Київський національний університет імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет

Крайові задачі

упорядник: Іщук В.В.

Київ

§1. Постановки крайових (граничних) задач.

Відомо, що звичайне диференціальне рівняння n-го порядку (n≥1) відносно невідомої функції $y(x)$

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

при певних умовах має загальний розв'язок $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, що містить n довільних сталих. Для виділеня деякого частинного розв'язку диференціального рівняння (1) ставиться задача Коші (початкова задача): знайти розв'язок рівняння (1), який при $x = x_0$ задовільняє умовам

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_0''\,,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = {y_0}^{(n-1)} \qquad (2)$$

Зрозуміло, що для виділення частинного розв'язку можна ставити й інші умови, відмінні від (2). Як правило, їх число повинне дорівнювати n - порядку диференціального рівняння (1).

Часто в теоретичних і практичних задачах виникають умови, що накладаються на розв'язки та їх похідні, не в одній, а в двох, трьох, і більшому числі точок відрізка $[x_1, x_2]$, на якому шукаються розв'язки диференціального рівняння (1). Це приводить нас до понять двоточкової та, відповідно, інших, багатоточкових, крайових (граничних) задач.

Позначимо через $C^r[x_1, x_2]$ множину всіх функцій $y(x)$, які мають неперервні похідні по x до r–го порядку включно на відрізку $[x_1, x_2]$; $C^0[x_1, x_2]$ означатиме сукупність неперервних функцій на цьому відрізку.

Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння (1) в загальному випадку ставиться так: знайти функцію $y = y(x) \in C^n[x_1, x_2]$, яка у всіх внутрішніх точках відрізка $[x_1, x_2]$ задовільняє диференціальне рівняння (1), а на кінцях цього відрізка – крайовим умовам:

$$\varphi_i[y(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1), y(x_2), \dots, y^{(n-1)}(x_2)] = 0,\ i = 1,2,\dots,n \qquad (3)$$

де $\varphi_i[...]$ задані дійсні функції своїх аргументів, а похідні в точках $x = x_1$ та $x = x_2$ потрібно розуміти як односторонні.

Для поставлених крайових задач (1), (3) природно, виникають питання про умови існування та єдиності їх розв'язків. У таких загальних випадках, як це вдалося зробити для задачі Коші, теорем існування і єдиності для крайових задач довести неможливо. Це вдається зробити лише для окремих класів диференціальних рівнянь з певними типами крайових умов.

Зауваження:

1. Умови (3) не дозволяють знайти одночасно значення $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ ні при $x = x_1$ ні при $x = x_2$. Тому крайова задача не зводиться до задачі Коші.
2. В задачі Коші, як правило, мова йде про визначення розв'язку лише в малому околі початкової точки (x_0, y_0), а в крайовій задачі $x \in [x_1, x_2] \subset I$, де I - область визначення розв'язку.
3. Поняття крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь вводяться аналогічно.
4. Іноді крайова задача ставиться і для нескінченного відрізка $x \in [x_1, \infty)$. У цьому випадку крайові умови можуть виглядати так (для n=2): $y(x_1) = A$, $y(x)$ - обмежений, при $x \to +\infty$.
5. Для загального рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$ може виникати крайова задача з крайовими умовами, наприклад, такого типу $\alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2) = \gamma_1$, вона має зміст у такому випадку, коли окремо значення $y(x_1)$ або $y(x_2)$ невідомі, а в той же час відома величина γ_1.

Найбільш повне дослідження крайової задачі (1), (3) вдається провести у такому випадку, коли диференціальне рівняння (1) являється лінійним відносно невідомої функції $y(x)$ та її похідних, а крайові умови (3) є лінійними відносно величин $y(x_1), y'(x_1)$, …, $y^{(n-1)}(x_1)$, $y(x_2)$, $y'(x_2)$, …, $y^{(n-1)}(x_2)$. Така крайова задача називається лінійною.

У цьому посібнику розглядатимуться, в основному, двоточкові лінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку, хоча багато з наведених результатів досить просто поширюються на лінійні крайові задачі вищих порядків.

Отже, розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$L(y) \equiv a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{4}$$

де оператор $L(y)$ позначає ліву частину цього рівняння.

Загальні лінійні крайові умови для диференціального (4) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 y(x_1) + \alpha_2^1 y(x_2) + \beta_1^1 y'(x_1) + \beta_2^1 (x_2) = \gamma_1 \\ \alpha_1^2 y(x_1) + \alpha_2^2 y(x_2) + \beta_1^2 y'(x_1) + \beta_2^2 (x_2) = \gamma_2 \end{aligned}, \tag{5}$$

при умові, що матриця з коефіцієнтів $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix}$ має ранг, рівний двом.

Для спрощення міркувань ми будемо ставити для диференціального рівняння (4) наступні крайові умови

$$\begin{aligned} U_1(y) \equiv \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \gamma_1 \\ U_2(y) \equiv \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = \gamma_2 \end{aligned}, \tag{6}$$

де через оператори $U_1(y)$ і $U_2(y)$ позначимо, відповідно, ліві частини крайових умов (6).

Очевидно, крайові умови (6) є частинними випадками крайових умов (5), але саме вони найчастіше зустрічаються в практичних задачах.

Відносно відомих коефіцієнтів диференціального рівняння (4) і заданих чисел у крайових умовах (6) будемо вважати виконаними наступні припущення: $a(x), b(x), c(x), f(x) \in C^0[x_1, x_2]$, $a(x) \neq 0$ для $x \in [x_1, x_2]$, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ і $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

Коли в умовах (6) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то ці крайові умови називаються *умовами I роду;* коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ – *умовами II роду*; коли α_i, β_i $(i = 1;2)$ одночасно відрізняються від нуля - *умовами III роду*; якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то граничні умови називаються *однорідними*.

Крайова задача (4), (6), в якої $f(x) \not\equiv 0$, називається неоднорідною крайовою задачею при будь-яких умовах (6), а крайову задачу для однорідного диференціального рівняння ($f(x) \equiv 0$) з однорідними крайовими умовами будемо називати *крайовою задачею*.

