Київський національний університет імені Тараса Шевченка

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

“ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ”

М.О. Перестюк, О.М. Станжицький, О.В. Капустян

Київ – 2003

зміст

Вступ

Людям властиве бажання прагнути до найкращого, і тому, якщо вони змушені обирати серед багатьох можливостей, то бажання обрати серед них оптимальну представляється цілком природнім.

Для того, щоб знайти оптимальну серед можливостей, ми змушені розв'язувати задачі на відшукання максимуму або мінімуму, тобто найбільших або найменших значень якихось величин. Обидва ці поняття – максимум і мінімум – об'єднані єдиним терміном "екстремум". Тому задачі на відшукання максимуму або мінімуму називають екстремальними задачами.

Методи розв'язання і дослідження різних класів екстремальних задач і складають основу даного посібника. Три його розділи "Негладкі екстремальні задачі", "Гладкі екстремальні задачі", "Задачі класичного варіаційного числення" дають можливість ознайомитись зі значною частиною типових екстремальних задач, причому їх дослідження суттєво спирається на апарат функціонального аналізу.

Структура посібника має наступний вигляд: кожен розділ складається з занять, які, в свою чергу, складаються з теоретичної частини і вправ для самостійної роботи. Порядок занять повністю відповідає семестровому нормативному курсу "Варіаційне числення", що читається для студентів 4-го курсу механіко-математичного факультету. Теоретична частина занять є близькою до підручника [1], хоча значна частина розділу 1 спирається на монографії [2-5], розділу 2 – на підручник [6]. При цьому, не дивлячись на схематичний характер багатьох доведень, посібник може бути використаним для самостійного засвоєння предмету "Варіаційне числення" студентами, що володіють апаратом функціонального аналізу в обсязі підручника [7]. При підборі вправ автори спиралися на посібник [8], збірник задач [9], методичну розробку [10]. Майже кожне заняття крім типових вправ містить завдання підвищеної складності, розв'язання яких вимагає від студента глибокого розуміння теоретичного матеріалу.

Формалізація екстремальних задач.

Перед тим, як переходити до суто математичних постановок задач, доцільно на прикладах уяснити, як такі постановки виникають.

Задача 1 (Евклід) В трикутник ABC вписати паралелограм $ADEF$ найбільшої площі.

Задача 2 (Ферма) Знайти траєкторію променя світла між двома точками оптично неоднорідного середовища.
Задача 3 (Бернуллі) Знайти шлях, вздовж якого під дією лише сили тяжіння тіло від т. A до т. B переміститься за найкоротший час.
Задача 4 (транспортна задача) Запаси продукту розподілені по m базах. Потрібно доставити цей товар до n споживачів за найменших витрат.
Для того, щоб формалізувати поставлені задачі, тобто звести їх до математичної постановки, потрібно чітко визначити структуру екстремальної задачі. Точно поставлена екстремальна задача містить наступні елементи: простір елементів X, множина допустимих елементів $C \subseteq X$, функціонал $f : X \mapsto \overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, який потрібно мінімізувати або максимізувати на множині допустимих елементів.
Таким чином, потрібно звести задачі 1 – 4 до наступного вигляду:

$$\begin{cases} f(x) \to \text{extr} \\ x \in C \subseteq X \end{cases}$$

Формалізація задачі 1: нехай т. $D \in AB$, т. $E \in BC$, т. $F \in AC$. Вважаючи, що довжина H висоти, проведеної із вершини B, і довжина a сторони AC відомі, отримуємо відносно змінної x (довжини AF) наступну екстремальну задачу:

$$\begin{cases} f(x) = H(a-x)\dfrac{x}{a} \to \sup \\ x \in [0, a] \end{cases}$$

Це – гладка задача, $X = R,\ C = [0, a]$.
Формалізація задачі 2: нехай площина $z = 0$ розділяє два однорідних середовища, причому швидкість розповсюдження світла в верхньому півпросторі рівна v_1, в нижньому – v_2.Шукаємо траєкторію променя світла, що йде з т. $A = (0,0,\alpha),\ \alpha > 0$ до т. $B = (\xi,0,-\beta),\ \beta > 0$. Будемо спиратись на варіаційний принцип Ферма, який стверджує, що промінь світла проходить ту траєкторію, для проходження якої йому знадобиться найменше часу. В силу симетрії траєкторія променя лежить в площині $y = 0$. Нехай т. $C = (x,0,0)$ – точка переломлення

променя. Тоді відносно змінної x маємо наступну екстремальну задачу: $f(x)=\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{\beta^2-(\xi-x)^2}}{v_2}\to\inf$

Це знову ж таки гладка задача, $X=R=C$.

Формалізація задачі 3: введемо в площині, що містить задані точки A,B систему координат так, щоб вісь OX була горизонтальна, вісь OY була спрямована вниз, т. A співпадала з початком координат. Нехай т. B має координати $(x_1,y_1),\ x_1>0, y_1>0$, $y(\bullet)$ – функція, що задає рівняння кривої, яка з'єднує точки A,B. Тоді швидкість тіла в т. $(x,y(x))$ дорівнює $\sqrt{2gy(x)}$, а час, необхідний тілу на проходження ділянки кривої довжини $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ від т. $(x,y(x))$ до т. $(x+dx,y(x)+dy)$ дорівнює $dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy(x)}}$. Звідси маємо наступну екстремальну задачу: $\begin{cases} f(y(\bullet))=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx\to\inf \\ y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1\end{cases}$

Це задача класичного варіаційного числення, $X=C^1([0,x_1]),\ C=\{y(\bullet)\in C^1([0,x_1]\ |\ y(0)=0, y(x_1)=y_1\}$

Формалізація задачі 4: введемо такі позначення для відомих з умови задачі величин

a_i – кількість одиниць продукту на i-тій базі, $i=\overline{1,m}$;

b_j – кількість одиниць продукту, що потребує j-тий споживач, $j=\overline{1,n}$;

c_{ij} – вартість доставки одиниці продукту з i-тої бази до j-того споживача.

Тоді загальна вартість доставки дорівнює $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$, де x_{ij} – кількість одиниць продукту, що підлягає доставці з i-тої бази до

j-того споживача. Відносно змінних $\{x_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ маємо екстремальну

задачу: $\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \inf \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$

Отримали задачу лінійного програмування, X – простір матриць розміру $m \times n$, $C = \left\{ x = \{x_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ x_{ij} \ge 0 \right\}$.

Після формалізації екстремальної задачі виникає питання про її розв'язність. Будемо вважати, що (X, ρ) – метричний простір. Оскільки $\sup f(x) = -\inf(-f(x))$, то надалі будемо розглядати лише задачу мінімізації $\begin{cases} f(x) \to \inf \\ x \in C \subset X \end{cases}$ і розв'язок цієї задачі будемо розуміти в одному з двох сенсів:

т. $\bar{x} \in C$ називається глобальним мінімумом , якщо $\forall x \in C \quad f(x) \ge f(\bar{x})$

т. $\bar{x} \in C$ називається локальним мінімумом , якщо $\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in C \cap B_\delta(\bar{x}) \quad f(x) \ge f(\bar{x})$, де $B_\delta(\bar{x}) = \{x \in X \mid \rho(x, \bar{x}) < \delta\}$.

З контексту завжди буде зрозуміло, про який розв'язок ідеться.

Вправи

1. Знайти на заданій прямій таку точку, щоб сума відстаней від неї до двох заданих точок була мінімальною.
2. Вписати в круг прямокутник найбільшої площі.
3. Вписати в кулю конус найбільшого об'єму.
4. Знайти криву з фіксованими кінцями, що лежить в 1-ому квадранті площини, від обертання якої навколо вісі абсцис утворюється поверхня найменшої площі.
5. Знайти форму абсолютно гнучкого канату заданої довжини, закріпленого в фіксованих точках.
6. Знайти плоску, замкнену, спрямляєму криву заданої довжини, що охоплює найбільшу площу (задача Дідони)
7. Скласти раціон харчування з мінімальними витратами при фіксованому асортименті продуктів, заданій кількості в кожному з

них поживних речовин і відомій вартості одиниці кожного продукту, вважаючи, що раціон повинен забезпечувати необхідну потребу організму в поживних речовинах.

8. Тіло рухається прямолінійно без тертя і керується зовнішньою силою, що може змінюватись в заданих межах. Знайти таке керування зовнішньою силою, що забезпечує зупинку тіла в заданій точці за найкоротший час.
9. Корабель рухається з постійною швидкістю відносно течії, швидкість якої постійна за модулем і напрямом. Знайти керування кораблем, що забезпечує досягнення ним даної точки із заданого початкового стану за найкоротший час, вважаючи керуючим вектор $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, де $\alpha = \alpha(t) -$ кут між векторами швидкостей корабля і течії.
10. Навести приклади функцій, що мають наступні властивості:

а) глобальний мінімум і максимум досягаються в нескінченій кількості точок

б) функція обмежена, глобальний максимум досягається, мінімум – ні

в) функція обмежена, глобальні екстремуми не досягаються

г) є єдиний локальний екстремум, що не є глобальним

11. Нехай $f \in C(R^n),\ \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$. Довести, що f досягає глобального мінімуму на будь-якій замкненій підмножині R^n. Якщо ж $f \in C^1(R^n)$ і f' має єдиний нуль $x = \bar{x}$, то $\bar{x}$ є глобальним мінімумом функції f.

Розділ 1. „Негладкі екстремальні задачі”.

1.1. Теореми Вейєрштраса.

Розглядається екстремальна задача

$$\begin{cases} f(x) \to \inf \\ x \in C \subset X \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $f : X \to \overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, X - деякий простір, $C \subset X$ - множина допустимих елементів, на якій шукається розв’язок (1). Поступово підсилюючи умови на X, C, f і уточнюючи їх структуру, ми будемо впродовж цього курсу отримувати все більш змістовні теореми щодо розв’язності задачі (1). Нехай X – метричний простір з метрикою ρ.

Означення $f : X \to \overline{R}$ називається напівнеперервною знизу (н.н.зн.) в т. x_0, якщо $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

$f : X \to \overline{R}$ називається напівнеперервною зверху (н.н.зв.) в т. x_0, якщо $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

Очевидно, що функція $f : X \to R$, яка одночасно н.н.зн. і н.н.зв. в т. x_0, є неперервною в т. x_0. Для напівнеперервних функцій можна узагальнити відому теорему Вейєрштраса.

Теорема(Вейєрштраса). Якщо $f : X \to \overline{R}$ - н.н.зн. і скінчена на компакті $K \subset X$, то f – обмежена знизу на K і приймає на K своє найменше значення.

Доведення Нехай $s = \inf\limits_{x \in K} f(x)$. Тоді $s \geq -\infty$ і за означенням $\inf$ існує $\{x_n\} \subset K$ така, що $s = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. Оскільки K – компакт, то $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ така, що $x_{n_k} \to x_* \in K$. Отже,
$s = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \varliminf\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_*) \in R$. Звідси $s = f(x_*) > -\infty$.

Нехай X – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$.

Означення $f : X \to R$ називається слабо н.н.зн. (слабо н.н.зв.) в т. x_0, якщо для $\forall \{x_n\} \subset X$ такої, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$ виконується $\varliminf\limits_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$ ($\varlimsup\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x_0)$).

Теорема(Вейєрштраса в банаховому просторі). Якщо X – рефлексивний банахів простір, $M \subset X$ - обмежена, замкнена, опукла множина, $f : X \to \overline{R}$ - скінчена, опукла, н.н.зн. на M, то f обмежена знизу на M і приймає на M своє найменше значення.

Доведення Розглянемо множину $A = \{x \in M \,|\, f(x) \leq a\}$ для тих $a \in R$, для яких $A \neq \varnothing$. В силу умов теореми A – замкнена, опукла, обмежена. Нехай $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $\{x_n\} \subset A$. З теореми Мазура існує S_n – послідовність опуклих комбінацій елементів з $\{x_n\}$ така, що $S_n \to x_0$. Звідси $x_0 \in A$ і f – слабо н.н.зн. на A. Для $S = \inf\limits_{x \in M} f(x)$ маємо для мінімізуючої послідовності $\{x_n\}$ існування підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ такої, що $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_* \in M$. Тоді $S = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \underline{\lim}_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_*)$, отже $S = f(x_*)$.

Вправи

1). Дослідити на напівнеперервність:

а) $f(x) = [x]$ ($[\cdot]$ - ціла частина) б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, x \neq 0 \\ +\infty, x = 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо} \quad x - \text{раціональне} \\ 1, \text{якщо} \quad x - \text{ірраціональне} \end{cases}$.

2). Показати, що якщо f_1, f_2 - н.н.зн. функції, то функції $f_1 + f_2$, $\alpha f_1\ (\alpha \geq 0)$, $f_1 f_2\ (f_i \geq 0)$ є н.н.зн. У випадку $f \geq 0$ дослідити на напівнеперервність функцію $\frac{1}{f}$.

3). Довести наступні твердження.

а) f - н.н.зн. (н.н.зв.) в т. x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$ $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ ($f(x) < f(x_0) + \varepsilon$).

б) f - н.н.зн. на множині X $\Leftrightarrow$ $\forall a \in R$ множина $\{x \in X | f(x) \leq a\}$ - замкнена.

в) f - н.н.зв. на множині X $\Leftrightarrow$ $\forall a \in R$ множина $\{x \in X | f(x) \geq a\}$ – замкнена.

г) множина $A \subset X$ – відкрита (замкнена) $\Leftrightarrow$ $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$ – н.н.зн. (н.н.зв.)

4). Переформулювати і довести теореми Вейєрштраса для напівнеперервних зверху функцій .

5). Нехай $f_i : X \to R, i \in I$ – сім'я н.н.зн. (н.н.зв.) функцій. Дослідити на напівнеперервність функції $\varphi(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$, $\psi(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ у випадку скінченої і нескінченої множини I .

6). Нехай $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – неспадна послідовність н.н.зн. функцій і $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Довести, що f - н.н.зн.

7). Нехай M – метричний простір дійсних, обмежених функцій $\varphi(t), t\in[a,b]$ з метрикою $\rho(\varphi,\psi)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi(t)-\psi(t)|$. Дослідити на напівнеперервність знизу функціонал $L: M\to \overline{R}$, $L(\varphi)=\sup\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2}$, де $\sup$ береться по всім розбиттям відрізка $[a,b]$.
Який вигляд має L для функцій з неперервною похідною?

8). Показати, що функція $f: L_2(0,1)\to\overline{R}$, $f(x(\cdot))=\int\limits_0^1 x^4(t)dt$ не є неперервною в метриці простору $L_2(0,1)$. Дослідити цю функцію на напівнеперервність в цій метриці.

