a) \neq 0$, то найдётся точка $z' \in G$ такая, что $|f(z')| < |f(z)|$ (естественно, $f \neq \text{const}$).*

3.4. Локальное обращение аналитических функций

Теорема 3.8. *Если $w = f(z)$ однозначна и аналитична в окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0, w_0 = f(z_0)$, то в некоторой окрестности точки w_0 определена функция $z = f^{-1}(w)$ однозначная, однолистная и аналитичная в этой окрестности, обратная к функции $w = f(z)$ причем*

$$z_0 = f^{-1}(w_0), \quad \big(f^{-1}(w_0)\big)' = \frac{1}{f'(z)_0}. \tag{7}$$

□ Воспользуемся леммой о локальном обращении. Из нее следует, что существует обратная функция $z = f^{-1}(w)$ в $D(w_0, \delta_0)$ непрерывная в этой области:

$$\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \quad \exists \delta > 0 \colon |w - w_0| < \delta \Rightarrow |z - z_0| < \varepsilon$$

$$\exists \big(f^{-1}(w_0)\big)' = \frac{1}{f'(z_0)}$$

[1] На самом деле это общий топологический факт: образ связного множества при непрерывном отображении связен.

Для точки $w' \in D(w_0, \delta)$ применяем лемму и получаем требуемое. Обратная функция будет однозначна, однолистна. ■

Определение. В точке z_0 функция $f(z)$ локально однолистна, если она однолистна в некоторой окрестности этой точки. Функция однолистна в области, если она однолистна в любой точке этой области. Функция, локально однолистная, не обязательно однолистна, но функция однолистная всегда локально однолистна.

Следствие 3.3 (критерий локальной однолистности). *Функция $f(z)$ аналитичная в окрестности точки z_0 локально однолистна в тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$*

□ $\Leftarrow$ уже доказали.

$\Rightarrow$ Пусть $f'(z_0) = \ldots f^{(k-1)}(z_0) = 0\, f^{(k)}(z_0) \neq 0$ По лемме о локальном обращении в любой окрестности точки w_0 уравнение $w = f(z)$ имеет k корней. Поэтому в точке w_0 она k-листна.

Если $f(z)$ однолистна в области G, то $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ ■

Теорема 3.9. *Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в окрестности точки z_0, причем для некоторого $k \geqslant 2$ выполнено $f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Тогда в некотором круге $D(w_0, \delta)$ существует k-значная аналитическая функция $f^{-1}(w)$, причем точка w_0 для нее является алгебраическая точка ветвления порядка $k-1$. Функция $z = f^{-1}(w)$в этой окрестности точки w_0 может быть записана в виде*

$$f^{-1}(w) = \theta(\sqrt[k]{w - w_0})$$

где $\theta(\zeta)$ — однозначна, аналитична, однолистна в окрестности точки $\zeta = 0$

Замечание. Теорема 3.8 является частным случаем теоремы 3.9 при $k = 1$.

□ Введем промежуточную переменную:

$$w = f(z) = w_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots$$
$$\sqrt[k]{w - w_0} = \zeta = (z - z_0)\sqrt[k]{c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \ldots}$$

Заметим, что в окрестности точки z_0 правая функция распадается на однозначные аналитичные ветви (всего k штук):

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Значит, это равенство между двумя многозначными функциями от z. У функции

$$\zeta = (z - z_0)\sqrt[k]{c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \ldots} \tag{8}$$

в окрестности выделим какую-нибудь однозначную ветвь. Заметим, что $\zeta'(z_0) \neq 0$. По теореме 3.8 у этой функции существует обратная функция в $D(0, \delta_0)$: $z = \theta(\zeta)$.

Вспомним, что $\zeta = \sqrt[k]{w - w_0}$, положим $r = \delta_0^k$. Если $w \in D(w_0, r)$, то $\zeta \in D(0, \delta_0)$, так как $|w - w_0| < r = \delta_0^k$. Наша искомая обратная функция: $f^{-1} = \theta\left(\sqrt[k]{w - w_0}\right)$. Из однолистности θ и того, что для $\sqrt[k]{w - w_0}$ — точка ветвления $(k-1)$-го порядка следует, что w_0 — точка ветвления $(k-1)$-го порядка для функции $f^{-1}(w)$. ■

Ссылка: Маркушевич 1978 г.

3.5. Критерий конформности в точке

Теорема 3.10 (критерий конформности в точке). *Для того, чтобы отображение $w = f(z)$, где $f(z)$ однозначна и аналитична в окрестности точки z_0, было конформным в точке z_0, необходимо и достаточно условие $f'(z_0) \neq 0$.*

□ $\Rightarrow$ было доказано в начале курса.

