Конкурс "Від задачок до задач"

Розв'язання задач 1 — 5

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн[1]

1. Прямокутник із сторонами 2012 см та 2102 см поділений на квадрати із стороною 1 см. Скільки таких квадратів перетинає діагональ прямокутника?

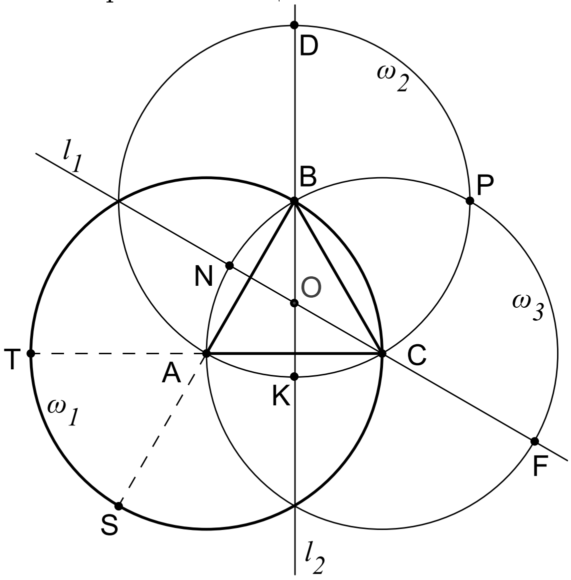
Відповідь: 4112.

Розв'язок. Введемо систему координат так, що вершини прямокутника мають координати $(0;0)$, $(2102;0)$, $(2102;2012)$ та $(0;2012)$. Точка з координатами $(a;b)$ лежить на діагоналі за умови, що $\frac{a}{b} = \frac{2102}{2012} = \frac{1051}{1006}$. Але дріб $\frac{1051}{1006}$ нескоротний, тому діагональ проходить через єдину цілу точку $(1051;1006)$. Далі, горизонтальні прямі, які ділять прямокутник на одиничні квадрати, перетинають діагональ у 2011 точках, вертикальні — у 2101 точці, причому рівно одну точку пораховано двічі. Тому діагональ $2011 + 2101 - 1 = 4111$ точками поділу розбито на 4112 відрізки. Отже, вона перетинає 4112 квадратів.

2. Трикутник ABC рівносторонній. Знайти геометричне місце точок M таких, що трикутники ABM та ACM одночасно рівнобедрені.

Відповідь: коло ω_1 з виколотими точками B, C, T і S, а також точки N, O, K, D, P та F (див. рисунок).

Розв'язок. Геометричне місце точок M, для яких трикутник ABM є рівнобедреним, це об'єднання прямої l_1 та кіл ω_1, ω_2, з якого виколоті точки прямої AB (див. рисунок), а геометричне місце точок M, для яких трикутник ACM є рівнобедреним, це об'єднання прямої l_2 та кіл ω_1, ω_3, з якого виколоті точки прямої AC. Залишилось визначити перетин цих геометричних місць.



[1]вчителі математики ліцею "Наукова зміна"

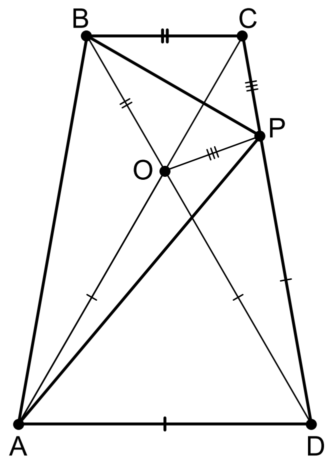
3. В олімпіаді з математики було 80 учасників. Першу задачу розв'язали 69 учнів, другу 67 учнів, третю 56 учнів та четверту 48 учнів. Жоден учасник олімпіади не розв'язав чотири задачі, а призерами стали учні, яки розв'язали третю та четверту задачі. Скільки учасників олімпіади стали призерами?

Відповідь: 24.

Розв'язок. Першу задачу не розв'язали 11 учнів, другу — 13, третю — 24 та четверту — 32 учня. Оскільки ці числа в сумі дають 80 і кожен учень не розв'язав хоча б одну задачу, то кожен учасник олімпіади розв'язав рівно три задачі. Призерами стали ті, хто не розв'язав або першу, або другу задачу.

4. Нехай $ABCD$ — рівнобедрена трапеція ($AD \parallel BC$), $\angle BAD = 80^\circ$, $\angle BDA = 60^\circ$. Точка P належить CD та $\angle PAD = 50^\circ$. Знайти $\angle PBC$.

Відповідь: 30°.



Розв'язок. З трикутника APD маємо $\angle APD = \angle PAD = 50^\circ$, тому $AD = PD$. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$. Трикутники AOD та BOC рівнобедрені з кутом 60° при основі, тому вони рівносторонні, зокрема $AD = OD$, $BO = BC$. Трикутник ODP рівнобедрений з кутом $80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ при вершині, тому $\angle DOP = 80^\circ$. Далі,

$$\angle OCP = \angle BCD - \angle BCO = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ,$$
$$\angle COP = 180^\circ - \angle BOC - \angle DOP = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ,$$

тому трикутник OP рівнобедрений, $OP = CP$. Таким чином, $\triangle BOP = \triangle BCP$ за трьома сторонами, звідки

$$\angle PBC = \angle PBO = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

5. Дано горизонтальну клітчасту смугу розмірами $1 \times n$ ($n > 3$). У трьох крайніх зліва клітинках стоять фішки. Двоє гравців по черзі пересувають будь-яку фішку в будь-яку вільну клітинку праворуч. Програє той з гравців, який не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

Відповідь: перший гравець.

Розв'язок. Розглянемо два випадки.

1) Число n парне. Тоді перший гравець переставляє першу фішку в крайню справа клітинку. Тепер вільні клітинки, на які можна пересунути фішки, розбиваються на пари сусідніх, і після кожного хода другого гравця перший гравець може ставити іншу фішку в другу клітинку цієї самої пари. Таким чином, він завжди зможе відповісти на хід другого гравця.

2) Число n непарне. Тоді перший гравець переставляє третю фішку в крайню справа клітинку, а далі грає так само, як у першому випадку.

Селіханович Даніїл *(8 клас, м. Одеса)* 1, 3, 4, 5;
Чорний Михайло *(9 клас, м. Бровари Київської обл.)* 1, 3.