9). Нехай $\Omega\subset R^n$ – відкрита підмножина і $u:\Omega\times R\to\overline{R}$ – борелівська функція така, що $\forall w\in\Omega$ функція $y\to u(w,y)$ - н.н.зн. і $u(w,y)\ge 0$ $\forall(w,y)\in\Omega\times R$. Означимо функціонал f на $L_2(\Omega)$ за формулою: $\forall x(\cdot)\in L_2(\Omega)$ $f(x(\cdot))=\int\limits_\Omega u(w,x(w))dw$. Довести, що $f: L_2(\Omega)\to\overline{R}$ - н.н.зн.

10). Нехай функція $f: C([0,1])\to R$ задана співвідношенням $f(x(\cdot))=\int\limits_0^1 x(t)dt - x\left(\frac{1}{2}\right)$. Знайти $\inf$ і $\sup$ функції на одиничній кулі B_1 простору $C([0,1])$. Чи досягаються вони на B_1? Чому?

11). За допомогою теореми Вейєрштраса дослідити на компактність множину $U=\left\{x(\cdot)\in C([0,1])\,\middle|\,\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|\le 1, x(0)=0, x(1)=1\right\}$ в $C([0,1])$.

12). Довести, що функціонал $f(x)=\|x-x_0\|$ на будь-якій опуклій, замкненій множині K рефлексивного банахового простору $(X,\|\cdot\|)$ досягає $\inf$.

13). В просторі l_2 побудувати замкнену множину, в якій немає елемента з найменшою нормою.

1.2. Задача апроксимації в нормованому просторі.

Нехай $(X,\|\cdot\|)$ – нормований простір, $M\subset X$, $x_0\notin M$. Задача апроксимації в нормованому просторі:

$$\begin{cases}\|x-x_0\|\to\inf\\ x\in M\end{cases}\qquad(1)$$

Означення Якщо $\bar{x}\in M$ – розв'язок (1), тобто $\|\bar{x}-x_0\|=\inf\limits_{x\in M}\|x-x_0\|$, то $\bar{x}$ називається елементом найкращого наближення для x_0 на множині M і позначається $proj_M x_0$.

Теорема (про апроксимацію в нормованому просторі) Якщо M – скінченновимірний підпростір, то задача (1) має розв'язок.

Доведення. Нехай $d:=\inf\limits_{x\in M}\|x-x_0\|\ge 0$. Потрібно довести, що $\exists\bar{x}\in M:\|\bar{x}-x_0\|=d$. $\dim M=n$, отже, існує базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в просторі $(M,\|\cdot\|)$. Нехай $\forall x\in M$ $\|x\|_1:=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i^2}$, де $x=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i e_i$. Оскільки в просторі M норми $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_1$ еквівалентні, то

$\exists\alpha,\beta>0:\forall x\in M$ $\alpha\|x\|_1\le\|x\|\le\beta\|x\|_1$. Розглянемо в $(M,\|\cdot\|_1)$ замкнену кулю $\overline{B_r(0)}$, де $r=\dfrac{d+1+\|x_0\|}{\alpha}$. Тоді для $f(x)=\|x-x_0\|$ $\forall x\notin\overline{B_r(0)}$ $f(x)>d+1$, отже, своє мінімальне значення f може приймати лише в $\overline{B_r(0)}$. Оскільки f – неперервна в $(M,\|\cdot\|_1)$, то за теоремою Вейєрштраса існує $\bar{x}\in\overline{B_r(0)}\subset M$ таке, що $\min\limits_{x\in M}f(x)=f(\bar{x})$.

Означення Простір $(X,\|\cdot\|)$ називається строго нормованим, якщо з того, що $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ випливає, що $x=\lambda y, \lambda\in R$. Строго нормованим є, зокрема, гільбертів простір.

Теорема (про єдиність елемента найкращого наближення) Якщо $(X,\|\cdot\|)$ – строго нормований простір, $M\subset X$ - довільний підпростір, то задача (1) має на більше одного розв'язку.

Доведення. Від супротивного: Нехай існують $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2$, такі, що $\|x_1 - x_0\| = \|x_2 - x_0\| = \inf_{x\in M}\|x - x_0\| = d$. Тоді

$d \le \left\|x_0 - \frac{x_1+x_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x_0-x_1}{2} + \frac{x_0-x_2}{2}\right\| \le d$, отже, $\left\|x_0 - \frac{x_1+x_2}{2}\right\| = d$.

Звідси $\|x_0 - x_1 + x_0 - x_2\| = \|x_0 - x_1\| + \|x_0 - x_2\|$, що разом зі строгою нормованістю X дає $x_0 \in M$.

Теорема (про апроксимацію в гільбертовому просторі) Нехай X – комплексний гільбертів простір, $M\subset X$ - замкнена, опукла множина. Тоді задача (1) має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $d=\inf_{x\in M}\|x-x_0\|$. Тоді $\exists\{x_n\}\subset M$ така, що $\forall n\ge 1$ $\|x_n - x_0\| \le d + \frac{1}{n}$. Покажемо, що $\{x_n\}$ – фундаментальна. З рівності паралелограма

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - x_0\|^2 + \|x_m - x_0\|^2\right) - 4\left\|x_0 - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

$\le \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \to 0, n, m \to \infty$. Тоді існує $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$, звідси граничним переходом маємо $\|\overline{x} - x_0\| = d$. Єдиність легко отримується застосуванням рівності паралелограма.

Вправи

1. Нехай X – комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\| \ \|$. M – замкнена, опукла підмножина X. Довести, що $z = proj_M x \Leftrightarrow \forall y \in M \ \ \mathrm{Re}(x - z, z - y) \ge 0$.
2. Довести, що $\forall\, x \notin \overline{B_r(x_0)}$ $proj_{\overline{B_r(x_0)}} x = x_0 + \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$.

3. M – замкнений, опуклий конус в X. Довести, що $z = proj_M x$ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in M$ $\begin{cases} \mathrm{Re}(x - z, y) \le 0 \\ \mathrm{Re}(x - z, z) = 0 \end{cases}$.

4. M – підпростір в X. Довести, що $z = proj_M x$ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in M$ $(x - z, y) = 0$. Показати, що відображення $x \mapsto proj_M x$ належить $L(X)$. Знайти $proj_M x$, якщо $\dim M = n < \infty$.

5. Нехай $M = \left\{x \in R^n \middle| (a, x) = \alpha\right\}$, де $a \in R^n, \alpha \in R$, $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в R^n. Довести, що $\forall x \notin M$ $proj_M x = x + \dfrac{(\alpha - (a, x))a}{\|a\|^2}$. Чи зміниться відповідь для $M = \left\{x \in R^n \middle| (a, x) \le \alpha\right\}$?

6. Нехай $M = \left\{x \in R^n \middle| (a_i, x) = \alpha_i, i = \overline{1, m}\right\}$, де $\{a_i\}_{i=1}^m \subset R^n$ - ЛНЗ, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset R$. Довести, що $\forall x \notin M$ $proj_M x = x + A^T \left(AA^T\right)^{-1}\left(Ax - \alpha\right)$, де A – матриця з рядками $a_i \in R^n$.

7. Нехай $M = \left\{x \in R^n \middle| \alpha_i \le x_i \le \beta_i, i = \overline{1, n}, \alpha_i < \beta_i\right\}$. Довести, що $\forall x \notin M$ $proj_M x = \begin{cases} \alpha_i, x_i < \alpha_i \\ \beta_i, x_i > \beta_i \end{cases}$.

8. Нехай $M = \left\{x \in R^n \middle| x_i \ge 0, i = \overline{1, n}\right\}$. Довести, що $\forall x \in R^n$ $proj_M x = \left(\max\{0, x_i\}\right)_{i=1}^n$.

9. Для e^t знайти многочлен 2-го ступеня $p(t)$ такий, що норма $\left\|e^t - p(t)\right\|$ мінімальна в $L_2(-1,1)$.

10. Для функції t^3 знайти многочлен n-го ступеня $p_n(t)$ такий, що норма $\left\|t^3 - p_n(t)\right\|$ мінімальна в $L_2(-1,1)$, $n = 0,1,2$.

11. В просторі $L_2(-1,1)$ побудувати проекцію будь-якої функції на підпростори парних і непарних функцій.

12. Розв'язати задачу $\begin{cases} \left\|t^2 - x(t)\right\|_{L_2(0,1)} \to \inf \\ x(\cdot) \in L \end{cases}$, де $L = \left\{ x(\cdot) \in L_2(0,1) : \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\}$.

13. Нехай в просторі l_2 задано точку $x_0 = (1,0,0,\ldots)$ і множину $L_n = \left\{ x \in l_2 \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$. Знайти $d_n := \inf_{x \in L_n} \|x - x_0\|$. Чому дорівнює $\lim_{n\to\infty} d_n$?

14. В просторі $C([0,1])$ описати множину елементів найкращого наближення $x_0(t) = 1$ елементами з $L = \{x(\cdot) \in C([0,1]) : x(0) = 0\}$.

15. В просторі $C([0,1])$ знайти відстань від $x_0(t) = t$ до множини многочленів нульового ступеня.

1.3. Задачі опуклої оптимізації.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний нормований простір.

Означення Множина $M \subset X$ називається опуклою, якщо $\forall x_1, x_2 \in M$ $\forall \alpha \in [0,1]$ $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in M$.

Означення Мінімальна опукла множина, що містить множину M, називається опуклою оболонкою M і позначається coM.

Лема. $coM = \bigcap_{\substack{M \subset A \\ A - опукла}} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \middle| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in M \right\}$.

Означення Множина $K \subset X$ називається конусом, якщо $\forall x \in K$ $\forall \alpha \geq 0$ $\alpha x \in K$.

Означення Множина $K^* \subset X^*$ називається спряженим конусом до конуса $K \subset X$, якщо $K^* = \left\{ x^* \in X^* \middle| x^*(x) \geq 0, \forall x \in K \right\}$.

Лема. K^* – опуклий конус в X^*.

Теорема (про відокремлення). Нехай X – дійсний гільбертів простір, $M \subset X$ - замкнена, опукла підмножина X. Якщо $x_0 \notin M$, то існує $x^* \in X^*$ і $\varepsilon > 0$ такі, що $\forall x \in M$ $x^*(x) \leq x^*(x_0) - \varepsilon$.

Доведення. В силу умов теореми $\exists! z = proj_M x_0$. Тоді $\forall x \in M$ $(x_0 - z, z - x) \geq 0$. Звідси $\|z - x_0\|^2 \leq (x_0 - z, x_0 - x) \quad \forall x \in M$. Оскільки $x_0 \notin M$, то $\varepsilon = \|z - x_0\| > 0$ і функціонал $x^*(x) := (x_0 - z, x)$ – шукані.

Теорема (про відокремлення в широкому сенсі). Нехай $\dim X < \infty$, $M \subset X$ - опукла, $x_0 \notin M$. Тоді існує $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ такий, що $\forall x \in M \quad x^*(x) \leq x^*(x_0)$.

Доведення. Для довільного $x \in M$ розглянемо множину $F_x := \{p \in X^* \big| \|p\| = 1, p(x) \leq p(x_0)\}$. Тоді $F_x \neq \varnothing$ компакт в X^* і $x^* \in \bigcap_{x \in M} F_x$. Скористаємось наступним відомим результатом: якщо $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – сім'я компактів в X, то $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing \iff \forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset I$ $\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \neq \varnothing$. Отже, теорема буде доведеною, якщо ми покажемо, що $\forall x_1, \ldots, x_n \in M \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_{x_i} \neq \varnothing$. Розглянемо $co\{x_1, \ldots, x_n\} := K$. Тоді K – опукла, замкнена, $x_0 \notin K$, отже, $\exists \tilde{x} \in X^*, \tilde{x} \neq 0 : \tilde{x}(x) < \tilde{x}(x_0) \quad \forall x \in K$, причому $\|\tilde{x}\| = 1$. Звідси $\tilde{x}(x_i) < \tilde{x}(x_0) \quad \forall i = \overline{1, n}$, тобто $\tilde{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} F_{x_i}$.

Теорема (про спряжений конус) Якщо X – гільбертів простір, $K \subset X$ - опуклий конус і $\overline{K} \neq X$, то K^* містить ненульовий елемент.

Доведення $\overline{K} \neq X$, отже $\exists x_0 \in X : x_0 \notin \overline{K}$. Звідси $\exists x^* \in X^*, x^* \neq 0, \exists \varepsilon > 0$ такі, що $\forall x \in \overline{K} \quad x^*(x) \leq x^*(x_0) - \varepsilon$. Доведемо, що $x_1^* := -x^*$ належить K^*. Нехай це не так. Тоді $\exists y \in K : x_1^*(y) < 0$. Тоді з одного боку $\forall x \in K$ $x_1^*(x) \geq x_1^*(x_0) + \varepsilon$, а з іншого $x_1^*(\lambda y) = \lambda x_1^*(y) \to -\infty, \lambda \to +\infty$, що і приводить до протиріччя.

Означення Ефективною областю визначення функції $f : X \to \overline{R}$ називається множина $domf := \{x \in X | f(x) < +\infty\}$.

Означення $f: X \to \overline{R}$ називається власною, якщо $domf \neq \varnothing$ і $f(x) > -\infty \quad \forall x \in X$.

Означення Функція $f: X \to \overline{R}$ називається опуклою, якщо надграфік функції f $\quad epif = \{(x, \alpha) | x \in domf, \alpha \geq f(x)\}$ – опукла множина.

Лема. Власна функція $f: X \to \overline{R}$ опукла $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_1, x_2\} \subset domf$ $\forall \alpha \in [0,1]$ $\; f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

Нехай $X = R^n$. Розглянемо елементарну задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \to \inf \\ x_i \leq 0, i = \overline{1, k} \\ x_i = 0, i = \overline{k+1, m} \\ x_i \geq 0, i = \overline{m+1, n} \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема. Допустимий $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ - розв'язок задачі (1) $\Leftrightarrow$

1) $\; f_i \leq 0, i = \overline{1, k}$; $\; f_i \geq 0, i = \overline{m+1, n}$

2) $\; f_i \tilde{x}_i = 0, i = \overline{1, n}$

Доведення. Нехай $\tilde{x}$ – розв'язок (1) і не виконується 1), тобто, скажімо, $\exists i_0 \in \overline{1, k} : f_{i_0} > 0$. Тоді

$f^*(\tilde{x}) = f_{i_0} \tilde{x}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} f_i \tilde{x}_i > f_{i_0} \alpha + \sum_{i \neq i_0} f_i \tilde{x}_i \quad \forall \alpha < \tilde{x}_{i_0}$, отже $\tilde{x}$ – не розв'язок. Нехай не виконується 2), тобто $\exists i_0 \in \overline{1, n} : f_{i_0} \tilde{x}_{i_0} \neq 0$. Тоді в силу 1) $f_{i_0} \tilde{x}_{i_0} > 0$ і $f^*(\tilde{x}) > f^*(\tilde{\tilde{x}})$, де $\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{i_0 - 1}, 0, \tilde{x}_{i_0 + 1}, \ldots, \tilde{x}_n)$, отже, $\tilde{x}$ - не розв'язок. В інший бік з умови 1) $f^*(x) \geq 0$, з умови 2) $f^*(\tilde{x}) = 0$, тобто $\tilde{x}$ – розв'язок (1).