$\Leftarrow$ Допустим, $f'(z_0) = 0$. Тогда

$$\Delta w = w - w_0 = c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots,$$

где $c_k \neq 0$, $k \leqslant 0$. Имеем:

$$\Delta w = c_k(\Delta z)^k\left(1 + O(\Delta z)\right), \quad \Delta z = z - z_0;$$
$$\operatorname{Arg}\Delta w = \operatorname{Arg} c_k + k\operatorname{Arg}\Delta z + O\left(|\Delta z|\right).$$

Отсюда видно, что когда вектор Δw вращается вокруг нуля, то вектор Δz вращается вокруг нуля в k раз быстрее. Значит, углы увеличиваются в k раз. Поскольку $k \geqslant 2$, то возникает противоречие с конформностью в точке z_0. ■

3.6. Конформные отображения круговых областей

Определение. Круговые области — это круги, полуплоскости и внешности кругов.

Теорема 3.11. *Если аналитическая функция $w = f(z)$ однолистна и конформно отображает одну круговую область на другую, то $f(z)$- дробно-линейная функция.*

□ Сначала докажем это для отображения единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ на себя. Пусть $w = f(z)$ однолистно и конформно отображает D на себя (т. е. осуществляет конформный автоморфизм).

1° Если $f(0) = 0$, то мы находимся в условиях леммы Шварца:

$$|f(z)| < 1 \text{ при } |z| < 1,\ f(0) < 0 \Rightarrow |f'(0)| \leqslant 1.$$

Обратная функция аналитична и $|f^{-1}(w)| < 1$, $f^{-1}(0) = 0$. По лемме Шварца

$$|\left(f^{-1}\right)'(0)| \leqslant 1,$$
$$(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}$$

Значит, $\frac{1}{|f'(z)|} \leqslant 1$, т.е. $|f'(0)| \geqslant 1$. Тогда $|f'(0)| = 1$. А это равенство (также по лемме Шварца) возможно только в том случае, если $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

2° Теперь общий случай:

$$\omega = F(\zeta) = L_2^{-1}(f(L_1(\zeta)))$$

L_1 и L_2- такие дробно-линейные функции, что

$$a \in G_1 \quad b = f(a) = G_2$$
$$a = L_1(0) \quad b = L_2(0)$$

Тогда $F(0) = 0$. По пункту 1) получаем

$$\omega = F(\zeta) = e^{i\alpha},\ \text{т. е.}$$
$$L_2(f(L_1(\zeta))) \equiv e^{i\alpha}\zeta,\ z = L_1(\zeta);$$
$$L_2(f(z)) = e^{i\alpha}L_1^{-1}(z);$$
$$f(z) = L_2(e^{i\alpha}L_1^{-1}(z)) = L(z)$$

Т.к. L_1 иL_2 — дробно-линейные функции, то и $f(z)$ — дробно-линейная функция. Теорема доказана.

■

Замечание. α — это угол поворота при отображении круга на себя, если точка 0 остается на месте.

3.7. Теорема Римана о конформном отображении

k	$w_{k+1}(w_k)$	$w_{k+1}^0 = w_{k+1}(w_k^0)$	${w'}_{k+1}^0 = {w'}_{k+1}(w_k^0)$
0	$w_1 = f(z)$	$w_1^0 = f(z_0) = 0$	${w'}_1^0 = f'(z_0)$
1	$w_2 = \frac{w_1 - a}{1 - \bar{a}w_1}$	$w_2^0 = -a$	${w'}_2^0 = 1 - \|a\|^2$
2	$w_3\sqrt{w_2}$	$w_3^0 = \sqrt{-a}$	${w'}_3^0 = \frac{1}{2\sqrt{-a}}$
3	$w_4 = \frac{w_3 - \sqrt{-a}}{1 - \overline{\sqrt{-a}}w_3}$	$w_4^0 = 0$	${w'}_4^0 = \frac{1}{1 - \|a\|}$

Теорема 3.12 (Риман). *Пусть G — односвязная область расширенной плоскости $\overline{G}$. Тогда имеется бесконечное число однозначных однолистных аналитических в G функций, конформно отображающих G на единичный круг при условии $f(z_0) = 0$. (Предполагается, что содержит более одной точки).*

□ Обозначим через $E(z_0)$ множество всех функций $f(z)$ однозначных, однолистных и аналитических в G, таких, что $f(z_0) = 0$ и $|f(z)| < 1$ в G. Будем доказывать, что это множество непустое.

1° Пусть G ограничено. Обозначим

$$R := \sup\{|z - z_0|,\ z \in G\} < \infty.$$

Тогда функция $f(z) = \frac{z - z_0}{R}$ удовлетворяет нужным условиям: $f \in E(z_0)$.

2° Пусть теперь G неограничено, но $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G} \neq \varnothing$. Положим

$$\widetilde{f}(z) := \frac{1}{z-b},\ b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G},\ b \neq \infty.$$

Искомая функция: $f(z) = \frac{1}{R}\widetilde{f}(z)$, где $R = \sup\{|z - z_0|,\ z \in \widetilde{f}(G)\}$.