Очевидно, кожна однорідна крайова задача

$$L(y) = 0 \tag{7}$$

$$U_1(y) = U_2(y) = 0 \tag{8}$$

має своїм розв’язком функцію $y(x) \equiv 0$ - так званий тривіальний розв’язок. Часто буде виникати питання про існування нетривіального розв’язку однорідної крайової задачі (7), (8). Відповідь на це питання пов’язана з існуванням нетривіальних відносно C_1, C_2 розв’язків систематичних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 U_1(y_1) + C_2 U_1(y_2) = 0 \\ C_1 U_2(y_1) + C_2 U_2(y_2) = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

яку отримаємо, коли загальний розв’язок $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ диференціального рівняння (7) підставимо в крайові умови (8).

З вищої алгебри відомо, що система (9) має ненульовий відносно C_1, C_2 розв’язок (їх безліч) тоді і лише тоді, коли

$$\det\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{pmatrix} \equiv U_1(y_1) U_2(y_2) - U_1(y_2) U_2(y_1) = 0$$

Що ж стосується питання існування розв’язків крайової задачі (4), (6) у загальному випадку, то легко привести приклади, які показують, що умови існування і єдиності розв’язків крайових задач значно відрізняються від таких умов Коші. Справді, розглянемо для диференціального рівняння

$$y''(x) + y(x) = 0, \tag{10}$$

три крайові задачі з наступними крайовими умовами:

$$y'(0) = 0,\ y'(1) = 1, \tag{11}$$

$$y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 1, \tag{12}$$

$$y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0 \tag{13}$$

Так як диференціальне рівняння (10) має загальний розв'язок

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{14}$$

то крайова задача (10), (11) має єдиний розв'язок $y = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$, який ми отримаємо, визначивши C_1 і C_2 з умов (11).

Крайова задача (10), (12) не має розв'язку, тому що умови (12) для C_1, C_2 приводять до протиріччя: $-C_1 \times 0 = 1$.

Крайова задача (10), (13) має безліч розв'язків вигляду $y = C_1 \cos x$, де C_1- довільна стала.

Всі ці три випадки для розв'язків крайових задач можливі в тоді, коли задача Коші для диференціального рівняння (10) при довільних початкових умовах $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ має єдиний розв'язок.

Легко бачити, що неоднорідну крайову задачу для диференціального рівняння (4) завжди можна вивчати з однорідними крайовими умовами (8). Дійсно, у випадку неоднорідних крайових умов (6) розв'язок крайової задачі (4), (6) можна шукати у вигляді $y(x) = y_0(x) + z(x)$, де функція $y_0(x)$ задовільняє лише крайовим умовам, а в іншому довільна. Зрозуміло, таку функцію завжди можна побудувати.

Наприклад, у випадку крайових умов І роду $y(x_1) = \gamma_1$, $y(x_2) = \gamma_2$ за функцію $y_0(x)$ можна взяти лінійну функцію

$$y_0(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\gamma_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\gamma_2,$$

а у випадку крайових умов ІІ роду $y'(x_1) = \gamma_1$, $y'(x_2) = \gamma_2$ - функцію

$$y_0(x) = \frac{x}{x_2 - x_1}\left(\gamma_1 x_2 - \gamma_2 x_1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}x\right).$$

Тоді для функції $z(x)$ матимемо неоднорідну крайову задачу з дещо зміненою правою частиною диференціального рівняння $L(z) = F(x)$, але з однорідними крайовими умовами $U_1(z) = U_2(z) = 0$.

<u>Зауваження</u>. При розв'язанні задач математичної фізики іноді виникають диференціальні рівняння вигляду (4), коефіцієнти яких в

точках $x = x_1$ або $x = x_2$ мають особливості, наприклад, $a(x_1) = 0$. Для цих особливих точок із самого характеру задачі виникають умови неперервності, обмеженості і т.д. Ці умови виконують роль крайових умов і, таким чином, маємо крайову задачу із специфічними крайовими умовами. Пояснимо цю ситуацію на прикладі:

Задача. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ при умовах $y(1) = 1$, $y(x)$ обмежений при $x \to 0$.

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння є рівнянням Ейлера, а отже, зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами і, таким чином, розв'язується в елементарних функціях. Його загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$. За умовою розв'язок $y(x)$ має бути обмеженим при $x \to 0$. Ця вимога виконується лише тоді, коли в загальному розв'язкові покласти $C_1 = 0$. Отримаємо $y(x) = C_2 x^2$. Враховуючи іншу крайову умову $y(1) = 1$, будемо мати $C_2 = 1$. Отже шуканий розв'язок $y = x^2$.

§2 Деякі задачі математики і механіки, що приводять докрайових задач

1. Задача про періодичний розв'язок диференціального рівняння (1), очевидно, зводиться до крайової задачі, в якій крайові умови (3) мають вигляд $y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$,..., $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(T)$, де T - період шуканого розв'язку.

2. Повздовжній вигин стержня. Розглянемо стержень довжини l, на який діє направлена вздовж його осі сила P. Нехай обидва кінці стержня закріплені на осі OX і стержень може вільно повертатися в своїх точках закріплення (рис.1).

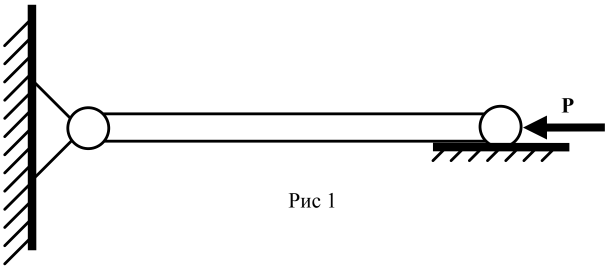


Рис 1

Тоді при досягненні силою P деякого критичного значення $P = P_0$

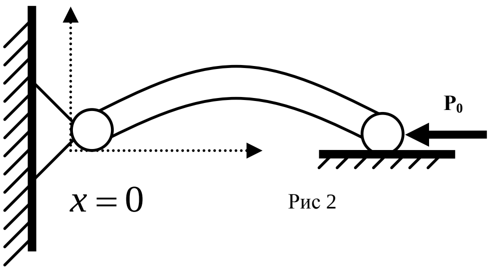


Рис 2

стержень вигинається, як це показано на рис.2

Коли позначити через $y(x)$ поперечне відхилення стержня від свого початкового положення, то, як доводиться в курсах опору матеріалів, функція $y(x)$ з достатньою точністю задовольняє наступне диференціальне рівняння і крайові умови

$$y'' + \frac{P}{E \times I} y = 0, \; y(0) = y(l) = 0,$$

де I - момент інерції поперечного перетину стержня, E - модуль пружності Юнга. В найбільш простому випадку однорідного стержня постійного перетину виконується умова $E \times I = const$. Позначивши $\frac{P}{E \times I} = \alpha$, отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + \alpha y = 0$, дослідження якого, з врахуванням крайових умов $y(0) = y(l) = 0$, проведемо в §4.