Тепер нехай X – довільний лінійний простір, $A \subset X$ - опукла множина, $f_i : X \to R$ - опуклі функції, $i = \overline{0, m}$. Розглянемо задачу опуклого програмування

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ x \in A \\ f_i(x) \le 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (2)$$

Для набору чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функція $L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ називається функцією Лагранжа задачі (2), а числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – множниками Лагранжа.

Теорема (Куна-Такера)

1) Якщо $\tilde{x}$ – розв'язок (2), то існують мн-ки Лагранжа $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m$, не всі одночасно рівні 0 такі, що

а) $\tilde{\lambda}_i \ge 0, i = \overline{0,m}$.

б) $\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0, i = \overline{1,m}$.

в) $\min_{x \in A} L(x, \tilde{\lambda}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$.

2) Якщо $\tilde{\lambda}_0 \ne 0$, то умови а)-в) є достатніми для існування розв'язку (2).

3) Для $\tilde{\lambda}_0 \ne 0$ досить виконання умови Слейтера: $\exists x \in A : f_i(x) < 0, i = \overline{1,m}$.

Доведення. 1). Без обмеження загальності вважаємо, що $f_0(\tilde{x}) = 0$, де $\tilde{x}$ – розв'язок (2). Розглянемо множину $C := \left\{ \mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) \in R^{m+1} \middle| \exists x \in A : f_0(x) < \mu_0, f_i(x) \le \mu_i, i = \overline{1,m} \right\}$. Легко показати, що C – непорожня опукла множина і $0 \notin C$. Тоді з теореми про відокремлення в широкому сенсі маємо існування $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in (R^{m+1})^*, \lambda \ne 0$ такого, що $\forall \mu \in C$ $\lambda(\mu) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mu_i \ge \lambda(0) = 0$. Покажемо, що λ – шукані множники Лагранжа, тобто перевіримо умови а)-в).

а) Оскільки для деякого $i \in \overline{0,m}$ $\lambda_i \ne 0$, то взявши елемент $\mu_\varepsilon = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in C, \varepsilon > 0$, де 1 - на i-тому місці, маємо $\lambda_i \ge -\varepsilon \sum_{k \ne i} \lambda_k$, отже, $\lambda_i > 0$.

б) Нехай для деякого $i \in \overline{0,m}$ $f_i(\tilde{x}) < 0$. Розглянувши елемент $\mu_\varepsilon = (\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0, f_i(\tilde{x}), 0, \ldots, 0) \in C, \varepsilon > 0$, де $f_i(\tilde{x})$ - на i-тому місці, маємо $\lambda_i \le -\dfrac{\varepsilon\lambda_0}{f_i(\tilde{x})}$, отже, $\lambda_i = 0$.

в) Оскільки $L(\tilde{x}, \lambda) = 0$, то досить довести, що $\forall x \in A$ $L(x, \lambda) \ge 0$. Взявши $\mu_\varepsilon = (f_0(x) + \varepsilon, f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in C, \varepsilon > 0$, маємо $L(x, \lambda) = \lambda(\mu_\varepsilon) - \varepsilon\lambda_0$, отже, $L(x, \lambda) \ge 0$.

2)Нехай $\lambda_0 \ne 0$. Тоді можна вважати, що $\lambda_0 = 1$. Достатність умов а)-в) випливає з нерівностей: для довільного допустимого елементу x

$$f_0(x) \ge f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = L(x, \lambda) \ge L(\tilde{x}, \lambda) = f_0(\tilde{x}).$$

3)Припустимо від супротивного, що за виконання умови Слейтера $\lambda_0 = 0$. Оскільки існує $\lambda_i > 0$, то маємо суперечливу систему нерівностей $0 = L(\tilde{x}, \lambda) \le L(x, \lambda) < 0$. Теорема доведена.

Нехай виконується умова Слейтера. Тоді функція Лагранжа задачі (2) має вигляд $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R_+^m$.

Означення. Точка $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \in A \times R_+^m$ називається сідловою точкою функції L, якщо $\min\limits_{x \in A} L(x, \tilde{\lambda}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = \max\limits_{\lambda \in R_+^m} L(\tilde{x}, \lambda)$.

Користуючись цим означенням, легко довести еквівалентне формулювання теореми Куна-Такера.

Теорема (Куна-Такера в формі сідлової точки).

Допустимий $\tilde{x}$ – розв'язок (2) $\Leftrightarrow$ $\exists \tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \in R_+^m : (\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ – сідлова точка функції L.

Вправи

В усіх задачах, якщо не стверджується інше, X - нормований простір.

1. Довести: $A \subset X$ - опукла $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$ $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R_+^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.
2. Знайти критерій опуклості конуса.

3. Нехай $L: X_1 \to X_2$ – лінійний оператор, $A_i \subset X_i$ - опуклі. Чи будуть опуклими $L(A_1), L^{-1}(A_2)$

4. Довести: власна функція $f: X \to \overline{R}$ є опуклою $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_1, \ldots, x_n\} \subset domf$ $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R_+^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

5. Довести, що в банаховому просторі будь-яка послідовність непорожніх, замкнених, вкладених куль має спільну точку. Чи вірно це для довільної послідовності непорожніх, замкнених, обмежених, опуклих, вкладених множин?

6. Довести, що в гільбертовому просторі довільна послідовність непорожніх, замкнених, обмежених, опуклих, вкладених множин має спільну точку.

7. Дослідити на опуклість функції: ($A \neq \varnothing$, опукла)

а) $f(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$, f_i - опуклі; б) $f(x) = \begin{cases} 0, x \in A \\ +\infty, x \notin A \end{cases}$,

в) $f(x^*) = \sup\limits_{y \in A} x^*(y)$, $x^* \in X^*$, г) $f(x) = \inf\limits_{\substack{\lambda \ge 0 \\ x \in \lambda A}} \lambda$, ; д) $f(x) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$,

е) $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (a, x)$, X - гільб. простір, $A \in L(X)$, $A \ge 0$.

9. Нехай $f: X \to \mathrm{R}$, опукла і $A \subset X$ - опукла. Довести, що $loc \min f(A) = glob \min f(A)$, причому множина $U = \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) = \inf\limits_{y \in A} f(y) \right\}$ - опукла. Якщо f - строго опукла (знак „=” в нерівності $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ можливий лише при $\alpha \in \{0,1\}$), то U містить не більше однієї точки. Сформулювати достатні умови єдиності розв’язку в теоремі Куна-Такера.

10. Нехай в умовах попереднього прикладу $X = \mathrm{R}^n$ і $f \in \mathrm{C}^1$ - опукла. Довести:

а) $\tilde{x} \in U \Leftrightarrow \forall x \in A \ \ (f'(\tilde{x}), x - \tilde{x}) \ge 0$

б) для $\tilde{x} \in \operatorname{int} A$ $\tilde{x} \in U \Leftrightarrow f'(\tilde{x}) = 0$

11. Нехай $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}, f \in C^2$. Довести: f - опукла $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{R}^n$.

12. Нехай $f : X \to \overline{R}$ - власна, опукла. Довести: f - неперервна в т. $x_0 \in dom\, f \quad \Leftrightarrow \quad f$ - обмежена зверху в деякому околі т. x_0.

13. Нехай $f : X \to \overline{R}$ - власна, опукла, $\operatorname{int} dom\, f \neq \varnothing$. Довести: а) якщо $X = R^n$, то f - неперервна на $\operatorname{int} dom\, f$; б) якщо X - банахів простір, f - н.н.зн., то f - неперервна на $\operatorname{int} dom\, f$.

14. Розв'язати наступні задачі

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \sup \\ x_1 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 \to \inf \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\ x + 2y + 3z \leq -1 \\ |x| + |y| + |z| < 1 \end{cases}$

Розділ 2. "Гладкі екстремальні задачі".
2.1. Елементи диференціального числення в нормованих просторах. 1

Нехай X, Y - нормовані простори, $F: X \to Y$, $x_0 \in X$.

Означення 1. Кажуть, що F має в точці x_0 похідну за напрямом $h \in X$, якщо існує

$$\lim_{t \to 0+} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} := F'(h, x_0) \in Y \qquad (1)$$

Означення 2. Якщо границя (1) існує $\forall h \in X$, то кажуть, що F в точці x_0 має першу варіацію, а відображення $h \to F'(h, x_0)$ називають першою варіацією.

Означення 3. Якщо $\exists \ \Lambda_{x0} \in L(X, Y)$ такий, що $F'(h, x_0) = \Lambda_{x0}[h]$, то кажуть, що F в точці x_0 диференційована за Гато. При цьому $\Lambda_{x0} := F_\Gamma{}'(x_0)$ - похідна Гато, $F'(h, x_0) = \Lambda_{x0}[h] = F_\Gamma{}'(x_0)[h]$ - диференціал Гато.

Означення 4. Кажуть, що F в точці x_0 диференційована за Фреше, якщо $\exists \ \Lambda_{x0} \in L(X, Y)$ такий, що $F(x_0 + h) - F(x_0) = \Lambda_{x0}[h] + o(x_0, h)$, де $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|o(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$. При цьому $\Lambda_{x0} := F'(x_0)$ - похідна Фреше, $F'(x_0)[h]$ - диференціал Фреше.

Означення 5. Кажуть, що F в точці x_0 строго диференційована, якщо $\exists \ \Lambda_{x0} \in L(X, Y)$ такий, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x', x'' \in B_\delta(x_0)$ $\|F(x') - F(x'') - \Lambda_{x0}[x' - x'']\| \le \varepsilon \|x' - x''\|$. При цьому $\Lambda_{x0} := F'(x_0)$ - строга похідна, $F'(x_0)[h]$ - строгий диференціал.

Надалі поряд з $F'(x_0, h)$ будемо використовувати позначення $dF(x_0, h)$, кожен раз уточнюючи, який диференціал мається на увазі.

Очевидно, що кожна з похідних, означених вище, якщо існує, то єдина. У випадку $X = Y = \mathrm{R}$ означення 3,4 визначають один і той самий об'єкт – звичайну похідну $F'(x_0)$. У випадку $X = \mathrm{R}^2$ це не так.

Теорема. Між означеннями 1)-5) і неперервністю F мають місце такі імплікації:

а) $5) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$

б) $5) \Rightarrow$ неперервність F в околі т. x_0

в) $4) \Rightarrow$ неперервність F в т. x_0,

причома жодна з них не може бути обернена.

Доведення. Оскільки 3) $\Leftrightarrow$ $\forall h \in X \;\; F(x_0 + \lambda h) - F(x_0) = \lambda F_\Gamma{}'(x_0)[h] + o(\lambda), \quad \lambda \to 0$ 4) $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall h : \|h\| < \delta \;\; \|F(x_0 + \lambda h) - F(x_0) - F'(x_0)[h]\| \le \varepsilon \|h\|$ то імплікації а)– в) очевидні. Наступні контрприклади показують, що обернути їх не можна

з 1) не слідує 2): $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, т. $x_0 = 0$; з 2) не слідує 3): $f(x) = |x|$, т. $x_0 = 0$; з 3) не слідує 4): $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2, x_2 > 0 \\ 0, & \textit{інакше} \end{cases}$, т. $\bar{x}_0 = (0,0)$; з 4) не слідує 5): $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases}$, т. $x_0 = 0$.

Лема. а) Якщо $F \in L(X, Y)$, то F - строго диференційована в $\forall x_0 \in X$ і $F'(x_0) = F.$

б) Якщо $F_i : X \mapsto Y, i = 1,2$ - диференційовна в т. $x_0 \in X$ в сенсі одного з означень 1)-5), то $\forall \alpha, \beta \in R$ відображення $F = \alpha F_1 + \beta F_2$ диференційоване в т. x_0 в тому ж сенсі і $F'(x_0, h) = \alpha F_1'(x_0, h) + \beta F_2'(x_0, h) \quad \forall h \in X.$

Теорема. (про диференційованість суперпозиції). Нехай X, Y, Z – нормовані простори, $F : X \mapsto Y, F(x_0) = y_0, G : Y \mapsto Z.$ Розглянемо $H = G(F) : X \mapsto Z$. Тоді

1) Якщо G - диференційована за Фреше в т. y_0, F - диференційована (в будь-якому сенсі 1-4) в т. x_0, то H - диференційована в т. x_0 в тому ж сенсі, що і F і при цьому

$$H'(x_0, h) = G'(y_0)[F'(x_0, h)] \qquad (2)$$

2) Якщо G - строго диференційована в т. y_0, F - строго диференційована в т. x_0, то H - строго диференційована в т. x_0 і має місце формула (2).

Доведення. 1) Розглянемо випадок коли F має похідну за напрямком $h \in X$ в т. x_0.

$$\frac{H(x_0+th)-H(x_0)}{t}=\frac{G(F(x_0+th))-G(y_0)}{t}=$$

$$\frac{G'(y_0)[F(x_0+th)-y_0]+\alpha(F(x_0+th))\|F(x_0+th)-y_0\|}{t},$$ де

$\alpha(y)\to\alpha(y_0)=0,\ y\to y_0$. Звідси

$$\lim_{t\to 0+}\frac{H(x_0+th)-H(x_0)}{t}=G'(y_0)\ [F'(x_0,h)].$$

2) Позначимо $A_1:=F'(x_0), A_2:=G'(y_0)$ - строгі похідні. Для довільного $\varepsilon>0$ виберемо $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ так, щоб $\varepsilon_1\|A_2\|+\varepsilon_2\|A_1\|+\varepsilon_1\varepsilon_2<\varepsilon,$ по ε_i виберемо δ_i з означення строгої диференційованості. Для F і $G,$ по δ_i означимо $\delta:=\min\left\{\delta_1;\dfrac{\delta_2}{\varepsilon_1+\|A_1\|}\right\}.$ Тоді нескладними міркуваннями одержуємо $\forall x_1,x_2\in B_\delta(x_0)$ $\|H(x_1)-H(x_2)-A_2A_1[x_1-x_2]\|\le\ \varepsilon\|x_1-x_2\|$. Взявши $X=Y=\mathrm{R}^2, Z=\mathrm{R},$

$$F(x_1,x_2)=(x_1^2,x_2),\ \overline{x_0}=(0{,}0),\ G(y_1,y_2)=\begin{cases}1, & y_1=y_2^2,\ y_2>0\\ 0, & \textit{інакше},\end{cases}$$ легко

показати, що умову диференційованості за Фреше в т. y_0 відображення H в теоремі про диференційованість суперпозиції послабити не можна.