3° Теперь $\overline{G} = \overline{\mathbb{C}}$(но, по условию, $\overline{\mathbb{C}} \setminus G \neq \varnothing$). Возьмем две точки $a, b \in \partial G$. Рассмотрим отображение $\zeta(z) = L(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Если $G_1 = L(G)$, то $0, \infty \in \partial G_1$. Положим $\zeta_1 = \sqrt{\zeta}, \zeta \in G_1$. По теореме о монодромии из функции ζ_1 выделяются две однозначные ветви: $\zeta_1 = q(\zeta)$ и $-q(\zeta)$. Докажем, что функция q однолистна. Действительно, если $\zeta', \zeta'' \in G$; $q(\zeta') = q(\zeta'')$, то $q^2(\zeta') = q^2(\zeta'')$. Значит $\zeta' = \zeta''$, тем самым функция q (и $-q$ тоже) однолистна.

Докажем, что $q(G_1) \cap \big(-q(G_1)\big) = \varnothing$. От противного: пусть существуют $\zeta^* \in G_1$, $\zeta^{**} \in G_1$, такие что $q(\zeta^*) = -q(\zeta^{**})$. Возведем в квадрат, и получим $\zeta^* = \zeta^{**}$. Но тогда $q(\zeta^*) = q(\zeta^{**}) = 0, \infty$. Но $0, \infty \ni G_1$.

Значит, для образа $q(G_1)$ имеются внешние точки. Взяв композицию q и ζ, получаем функцию из $E(z_0)$. Итак, непустота множества $E(z_0)$ доказана.

Семейство функций $E(z_0)$ компактное, так как для любой $f \in E(z_0)$, $|f(z)| < 1$ для $\forall\, z \in G$. Обозначим $M := \sup\{|f'(z_0)| : f \in E(z_0)\} > 0$. Т.к. $E(z_0)$ — компактное семейство, то существует последовательность $\{f_n\} \xrightarrow{A(G)} f \in A(G)$. По теореме Вейерштрасса ${f'}_n(z_0) \to f'(z_0)$

$$|f'(z_0)| = M > 0 \Rightarrow f(z) \not\equiv \mathrm{const}$$

Отсюда видно также, что $M = |f'(z_0)| < \infty$. $w = f(z)$ (функция, на которой M достигается). ($f(z) \not\equiv \mathrm{const}$). Функция $f(z)$ однолистна по следствию из теоремы Гурвица $f(z_0) = 0$ (т.к. $f \in E(z_0)$). Докажем, что $f(G) = D$. Допустим, что это не так, т. е. существует $a \in D \setminus f(G)$

Построим такое отображение $F(z)$:

$$w = F(z) := w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ f(z).$$

(где w_4, w_3, w_2 — из таблицы перед формулировкой теоремы). Тогда

$$F'(z_0) = {w'}_4^0 \cdot {w'}_3^0 \cdot {w'}_2^0 \cdot {w'}_1^0, \quad F \in E(z_0)$$
$$|F'(z_0)| = \frac{1}{1-|a|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}(1-|a|^2)M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}} + \sqrt{|a|}\right) \cdot M > M,$$

т.к. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) > 1$ при $0 < x < 1$. (где $x = \sqrt{|a|}$) Противоречие. Теорема доказана.

■

Б. Риман (B. Riemann) доказывал эту теорему из других соображений (электростатические потенциалы) в 1851 г. Окончательное обоснование его доказательства дал Д. Гильберт (D. Hilbert) лишь в 1900 г.

3.8. Соответствие границ при конформных отображениях

Теорема 3.13. *Пусть $f\colon G_1 \to G_2$, $w = f(z)$ однозначное, однолистное и конформное отображение (т. е. взаимно-однозначное и аналитичное, т.ч. $f(z) \neq 0$).Тогда при $z_n \to \partial G_1$ $f(z_n) \to \partial G_2$ (т. е. $\rho(f(z_n), \partial G_2) \to 0$).*

□ Будем доказывать от противного: пусть $f(z_n) \not\to \partial G_2$, тогда существует подпоследовательность этой последовательности, т.ч. $f(z_{n_k}) \to w \in G_2$ Т.к. отображение , обратное к однолистному, однолистно, то

$$\exists z_0\colon f(z_0) = w_0,\ w_{n_k} \to w_0$$

Тогда и $z_{n_k} = f^{-1}(w_{n_k}) \to z_0$, что противоречит условию $z_n \to \partial G_1$. ■

Теорема 3.14 (Каратеодори). *Если G_1 и G_2 жордановы области в $\overline{\mathbb{C}}$, то любое однолистное конформное отображение $w = f(z)$ продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$.*

Замечание. при этом, конформности на границе мы требовать не можем, там есть только непрерывность.

