

Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 6 — 10

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн¹

6. На столі лежать десять карток, на кожній з яких з обох боків написане натуральне число. Всі двадцять чисел різні. Суми пар чисел на всіх картках однакові, а сума десяти чисел на верхньому боці карток дорівнює сумі десяти чисел на нижньому боці. Ми бачимо дев’ять чисел: 2, 5, 17, 21, 24, 31, 35, 36, 42, а десяту картку затуляють інші картки. Знайти десяте число.

Відповідь: 37.

Розв’язок. Зберемо числа, які записані на картках, у таблицю:

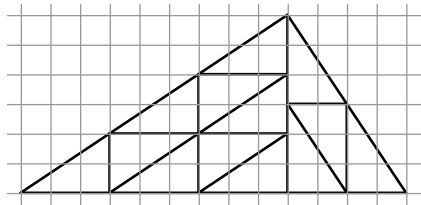
2	5	17	21	24	31	35	36	42	X
$T + 40$	$T + 37$	$T + 25$	$T + 21$	$T + 18$	$T + 11$	$T + 7$	$T + 6$	T	$T + 42 - X$

Суми чисел в обох рядках рівні, тому $213 + X = 10T + 207 - X$, $X = 5T - 3$. З іншого боку $X < T + 42$, $5T - 3 < T + 42$, $T < 11\frac{1}{4}$. Перебором всіх значень $1 \leq T \leq 11$ з урахуванням умови, що всі числа різні, одержимо $T = 8$, $X = 37$.

7. Чи існує прямокутний трикутник, який можна розрізати на 13 рівних трикутників?

Відповідь: Існує.

Розв’язок. Див. рисунок.



8. Маючи повний бак пального, моторний човен може проплисти 72 км проти течії або 120 км за течією. На яку найбільшу відстань може відплисти човен, аби пального вистачило на зворотний шлях?

Відповідь: 45 км.

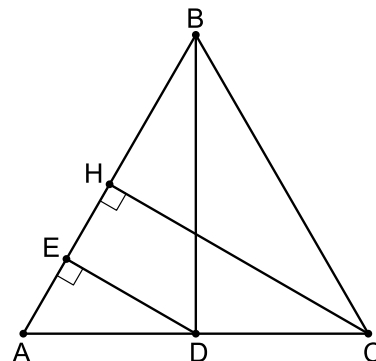
Розв’язок. Аби проплисти 1 км проти течії човен витрачає $1/72$ баку пального, а за течією — $1/120$ баку. Отже, в сумі на кожен кілометр шляху витрачається $1/45$ баку. Тому відплисти можна на 45 км.

Зауваження. Якщо припустити, що човен не обов’язково пливе з працюючим мотором, то треба проплисти за течією 72 км з вимкненим мотором, потім увімкнути мотор та повернутися назад. У цьому випадку відповідь — 72 км. Втім, таке тлумачення умови не зовсім узгоджується з тим, що човен може проплисти за течією лише певну відстань.

¹вчителі математики ліцею “Наукова зміна”

9. В трикутнику ABC кут A дорівнює 60° , а медіана BD дорівнює висоті CH . Довести, що цей трикутник рівносторонній.

Розв'язок. Проведемо $DE \perp AB$. Тоді DE — середня лінія трикутника ACH , а отже $DE = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}BD$. У прямокутному трикутнику BDE катет DE дорівнює половині гіпотенузи BD , тому $\angle DBE = 30^\circ$. З трикутника ADB знаходимо $\angle ADB = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$. Таким чином, у трикутнику ABC медіана BD є висотою. Отже, трикутник ABC рівнобедрений з кутом 60° при основі, тобто рівносторонній.



10. Знайдіть найбільше натуральне число, яке має такі властивості:

- всі цифри цього числа різні;
- серед цих цифр немає цифри 0;
- при закреслюванні будь-якої цифри цього числа залишається число, яке ділиться на цифру, яку було закреслено.

Відповідь: 9721368.

Розв'язок. Шукане число N не може містити цифру 5, бо після викреслювання цієї цифри залишається число, яке не містить цифр 0 та 5, а отже не ділиться на 5. Якщо число N містить цифру 9, то сума решти цифр має ділитися на 9, а сума всіх цифр, крім 0, 5 та 9, дає при діленні на 9 остачу 4. Тому число N містить щонайбільше сім цифр.

Далі будемо припускати, що число N семицифрове та починається з цифри 9. Тоді сума цифр числа N ділиться на 9, а тому ці цифри — 1,2,3,6,7,8 та 9. Остання цифра числа N має бути парною, а після її викреслювання має залишатись парне число, тобто передостання цифра теж парна. Але число, яке закінчується на 26 або 62, не ділиться на 8. Тому 8 — остання або передостання цифра числа N .

Тепер припускаємо, що N — семицифрове число, яке починається з цифр 97, а далі у деякому порядку йдуть цифри 1,2,3,6,8, причому останні дві цифри числа парні та одна з них це 8. Тоді умова в) виконується для всіх цифр крім, можливо, 7 та 8. Далі, після викреслювання цифри 8 залишиться число з останньою цифрою 2 або 6, перед якою має йти деяка непарна цифра. Тому неважко встановити, що три можливі останні цифри числа N після викреслювання 8 — це 136, 216, 312 або 632. Таким чином, умову в) для подільності на 8 “витримують” числа

9721368, 9732168, 9763128, 9716328, 9721386, 9732186, 9763182, 9716382.

Умова в) для подільності на 7 виконується для двох із цих чисел: 9721368 та 9716328.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Селіханович Даніїл (8 клас, м. Одеса) 6, 7, 8, 9, 10;

Чорний Михайло (9 клас, м. Бровари Київської обл.) 6, 8, 9, 10.