Вправи

1. $f:\mathrm{R}^n\mapsto\mathrm{R}^m,\ f=(f_1,...,f_m),\ f_i\in\mathrm{C}^1,\ i=\overline{1,m}.$ Довести, що f - строго диференційована в $\forall\, m.x$ і $f'(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ ... & ... & ...\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$. Знайти $f'(x_0)$ у випадку $f:\mathrm{R}^2\mapsto\mathrm{R}^2,\ f(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_1^2+x_2^2),\ \ m.\overline{x}_0=(1,2).$

2. Дослідити на диференційовність:

а) $F:\mathrm{C}([0,1])\mapsto\mathrm{R},\ F(x(\cdot))=x(0)$

б) $F:\mathrm{C}([0,1])\mapsto\mathrm{R},\ F(x(\cdot))=|x(0)|$

в) $F:\mathrm{C}^1([0,1])\mapsto\mathrm{C}([0,1]),\ F(x(\cdot))=\dot{x}(\cdot)$

г) $f:\mathrm{C}([t_0,t_1])\mapsto\mathrm{R}\quad f(x(\cdot))=\varphi(x(t_0),x(t_1)),$ де $\varphi\in\mathrm{C}^1(\mathrm{R}^2)$

д) $f : C^1([t_0, t_1]) \mapsto R$ $f(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$ де L - неперервна по першій змінній і неперервно диференційована по сукупності інших

3. Нехай H - дійсний гільбертів простір, $F(x) = \|x\|$. Довести, що F - диференційована за Фреше і $F'(x) = \frac{x}{\|x\|}, \; x \neq 0.$

4. Нехай H - дійсний гільбертів простір, $A \in L(H, H),\; a \in H, \alpha \in R$. Знайти похідну $F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (a, x) + \alpha$

5. Знайти похідні наступних відображень:

а) $F : C([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = e^{x(0)}$

б) $F : L_2([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x(t) \sin t \, dt$

в) $F : L_2([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x^2(t) dt$

г) $F : L_2([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x(t) dt \right)^2$

д) $F : C([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = x(0) \cdot x(1)$

6. Знайти похідні Фреше наступних відображень у вказаних точках x_0 і представити їх в канонічному вигляді:

а) $F : C([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = x^2\left(\frac{1}{2}\right),\; x_0(t) = t + 1$

б) $F : C([0,1]) \mapsto R,\; F(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x(t) dt \right)^2,\; x_0(t) = t + 1$

Вказівка: для знаходження канонічного вигляду скористатись теоремою Рісса

7. Довести, що функція $f : R^2 \mapsto R,$ що в полярних координатах задається співвідношенням $f(x) = r \cos 3\varphi \quad (x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi, \sin\varphi)),$ має в т. $(0,0)$ першу варіацію, але не диференційована за Гато.

8. Вказати точки, в яких функція $f : R^n \mapsto R$ не диференційована за Фреше

а) $f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $f(x)=\max_{\underline{i=1,n}}|x_i|$; в) $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

9. Нехай $D=[0,1]\times[0,1]\times[-r,r]$, функція $K(t,s,x)\in C(D)$, $K_x{}' \in C(D)$. Довести, що оператор Урисона $(Ax)(t)=\int_0^1 K(t,s,x(s))ds$ діє з $\overline{B}_r(0)$ в $C([0,1])$ і знайти його похідну в $\forall\, m.\, x\in B_r(0)$.

2.2. Елементи диференціального числення в нормованих просторах. 2

Нехай X - нормований простір, $a,b\in X$. Відрізком $[a,b]$ в X будемо називати наступну множину: $[a,b]:=\{x\in X | x=a+t(b-a), t\in[0,1]\}$.

Теорема (Лагранжа для скалярнозначних функцій) Нехай $F: X\mapsto \mathrm{R}$, $F\in C([a,b])$, $F-$ диференційовна за Гато на (a,b). Тоді $\exists c\in(a,b)$: $F(b)-F(a)=F_\Gamma{}'(c)[b-a]$

Доведення Розглянемо функцію $\Phi(t):=F(a+t(b-a))$. Тоді $\Phi:[0,1]\mapsto \mathrm{R}$ і легко показати, що $\Phi\in C([0,1])$ і $\Phi_-{}'(t)=\Phi_+{}'(t)=\Phi'(t)=F_\Gamma{}'(a+t(b-a))[b-a]$ $\forall t\in(0,1)$. Тоді $\exists\theta\in(0,1)$ таке, що $\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)$, що і доводить теорему.

Якщо розглянути $f:\mathrm{R}\mapsto \mathrm{R}^2$, $f(x)=(\sin x,-\cos x)$ на відрізку $[0,2\pi]$, то $\forall c\in(0,2\pi)$ $f(2\pi)-f(0)=(0,0)\neq f'(c)\cdot 2\pi=2\pi(\cos c,\sin c)$. Отже, теорема Лагранжа для вектор-функцій, взагалі кажучи, місця не має. Натомість виконується наступна

Теорема (Лагранжа) Нехай X,Y - нормовані простори, $U\subset X$ - відкрита, $[a,b]\subset U$. Якщо $F:U\mapsto Y$ - диференційована за Гато в $\forall\, x\in[a,b]$, то $\|F(b)-F(a)\|\leq \sup_{c\in[a,b]}\left\|F_\Gamma{}'(c)\right\|\,\|b-a\|$

Доведення Нехай $y^*\in Y^*$. Розглянемо функцію $\Phi(t):=y^*(F(a+t(b-a)))$. Тоді $\Phi:[0,1]\mapsto \mathrm{R}$, $\Phi\in C([0,1])$ і $\forall\, t\in(0,1)$ $\Phi_-{}'(t)=\Phi_+{}'(t)=y^*\left(F_\Gamma{}'(a+t(b-a))[b-a]\right)$. Звідси для деякого

$\theta \in (0,1)$ $\Phi(1)-\Phi(0)=y^*(F(b)-F(a))=\Phi'(\theta)$. В силу теореми Хана-Банаха $\exists y^* \in Y^* : \|y^*\|=1$ і $y^*(F(b)-F(a))=\|F(b)-F(a)\|$. Вибравши саме так y^*, маємо шукане.

Наслідок 1 Нехай виконані умови теореми Лагранжа і $\Lambda \in L(X,Y)$. Тоді $\|F(b)-F(a)-\Lambda[b-a]\| \le \sup\limits_{c\in[a,b]} \left\|F_\Gamma{}'(c)-\Lambda\right\| \|b-a\|$

Наслідок 2 Нехай X,Y - нормовані простори, $x_0 \in X$, U - окіл т. x_0, $F : X \mapsto Y$ - диференційовна за Гато в $\forall x \in U$. Якщо відображення $x \mapsto F_\Gamma{}'(x)$ неперервне (в нормі простору $L(X,Y)$) в т. x_0, то F - строго диференційована в т. x_0.

Доведення Достатньо покласти $\Lambda = F_\Gamma{}'(x_0)$ і скористатись наслідком 1 та означенням строгої диференційованості.

Нехай тепер $F : X \mapsto \mathrm{R}$ - диференційована за Фреше (Гато) відображення. Тоді коректно означеним є відображення

$$X \ni x \mapsto F'(x) \in X^* \qquad (1)$$

Означення Функціонал F в т. x має 2-гу похідну Фреше (Гато), якщо відображення (1) диференційоване за Фреше (Гато) в т. x.

Щодо способу знаходження $F''(x_0)$ маємо наступний результат, що випливає з означення другої похідної.

Лема Якщо $F : X \mapsto \mathrm{R}$ - двічі диференційована за Гато в т. x_0, то
$$d^2F(x_0,h)=\frac{d^2}{dt^2}F(x_0+th)\bigg|_{t=0}$$

Теорема (формула Тейлора) Якщо F має в т. x_0 другу похідну Гато, то $F(x_0+th)=F(x_0)+tdF(x_0,h)+\frac{t^2}{2}d^2F(x_0,h)+o(t^2),\ t\to 0$

Якщо F має в т. x_0 другу похідну Фреше, то
$F(x_0+h)=F(x_0)+dF(x_0,h)+\frac{1}{2}d^2F(x_0,h)+o\left(\|h\|^2\right),\ h\to 0$

Доведення Перше твердження безпосередньо випливає з формули Тейлора, застосованої до функції $\varphi(t)=F(x_0+th)$. Для доведення другого твердження розглянемо функцію $g(\xi)=F(x_0+\xi)-F(x_0)-F'(x_0)[\xi]-\frac{1}{2}F''(x_0)[\xi,\xi]$. Легко показати, що g -

двічі диференційована за Фреше в т. $\xi = 0$ і $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0.$

Тоді за теоремою Лагранжа $|g(\xi)| = 0(\|\xi\|^2)$, $\xi \to 0$, що і доводить теорему.

Формула Тейлора дозволяє перенести класичні результати щодо локальних екстремумів гладких функцій на гладкі функціонали.

Означення Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функціонала $F : X \mapsto \mathrm{R}$, якщо $\exists r > 0 \quad \forall x \in B_r(x_0) \quad F(x) \geq F(x_0)$.

Теорема (необхідні умови екстремуму 1-го порядку) Нехай т. x_0 - точка локального мінімуму функціонала F і існує $F'(x_0)$ - похідна Гато. Тоді $F'(x_0) = 0.$

Доведення Очевидно $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow dF(x_0, h) = 0 \quad \forall h \in X.$ Нехай $\exists h_0 \in X : \ dF(x_0, h_0) > 0.$ Візьмемо $h_\varepsilon = \varepsilon h_0.$ Тоді $F(x_0 + \varepsilon h_0) - F(x_0) = \varepsilon dF(x_0, h_0) + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, отже, ліва частина не зберігає знак при $\varepsilon \to 0 \pm$. Звідси x_0 - не є точкою локального мінімуму і маємо протиріччя.

Теорема (необхідні умови екстремуму 2-го порядку) Нехай т. x_0 - точка локального мінімуму функціонала F і існує $F''(x_0)$ - друга похідна Гато. Тоді $d^2F(x_0, h) \geq 0 \quad \forall h \in X.$

Доведення Нехай $\exists h_0 \in X : \ d^2F(x_0, h_0) = \alpha < 0.$ За формулою Тейлора для $h_\varepsilon = \varepsilon h_0$ маємо $F(x_0 + \varepsilon h_0) - F(x_0) = \dfrac{\varepsilon^2}{2} d^2F(x_0, h_0) + o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0.$ Звідси для досить малих ε $F(x_0 + \varepsilon h_0) - F(x_0) < 0$, що і приводить до протиріччя.

Теорема (достатні умови екстремуму) Нехай $F : X \mapsto \mathrm{R}$ - двічі диференційована за Фреше в т. x_0 і виконуються умови

1) $dF(x_0, h) = 0 \quad \forall h \in X$

2) $\exists c > 0 \ \ \forall h \in X \quad d^2F(x_0, h) \geq c\|h\|^2$

Тоді т. x_0 - точка локального мінімуму для F.

Доведення За формулою Тейлора
$$F(x_0 + h) - F(x_0) = dF(x_0, h) + \frac{1}{2} d^2F(x_0, h) + o(\|h\|^2) \geq \frac{c}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2) > 0$$
для досить малих h, отже т. x_0 - локальний мінімум F.

Вправи

В усіх задачах H - гільбертів простір, X - нормований простір

1. $F: H \mapsto \mathrm{R}, \quad F(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(a,x)+\alpha,$ де $A \in L(H,H),\ a \in H,\ \alpha \in \mathrm{R}.$ Знайти $F'(x),\ F''(x).$

2. $F: H \mapsto \mathrm{R}, \quad F(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$. Знайти $F'(x),\ F''(x).$

3. $F: X \mapsto \mathrm{R}$ і $\forall x \in X\ \exists F_\Gamma{}'(x).$ Довести: якщо $F_\Gamma{}'$ - диференційована за Фреше в т. x_0, то F диференційована за Фреше в т. x_0.

4. $F: X \mapsto \mathrm{R}, \quad A \in L(X,H)$ і $F(x)=\|Ax-b\|_H,\ b \in H.$ Знайти $F'(x),\ F''(x).$

5.Нехай

$Q=[c,d]\times[a,b], \quad A \in L_2(Q), \quad b(\cdot)\in L_2(c,d), \quad \forall x(\cdot)\in L_2(a,b)$

$F(x(\cdot))=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b A(s,t)x(t)dt-b(s)\right)^2 ds$. Довести, що F - двічі диференційована за Фреше і

$F'(x)=2\int\limits_c^d A(s,\xi)\left(\int\limits_a^b A(s,t)x(t)dt-b(s)\right)ds$, $F''(x)=2\int\limits_c^d A(s,t)A(s,\xi)ds$

6. Нехай $F: l_2 \mapsto \mathrm{R}, \quad F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n{}^2}{n^3}-x_n{}^4\right)$. За допомогою функції $\varphi(t)=F(x+th)$ довести, що F - двічі диференційована за Фреше в т. $x=0,$ причому $dF(0,h)=0,\ \ d^2F(0,h)\ge 0,$ але F не має в т. $x=0$ локального мінімуму.

7. $F: \mathrm{C}([0,1])\mapsto \mathrm{R}, \quad F(x(\cdot))=\int\limits_0^1\left(t\,x^2(t)-x^3(t)\right)dt$. За допомогою функції $\varphi(t)=F(x+th)$ довести, що F - двічі диференційована за Фреше в т. $x=0,$ причому $dF(0,h)=0,\ \ d^2F(0,h)\ge 0,$ але F не має в т. $x=0$ локального мінімуму.

8. Довести: якщо $\dim X<\infty,$ то в теоремі про достатні умови локального мінімуму умову 2) можна послабити до такої: $d^2F(0,h)\ge 0,\ \ d^2F(0,h)=0 \Leftrightarrow h=0.$

9. $A : H \mapsto H,\ \exists c > 0\ \ \forall x \in H\ \ \ (Ax, x) \geq c\|x\|^2$. Довести:

а) Рівняння $Ax = y$ для довільного $y \in H$ має не більше одного розв'язку

б) $\tilde{x}$ - розв'язок $Ax = y \Leftrightarrow \tilde{x}$ - розв'язок задачі $F(x) = (Ax, x) - 2(x, y) \to \inf$.

2.3. Схема Лагранжа.

Суть методу Лагранжа – це дослідження екстремальної задачі з обмеженнями шляхом зведення її до екстремальної задачі без обмежень. Нагадаємо, як реалізується цей принцип для скінченовимірних задач з обмеженнями типу рівностей. Розглянемо

задачу $X = R^n$, $\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ f_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m},\ m < n \end{cases}$ (1)

Означення. Надалі будемо казати, що x_0 - розв'язок (1), якщо x_0 - умовний локальний мінімум, тобто $f_i(x_0) = 0,\ i = \overline{1,m}$ і $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in B_\varepsilon(x_0), f_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}$ $\quad f_0(x) \geq f_0(x_0)$

1 етап: складаємо функцію Лагранжа $L(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$, де $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_m)$ - множники Лагранжа. При цьому наявність множника λ_0 суттєва, бо інакше схема Лагранжа може привести до хибного результату. В задачах на мінімум слід брати $\lambda_0 \geq 0$, в задачах на максимум $\lambda_0 \leq 0$. Корисно окремо розглянути випадки $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$, причому в останньому випадку можна покласти λ_0 довільним числом відповідного знаку.