Теорема 3.15 (Кэллог). *Пусть $\theta(s)$ величина угла в дуговой абсциссе s. Если $\theta^{(k)}(s) \in \mathrm{Lip}\,\alpha, 0 < \alpha < 1$, то функция $w = f(z)$ $(k+1)$ раз дифференцируема на $\overline{G_1}$ и $f^{(k+1)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$*

3.9. Достаточные условия однолистности

Теорема 3.16 (обратный принцип соответствия границ). *Пусть G_1 и G_2 — жордановы области с границами Γ_1 и Γ_2 соответственно. Пусть $w = f(z)$ функция однозначна и аналитична в G_1, непрерывна на $\overline{G}_1$ и гомеоморфно отображает ∂G_1 на ∂G_2. Тогда функция $w = f(z)$ однолистно и конформно отображает G_1 на G_2 ($w = f(z)$ — гомеоморфизм $\overline{G}_1$ на $\overline{G}_2$). Отображение сохраняет направление обхода границ областей G_1 и G_2.*

□ Положим $z_0 \in G_1$, $z_1 \in \partial G_1 = \Gamma_1$. Применим принцип аргумента: пусть z бежит по Γ_1, тогда $w = f(z)$ бежит по Γ_2. Если $w_0 = f(z_0) \in G_2$, то $\Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) = \pm 2\pi$. Т.к. внутри контура нет полюсов, вариант -2π то невозможен. По принципу аргумента функция $f(z) - w_0 = 0$ имеет один корень.

Если же $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}_2$, то $\Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) = 0$, значит в G_1 нет решений уравнения $f(z) - w_0 = 0$ ($w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}_2$). Поскольку внутренние точки переходят во внутренние, то $f(z_0) \notin \Gamma_2$, если $z_0 \notin \Gamma_1$ ($z_0 \in G_1$).

Мы доказали однолистность и соответствие границ. ■

Замечание. Сохранение направления обхода границ следует из того, что $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) = +1$.

Следствие 3.4. *При конформных отображениях жордановых областей сохраняется направление обхода их границы.*

3.10. Условие единственности конформного отображения (условие нормировки)

Пусть отображение $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ однолистно и конформно. По теореме Римана существует бесконечно много отображений f, таких что $f(z_1) = z_2$ (точки z_1, z_2 фиксированы).

Условие нормировки Пуанкаре: $\arg f'(z_1) = \alpha$.

Отображение f с таким условием единственно.

Доказательство следует из теоремы Римана и леммы Шварца.

Другие условия нормировки:

1° $a \mapsto b$; $\arg f'(a) = \alpha \in [0, 2\pi)$. (Пуанкаре)

2° $a \mapsto b$; $\zeta \in \Gamma_1$, $\omega \in \Gamma_2$; $f(\zeta) = \omega$.

3° $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \Gamma_1$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Gamma_2$; $\omega_k = f(\zeta_k)$, причем согласованы направления следования в этих тройках.

При этом, условия 2), 3) годятся только для жордановых областей.

Конформно-инвариантные классы областей:

1° Области без границы $G = S^2$. На область с одной или несколькими граничными точками нельзя отобразить, поскольку образ компакта — компакт.

2° Области, граница которых состоит из одной точки. По предыдущему пункту их нельзя отобразить на S^2. По теореме Лиувилля нельзя отобразить на область с границей, содержащей более 1 точки.

3° Области с границей, состоящей более чем из 1 точки. Конформно эквивалентны по теореме Римана.

4. Гармонические функции

4.1. Гармонические функции двух переменных

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задана функция $u(x_1, x_2, x_3)$. Она называется гармонической в G, если:

1° u непрерывна в G;

2° Существуют $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ и непрерывны в G ($k = 1, 2, 3$);

3° Существуют $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$ и непрерывны в G ($k, j = 1, 2, 3$);

4° u удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$.

Двумерный случай.

Пусть $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z)$. Если $f(z)$ аналитична в области G, то существует $f^{(k)}(z)$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$.

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Из существования производных функции $f(z)$ следует, что частные производные по x, y существуют и непрерывны.

Условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{1}$$

Поэтому $\Delta u = 0$. Аналогично получаем $\Delta v = 0$. Тогда функции u и v гармоничны.

Гармонические функции u, v, связанные системой Коши – Римана, называются гармонически сопряженными. Точнее: v называется гармонически сопряженной к u. При $-u$ этом будет сопряжена кv:

Таким образом, функция $f(z) = u + iv$ аналитична тогда и только тогда, когда v гармонически сопряжена к u.