Зауважимо, що тип закріплення кінців стержня суттєво впливає на порядок диференціального рівняння і, звичайно, крайові умови.

3. Балістичну задачу про попадання в ціль снаряда, який має задану початкову швидкість V_0 можна сформувати у вигляді крайової задачі: знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, y, x', y') \\ y''(t) = g(t, x, y, x', y') \end{cases},$$

який при заданих $V_0 > 0$, і при відповідним чином підібраному τ задовольняє умови

$$x(0) = y(0) = 0, \; [x'(0)]^2 + [y'(0)]^2 = V_0^2, \; x(\tau) = x_1, \; y(\tau) = y_1.$$

Доведено, що ця задача при певних умовах має розв'язок. До подібної крайової задачі, але з більшим числом невідомих функцій, можна прийти при розрахунках траєкторії космічного апарату, який направляється з Землі на Місяць, або яку-небудь планету.

4. Власні коливання закріпленої струни. До крайових задач часто приходять при розв'язуванні задач математичної фізики і варіаційного числення. Розглянемо наступну задачу: з математичної фізики відомо, що малі поперечні коливання струни описуються рівнянням з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{7}$$

де $U = U(x,t)$ - відхилення точки струни з абсцисою x в момент часу t і a - деяка стала.

Власними коливаннями струни називаються розв'язки рівняння (7) вигляду

$$U = y(x)\sin(a\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Підставляючи (8) в рівняння (7), для функції $y(x)$ отримаємо диференціальне рівняння

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \tag{9}$$

Якщо довжина струни дорівнює l, то (рис.3) умови закріплення на кінцях (крайові умови) запишуться у вигляді

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{10}$$

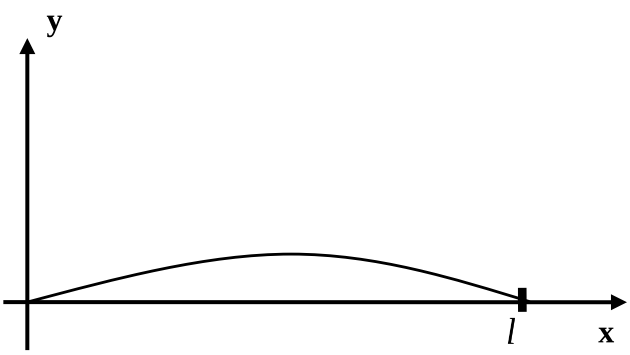


Рис. 3

Ми прийшли до крайової задачі (9), (10), в якій додатково потрібно визначити значення параметра ω, при якому крайова задача має нетривіальні розв'язки і знайти їх.

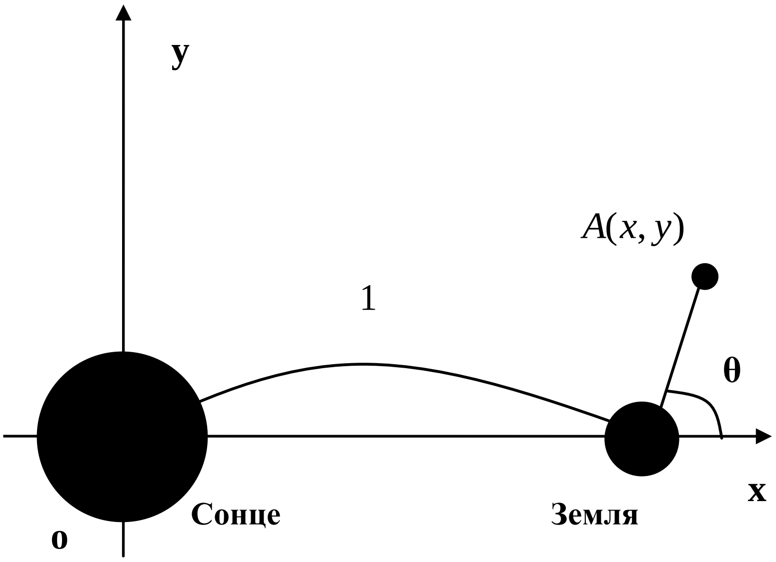
Про методи дослідження таких задач див. §4.

5. Визначення орбіти як багатоточкова крайова задача. Нехай диференціальне рівняння руху небесного тіла в безрозмірних змінних задаються у вигляді системи

$$\begin{cases} x''(t) = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\ y''(t) = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \end{cases}, \qquad (11)$$

Рух відбувається в XOY - площині екліптики (тобто площині, в якій рухається Земля навколо Сонця) - див. рис.4. В деякий момент часу t_i $(i=1;2;3;4)$ експериментально визначаються величини $\theta(t_i)=\theta_i$, через які отримуємо крайові умови (рис.4.):

$$y(t_i)=[x(t_i)-1]tg\theta_i,\ i=1,2,3,4 \qquad 12)$$



Тут для спрощення вважається, що єдиною силою, діючою на небесне тіло, являється гравітаційне поле Сонця і введено масштаб, що дозволяє Землю закріпити в точці $x=1,\ \ y=0$ нашої системи координат. Чотирьохточкова крайова задача (11), (12) дозволяє визначити орбіту небесного тіла $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Зауваження. Розглянуту вище крайову задачу, як і задачу з пункту 3, легко переформулювати, коли від системи двох диференціальних рівнянь другого порядку (11) перейти до рівносильного їй диференціального рівняння четвертого порядку, або ж до системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку.

§3. Методи розв'язування лінійних крайових задач.

Методи розв'язування крайових задач можна поділити на аналітичні – коли розв'язок шукається у вигляді залежності $y=y(x)$, що виражається деяким математичним виразом, та числові – коли знаходять значення шуканого розв'язку в окремих точках відрізка $[x_1, x_2]$. Аналітичні методи, в свою чергу, поділяються на точні і наближені.

В цьому посібнику ми розглянемо лише аналітичні методи знаходження розв'язків крайових задач: декілька методів знаходження точних розв'язків і один, найпростіший за своєю ідеєю, метод знаходження наближених розв'язків. Слід зауважити, що існує багато можливостей (з метою певних спрощень) точний аналітичний метод перетворити в наближений. При цьому важливо знати оцінку відхилення наближеного розв'язку від точного для кожного $x \in [x_1, x_2]$.