2 етап: шукаємо стаціонарні точки функції Лагранжа з рівняння $L_x(x,\lambda) = 0$. При цьому характер екстремуму в цих точках самої функції Лагранжа для нас не має значення, бо, взагалі кажучи, точки екстремума функції Лагранжа не мають ніякого відношення до точок

екстремуму вихідної задачі. Система $\begin{cases} L_x'(x,\lambda)=0 \\ f_i(x)=0, i=\overline{1,m} \end{cases}$ (2) має $m+n$ рівнянь і $m+n+1$ невідомих, але множники Лагранжа визначаються з точністю до числового множника, тому система (2) дає "повний" набір умов для визначення стаціонарних точок.
3 етап: відшукати серед розв'язків (2) розв'язки (1), або довести, що їх не існує. Ця схема обгрунтовується рядом теорем, які наведені нижче. Зауважимо, що поза умовами цих терем може трапитись ситуація, коли розв'язок задачі існує, але схема Лагранжа до нього не приводить.

Теорема. Якщо $f_i \in C^1$, $i=\overline{0,m}$ і точка x_0 - розв'язок задачі (1), то існують множники Лагранжа $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1,...,\lambda_m$, не всі одночасно рівні нулю такі, що $L_x'(x_0,\lambda)=0$.

Якщо $f_i \in C^2$, $i=\overline{0,m}$ і виконується умова: вектори $\left\{f_i'(x_0)\right\}_{i=1}^{m}$ - ЛНЗ (3) ($\Leftrightarrow$ матриця $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ має ранг m), то можна отримати необхідні умови 2-го порядку і достатні умови. Розглянемо множину $P=\left\{x \in R^n \mid \left(f_i'(x),x\right)=0, i=\overline{1,m}\right\}$.

Теорема. Якщо $f_i \in C^2$, $i=\overline{0,m}$, точка x_0 - розв'язок задачі (1) і виконується (3), то існують $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1,...,\lambda_m$ такі, що $L_x'(x_0,\lambda)=0$,

$$L_{xx}'(x_0,\lambda)[x,x] \geq 0 \quad \forall x \in P \qquad (4)$$

Якщо в (4) $L_{xx}'(x_0,\lambda)[x,x]=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$, то умови (3), (4) є достатніми. Щодо нескінченновимірних задач і задач з обмеженнями типу нерівностей , то, крім теореми Куна-Такера, ми доведемо пізніше ряд базових теорем. Поки що без доведення наведемо наступну теорему.

Теорема Нехай X, Y – банахові простори, $F: X \to Y$, $f_0 : X \to R$ і розглядається задача $\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ F(x) = 0 \end{cases}$ (5).

Функція $L(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f_0(x) + y^*(F(x)), y^* \in Y^*$ називається функцією Лагранжа задачі (5).

1. Якщо x_0 - розв'язок (5), f_0, F – строго диференційовні в точці x_0, $\operatorname{Im} F'(x_0)$-замкнена в Y, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0 \geq 0$, $y^* \in Y^*$ такі, що $L_x'(x_0, \lambda_0) = \lambda_0 f_0'(x_0)[h] + y^*(F'(x_0)[h]) = 0, \forall h \in X$.
2. Якщо, крім того, $\operatorname{Im} F'(x_0) = Y$, то $\lambda_0 \neq 0$, і можна вважати $\lambda_0 = 1$.

Вправи

За допомогою схеми Лагранжа розв'язати наступні задачі.

1) $\begin{cases} xyz \to \inf \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 16y \to \inf \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y + z \to \inf \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 \to \inf \\ x_1^3 - x_2^2 = 0 \end{cases}$ (Ілюструє суттєвість множника λ_0)

5) $\begin{cases} x_2^2 - x_1 \to \inf \\ x_1 + x_1^3 = 0 \end{cases}$ (Ілюструє неспівпадання екстремумів функції Лагранжа і вихідної задачі)

6) Нехай H - гільбертів простір. Знайти найкоротшу відстань від точки $x_0 \in H$ до гіперплощини $H_0 = \{x \in H \mid (x, a) = b, a \in H, b \in R\}$.

7). $X = Y = l_2$, $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$, $F(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$. Розв'язати задачу $\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ F(x) = 0 \end{cases}$. Пояснити, чому схема Лагранжа дає невірну відповідь.

8).Довести, що квадрат найкоротшої відстані від точки x_0 гільбертового простору H до n-мірного підпростору з базисом $\{\ x_1,...,x_n\ \}$ дорівнює

$$\begin{vmatrix} (x_0,x_0)\ldots\ldots(x_0,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n,x_0)\ldots\ldots(x_n,x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (x_1,x_1)\ldots\ldots(x_1,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n,x_1)\ldots\ldots(x_n,x_n) \end{vmatrix}.$$

2.4. Гладкі задачі з обмеженнями

Нехай X,Y – банахові простори. Почнемо з узагальнень відомої теореми Банаха про обернений оператор.

Лема 1. Якщо $A \in L(X,Y)$, $\operatorname{Im} A = Y$, то $\exists\ M : Y \to X$ (не обов'язково лінійний, неперервний) такий, що $\forall y \in Y \quad A(My) = y$ і $\|My\| \le K\|y\|$.

Лема 2. Нехай $\psi : X \to Y$, строго диференційовне в точці x_0 і $\operatorname{Im}\psi'(x_0) = Y.$ Тоді існує окіл $U(y_0)$, $y_0 = \psi(x_0)$, $\exists\varphi : U(y_0) \to X$ такі, що

1) $\psi(\varphi(y)) = y, \forall y \in U(y_0)$
2) $\exists K > 0 \quad \forall y \in U(y_0) \quad \|\varphi(y) - x_0\| \le K\|y - y_0\|$

На декартовому добутку банахових просторів $X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$ природньо вводиться норма $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\}$, з якою $X \times Y$ стає банаховим простором.

$\forall \Lambda^* \in (X \times Y)^*$ очевидно маємо $\Lambda^*(x,y) = x^*(x) + y^*(y)$, де $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$. Зокрема, якщо $Y = R$, то $\Lambda^*(x,y) = x^*(x) + \lambda y, \lambda \in R.$

Лема (про замкненість образу). Нехай X,Y,Z -банахові простори, $A \in L(X,Y)$, $B \in L(X,Z)$, $\operatorname{Im} A$-замкнений в Y, $B(Ker\ A)$- замкнена в Z. Тоді для відображення $C : X \to Y \times Z,\quad C(x) = (Ax, Bx)$ маємо: $\operatorname{Im} C$ - замкнений в $Y \times Z$.

Доведення. Нехай $(y_n, z_n) \in \operatorname{Im} C$, $(y_n, z_n) \to (y,z)$ в $Y \times Z$. Тоді $\exists x_n \in X : y_n = Ax_n \to y$, $z_n = Bx_n \to z.$ Оскільки $y \in \operatorname{Im} A$, то залишилось показати, що $z \in \operatorname{Im} B$. Поклавши $\overline{Y} := \operatorname{Im} A$, за лемою 1 маємо існування $M : \overline{Y} \to X$ такого, що $\forall y \in \overline{Y} \quad A(My) = y$ і

$\|My\| \le K\|y\|$. Розглядаючи послідовність $\xi_n = M(Ax_n - y)$, маємо, що $z = \lim B(x_n - \xi_n)$, $y = A(x_n - \xi_n)$ і $\xi_n \to 0$, тобто z – гранична точка множини $\Sigma = \{\eta \in Z \mid \eta = Bx, Ax = y\}$. Враховуючи умови теореми, Σ - замкнена в Z, отже $z \in \operatorname{Im} B$ і лема доведена.

Означення Анулятором множини $M \subset X$ будемо називати наступну множину $M^{\perp} := \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0, \forall x \in M\}$.

Лема 3 Якщо $M \ne X$ і є підпростором, то $M^{\perp}$ містить ненульовий елемент.

Лема (про анулятор ядра регулярного оператора). Нехай $A \in L(X,Y)$, $\operatorname{Im} A = Y$. Тоді $(KerA)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$, де $A^*: Y^* \to X^*$ - спряжений оператор.

Доведення. Включення $(KerA)^{\perp} \supset \operatorname{Im} A^*$ очевидне. Для доведення оберненого включення розглянемо відображення $C: X \to Y \times R$, $C(x) = (Ax, x^*(x))$, $x^* \in (KerA)^{\perp}$. За лемою про замкненість образу $\operatorname{Im} C$ -підпростір в $Y \times R$. Оскільки $(0,1) \notin \operatorname{Im} C$, то $\operatorname{Im} C \ne Y \times R$, отже $\exists \Lambda^* \in (Y \times R)^*, \lambda^* \ne 0 : \Lambda^* \in (\operatorname{Im} C)^{\perp}$. Отже для деяких $\lambda_0 \ne 0,\ \ y^* \in Y^*$, $y^*(Ax) + L_0 x^*(x) = 0.$ Звідси $x^* = A^*(-\frac{1}{\lambda_0} y^*) \in \operatorname{Im} A^*$, що і доводить лему.

Наступна лема є узагальненням класичної теореми про неявну функцію.

Лема (про неявну функцію). Нехай X, Y, Z – банахові простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $U = U(x_0, y_0)$ - окіл точки (x_0, y_0), $\psi: U \to Z$, $z_0 = \psi(x_0, y_0)$ і виконані умови:

1) $\psi(\bullet, y_0): X \to Y$ неперервне в точці x_0

2) ψ - строго диференційовне по y в точці y_0 рівномірно по x, тобто $\exists \Lambda \in L(Y,Z), \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in B_\delta(x_0)$ $\forall y, y' \in B_\delta(y_0) : \|\psi(x,y) - \psi(x,y') - \Lambda[y - y']\| \le \varepsilon \|y - y'\|$ і $\operatorname{Im} \Lambda = Z$.

Тоді існує окіл $U(x_0, z_0)$, $\exists \varphi: U(x_0, z_0) \to Y$, $\exists K > 0$ такі, що

1) $\psi(x, \varphi(x,z)) = z, \forall (x,z) \in U(x_0, z_0)$

2) $\|\varphi(x,z)-y_0\| \le K\|\psi(x,y_0)-z\|, \forall(x,z)\in U(x_0,z_0)$

Означення $h\in X$ називається дотичним елементом до множини $M\subset X$ в точці $x_0\in M$, якщо $\exists\varepsilon>0, \gamma:[-\varepsilon,\varepsilon]\to X$ такі, що

1) $x_0+\alpha h+\gamma(\alpha)\in H, \forall\alpha\in[-\varepsilon,\varepsilon]$

2) $\gamma(\alpha)=o(\alpha), \alpha\to 0$

Множину всіх дотичних елементів до M в точці x_0 позначають $T_{x_0}M$. Якщо $T_{x_0}M$ - підпростір, то він називається дотичним підпростором до M в точці x_0.

Теорема(Люстерника). Нехай X,Y – банахові простори, $F:X\to Y$, $F(x_0)=0$. Якщо F-строго диференційовне в точці x_0 і $\operatorname{Im}F'(x_0)=Y$,то множина $M=\{x\in X \mid F(x)=0\}$ має в точці x_0 дотичний підпростір $T_{x_0}M$, причому $T_{x_0}M=KerF'(x_0)$.

Доведення З рівності $F(x_0+\alpha h+o(\alpha))=F(x_0)+\alpha F'(x_0)[h]+o(\alpha), \alpha\to 0$ одразу маємо, що $\forall h\in T_{x_0}M$ $\quad \|F'(x_0)[h]\|=\dfrac{\|o(\alpha)\|}{\alpha}\to 0, \alpha\to 0$, отже $h\in KerF'(x_0)$ і включення $T_{x_0}M\subset KerF'(x_0)$ доведене. Для доведення оберненого включення розглянемо відображення $\psi:X^2\to Y$, $\psi(x,y)=F(x+y)$ і в околі точки x_0, $y_0=0, z_0=0$ застосуємо лему про неявну функцію. Згідно неї $\exists U(x_0,0)$, $\exists\varphi:U(x_0,0)\to X$ такі, що

1) $\psi(x,\varphi(x,z))=z, \forall(x,z)\in U(x_0,0)$,

2) $\|\varphi(x,z)\|\le K\|\psi(x,y_0)-z\|, \forall(x,z)\in U(x_0,0)$.

Позначимо $\overline{\varphi}(x)=\varphi(x,0)$. Тоді з умов 1),2) для $h\in KerF'(x_0)$

$x_0+\alpha h+\overline{\varphi}(x_0+\alpha h)\in M$ для досить малих α і

$\overline{\varphi}(x_0+\alpha h)=o(\alpha), \alpha\to 0.$ Звідси $h\in T_{x_0}M$ і теорема доведена.

Тепер нехай X, Y – банахові простори, $F: X \to Y$, $f_0 : X \to R$.

Розглянемо задачу $\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ F(x) = 0 \end{cases}$ (1).

Означення $x \in X$ - допустимий елемент задачі (1), якщо $F(x) = 0.$

Допустимий $\bar{x} \in X$ будемо називати розв'язком (1), якщо $\exists \varepsilon > 0$ таке, що для довільного допустимого $x \in B_\varepsilon(\bar{x}) : f_0(x) \geq f_0(\bar{x})$.

Функція $L(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f_0(x) + y^*(F(x)),\ \lambda_0 \in R, y^* \in Y^*$ називається функцією Лагранжа задачі (1), λ_0, y^* - множники Лагранжа.

Теорема (про екстремум в задачі з обмеженнями типу рівностей)

Якщо $\bar{x}$ розв'язок (1), f_0, F - строго диференційовні в точці $\bar{x}$, $\operatorname{Im} F'(\bar{x})$ замкнена в Y, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0 \geq 0, y^* \in Y^*$ такі, що

$$L_x'(\bar{x}, \lambda, y^*)[h] = \lambda_0 f_0'(\bar{x})[h] + y^*(F'(\bar{x})[h]) = 0 \quad \forall h \in X$$

Якщо $\operatorname{Im} F'(\bar{x}) = Y$, то $\lambda_0 \neq 0$.