Утверждение 4.1. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$; u гармонична в G. Тогда существует семейство функций, гармонических в G и гармонически сопряженных к u. Все они записываются в виде*

$$v(x,y) = C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy, \tag{2}$$

где $z_0 = (x_0, y_0) \in G,\ z = (x,y) \in G$ (интеграл не зависит от пути). $C \in \mathbb{R}^1$

☐ Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{3}$$

Допустим, что решение этой системы существует. Тогда

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int\limits_{L(z_0,z)} dv = \int\limits_{L(z_0,z)} \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy. \tag{4}$$

(L — гладкая или кусочно-гладкая кривая, соединяющая z и z_0). Подставляем $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ из системы:

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int\limits_{L(z_0,z)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{5}$$

Убедимся, что интеграл не зависит от пути интегрирования. Проверим условие Эйлера: если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути. В нашем случае

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{6}$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{7}$$

т. е. условие выполнено. Обозначая $C = v(x_0, y_0)$, немедленно получаем

$$v(x,y) = C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{8}$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет системе Коши – Римана. Тогда функция v гармонически сопряжена к u. ■

Итог: для любой гармонической функции в односвязной области G существует гармонически сопряженная к ней функция v, причем $f = u + iv$ — аналитическая функция.

Рассмотрим такое скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (\nabla u, \quad dz) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}, dx + idy\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = du; \\ (\nabla u, -idz) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}, dy - idx\right) = \frac{\partial u}{\partial x}dy + \frac{\partial u}{\partial y}dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, $dz = \vec{\tau}\,ds$ и $-idz = \vec{n}dz$, Полагаем $\vec{\tau} = dz/ds$, $ds = |dz|$ — единичный вектор, а $\vec{n} = -idz/ds$ — перпендикуляр к нему.

Пусть u — гармоническая функция в односвязной области. Тогда функция

$$v(x,y) = C + \int\limits_a^z -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy, \quad C \in \mathbb{R} \tag{10}$$

будет гармонически сопряженной к u.

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = (\nabla u, -idz) = (\nabla u, \vec{n}ds) = (\nabla u, \vec{n})ds. \tag{11}$$

Это поток вектора ∇u через элемент ds (элемент длины).

$$v(z) - v(a) = N(L, \nabla u),$$

где $N(L, \vec{v})$ — поток вектора $\vec{v}$.

Итак, гармонически сопряженная к u функция — это поток вектора ∇u.

$$u(z) - u(a) = \int\limits_a^z du = \int\limits_a^z \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^z (\nabla u, dz) = \int\limits_a^z (\nabla u, \tau)ds. \tag{12}$$

Если ∇u — силовое поле потенциала u, то справа — циркуляция векторного поля ∇u. Таким образом, если силовое поле ∇u безвихревое, то

$$A(L, \vec{\nabla} u) = 0,$$

для замкнутого контура $L \subset G$ (область G — односвязная, функция u — гармоническая, $A(L, \vec{v})$ — циркуляция вектора $\vec{v}$).

4.2. Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных

Голоморфная функция — это однозначная аналитическая функция.

Теорема 4.2. *Пусть $u(x,y) = u(z)$ — гармоническая функция в области G, $\varphi(\zeta)$ — однозначна и аналитична в g, т. е. голоморфна в g, причем $\varphi(g) \subset G$. Тогда функция $U(\zeta) = u(\varphi(\zeta))$ гармонична в g.*

□

1° G односвязна. Строим функцию $f(z)$, такую что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ в G. Тогда $U(\zeta) = \operatorname{Re} f(\varphi(\zeta))$ — гармоническая в g.

2° G неодносвязна. Возьмем $\zeta_0 \in g$ и $\delta > 0$ столь малым, что $|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| < \rho\big(\varphi(\zeta_0), \partial G\big)$. Пусть g — это δ-окрестность точки ζ_0. Тогда мы находимся в случае 1)....

■

4.3. Принцип экстремума для гармонических функций

Теорема 4.3. *Если $u(z) = u(x,y)$ гармонична в области G и не постоянна в ней, то ни в какой внутренней точке области G она не принимает ни максимума, ни минимума (ни абсолютного, ни локального).*

□ Пусть $a \in G$ — фиксировано. Возьмем односвязную подобласть в G, содержащую a, и функцию $f(z)$, такую что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Если бы u была константой, то и v, а тогда по теореме единственности и f — константа. Функция $w = f(z)$ переводит окрестность точки a в область, содержащую $f(a)$. Значит, есть точки, такие что $\operatorname{Re} f(z) > f(a)$ и $\operatorname{Re} f(z) < f(a)$. Аналогично и для функции v. ■

Следствие 4.1. *Если функция $u(z)$ гармонична в области G и непрерывна на $\overline{G}$, то*

$$\max\{u(z),\, z \in \overline{G}\} = \max\{u(z),\, z \in \partial G\},$$
$$\min\{u(z),\, z \in \overline{G}\} = \min\{u(z),\, z \in \partial G\}.$$