Числові методи розв'язування крайових задач мають свою специфіку, пов'язану з оцінками виникаючих похибок та іншими факторами, і утворюють окремий розділ в теорії диференціальних рівнянь. Методи цього розділу ми тут не розглядаємо. Коли ж виникає потреба знати числові значення розв'язку, то, очевидно, одержані аналітичні розв'язки, крім якісного дослідження, допускають легку реалізацію в числовому вигляді.

Наближені аналітичні методи розвязування крайових задач (метод колокацій, метод Гальоркіна та інші), крім метода малого иараметра в цьому посібнику також не приводяться.

Перейдемо до розгляду конкретних методів розв'язування крайових задач.

1. Найпростіший випадок відшукання розв'язку крайової задачі (4), (6) ми маємо тоді, коли знаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (4)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{13}$$

або можемо його побудувати. Тут через $y_1(x), y_2(x)$ позначено лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, $Y(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4), C_1, C_2 - довільні сталі. Із застосуванням цього методу ми вже зустрічалися в §1.

Існування розв'язку крайової задачі (4), (6) пов'язане з можливістю підбирати такі значення C_1 і C_2, при яких вираз (13) задовільняв би крайовим умовам (6). Це приводить до розв'язування відносно C_1, C_2, лінійної неоднорідної системи двох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} C_1U_1(y_1)+C_2U_1(y_2)=\gamma_1-Y(x_1)-Y'(x_1)\\ C_1U_2(y_1)+C_2U_2(y_2)=\gamma_2-Y(x_2)-Y'(x_2) \end{aligned}, \qquad (14)$$

Нагадаємо, що при цьому може трапитись два випадки:

а) якщо $\Delta \equiv U_1(y_1)U_2(y_2)-U_1(y_2)U_2(y_1)\neq 0$, то неоднорідна система (14) має єдиний розв'язок при довільних вільних членах, а однорідна система (9) має лише нульовий розв'язок $C_1=C_2=0$.

б) якщо $\Delta = 0$, то однорідна система (9) має ненульовий розв'язок, а система (14) має розв'язок не при всіх вільних членах, але коли вона має хоч один розв'язок, то таких розв'язків існує безліч.

Отже, дослідження системи (14) розв'язує питання про існування і кількість розв'язків крайової задачі (4), (6), а підстановка знайдених з системи (14) значень C_1, C_2 в вираз (13) дає ці розв'язки.

Задача 1. Знайти розв'язок крайової задачі

$$y''-2y'+2y=x^2$$

$$\begin{cases} -2y(0)+2y'(0)=1\\ 8y(\frac{\pi}{2})-8y'(\frac{\pi}{2})=\pi^2+4 \end{cases}$$

Розв'язок. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y=e^x(C_1cosx+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Підставивши цей розв'язок і похідну

$$y'=e^x\left[C_1(\cos x-\sin x)+C_2(\sin x+\cos x)\right]+x+1$$

в крайові умови, одержимо систему для визначення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0\times C_1+C_2=0\\ e^{\frac{\pi}{2}}\times C_1+0\times C_1=1 \end{cases}$$

Розв'язок очевидний: $C_1=e^{-\frac{\pi}{2}}$, $C_2=0$.

Підставивши ці значення у вираз загального розв'язку, одержимо шуканий розв'язок крайової задачі

$$y = e^{x-\frac{\pi}{2}} cosx + \frac{1}{2}(x+1)^2 .$$

Застосуємо цей метод для розв'язування крайової задачі, в якій крайові умови мають інший, ніж (6), тип.

<u>Задача 2</u>. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x ,$$

при наступних крайових умовах

$$\begin{cases} y(0) + y(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}, \\ y'(0) + y'(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>. Диференціальне рівняння відрізняється від рівняння задачі 1 лише правою частиною. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^x (C_1 cosx + C_2 \sin x + 1),$$

а похідна

$$y' = e^x \left[C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\sin x + \cos x) + 1\right].$$

Підставляючи розв'язок в першу крайову умову, а похідну в другу, після простих перетворень одержимо систему для визначення C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + e^{\frac{\pi}{2}} C_2 = -1 \\ (1 - e^{\frac{\pi}{2}})C_1 + (1 + e^{\frac{\pi}{2}})C_2 = -e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + e^{\pi}}, \; C_2 = \frac{1 - 2e^{\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{\pi}}$$

Отже, загальний розв'язок поставленої крайової задачі має вигляд:

$$y = e^x (\frac{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + e^{\pi}}) cosx + \frac{1 - 2e^{\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{\pi}} \sin x + 1.$$

2. Зведення крайової задачі до трьох задач Коші

Цей метод являє собою деяку видозміну методу, описаного в пункті 1). Для його викладу перепишимо диференціальне рівняння (4), враховуючи умову $a(x) \neq 0$, $x \in [x_1; x_2]$, у вигляді

$$L_1(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x), \qquad (4_1)$$

де $p(x) = b(x)/a(x),\ \ q(x) = c(x)/a(x),\ \ f_1(x) = f(x)/a(x),$ а оператор $L_1(y)$ позначає ліву частина диференціального рівняння (4_1).

Метод, про який йде мова, полягає в тому, що розв’язок крайової задачі (4_1), (6) шукається у вигляді

$$y(x) = C_1 U(x) + C_2 V(x) + y_0(x), \qquad (15)$$

де функції $U(x),\ V(x),\ y_0(x)$ знаходяться з наступних задач Коші:

$$\begin{aligned} &L_1(U) = 0,\ U(x_1) = 1,\ U'(x_1) = 0; \\ &L_1(V) = 0,\ V(x_1) = 0,\ V'(x_1) = 1; \\ &L_1(y_0) = f_1(x),\ y_0(x_1) = y_0'(x_1) = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Для знаходження частинного розв’язку $y_0(x)$ можна скористатись, крім інших методів, формулою Коші, згідно якої розв’язок задачі (16) можна записати у вигляді

$$y_0(x) = \int_{x_1}^{x} \xi(x,\tau) f_1(\tau) d\tau,$$

де $\xi(x,\tau)$- розв’язок однорідного диференціального рівняння $L_1(y) = 0$ з початковими умовами $\xi(\tau,\tau) = 0,\ \ \xi_x'(\tau,\tau) = 1.$

Підставляючи побудований таким чином розв’язок (15) в крайові умови (6), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів C_1, C_2, при яких вираз (15) буде розв’язком крайової задачі (4_1), (6).