Доведення Розглянемо відображення $g: X \to Y \times R$, $g(x) = (F(x), f_0(x) - f_0(\bar{x}))$

Тоді g-строго диференційовне в точці $\bar{x}$, $g'(\bar{x}) = (F'(\bar{x}), f_0'(\bar{x}))$ і за лемою про замкненість образу $\operatorname{Im} g'(\bar{x})$ - замкнена в $Y \times R$. Якщо $\operatorname{Im} g'(\bar{x}) = Y \times R$, то за лемою 2 для точки $x_0 = \bar{x}$, $y_0 = (0,0)$ маємо існування таких $U(0,0) \subset Y \times R, \varphi : U(0,0) \to X, K > 0$, що $\forall (y, \alpha) \in U(0,0)$ $g(\varphi(y, \alpha)) = (y, \alpha)$ і $\|\varphi(y, \alpha) - \bar{x}\| \leq K \max\{\|y\|, |\alpha|\}$. Звідси, поклавши $y = 0, \alpha = -\varepsilon, \varepsilon > 0$, легко приходимо до протиріччя з тим, що $\bar{x}$-розв'язок (1).

Отже, $\operatorname{Im} g'(\bar{x}) \neq Y \times R$. Звідси $\exists \Lambda^* \in \left(\operatorname{Im} g'(\bar{x})\right)^{\perp}, \Lambda^* \neq 0$, тобто існують $y^* \in Y^*, \lambda_0 \in R$, одночасно не рівні нулю такі, що $\forall (y, \alpha) \in \operatorname{Im} g'(\bar{x})$

$\lambda_0\alpha + y^*(y) = 0$, що і доводить пункт 1 теореми. Пункт 2 досить легко отримати, міркуючи від супротивного.
Очевидним є наступний наслідок.
Лема 4 Нехай $A \in L(X,Y), \operatorname{Im} A = Y, x^* \in X^*$. Тоді $x = 0$ - розв'язок лінійної задачі $\begin{cases} x^*(x) \to \inf \\ Ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^* \in \operatorname{Im} A^*$.

Тепер розглянемо задачу $\begin{cases} f_0(x) \to \inf \\ F(x) = 0 \\ f_i(x) \le 0, i = \overline{1,m} \end{cases}$ (2)

де $f_i : X \to R, i = \overline{1,m}$.
Означення $x \in X$ - допустимий елемент (2), якщо $F(x) = 0, f_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}$.

Допустимий $\bar{x} \in X$ будемо називати розв'язком (2),якщо $\exists \varepsilon > 0$ $\forall$ допустимого $x \in B_\varepsilon(\bar{x}) : f_0(x) \ge f_0(\bar{x})$.

Функція $L(x,\lambda,y^*) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + y^*(F(x)),$

$\lambda = (\lambda_0,...,\lambda_m) \in R^{m+1}, y^* \in Y^*$ називається функцією Лагранжа задачі (2), $\lambda_0, \lambda_1,...,\lambda_m, y^*$ - множники Лагранжа.
Теорема (про екстремум в задачі з обмеженнями типу нерівностей)

Якщо $\bar{x}$ розв'язок (2), $f_i, F, i = \overline{0,m}$ - строго диференційовні в точці $\bar{x}$, $\operatorname{Im} F'(\bar{x})$ замкнена в Y, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1,...,\lambda_m, y^* \in Y^*$ такі, що

1) $\lambda_i \ge 0, i = \overline{0,m}$

2) $\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1,m}$

3) $L'_x(\bar{x}, \lambda, y^*) = 0$ $\left(\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\bar{x})[h] + y^*(F'(\bar{x})[h]) = 0, \forall h \in X\right)$

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо $f_0(\bar{x}) = 0$. Оскільки $\bar{x}$ - допустимий елемент задачі (2), то $\exists m_0 : f_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1, m_0}$, $f_i(\bar{x}) < 0, i = \overline{m_0 + 1, m}$. Якщо $\operatorname{Im} F'(\bar{x}) \neq Y$, то з не тривіальності $(\operatorname{Im} F'(\bar{x}))^{\perp}$ одразу маємо умови 1)-3). Нехай $\operatorname{Im} F'(\bar{x}) = Y$. Розглянемо набір множин $A_k = \left\{ h \in Ker F'(\bar{x}) \mid f_i'(\bar{x})[h] < 0, i = \overline{k, m_0} \right\}$, $k = \overline{0, m_0}$. Очевидно $A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_{m_0}$. Якщо $A_0 \neq \varnothing$, то застосовуючи теорему Люстерника для множини $M = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ в точці $\bar{x}$, легко отримуємо протиріччя з тим, що $\bar{x}$-розв'язок (2). Отже $A_0 = \varnothing$. Нехай $A_{m_0} = \varnothing$. Тоді $\forall h \in Ker F'(\bar{x})$ є розв'язком лінійної задачі $\begin{cases} f'_{m_0}(\bar{x})[h] \to \inf \\ F'(\bar{x})[h] = 0 \end{cases}$. Звідси $f'_{m_0}(\bar{x}) \in \operatorname{Im}(F'(\bar{x}))^*$, тобто $\exists y^* \in Y^* : \forall h \in X$ $f'_{m_0}(\bar{x})[h] + y^*(F'(\bar{x})[h]) = 0$, звідси маємо виконання 1)-3).

Нехай $A_{m_0} \neq \varnothing$, тобто $\exists k \in \overline{0, m_0 - 1}$: $A_k = \varnothing, A_i \neq \varnothing$, $i = \overline{k + 1, m_0}$.

Розглядаючи задачу опуклого програмування

$$\begin{cases} f_k'(\bar{x})[h] \to \inf \\ f_i'(\bar{x})[h] \le 0, i = \overline{k+1, m_0} \\ h \in Ker F'(\bar{x}) \end{cases}$$

легко показати, що $h = 0$ - розв'язок цієї задачі, отже за теоремою Куна-Такера існують множники Лагранжа $\lambda_k = 1, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_{m_0}$ такі, що

$\lambda_i \ge 0, i = \overline{k, m_0}$ і $h = 0$ - розв'язок лінійної задачі $\begin{cases} f_k'(\bar{x})[h] + \sum_{i=k+1}^{m_0} \lambda_i f_i'(\bar{x})[h] \to \inf \\ F'(\bar{x})[h] = 0 \end{cases}$. Звідки $\exists y^* \in Y^*$ $\forall h \in X$

$f_k'(\bar{x})[h] + \sum_{i=k+1}^{m_0} f_i'(\bar{x})[h] + y^*(F'(\bar{x})[h]) = 0$ і теорема доведена.

Вправи

1) Нехай H – гільбертів простір, $M \subset H$ - підпростір. Довести: $x \in M^\perp \Leftrightarrow \forall y \in M \quad \|x\| \le \|x - y\|$

2) Нехай $H = L_2(0,1)$. Знайти $M^\perp$, якщо

а) $M = R[0,1]$ - всі многочлени на $[0,1]$

б) $M = \{x(.) \mid x(t) = y(t^2), t \in [0,1], y(.) \in R[0,1]\}$

в) $M = \{x(.) \mid x(0) = 0, x(.) \in R[0,1]\}$.

3) Нехай H – гільбертів простір, $M \subset H$ - підпростір. Довести:
а) якщо M – підпростір, то $M + M^\perp = H$
б) навести приклад підмножини $M \subset l_2$ такої, що $M + M^\perp \ne l_2$

4) Довести лему 3.

5) Нехай $A \in L(l_2, l_2)$. Знайти A^*:

а) $A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$

б) $A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$

6) Знайти $T_{x_0} M$:

а) $M = \{\vec{x} \in R^2 \setminus \{0,0\} \mid x_1 \le 0, x_2 \le 0, x_1^2 + x_2^2 \le 1\}, x_0 = (0,1)$

б) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 x_2 = 1\}, x_0 = (2, \frac{1}{2})$

в) $M = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}, x_0 = (1,0,\ldots,0)$

г) $M = \left\{x(.) \in C[0,1] \mid \int_0^1 \sin x(t)dt = \frac{2}{\pi}\right\}, x_0(t) = \pi t$

7) Довести лему 4.

8) Що стверджує теорема 1, якщо $X = R^n, Y = R^m, m < n.$

9) Навести схему дослідження задачі (2) у випадку строгих нерівностей $f_i(x) < 0,\ i = \overline{1,m}$

Розділ 3. "Задачі класичного варіаційного числення"
3.1. Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа)

Необхідні функціональні простори:

$KC([t_0, t_1])$ - кусково-неперервні функції на $[t_0, t_1]$, тобто неперервні на $[t_0, t_1]$ функції крім скінченої множини точок розриву першого роду;

$KC^1([t_0, t_1])$ - кусково-диференційовані функції на $[t_0, t_1]$, тобто неперервні на $[t_0, t_1]$ функції, похідна яких є кусково-неперервною;

$C^1([t_0, t_1])$ - неперервно диференційовані на $[t_0, t_1]$ функції.

Розглянемо наступні норми

$\|x(\cdot)\|_0 = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$, $\|x(\cdot)\|_1 = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0\}$.

Тоді $\left(KC^1([t_0, t_1]), \|\cdot\|_0\right)$ - нормований простір (але не банахів), $\left(C^1([t_0, t_1]), \|\cdot\|_1\right)$ - банахів простір.

Лема (Лагранжа). Якщо функція $\varphi(\cdot) \in KC([t_0, t_1])$ така, що для кожної $z(\cdot) \in KC([t_0, t_1])$ такої, що $\int\limits_{t_0}^{t_1} z(t)dt = 0$, виконується $\int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(t) z(t) dt = 0$, то $\varphi(t) \equiv const$ в точках неперервності.

Лема (Дюбуа – Реймона). Якщо функції $a_0(\cdot), a_1(\cdot) \in C([t_0, t_1])$ такі, що для кожної функції $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ такої, що $x(t_0) = x(t_1) = 0$, виконується $\int\limits_{t_0}^{t_1} (a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t))dt = 0$, то $a_1(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ і $\dot{a}_1(t) \equiv a_0(t)$.

Задача Лагранжа – це задача вигляду

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

Функції $x(t)$, що задовольняють умови $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ будемо називати допустимими елементами задачі (1).

Означення Допустимий елемент $\widetilde{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ називається сильним локальним мінімумом задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного допустимого елементу $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\widetilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_0 < \varepsilon$, виконується $J(x(\cdot)) \geq J(\widetilde{x}(\cdot))$.

Означення Допустимий елемент $\widetilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ називається слабким локальним мінімумом задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного допустимого елементу $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\widetilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_1 < \varepsilon$, виконується $J(x(\cdot)) \geq J(\widetilde{x}(\cdot))$.

Очевидно, що якщо $\widetilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ - сильний локальний мінімум, то $\widetilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум. Надалі позначатимемо $\widetilde{L}(t) := L(t, \widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))$.

Теорема (про слабкий екстремум в задачі Лагранжа) Нехай $\widetilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум в задачі (1), $L, L'_x, L'_{\dot{x}} \in C(U)$, де U - відкрита множина в R^3, причому $(t, \widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t)) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Тоді

1) $\widetilde{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$;

2) $\widetilde{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{x}}(t) = \widetilde{L}_x(t)$.

Доведення. Розглядаючи банахів простір $\left(C^1([t_0, t_1]), \|\cdot\|_1\right)$, маємо, що задача (1) еквівалентна наступній:

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) \to \inf, \\ x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]), \\ F(x(\cdot)) = 0; \end{cases} \qquad (2)$$

де $J(\cdot) : C^1([t_0, t_1]) \to R$ - строго диференційоване в точці $\widetilde{x}(\cdot)$ відображення, $F(x(\cdot)) = \begin{pmatrix} x(t_0) - x_0 \\ x(t_1) - x_1 \end{pmatrix}$, $F : C^1([t_0, t_1]) \to R^2$ - строго диференційоване в точці $\widetilde{x}(\cdot)$, причому $\forall h \in C^1([t_0, t_1]) \quad F'(\widetilde{x})[h] = \begin{pmatrix} h(t_0) \\ h(t_1) \end{pmatrix}$. Тоді (2) – гладка задача з обмеженнями типу рівностей і оскільки $\operatorname{Im} F'(\widetilde{x}) = R^2$, то існують множники Лагранжа $\lambda_0 = 1,\ y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ такі, що $\forall\ h \in C^1([t_0, t_1])$ $J'(\widetilde{x})[h] + y^*(F'(\widetilde{x})[h]) = 0$. Звідси $\int_{t_0}^{t_1} (\widetilde{L}_x(t)h(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t))dt + \lambda_1 h(t_0) + \lambda_2 h(t_1) = 0$ і за лемою Дюбуа – Реймона маємо шукане.

Зауваження Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями.

Вправи

Розв'язати наступні задачі

1) $\begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \int_0^\pi (\dot{x}^2(t) - x(t) + 4x(t)\cos t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int_0^1 (2tx(t) - \dot{x}^2(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^3(t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \int_0^T (\dot{x}^3(t) - \dot{x}^2(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int_0^T (\dot{x}^2(t) - x^2(t))e^{2t}dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \int_0^T (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = 0. \end{cases}$

9) Довести, що в задачі $\begin{cases} \int_0^1 t^{\frac{2}{3}} \dot{x}^2(t)dt \to \inf, \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1; \end{cases}$ екстремаль існує,єдина, забезпечує мінімум функціоналу, але не належить $KC^1([0,1])$.

10) Показати, що задача $\begin{cases} \int_0^1 t^2 \dot{x}^2(t)dt \to \inf, \\ x(0)=0,\ x(1)=1; \end{cases}$ не має розв'язку серед допустимих гладких функцій. Знайти значення $\inf$.

11) Знайти перші інтеграли рівняння Ейлера у випадках:
а) $L = L(t, \dot{x})$; б) $L = L(x, \dot{x})$.

Знайти екстремалі:

12) $\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}} dt \to \inf, \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1; \end{cases}$ (задача про брахістохрону);

13) $\begin{cases} \int_{-T}^{T} x(t)\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}dt \to \inf, \\ x(T) = x(-T) = \xi; \end{cases}$ (задача про мінімальну поверхню обертання).

3.2. Задача Больца

Розглядається задача

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \qquad (1)$$

Означення Елемент $\widetilde{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ називається сильним локальним мінімумом задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного елементу $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\widetilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\| < \varepsilon$, виконується $J(x(\cdot)) \geq J(\widetilde{x}(\cdot))$.

Означення Елемент $\widetilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ називається слабким локальним мінімумом задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного елементу $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\widetilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_1 < \varepsilon$, виконується $J(x(\cdot)) \geq J(\widetilde{x}(\cdot))$.