4.4. Теоремы о среднем

Положим $D(a,R) := \{z\colon |z-a|<R\}$, $\overline{D}(a,R) := \{z\colon |z-a|\leqslant R\}$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})R\,d\theta = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta-a|=R}\int f(\zeta)\,d\zeta.$$

Это и есть первая теорема о среднем: среднее значение функции f на круге $D(a,R)$ равно значению функции в центре:

$$2\pi r f(a) = r\int\limits_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta.$$

Проинтегрируем это равенство по радиусу:

$$\pi R^2 f(a) = \int_0^R\int_0^{2\pi} f(a+rei\theta)rd\theta dr. \tag{13}$$

Получаем:

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{|\zeta-a|<R} f(\zeta)\,d\sigma. \tag{14}$$

Это вторая теорема о среднем.

Теорема 4.4. *Для того, чтобы $u(z)$, непрерывная в области, была гармонической в области, необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялась вторая (а значит, и первая) теорема о среднем.*

(Доказательство будет дано позже).

4.5. Аналитичность комплексно сопряженного градиента гармонической функции

Пусть функция u гармонична в области G. Обозначим $\nabla u := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}$. Покажем, что $\overline{\nabla u} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ — аналитическая функция. Проверим условия Коши-Римана для $\overline{\nabla u}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = & -\big(-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\big). \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку функция u — гармонична, то эти условия выполнены. Значит функция $\overline{\nabla u}$ — аналитическая и однозначная (голоморфная).

4.6. Теоремы единственности для гармонических функций

Теорема 4.5 (1). *Если в области G функции u_1 и u_2 — гармонические и $u_1(z) = u_2(z)$ для $\forall\, z\in g\subset G$, где g — подобласть в G, то $u_1(z) = u_2(z)$ в G.*

□ Рассмотрим функцию $U(z) = u_1(z) - u_2(z)$. Тогда $U(z) = 0$, $z\in g\subset G$. Тогда и $\overline{\nabla U(z)} = 0$ на g. По теореме единственности для аналитических функций $\overline{\nabla U(z)} \equiv 0$ на G. Получаем, $U\equiv \mathrm{const} = 0$ в G. ■

Теорема 4.6 (2). *Если u_1, u_2 — гармоничны в G и $\nabla u_1(z_n) = \nabla u_2(z_n)$, $z_n\in G$, $z_n\to a\in G$, то*

$$u_1(z) = u_2(z) + C,\ C = \mathrm{const}\in\mathbb{R}.$$

□ Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = \overline{\nabla(u_1-u_2)}$. По условию: $f(z_n) = 0$, $z_n\in G$, $z_n\to a\in G$. По теореме единственности, $f(z)\equiv 0$ в G. Следовательно $\nabla u_1 = \nabla u_2$ в G. Значит $u_1 - u_2 = C$, $C = \mathrm{const}$. ■

Если потребовалось, чтобы u_1 и u_2 совпали хотя бы в одной точке, то можно утверждать, что $u_1\equiv u_2$ в G.

Теорема 4.7 (3). *Если u_1 и u_2 гармоничны в G и непрерывны на $\overline{G}$, причем $u_1(z) = u_2(z), \forall z\in\partial G$, то $u_1\equiv u_2$ на $\overline{G}$.*

□ Используем принцип максимума: $u(z) := u_1(z) - u_2(z) = 0$ на ∂G тогда $u\equiv 0$ на $\overline{G}$. ■

Теорема 4.8 (Лиувилль). *Если $u(x, y) = u(z)$ гармонична на Oxy и ограничена хотя бы с одной стороны (т. е. либо $u(x, y) < C_1$, либо $u(x, y) > C_2$ на Oxy), то $u(x, y) \equiv \text{const}$.*

☐ Пусть $u(x, y) < C_1$. Рассмотрим $f(z) = e^{u+iv}$, где v — гармонически сопряженная к u. Тогда $|f(z)| = e^u < e^{C_1}$. По теореме Лиувилля $f(z) \equiv \text{const}$, следовательно $e^{U(z)} \equiv C$. Значит $u(z) = \log C$. В случае $u(x, y) > C_2$ нужно рассмотреть $f(z) = e^{-(u+iv)}$. ■

Теорема 4.9 (Харнак). *Если в проколотой окрестности $0 < |z-a| < R$ точки $a \in \mathbb{C} = Oxy$ задана ограниченная гармоническая функция $u(z) = u(x, y)$, $|u(z)| \leqslant M$, то тогда точка a устранима (можно доопределить $u(z)$ в точке a так, что $u(z)$ будет гармонической во всей окрестности $|z - a| < R$).*

☐ Пусть $z_0 \in D^0(a, R) = \{z : 0 < |z - a| < R\}$. Положим

$$f(z) = u(z) + i \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy. \tag{16}$$

1° Пусть $F(z) = e^{f(z)}$, $f(z)$ не зависит от пути. Тогда $e^{-M} \leqslant |F(z)| = e^{u(z)} \leqslant e^M$ в $D^0(a, R)$. Значит, $F(z)$ голоморфная и ограниченная в $D^0(a, R)$. Значит особенность в точке a — устранимая. $F(a) \neq 0$. Тогда положим $f(z) = (\operatorname{Ln} F(z) = f(z) + 2\pi ki)_0$, $z \in D(a, R)$ — ветвь логарифма, соответствующая $k = 0$ в проколотой окрестности $D^0(a, R)$.