При побудові розв’язків $U(x),\ V(x)$ можна ставити і інші початкові умови. Важливо, щоб вони були лінійно незалежними розв’язками однорідного диференціального рівняння $L_1(y) = 0,$ а його загальний розв’язок $C_1(U) + C_2(V)$ слід використати для побудови частинного розв’язку $\xi(x,\tau)$ задачі (16).

Як приклад, знайдемо розв'язок наступної крайової задачі.

Задача 3.

$$xy'' - y' = x^2,$$

$$\begin{cases} 3y(1) + 2y'(1) = 0, \\ 3y(3) - y'(3) = 1; \end{cases}$$

Розв'язок. Зведемо диференціальне рівняння до вигляду (4_1), поділивши ліву і праву частини на $x \neq 0$ на відрізку $[1,3]$: $y'' - \dfrac{y'}{x} = x.$

Скориставшись тим, що однорідне диференціальне рівняння $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ дозволяє понизити порядок заміною $y' = z$ та інтегруючи його, будуємо одразу загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\vec{y}(x) = C_1(U) + C_2(V) = C_1x^2 + C_2.$$

В інших ситуаціях до загального розв'язку приходять через побудову частинних розв'язків $U(x)$і $V(x)$ - кожного окремо.

Побудуємо тепер розв'язок однорідного рівняння, що задовольняє умови

$$\vec{y}(x)\big|_{x=\tau} \equiv \xi(\tau, \tau) = 0, \quad \vec{y}'_x(x)\big|_{x=\tau} \equiv \xi'_x(\tau, \tau) = 1.$$

Так як $\vec{y}'_x(x) = 2C_1x$, попередні умови приводять до системи рівнянь для визначення C_1 і C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \tau^2 C_1 + C_2 = 0 \\ 2\tau C_1 = 1 \end{array}\right\}$$

звідси $C_1 = \dfrac{1}{2\tau}$, $C_2 = -\dfrac{1}{2}$. Отже, $\xi(x, \tau) = \dfrac{x^2}{2\tau} - \dfrac{\tau}{2}$, а $f_1(x) = x$. Тоді за формулою Коші

$$y_0(x) = \int_1^x \left(\frac{x^2}{2\tau} - \frac{\tau}{2}\right)\tau d\tau = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}.$$

Отже розв'язок (15) для нашої задачі має вигляд

$$y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \equiv \frac{x^3}{3} + \vec{C}_1x^2 + \vec{C}_2$$

де $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$ - нові довільні сталі.

Підставивши цей розв'язок у крайові умови, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$:

$$\begin{cases} 7C_1 + 3C_2 = -3 \\ 21C_1 + 3C_2 = -17 \end{cases}$$

розв'язком якої є $\vec{C}_1 = -1$, $\vec{C}_2 = 4/3$.

Отже, $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{4}{3}$ є розв'язком крайової задачі.

3. Зведення крайової задачі (4),(6) до двох задач Коші.

Нехай задача (4), (6) має єдиний розв'язок. Це означає, що відповідна однорідна крайова задача (7), (8) не має іншого розв'язку, крім тривіального $y(x) \equiv 0$ (див. §1).

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = CU + V \tag{17}$$

де $U(x)$ - розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння:

$$L(U) = 0,\ U(x_1) = \beta_1,\ U'(x_1) = -\alpha, \tag{18}$$

а $V(x)$ - розв'язок однієї з наступних задач Коші для неоднорідного рівняння $L(V) = f(x)$:

$$V(x_1) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1},\ V'(x_1) = 0, \tag{19}$$

при $\alpha_1 \neq 0$ або

$$V(x_1) = 0,\ V'(x_1) = \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \tag{20}$$

при $\beta_1 \neq 0$.

З поставлених умов (18)-(20) ясно, що розв'язок (17) задовольняє крайову умову $U_1(y) = \gamma_1$ при довільному значенні параметра C. Після знаходження $U(x)$ і $V(x)$ як розв'язків задач Коші з початковими умовами в точці $x = x_1$, підберемо параметр C так, щоб розв'язок (17) задовольняв крайову умову $U_2(y) = \gamma_2$. Тоді

$$C=\frac{\gamma_2-\alpha_2V(x_2)-\beta_2V'(x_2)}{\alpha_2U(x_2)+\beta_2U'(x_2)}.$$

З припущення про існування єдиного розв'язку крайової задачі (4), (6) випливає, що $\alpha_2U(x_2)+\beta_2U'(x_2)\neq 0$. Інакше це означало б, враховуючи умову (18), існування не тривіального розв'язку ($U(x)\neq 0$) однорідної крайової задачі.

Зауваження. Побудова розв'язку значно спрощується при $\gamma_1=0$, $f(x)\equiv 0$. Тоді з (19) або (20) випливає, що $V(x_1)=V'(x_1)=0$, а отже $V(x)\equiv 0$ і розв'язок шукаємо у вигляді $y=CU(x)$, де $U(x)$, як і раніше, є розв'язком задачі Коші (18).

Покажемо основні моменти застосування цього методу при розв'язуванні крайової задачі:

Задача 5.

$$x^2y''-xy'-3y=5x^4$$

$$\begin{cases} y(1)+y'(1)=-3 \\ 2y(3)-y'(3)=7 \end{cases}$$

Розв'язок. Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді $y=CU(x)+V(x)$, причому функція $U(x)$ визначаємо як частинний розв'язок задачі Коші

$$x^2U''-xU'-3U=0,\ U(1)=1,\ U'(1)=-1,$$

а функцію $V(x)$ – як розв'язок наступної задачі Коші

$$x^2V''-xV'-3V=5x^4,\ V(1)=-3,\ V'(1)=0$$

Такими розв'язками будуть

$$U=\frac{1}{x},\ \ V=x^4-2x^3-\frac{2}{x}.$$

Отже функція $y=CU+V=x^4-2x^3+\dfrac{C-2}{x}$, яка за побудовою є розв'язком диференціального рівняння, задовольняє крайову умову $y(1)+y'(1)=-3$ при довільному значенні параметра C.

Підберемо таке значення параметра C, при якому буде виконуватись і друга крайова умова $2y(3)-y'(3)=7$. Після підстановки в цю рівність виразу $y=x^4-2x^3+\dfrac{C-2}{x}$ і розв'язання лінійного рівняння, одержимо: $C=11$.