Теорема.(про слабкий екстремум в задачі Больца)
Нехай $\widetilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум задачі (1), функції $L, L'_x, L'_{\dot{x}} \in C(U)$, $l \in C^1(V)$, де U - відкрита множина в R^3, V відкрита

множина в R^2, причому $\forall t\in[t_0,t_1]$ $(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))\in U$ $(\tilde{x}(t_0),\tilde{x}(t_1))\in V$. Тоді

1) $\tilde{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$;

2) $\tilde{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{x}}(t)=\tilde{L}_x(t)$;

3) $\tilde{x}(\cdot)$ задовольняє умови трансверсальності: $\tilde{L}_{\dot{x}}(t_0)=\tilde{l}_{x0}$, $\tilde{L}_{\dot{x}}(t_1)=-\tilde{l}_{x1}$

Доведення. Розглядаючи банахів простір $(C^1([t_0,t_1]),\|\cdot\|_1)$, маємо, що задача (1) еквівалентна наступній:

$$\begin{cases} J(x(\cdot))\to \inf, \\ x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1]), \end{cases} \qquad (2)$$

де $J(\cdot):C^1([t_0,t_1])\to R$ - строго диференційоване в точці $\tilde{x}(\cdot)$ відображення. Тоді (2) – гладка задача без обмежень, отже $\forall\ h\in C^1([t_0,t_1])$ $J'(\tilde{x})[h]=0$. Звідси $\int\limits_{t_0}^{t_1}(\tilde{L}_x(t)h(t)+\tilde{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t))dt+\tilde{l}_{x0}h(t_0)+\tilde{l}_{x1}h(t_1)=0$. Взявши ті $h(\cdot)$, для яких $h(t_0)=h(t_1)=0$, з леми Дюбуа – Реймона маємо умови 1), 2). Звідси $\int\limits_{t_0}^{t_1}(\tilde{L}_x(t)h(t)+\tilde{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t))dt+\tilde{l}_{x0}h(t_0)+\tilde{l}_{x1}h(t_1)=$
$h(t_1)(\tilde{L}_{\dot{x}}(t_1)+\tilde{l}_{x1})+h(t_0)(\tilde{l}_{x0}-\tilde{L}_{\dot{x}}(t_0))=0$ і покладаючи $h(t)=t-t_0$ і $h(t)=t_1-t$ маємо умову 3). Теорема доведена.

Вправи

Розв'язати наступні задачі

1) $\int\limits_0^1(\dot{x}^2(t)-x(t))dt+x^2(1)\to extr$;

2) $\int\limits_0^1\dot{x}^2(t)dt+4x^2(0)-5x^2(1)\to extr$

3) $\int\limits_0^1(\dot{x}^2(t)+x^2(t))dt-2sh1\,x(1)\to extr$;

4) $\int_0^1 (\dot{x}^2(t) - 2x(t))dt \to extr$

5) $\int_0^\pi (\dot{x}^2(t) + x^2(t) - 4x(t)\sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt + x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) + 4x(\frac{\pi}{2}) \to extr$

7) $\int_1^e 2\dot{x}(t)(t\dot{x}(t) + x(t))dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to extr$

8) $\int_0^T (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt + \alpha x^2(T) \to extr$

3.3. Ізопериметрична задача

Розглядається задача
$$\begin{cases} J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt \le \alpha_i, \; i = \overline{1, m} \end{cases} \qquad (1)$$

Функція $x(\cdot)$ називається допустимою в задачі (1), якщо $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, J_i(x(\cdot)) \le \alpha_i, i = \overline{1, m}$. З урахуванням цього уточнення аналогічно до задачі Лагранжа переписуються означення слабкого і сильного локального мінімуму задачі (1).

Теорема (про слабкий екстремум в ізопериметричній задачі)
Нехай $\tilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум задачі (1), функції $f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(U),\; i = \overline{0, m}$, , де U - відкрита множина в R^3, причому $\forall t \in [t_0, t_1] \; (t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) \in U$. Тоді існують множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, не всі одночасно рівні нулю і такі, що

1) $\lambda_i \ge 0, \; i = \overline{0, m}$;
2) $\lambda_i (J_i(x(\cdot)) - \alpha_i) = 0, \; i = \overline{1, m}$;

3) $\widetilde{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{x}}(t)=\widetilde{L}_x(t)$, де $L(t,x,\dot{x})=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,x,\dot{x})$.

Доведення. Розглядаючи банахів простір $(C^1([t_0,t_1]),\|\cdot\|_1)$, маємо для задачі (1):

$$\begin{cases} J_0(x(\cdot))\to \inf, \\ x(\cdot)\in C^1([t_0\,,t_1]), \\ F(x(\cdot))=0,\ J_i(x(\cdot))-\alpha_i\le 0,\ i=\overline{1,m} \end{cases} \qquad (2)$$

де $F(x(\cdot))=\begin{pmatrix} x(t_0)-x_0 \\ x(t_1)-x_1 \end{pmatrix}$, $F:C^1([t_0\,,t_1])\to R^2$ - строго диференційоване в точці $\widetilde{x}(\cdot)$, причому $\forall\, h\in C^1([t_0,t_1])$ $F'(\widetilde{x})[h]=\begin{pmatrix} h(t_0) \\ h(t_1) \end{pmatrix}$ і $\operatorname{Im}F'(\widetilde{x})=R^2$. $J_i(\cdot):C^1([t_0\,,t_1])\to R$ - строго диференційовані в точці $\widetilde{x}(\cdot)$ відображення. Тоді (2) – гладка задача з обмеженнями типу нерівностей, отже існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m$, $y^*=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}\in R^2$ такі, що виконується 1), 2) і $\forall\ h\in C^1([t_0,t_1])$ $\sum_{i=0}^{m}\int_{t_0}^{t_1}(\widetilde{f}_{ix}(t)h(t)+\widetilde{f}_{i\dot{x}}(t)\dot{h}(t))dt+\mu_1 h(t_0)+\mu_2 h(t_1)=0$.

Взявши $h(\cdot)$, для яких $h(t_0)=h(t_1)=0$, за лемою Дюбуа – Реймона маємо умову 3). Тепер якщо $\forall i=\overline{0,m}$ $\lambda_i=0$, то з необхідністю $\mu_1=\mu_2=0$, що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Наслідок (класична ізопериметрична задача) Якщо в задачі (1) замінити знак "$\le$" на знак "=" в усіх обмеженнях, то за умов теореми якщо $\tilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум, то існують множники Лагранжа $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ не всі одночасно рівні нулю такі, що $\tilde{x}(\cdot)$ задовольняє 3). Зауважимо, що в цьому випадку $\lambda_1, ..., \lambda_m$ можуть бути довільного знаку.

Вправи

1) $\begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0)=0,\ x(1)=1 \\ \int_0^1 x(t)dt = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0)=-4,\ x(1)=4 \\ \int_0^1 tx(t)dt = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int_0^\pi x(t)\sin t dt \to extr \\ x(0)=0,\ x(\pi)=\pi \\ \int_0^\pi \dot{x}^2(t)dt = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0)=2e+1,\ x(1)=2 \\ \int_0^1 x(t)e^{-t}dt = e \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int_0^\pi \dot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0)=2,\ x(\pi)=0 \\ \int_0^\pi x(t)\cos t dt = \frac{\pi}{2},\ \int_0^\pi x(t)\sin t dt = \pi + 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt \to extr \\ x(0)=0,\ x(1)=e \\ \int_0^1 x(t)e^t dt = \frac{e^2+1}{4} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int_{-T}^T x(t)dt \to extr \\ x(-T)=x(T)=0, \\ \int_{-T}^T \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}dt = \zeta \end{cases}$

8) $\begin{cases} \int_{-T}^T x(t)\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}dt \to extr \\ x(-T)=x(T)=0, \\ \int_{-T}^T \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}dt = \zeta \end{cases}$

3.4. Задачі зі старшими похідними і векторні задачі

Задача Лагранжа зі старшими похідними – це задача вигляду

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t))dt \to \inf \\ x^{(k)}(t_0) = x_{0k},\ x^{(k)}(t_1) = x_{1k},\ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \qquad (1)$$

Функція $x(\cdot)$ називається допустимою в задачі (1), якщо $x^{(k)}(t_0) = x_{0k}$, $x^{(k)}(t_1) = x_{1k}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тоді відносно норми $\|\cdot\|_n$ простору $C^{(n)}([t_0, t_1])$ аналогічно до задачі Лагранжа означаються сильний і слабкий локальний мінімуми задачі (1).

Теорема Нехай $\tilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум в задачі (1), $L, L'_{x^{(k)}} \in C(U)$, де U - відкрита множина в R^{n+1}, причому $(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t), ..., \tilde{x}^{(n)}(t)) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Тоді $\tilde{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Пуасона: $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{d^k}{dt^k} \tilde{L}_{x^{(k)}}(t) = 0$.

Векторна задача Лагранжа – це задача вигляду

$x^{(k)}(t_0) = x_{0k}$, $x^{(k)}(t_1) = x_{1k}$, $k = \overline{0, n-1}$

$$\begin{cases} J(\vec{x}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt \to \inf \\ x_i(t_0) = x_i^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (2)$$

Нехай $\vec{x}_0 = (x_1^0, ..., x_n^0),\ \vec{x}_1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$. Вектор-функція $\vec{x}(\cdot) = (x_1(\cdot), ..., x_n(\cdot))$ називається допустимою в задачі (2), якщо $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$. Відносно норм просторів вектор-функцій аналогічно до задачі Лагранжа означається сильний і слабкий локальний мінімуми задачі (2).

Теорема Нехай $\tilde{\vec{x}}(\cdot) = (\tilde{x}_1(\cdot), ..., \tilde{x}_n(\cdot))$ - слабкий локальний мінімум в задачі (2), $L, L'_{x_i}, L'_{\dot{x}_i} \in C(U),\ i = \overline{1, n}$, де U - відкрита множина в R^{2n+1}, причому $(t, \tilde{\vec{x}}(t), \dot{\tilde{\vec{x}}}(t)) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Тоді $\tilde{\vec{x}}(\cdot)$ задовольняє систему рівнянь Ейлера: $\dfrac{d}{dt} \tilde{L}_{\dot{x}_i}(t) = \tilde{L}_{x_i}(t),\ i = \overline{1, n}$.

Векторна задача Больца – це задача вигляду

$$J(x_1(\cdot),...,x_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t),...,x_n(t), \dot{x}_1(t),...,\dot{x}_n(t))dt$$
$$+ l(x_1(t_0),...,x_n(t_0), x_1(t_1),...,x_n(t_1)) \to \inf \qquad (3)$$

Теорема Нехай $\tilde{\vec{x}}(\cdot) = (\tilde{x}_1(\cdot),...,\tilde{x}_n(\cdot))$ - слабкий локальний мінімум в задачі (3), $L, L'_{x_i}, L'_{\dot{x}_i} \in C(U),\ i = \overline{1,n}$, $l_{x_i(t_0)},\ l_{x_i(t_1)} \in C(V)$, де U - відкрита множина в R^{2n+1}, V - відкрита множина в R^{2n}, причому $(t, \tilde{\vec{x}}(t), \dot{\tilde{\vec{x}}}(t)) \in U,\ (\tilde{\vec{x}}(t_0), \tilde{\vec{x}}(t_1)) \in V \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$. Тоді $\tilde{\vec{x}}(\cdot)$ задовольняє

1) систему рівнянь Ейлера: $\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{x}_i}(t) = \tilde{L}_{x_i}(t),\ i = \overline{1,n}$;
2) умови трансверсальності: $\tilde{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \tilde{l}_{x_i(t_0)},\ \tilde{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\tilde{l}_{x_i(t_1)},\ i = \overline{1,n}$

Вправи

1) $$\begin{cases} \int_0^1 \ddot{x}^2(t)dt \to \inf \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2(t) - 48x(t))dt \to \inf \\ x(0) = 1,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(0) = -4,\ \dot{x}(1) = 0 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \int_0^1 (t+1)^2 \ddot{x}^2(t)dt \to \inf \\ x(0) = 0,\ x(1) = \ln 2,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \int_0^1 e^{-t} \ddot{x}^2(t)dt \to \inf \\ x(0) = 0,\ x(1) = e,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = 2e \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + 2x(t)y(t))dt \to \inf \\ x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

6) $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} (-2x^2(t) + \dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t) + 2x(t)y(t))dt \to \inf \\ x(0) = 0, x(\pi) = 1, y(0) = 0, y(\pi) = -1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} (\dot{x}(t)\dot{y}(t) + 6x(t)t + +12y(t)t^2)dt \to \inf \\ x(0) = 0, x(1) = 1, y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}$

8) $\int\limits_0^1 (\dot{x}(t)\dot{y}(t) + x(t)y(t))dt + x(0)y(1) + x(1)y(0) \to \inf$

9) $\int\limits_0^1 (x^2(t) + y^2(t) + 2\dot{x}(t)\dot{y}(t))dt \to \inf$

10) $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}(t)\dot{y}(t) - x(t)y(t))dt + x(\pi) + y^2(0) \to \inf$

11) Розглянемо задачу (2) з додатковим обмеженням $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| \le A$.

Довести, що якщо $L \in C(R^{2n+1})$ і $\forall (t, \vec{x}) \in R^{n+1}$ функція $\dot{\vec{x}} \mapsto L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ - опукла, то задача (2) має розв'язок в класі абсолютно неперервних функцій.

11) Чи вірне аналогічне твердження для задачі (3) ?

3.5. Умови Вейєрштраса, Лежандра, Якобі

Розглянемо задачу Лагранжа

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема Нехай $\tilde{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$ - сильний локальний мінімум задачі (1), $L, L'_x, L'_{\dot{x}} \in C(U)$, де U - відкрита множина в R^3, причому $(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) \in U$ в усіх точках неперервності $\tilde{x}(\cdot)$. Тоді

1) $\tilde{x}(\cdot)$ задовольняє інтегральне рівняння Ейлера: $\tilde{L}_{\dot{x}}(t) - \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{L}_x(s)ds = const$ в усіх точках неперервності $\tilde{x}(\cdot)$;

2) в усіх точках розриву похідної $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ виконуються умови Вейерштраса-Ердмана

$L_{\dot{x}}(\tau_k, \widetilde{x}(\tau_k), \dot{\widetilde{x}}(\tau_k - 0)) = L_{\dot{x}}(\tau_k, \widetilde{x}(\tau_k), \dot{\widetilde{x}}(\tau_k + 0)),\ k = \overline{1,n}$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(s) = J(\widetilde{x}(\cdot) + sh(\cdot))$, де $h(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Тоді для малих s: $\varphi(s) \geq \varphi(0)$ і $\varphi(\cdot) \in C^1$, отже $\varphi'(0) = 0$. З іншого боку

$\varphi'(0) = \dfrac{d}{ds} J(\widetilde{x}(\cdot) + sh(\cdot)) \Big|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} (-p(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}}(t))\dot{h}(t)dt$, де $p(t) = \int_{t_0}^{t} \widetilde{L}(s)ds$.

Тоді за лемою Лагранжа маємо шукане.