2° Если интеграл зависит от пути, то при каждом повороте вокруг a появляется циклическая постоянная:

$$\int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = v_0(z) + n\omega, \quad w \neq 0. \tag{17}$$

Тогда $F(z) = \exp\left(\frac{2\pi(u+iv)}{\omega}\right)$ — однозначная функция. Имеем $|F(z)| = \exp\left(\frac{2\pi u(z)}{\omega}\right)$, и $\ln |F(z)| = \frac{2\pi}{\omega} u(z)$. Отсюда следует однозначность и гармоничность функции $u(z)$ во всей окрестности.

■

Замечание.[о том, что такое циклическая постоянная] $\overline{\nabla u}$ — аналитическая функция.

$$\int \overline{\nabla u}\, dz = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

$$\int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \operatorname{Im} \int \overline{\nabla u}\, dz = 2\pi i \operatorname{Im} \operatorname{res} \overline{\nabla u}.$$

4.7. Гармонические полиномы

Это полиномы, являющиеся гармоническими функциями (т. е. целые гармонические функции).

Пример 7.1.

1° Однородный полином:

$$\operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re}(x + iy)^n = x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

2° $\operatorname{Re} c_k z^k$, где $c_k = a_k - ib_k$:

$$\operatorname{Re}(c_k z^k) = \operatorname{Re}((a_k - ib_k) r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)) = r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Легко видеть, что любой гармонический полином есть сумма однородных гармонических полиномов.

Теорема 4.10 (формула Пуассона). *Если $u(z)$ гармонична в некоторой окрестности круга $\overline{D}(a, R) = \{z : |z - a| \leqslant R\}$, то*

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta.$$

☐ Можно взять круг $D(a, R + \varepsilon)$, в котором $u(z)$ гармонична, и $f(z)$, такая что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D(a, R),$$

(интегральная формула Коши) Если $z \notin \overline{D}(a, R)$, то интеграл в правой части равен нулю по интегральной теореме Коши.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right) d\zeta, \quad z^* = \frac{R^2}{\overline{z}}.$$

Очевидно, $\zeta^* = \zeta$. С другой стороны, $\zeta^* = \frac{R^2}{\overline{\zeta}}$, значит $\zeta = \frac{R^2}{\overline{\zeta}}$. Поэтому

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} = \frac{z - z^*}{(\zeta - z)(\zeta - z^*)} = \frac{z\overline{z} - R^2}{(\zeta - z)(\zeta\overline{z} - R^2)} = \frac{|z|^2 - R^2}{(\zeta - z)(\overline{z} - \overline{\zeta})} \cdot \frac{1}{\zeta} =$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\theta} - rei\varphi|^2} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} \cdot \frac{1}{\zeta}. \quad (18)$$

Последнее равенство следует из теоремы косинусов. Поскольку $\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}} = i\,d\theta$, то

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta. \quad (19)$$

■

Ядро Пуассона: $P_R(r, \theta - \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}$. Легко проверить, что $P_R(r, \theta - \varphi) = \operatorname{Re}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}$, где $\zeta = Re^{i\varphi}$ и $z = re^{i\varphi}$. Поэтому $P_R(r, \theta - \varphi)$ гармонична в $D(0, R)$ для любого фиксированного значения θ.

Ядро Шварца:

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{Re^{i\theta} + re^{i\varphi}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}},$$

(очевидно, это аналитическая функция)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Rei\theta + z}{Re^{i\theta} - z}\,d\theta$$

(формула Шварца)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\,d\theta + ic, \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

(По вещественной части восстанавливаем всю функцию) Заметим, что

$$\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} = 1 + 2z\frac{1}{\zeta - z} \quad (20)$$

и разложим $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд. Проинтегрировав, получим разложение в степенной ряд функции u. Формулы для коэффициентов a_k, b_k для тригонометрического ряда легко получаются из коэффициентов Коши для c_k ($c_k = a_k - ib_k$).