Отже, розв'язком заданої крайової задачі буде вираз

$$y=11U+V=x^4-2x^3+\frac{C-2}{x}.$$

4) Метод факторизації [1] для крайової задачі

$$L_1(y)=y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x), \qquad (4_1)$$

$$\begin{cases} U_1(y)\equiv\alpha_1 y(x_1)+\beta_1 y'(x_1)=\gamma_1 \\ U_2(y)\equiv\alpha_2 y(x_2)+\beta_2 y'(x_2)=\gamma_2 \end{cases} \qquad (6)$$

Розглянемо спочатку ідею методу факторизації потім алгоритми побудови розв'язків. Подавши оператор $L_1(y)$ правої частини диференціального рівняння (4_1), що має II порядок, у вигляді добутку двох лінійних диференціальних операторів I порядку

$$L_1(y)\equiv\left[\frac{d}{dx}+\mu x\right]\left[\frac{d}{dx}+\nu(x)\right]y,$$

бачимо, функції $\mu(x)$ і $\nu(x)$ задовольняють умови

$$\begin{cases} \mu(x)+\nu(x)=p(x) \\ \nu'(x)+\mu(ч)\nu(x)=q(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \mu(x)-p(x)=\nu(x) \\ \nu'(x)=\nu^2-p(x)\nu+q(x) \end{cases} \qquad (21)$$

Якщо вдається розв'язати рівняння Рікатті (21), то ввівши в диференціальному рівнянні (4_1) заміну

$$y'+\nu(x)y=z(x), \qquad (22)$$

для знаходження $z(x)$ отримаємо диференціальне рівняння I порядку

$$z'(x)+[p(x)-\nu(x)]z=f_1(x). \qquad (23)$$

І, нарешті, після розв'язання диференціального рівняння (23), розв'язок диференціального рівняння (4_1) знаходимо із заміни (22).

[1] Факторизація — розкладання на множники; метод дослідження, пов'язаний з аналізом моделей менших розмірностей.

Вертаючись тепер до крайової задачі (4_1), (6), можна намітити наступні два алгоритми розв'язування цієї задачі.

$4^а$). При розв'язуванні крайової задачі з крайовими умовами II або III родів $(|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0)$ потрібно розв'язати 3 наступні задачі Коші для диференціальних рівнянь I порядку (при $\beta_1 \neq 0$):

$$\begin{cases} \nu'(x) = \nu^2 - p(x)\nu + q(x) \\ \beta_1 \nu x_1 = \alpha_1 \end{cases} \qquad \text{(А)}$$

$$\begin{cases} z' + [p(x) - \nu(x)]z = f_1(x) \\ \beta_1 z(x_1) = \gamma_1 \end{cases} \qquad \text{(Б)}$$

$$\begin{cases} y' + \nu(x)y = z(x) \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \qquad \text{(В)}$$

причому початкове значення y_2 вибирається з системи

$$\begin{cases} \alpha_2 y_2 + \beta_2 y'(x_2) = \gamma_2 \\ y'(x_2) + \nu(x_2) y_2 = z(x_2) \end{cases}$$

Якщо ж $\beta_1 = 0$, то $\beta_2 \neq 0$ і початкові умови для задач (А) і (Б) потрібно ставити в точці $x = x_2$, а для задачі (В) — в точці $x = x_1$

$4^б$). Коли в крайових умовах (6) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, тобто маємо крайові умови I роду $y(x_1) = \gamma_1$, $y(x_2) = \gamma_2$, то розв'язування слід вести за наступною схемою:

а) шукаємо будь-який частинний розв'язок $\nu = \nu(x)$ рівняння Ріккаті

$$\nu'(x) = \nu^2 - p(x)\nu + q(x);$$

б) використовуючи $\nu(x)$, знаходимо загальний розв'язок $z = z(x, C)$ диференціального рівняння I порядку

$$z' + [p(x) - \nu(x)]z = f_1(x);$$

в) розв'язуючи диференціальне рівняння

$$y' + \nu(x)y = z(x, C),$$

шукаємо розв'язок $y = y(x, C, x_1)$, який при $x = x_1$ задовольняє першій крайовій умові $y(x_1, C, x_1) = \gamma_1$ при довільній сталій C;

г) вибираємо значення $C = \vec{C}$ довільної сталої так, щоб при $x = x_2$ задовольнити другу крайову умову $y(x_2, C, x_1) = \gamma_2$.

Таким чином, вираз $y = y(x, \vec{C}, x_1)$ буде розв'язком поставленої крайової задачі.

Застосуємо метод факторизації до розв'язання крайових задач.

<u>Задача 1</u>. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 6x,$$

що задовольняє крайові умови

$$\begin{cases} y'(1) + y(1) = 3, \\ 3y'(2) + 2y(2) = 2. \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>. Зведемо задане диференціальне рівняння до рівняння вигляду (4_1), поділивши ліву і праву частини на x:

$$y'' + y' + 2y = 6.$$

Отже, маємо: $P(x) = x + \frac{1}{x}$, $q(x) = 2$, $f_1(x) = 6$. Поставлені крайові умови належать до III роду. При розв'язуванні крайової задачі будемо дотримуватися першої з приведених схем.

А) Знайдемо розв'язок рівняння Ріккаті $v'(x) = v^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)v + 2$ при початковій умові $v(1) = 1$. Таким розв'язком є $v(x) = x$. Про методи розв'язування рівнянь Ріккаті див., напр., [ ].

Б) Розв'яжемо задачу Коші

$$z' + \frac{1}{x}z = 6, \quad z(1) = 3,$$

$$z(x) = e^{-\int_1^x \frac{d\tau}{\tau}} \left[3 + \int_1^x 6e^{\int_1^{\xi} \frac{d\tau}{\tau}} d\xi \right] = 3x.$$

В) Знайдемо розв'язок задачі Коші

$$y' + xy = 3x, \quad y(2) = y_2:$$

$$z(x)=e^{-\int\limits_2^x \tau d\tau}\left[y_2+\int\limits_2^x 3\xi e^{\int\limits_2^{\xi}\tau d\tau}d\xi\right]=e^{\frac{4-x^2}{2}}(y_2-3)+3.$$

Залишається підібрати значення $y_2\equiv y(2)$ з умов

$$3y'(2)+2y(2)=2,\ \ y'(2)+2y(2)=6.$$

Маємо $y(2)=4$ і, отже, $y(x)=3+e^{\frac{4-x^2}{2}}$ - розв'язок крайової задачі.