Теорема (необхідні умови Вейєрштраса сильного мінімуму) Нехай $\widetilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ - сильний локальний мінімум задачі (1), $L, L'_x, L'_{\dot{x}} \in C(U)$, де U - відкрита множина в R^3, причому $(t, \widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t)) \in U$ $\forall\, t \in [t_0, t_1]$ Тоді виконується умова Вейєрштраса: $\forall\, \tau \in [t_0, t_1]$ $\forall\, \xi \in R$ таких, що $(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau) + \xi) \in U$, маємо $E(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau) + \xi) := L(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau) + \xi) -$
$L(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau)) - \xi L_{\dot{x}}(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau)) \geq 0$.

Доведення. Грунтується на методі голкових варіацій. Зафіксуємо $\tau \in [t_0, t_1]$, $\forall\, \xi \in R$ і розглянемо функцію
$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi,\ t \in [t-\lambda, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda},\ t \in [\tau, \tau + \sqrt{\lambda}]. \\ 0,\ \textit{інакше} \end{cases}$ Тоді для функції

$\varphi(\lambda) = J(\widetilde{x}(\cdot) + h_\lambda(\cdot))$ маємо, що $\forall\, \lambda > 0$ $\dfrac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq 0$. Оскільки

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \Big(L(t, \widetilde{x}(t) + h_\lambda(t), \dot{\widetilde{x}}(t) + \xi) - L(t, \widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))\Big)dt +$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \Big(L(t, \widetilde{x}(t) + h_\lambda(t), \dot{\widetilde{x}}(t) - \xi\sqrt{\lambda}) - L(t, \widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))\Big)dt =$$

$\lambda\Big(L(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau))\Big) - \xi\lambda L_{\dot{x}}(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau)) + o(\lambda),\ \lambda \to 0$, то існує $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \dfrac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = E(\tau, \widetilde{x}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau), \dot{\widetilde{x}}(\tau) + \xi) \geq 0$.

Теорема Нехай $\widetilde{x}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ - сильний локальний мінімум задачі (1), $L, L'_x, L'_{\dot x}, L''_{\dot x\dot x}\in C(U)$, де U - відкрита множина в R^3, причому $(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t))\in U \ \ \forall t\in[t_0,t_1]$ Тоді виконується умова Лежандра: $\forall t\in[t_0,t_1] \ \widetilde{L}''_{\dot x\dot x}(t)\ge 0$.

Доведення. Користуючись умовою Вейєрштраса і теоремою про середнє маємо, що $\forall \tau\in[t_0,t_1] \ \ \forall \xi\in R$ існують $\theta,\theta_1\in(0,1)$ такі, що $E(\tau,\widetilde{x}(\tau),\dot{\widetilde{x}}(\tau),\dot{\widetilde{x}}(\tau)+\xi)=\xi^2\theta L''_{\dot x\dot x}(\tau,\widetilde{x}(\tau),\dot{\widetilde{x}}(\tau)+\theta_1\xi)\ge 0$. Тоді при $\xi=0$ маємо шукане.

Лема (про спрямлення кутів) Нехай для деякої відкритої множини $V\subset R^3$ існує число $M>0$ таке, що $\forall (t,x,\dot x)\in V \ |L(t,x,\dot x)|\le M$. Позначимо

$V_0=\{x(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1]) \mid x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, (t,x(t),\dot x(t))\in V$

$\textit{в точках неперервності} \ \ x(\cdot)\ \}$,

$V_1=\{x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1]) \mid x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \ (t,x(t),\dot x(t))\in V \ \ \forall t\in[t_0,t_1]\ \}$.

Тоді $\inf\limits_{x(\cdot)\in V_0} J(x(\cdot))=\inf\limits_{x(\cdot)\in V_1} J(x(\cdot))$.

Нехай тепер $\widetilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум (1) і $L''_{xx}, L''_{x\dot x}, L''_{\dot x\dot x}\in C(U)$. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} J_1(h(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\widetilde{L}_{xx}(t)h^2(t)+2\widetilde{L}_{x\dot x}(t)h(t)\dot h(t)+\widetilde{L}_{\dot x\dot x}(t)\dot h^2(t))dt\to\inf, \\ h(t_0)=h(t_1)=0 \end{cases} \quad (2)$$

В силу умов на функцію L для довільних $h(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ таких, що $h(t_0)=h(t_1)=0$ функція $\varphi(s)=J(\widetilde{x}(\cdot)+sh(\cdot))$ має в т. $s=0$ локальний мінімум і $\varphi''(0)\ge 0$. Тоді $h(t)\equiv 0$ - слабкий локальний мінімум задачі (2). З леми про спрямлення кутів $h(t)\equiv 0$ - сильний локальний мінімум (2). Тоді з умови Лежандра $\forall t\in[t_0,t_1] \ \widetilde{L}''_{\dot x\dot x}(t)\ge 0$. Таким чином умова Лежандра є необхідньою умовою слабкого локального мінімуму задачі (1). Далі, рівняння Ейлера для задачі (2) має вигляд

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{L}_{\dot x x}(t)h(t)+\widetilde{L}_{\dot x\dot x}(t)\dot h(t))=\widetilde{L}_{xx}(t)h(t)+\widetilde{L}_{x\dot x}(t)\dot h(t) \quad (3)$$

і називається рівнянням Якобі для задачі (1). За умови $\forall t\in[t_0,t_1] \ \widetilde{L}''_{\dot x\dot x}(t)\ne 0$ рівняння (3) є лінійним однорідним рівнянням 2-

го порядку, для якого задачі Коші має єдиний розв'язок, що існує на $[t_0,t_1]$.

Означення Точка t^* називається спряженою до точки t_0, якщо $\forall\, t\in[t_0,t_1]\ \widetilde{L}''_{\dot{x}\dot{x}}(t)\neq 0$ і існує не тривіальний розв'язок рівняння (3) $h(\cdot)$ такий, що $h(t_0)=h(t^*)=0$.

Теорема (необхідні умови слабкого мінімуму 2-го порядку) Нехай $\widetilde{x}(\cdot)$ - слабкий локальний мінімум (1), $L''_{\dot{x}\dot{x}}, L''_{x\dot{x}}, L''_{xx}\in C(U)$, U - відкрита множина в R^3, причому $(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t))\in U\ \ \forall\, t\in[t_0,t_1]$. Тоді для $\widetilde{x}(\cdot)$ виконані:

1) рівняння Ейлера: $\dfrac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{x}}(t)=\widetilde{L}_x(t)$;
2) умова Лежандра: $\forall\, t\in[t_0,t_1]\ \widetilde{L}''_{\dot{x}\dot{x}}(t)\geq 0$;
3) умова Якобі: на (t_0,t_1) немає спряжених точок до точки t_0.

Доведення. Пункти 1), 2) вже доведені. Нехай 3) не виконується, тобто за умови $\forall\, t\in[t_0,t_1]\ \widetilde{L}''_{\dot{x}\dot{x}}(t)>0$ існують $t^*\in(t_0,t_1)$, $h(\cdot)$ - нетривіальний розв'язок (3) такі, що $h(t_0)=h(t^*)=0$. Поклавши $\widetilde{h}(t)=\begin{cases}h(t), & t\in[t_0,t^*]\\ 0, & t\in(t^*,t_1]\end{cases}$, маємо $J_1(\widetilde{h}(\cdot))=0$, отже $\widetilde{h}(\cdot)$ - сильний локальний мінімум (2), причому $\dot{\widetilde{h}}(t^*+0)=0$, $\dot{\widetilde{h}}(t^*-0)\neq 0$. Тоді з умов Вейєрштраса-Ердмана для задачі (2) одразу маємо протиріччя. Теорема доведена.

Насправді посилені умови Лежандра, Якобі і Вейєрштраса забезпечують достатні умови існування локального мінімуму. Наведемо без доведення відповідні теореми.

Теорема Нехай $\widetilde{x}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ - допустима функція задачі (1), $L''_{\dot{x}\dot{x}}, L''_{x\dot{x}}, L''_{xx}\in C(U)$, U - відкрита множина в R^3, причому $(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t))\in U\ \ \forall\, t\in[t_0,t_1]$ і виконані умови

1) $\widetilde{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера: $\dfrac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{x}}(t)=\widetilde{L}_x(t)$;
2) виконана посилена умова Лежандра: $\forall\, t\in[t_0,t_1]\ \widetilde{L}''_{\dot{x}\dot{x}}(t)>0$;
3) виконана посилена умова Якобі: на $(t_0,t_1]$ немає спряжених точок до точки t_0.

Тоді $\widetilde{x}(\cdot)$ доставляє слабкий локальний мінімум в задачі (1).

Теорема Нехай $\widetilde{x}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$ - така, що задовольняє умови попередньої теореми, $L''_{\dot{x}\dot{x}}, L''_{x\dot{x}}, L''_{xx}\in C(U)$, U - відкрита множина в R^3, причому $(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t))\in U\ \ \forall t\in[t_0,t_1]$ і $\forall (t,x,u),(t,x,\xi)\in U$ функція Вейєрштраса $E(t,x,u,\xi)\geq 0$. Тоді $\widetilde{x}(\cdot)$ доставляє сильний локальний мінімум в задачі (1).

Вправи

Застосовуючи необхідні і достатні умови, розв'язати задачі:

1) Задачі 1) – 8) з пункту 3.1;

2) $\begin{cases}\int\limits_0^1(\dot{x}^2(t)+tx(t))dt\to\inf,\\ x(0)=0,\ x(1)=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\int\limits_1^e(t\dot{x}^2(t)+2x(t))dt\to\inf,\\ x(1)=1,\ x(e)=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\int\limits_1^e(-t\dot{x}^2(t)+x(t))dt\to\inf,\\ x(1)=1,\ x(e)=2;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\int\limits_2^3(t^2-1)\dot{x}^2(t)dt\to\inf,\\ x(2)=0,\ x(3)=1;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\int\limits_0^1 e^t\dot{x}^2(t)dt\to\inf,\\ x(0)=0,\ x(1)=\ln 4;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}\int\limits_0^1(\dot{x}^2(t)+x(t)\dot{x}(t)+12tx(t))dt\to\inf,\\ x(0)=0,\ x(1)=0;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\dot{x}^2(t)+x^2(t)+2x(t))dt\to\inf,\\ x(0)=0,\ x(\frac{\pi}{2})=0;\end{cases}$

9) $\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}(\dot{x}^2(t)-x^2(t)-2x(t))dt\to\inf,\\ x(0)=0,\ x(\frac{3\pi}{2})=0;\end{cases}$

3.6. Задача з рухомими кінцями

Розглядається задача

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf, \\ x(t_0) = \varphi_0(t_0),\ x(t_1) = \varphi_1(t_1) \end{cases} \qquad (1)$$

Тут t_0, t_1 - не фіксовані моменти часу з заданого відрізку Δ, $\varphi_0(\cdot),\ \varphi_1(\cdot)$ - задані функції. Трійка $(x(\cdot), t_0, t_1)$ називається допустимим елементом задачі (1), якщо $x(\cdot) \in C^1(\Delta),\ t_0, t_1 \in \operatorname{int}\Delta,\ t_0 < t_1$ і виконані умови $x(t_0) = \varphi_0(t_0),\ x(t_1) = \varphi_1(t_1)$.

Означення Допустимий елемент $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ називається слабким локальним мінімумом задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного допустимого елементу $(x(\cdot), t_0, t_1)$, для якого $\left|t_0 - \tilde{t}_0\right| < \varepsilon$, $\left|t_1 - \tilde{t}_1\right| < \varepsilon$, $\left\|\tilde{x}(\cdot) - x(\cdot)\right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon$, виконується $J(x(\cdot), t_0, t_1) \ge J(\tilde{x}(\cdot),\ \tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$.

Теорема (необхідні умови слабкого мінімуму) Нехай $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ - слабкий локальний мінімум (1), $L \in C^1(U)$, де U - відкрита множина в R^3, причому $(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) \in U \quad \forall t \in \Delta$, $\varphi_0(\cdot) \in C^1(V_0(\tilde{t}_0))$, $\varphi_1(\cdot) \in C^1(V_1(\tilde{t}_1))$, де $V_0, V_1 \subset R$ - відриті околи точок $\tilde{t}_0, \tilde{t}_1$ відповідно. Тоді виконуються:

1) рівняння Ейлера: $\dfrac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{x}}(t) = \tilde{L}_x(t) \quad \forall t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$

2) умови трансверсальності: $\tilde{L}(\tilde{t}_i) = \tilde{L}_{\dot{x}}(\tilde{t}_i)(\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}_i) - \dot{\varphi}_i(\tilde{t}_i),\ i = 0,1$

Доведення. Оскільки $\tilde{x}(\cdot)$ доставляє слабкий локальний мінімум функціоналу J при фіксованих $\tilde{t}_0, \tilde{t}_1$, то умова 1) має місце. Доведемо виконання умови 2) для точки $\tilde{t}_1$. Для точки $\tilde{t}_0$ - аналогічно. Нехай для кожного $c \in R \quad x(t, c) := \tilde{x}(t) + c(t - \tilde{t}_0)$, $\psi(t_1, c) = x(t_1, c) - \varphi_1(t_1)$. Тоді $\psi(\tilde{t}_1, 0) = 0$, $\psi'_c(\tilde{t}_1, 0) \ne 0$ і за теоремою про неявну функцію існує гладка функція $t_1 \mapsto c(t_1)$ така, що $c(\tilde{t}_1) = 0$ і $x(t_1, c(t_1)) = \varphi_1(t_1)$. При цьому $c'(\tilde{t}_1) = \dfrac{\dot{\varphi}_1(\tilde{t}_1) - \dot{\tilde{x}}(\tilde{t}_1)}{\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0}$. Нехай

$A(t_1) = J(x(\cdot, c(t_1)), \widetilde{t_0}, t_1)$, $A(t_1) \in C^1(\overline{\Delta})$. Тоді точка $\widetilde{t_1}$ - локальний мінімум A, отже $A'(\widetilde{t_1}) = 0$. Звідси з урахуванням рівняння Ейлера легко отримуємо 2).

Вправи

Знайти екстремалі:

1) $\begin{cases} \int\limits_0^T \dot{x}^2(t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \int\limits_0^T \dot{x}^2(t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ (T-1)x^2(T) + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_0^T \dot{x}^3(t)dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ T + x(T) = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \int\limits_0^T (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int\limits_0^T (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = T; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \int\limits_0^T (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt \to extr, \\ x(0) = 0,\ x(T) = 1; \end{cases}$

Література

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.:Наука, 1979. - 425с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. - М.:Мир, 1974. - 315с.
3. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. - М.:Мир, 1979. - 385с.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.:Мир, 1973. - 250с.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. - М.:Наука, 1980. - 318с.
6. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. - К.:Либідь, 1994. - 328с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.:Наука, 1972. - 544с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.:Наука, 1981. - 460с.
9. Алексеев В.М., Галеев Е.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - М.:Наука, 1984. - 265с
10. Пономаренко А.И., Леоненко Н.Н., Борисенко А.Д. Учебные задания к лабораторным занятиям по курсу методы оптимизации. - К.:КГУ, 1986. - 40с.