Теорема 4.11 (Пуассон). *Если функция $u(z) = u(re^{i\varphi}$ гармонична в $D(0, R)$ и непрерывна на $\overline{D}(0, R)$, то*

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta. \quad (21)$$

□ Рассмотрим граничную функцию $g(\theta) = u(Re^{i\theta})$. Она непрерывна и 2π-периодична. Значит, существует последовательность $T_n \overset{[o,2\pi)}{\rightrightarrows} g(\theta)$ (T_n — тригонометрические полиномы)

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k^{(n)}\cos k\theta + b_k^{(n)}\sin k\theta\right). \quad (22)$$

Рассмотрим $\tau_n(z) = \sum_{k=0} n\left(\frac{r}{R}\right)^k\left(a_k^{(n)}\cos k\theta + b_k^{(n)}\sin k\theta\right)$ — гармонический полином. Поскольку на границе сходимость равномерна, то по принципу максимума сходимость равномерна и во всем круге: $|\tau_{n'} - \tau_{n''}| \leqslant \varepsilon$ на $\partial D(0, R)$, значит и на $\overline{D}(0, R)$. По формуле Пуассона, так как $\tau_n(Re^{i\theta}) = T_n(\theta)$,

$$\tau(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(\theta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta. \quad (23)$$

Переходя к пределу, получаем

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta. \quad (24)$$

Ядро ограничено снизу и сверху:

$$\frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)} \leqslant \frac{R+r}{R-r}. \tag{25}$$

Поэтому переход к пределу законен. ■

Если $g(\varphi)$ — 2π-периодическая непрерывная функция, то функция

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta, \quad u(Re^{i\varphi}) = g(\varphi) \tag{26}$$

гармонична в круге $D(0,R)$. Она решает задачу Дирихле в круге и произвольной области.

Теорема 4.12. *Если функция u гармоническая, непрерывная на $\overline{D}$ и $u \in \operatorname{Lip}\alpha$ ($\alpha > 1$) на $\overline{D}(a,R)$, то и $v \in \operatorname{Lip}\alpha$ на $\overline{D}(a,R)$.*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta + ic, \quad c \in \mathbb{R}^1. \tag{27}$$

Сделаем замену $\zeta = Re^{i\theta}$, $d\zeta = Rie^{i\theta}\,d\theta$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=R} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{28}$$

Так как $\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = 1 + 2z\frac{1}{\zeta-z}$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + 2z\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{(\zeta-z)\zeta}\,d\zeta. \tag{29}$$

Оба интеграла — интегралы типа Коши. Можно разложить в степенной ряд по степеням $\frac{z}{\zeta}$.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{30}$$

Отделяя Re и Im, мы получаем тригонометрические ряды для функций u и v.

4.8. Гармоническое продолжение. Принцип отражения

Пусть $u_1(z)$ — гармонична в G_1, $u_2(z)$ гармонична в G_2. Пусть $u_1(z) \equiv u_2(z)$, $\forall z \in G_1 \cap G_2$. Тогда u_1 и u_2 — гармонические продолжения одна другой.

Так же, как для аналитических функций, можно определить гармоническое продолжение, риманову поверхность и т. д.

Докажем аналог принципа симметрии Римана – Шварца:

Теорема 4.13 (Принцип отражения). *Пусть в состав границы жордановой области G входит отрезок Δ (будем считать, что G лежит в верхней полуплоскости, а отрезок лежит на вещественной прямой), и пусть гармоническая функция $u(z)$ непрерывна на $G \cup \Delta$, причем $u(z) = 0$, $z \in \Delta$. Тогда функция $u(z) = u(x,y)$, доопределенная в области G^* (симметричной G относительно Δ), как $u(x,y) = -u(x,-y)$, $(x,y) \in G^*$ является гармонической в области $G \cup \Delta \cup G^*$.*

□ Проверим, что $u(x,y)$ гармонична в области G^*:

$$\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial y^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{31}$$

Пусть $a \in \Delta$ и выберем R так, чтобы $\overline{D}(a,R) \subset G \cup \Delta \cup G^*$. Решим задачу Дирихле для области $G \cup \Delta \cup \Gamma^*$ с граничными условиями, задаваемыми функцией (продолженной). Решение задается интегралом Пуассона:

$$u_a(z = re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{-\pi} u(a + Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta. \tag{32}$$

Докажем, что $u_a(z) = 0$ при $z \in (a - R, a + R)$ (на диаметре круга $D(a, R)$): при этих z, $\varphi = 0$ либо $\varphi = \pm\pi$. Подынтегральная функция $u(a + Re^{i\theta})$ — нечетная функция, а ядро Пуассона — четная функция. Значит интеграл равен 0. Итак $u(z) = 0$ на $\Delta \cap D(a, R)$.

Таким образом, построенная функция совпадает с «верхней» функцией на верхней полуокружности, с «нижней» — на нижней и равна 0 на $\Delta \cap D(a, R)$. Поскольку a произвольно, то все доказано. ■

Пример 8.1. Потенциалы полей.

При отображении $w = L(z)$ гармоничность сохраняется, поэтому можно восстановить силовые линии на исходной картинке, а также эквипотенциальные поверхности.