<u>Задача 2</u>. Знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y''+\sin xy'+\cos xy=\cos x, \\ y(x_1)=\gamma_1, y(x_2)=\gamma_2. \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>. Маємо крайові умови I роду. Для знаходження розв'язку будемо дотримуватися другого з приведених алгоритмів.

а) Легко бачити, що частинним розв'язком диференціального рівняння Ріккаті

$$\nu'(x)=\nu^2-\sin x\nu+\cos x$$

є вираз $\nu=\sin x$

б) Загальним розв'язком диференціального рівняння

$$z'+[\sin x-\sin x]z=\cos x$$

є вираз $z=\sin x+C$

в) Знайдемо розв'язок диференціального рівняння $y'+\sin xy=\sin x+C,$ що задовольняє при всіх C крайову умову $y(x_1)=\gamma_1.$

$$y(x)=e^{\int\limits_{x_1}^x \sin\tau d\tau}\left[\gamma_1+\int\limits_{x_1}^x (C+\sin\xi)e^{\int\limits_{x_1}^x \sin\tau d\tau}d\xi\right]= \\ =Ce^{\cos x}\int\limits_{x_1}^x e^{-\cos\tau}d\tau+(\gamma_1-1)e^{\cos x-\cos x_1}+1. \quad (24)$$

г) Вибравши значення C з умовами $y(x_2)=\gamma_2$, будемо мати

$$C=\frac{(1-\gamma_1)e^{-\cos x_1}+(\gamma_2-1)e^{-\cos x_2}}{\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\cos\tau}d\tau}.$$

Отже, розв'язком крайової задачі буде вираз (24) після підстановки в нього найденого значення C.

5). Метод функції Гріна побудови розв'язку диференціального рівняння.

$$L(y)\equiv a(x)y''+b(x)y'+c(x)y'=f(x), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &U_1(y)\equiv \alpha_1 y(x_1)+\beta_1 y'(x_1)=0,\\ &U_2(y)\equiv \alpha_2 y(x_2)+\beta_2 y'(x_2)=0 \end{aligned} \tag{8}$$

Нагадаємо (див.§1), що до вигляду (4), (8) завжди можна звести крайову задачу з неоднорідними лінійними крайовими умовами. Як і раніше, будемо вважати, що $a(x),b(x),c(x),f(x)\in C^0[x_1,x_2],a(x)\neq 0$ для $x\in[x_1,x_2]$.

При побудові розв'язку крайової задачі (4), (8) методом функції Гріна, природно виділити два випадки. Ми розглядатимемо їх під номерами $5^а$ і $5^б$.

$5^а$). Припустимо, що відповідна однорідна крайова задача

$$L(y)=0, U_1(y)=0, U_2(y)=0 \tag{25}$$

немає відмінних від тривіального $y\equiv 0$ розв'язків. Про необхідні і достатні умови цього випадку див.§1 і §3 (1-ий метод).

Зрозуміло, що мова йде про неперервні на відрізку $[x_1,x_2]$ розв'язки $y=y(x)$ з неперервними похідними $y'(x),y''(x)$, так як завжди можна побудувати, як це буде видно далі, неперервний розв'язок крайової задачі $y=\hat{y}(x)$ з розривними похідними. Наприклад, таким розв'язком буде сама функція Гріна $Y(x,s)$.

Лема. Якщо однорідна крайова задача (25) має лише тривіальний розв'язок, а розв'язок неоднорідної крайової задачі (4), (8) існує, то він єдиний.

Доведення. Припустимо, що існує два розв’язки крайової задачі (4), (8) - $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Тоді їх різниця $y_1(x)-y_2(x)$, в силу лінійності рівняння (4) і крайових умов (8), буде розв’язком однорідної крайової задачі (25). За припущенням цей розв’язок повинен тотожно дорівнювати нулю $\left(y_1(x)-y_2(x)\equiv 0\right)$. Звідси випливає, що $y_1(x)\equiv y_2(x)$.

Означення. Функцією Гріна крайової задачі (4), (8) називається функція $Y(x,s)$, що визначена для $x\in[x_1,x_2]$, $s\in(x_1;x_2)$і при кожному фіксованому s має наступні властивості:

1) Як функція змінної x $Y(x,s)$ при $x\neq s$ задовольняє однорідне рівняння $L(Y(x,s))=0$.

2) При $x=x_1$ і $x=x_2$ функція $Y(x,s)$ задовольняє крайові умови $U_1(Y)=U_2(Y)=0$.

3) При $x=s$ функція $Y(x,s)$ неперервна по x, а $Y_x^{'}(x,s)$ має стрибок, що дорівнює $\frac{1}{a(x)}$, тобто

$$Y(s+0,s)=Y(s-0,s);Y_x^{'}(s+0,s)-Y_x^{'}(s-0,s)=\frac{1}{a(s)}. \tag{26}$$

Розглянемо алгоритм побудови функції Гріна, що одночасно буде служити доведенням існування і єдиності функції Гріна крайової задачі (4), (8) у випадку, коли відповідна крайова задача (25) має лише тривіальний розв’язок.

Для цього побудуємо розв’язок $y_1(x)$ однорідного рівняння $L(y)=0$ приймаючи за початкові умови (Коші) $y_1(x_1)$ і $y_1^{'}(x_1)$ деякі числа, що задовольняють першу крайову умову $U_1(x_1)=0$ (напр., $y_1(x_1)=-k\beta_1, y_1^{'}(x_1)=k\alpha_1$, k - довільне число). Цей розв’язок $y=y_1(x)$ і, взагалі, всі розв’язки вигляду $y=C_1y_1(x)$ при довільній сталій C_1, задовольняючи першу крайову умову $U_1(C_1y_1)=0$, не можуть задовільняти, в силу припущення про єдиність тривіального розв’язку крайової задачі (25), другу крайову умову, тобто

$$U_2(C_1y_1)\neq 0 \tag{27}$$

Аналогічно будуємо сім’ю розв’язків $y = C_2 y_2(x)$ однорідного диференціального рівняння $L(y) = 0$, що задовольняє другу крайову умову $U_2(C_2 y_2) = 0$, C_2– довільна стала. При цьому, зрозуміло, $U_1(C_2 y_2) \neq 0$.

Згідно з теоремою існування і єдиності розв’язку для диференціального рівняння $L(y) = 0$, обидва розв’язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ визначені на всьому відрізку $[x_1, x_2]$, де коефіцієнти рівняння неперервні. Легко довести, що розв’язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні.

Дійсно, припустивши, що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні, наприклад, $y_1(x) = C y_2(x)$, бачимо, що функція $y_1(x)$ повинна задовольняти другу крайову умову $U_2(y_1) = U_2(C y_2) = C U_2(y_2) = 0$, що суперечить умові (27).

Таким чином, ми побудували два лінійно незалежних розв´язки однорідного диференціального рівняння $L(y) = 0$, кожен з яких задовільняє тільки одну з двох однорідних граничних умов. А оскільки за означенням функція Гріна є розв´язком (при $x \neq s$) однорідного диференціального рівняння $L(y) = 0$ і задавільняє поставлені однорідні крайові умови, то при $x \leq s$ функція $Y(x,s)$ повинна мати вигляд $C_1 y_1(x)$, а при $x \geq s$ вона повинна мати вигляд $C_2 y_2(x)$.

Отже,

$$Y(x,s) = \begin{cases} C_1(s) y_1(x), & x_1 \leq x \leq s, \\ C_2(s) y_2(x), & s \leq x \leq x_2, \end{cases} \tag{28}$$

а величини $C_1(s)$, $C_2(s)$ потрібно підібрати з умов неперервності функції Гріна при $x = s$ і стрибка $\dfrac{1}{a(s)}$ похідної $Y'_x(x,s)$ при $x = s$:

$$\begin{cases} C_2 y_2(s) - C_1 y_1(s) = 0, \\ C_2 y'_2(s) - C_1 y'_1(s) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Система (29) має єдиний відносно C_1 і C_2 розв´язок, оскільки головним визначником Δ цієї лінійної алгебраїчної системи рівнянь є визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ лінійно незалежних розв´язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ і тому

$$\Delta \equiv W\big(y_1(s); y_2(s)\big) = y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s) \neq 0$$

для всіх $s \in (x_1; x_2)$.

Розв´язавши відносно $C_1(s)$, $C_2(s)$ систему (29) і підставивши значення в (28), одержимо функцію Гріна крайової задачі (4), (8):

$$Y(x,s) = \frac{1}{a(s)\Delta(s)} \begin{bmatrix} y_1(x) y_2(s), & x_1 \le x \le s, \\ y_2(x) y_1(s), & s \le x \le x_2, \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Функція Гріна дає можливість виразити в компактній інтегральній формі розв´язок крайової задачі (4), (8) для будь-якої правої частини $f(x)$.

Справедлива наступна

<u>Теорема</u>. Якщо однорідна крайова задача (25) має лише тривіальний розв´язок $y(x) \equiv 0$, то розв´язок неоднорідної крайової задачі (4), (8) існує для будь-якої неперервної на $[x_1, x_2]$ функції $f(x)$ і його з допомогою функції Гріна $\mathrm{Y(x,s)}$ можна подати у вигляді

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_2} Y(x,s) f(s) ds \qquad (31)$$

Довести теорему можна безпосередньо підстановкою виразу (31) в диференціальне рівняння (4) і крайові умови (8) з урахуванням властивостей функції Гріна, сформульованих в означенні.

У вмпадку, коли однорідна крайова задача (25) має розв´язки відмінні від тривіального $y(x) \equiv 0$, крайова задача (4), (8) не завжди має розв´язок (не при довільній функції $f(x)$), а коли і має, то їх може бути безліч. При виконанні певних умов, що забезпечують існівання розв´язку крайової задачі, і в цьому випадку можна побудувати так звану узагальнену функцію Гріна, що дозволяє представити розв´язок неоднорідної крайової задачі (4), (8) у подібному до (31) вигляді. В цьому посібнику ми не будемо розглядати такої побудови, а бажаючим рекомендуємо підручник [6].

<u>Зауваження 1</u>. Зображення (31) розв´язків неоднорідної крайової задачі за допомогою функції Гріна вигідні особливо тоді, коли

приходиться розв´язувати декілька крайових задач з тим самим оператором $\mathrm{L(y)}$, але різними правими частинами (див. напр. §3, метод 6).

2. В багатьох підручниках будується функція Гріна $Y_1(x,s)$ після попереднього зведення диференціального рівняння (4) $L(y)=f(x)$ до так званого самоспряженого вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=F_1(x), \qquad (32)$$

при тих самих однорідних крайових умовах (8).

В цьому випадку, очевидно,

$$Y_1(s)=\frac{Y(x,s)}{\mu(s)}, F_1(x)=f(x)\mu(x),$$

де $\mu=\frac{1}{a}e^{\int\frac{b}{a}d\tau}$.

Зрозуміло, що розв´язки крайових задач, одержані по формулі (31) через $Y(x,s)$ і $Y_1(x,s)$ будуть співпадати.

<u>Задача</u>. Представити за допомогою функції Гріна розв´язок крайової задачі

$$\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=f(x), \quad y(0)=y(1)=0.$$

<u>Розв´язок</u>. Використовуючи загальний розв´язок $y=C_1x+C_2\left(x^2-1\right)$ однорідного рівняння $\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=f(x), \quad y(0)=y(1)=0,$ легко виділити сім'ю $y_1=C_1x$, що задовільняє крайову умову $y(0)=0$ і сім'ю $y=C_2\left(x^2-1\right)$, що задовільняє другу крайову умову $y(1)=0$.

Отже функцію Гріна будемо шукати у вигляді

$$Y\left(x,s\right)=\begin{cases}C_1x, & 0\le x\le s,\\ C_2x^2, & s\le x\le 1,\end{cases}$$

підібравши $C_1=C_1(s), C_2=C_2(s)$ з умов

$$\begin{cases}C_1s=C_2\left(s^2-1\right),\\ 2C_2s-C_1=\dfrac{1}{s^2+1}\end{cases}$$

Розв’язавши цю лінійну відносно C_1, C_2 систему, отриаємо

$$C_1 = \frac{s^2 - 1}{\left(s^2 + 1\right)^2}, \quad C_2 = \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)^2}.$$

Функція Гріна має вигляд

$$Y(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\left(s^2 - 1\right)x}{\left(s^2 + 1\right)^2}, & 0 \le x \le s, \\ \dfrac{\left(x^2 - 1\right)s}{\left(s^2 + 1\right)^2}, & s \le x \le 1, \end{cases}$$

а розв´язок крайової задачі матиме наступне інтегральне представлення

$$y = \int_0^1 Y(x,s) f(s) ds = (x^2 - 1)\int_0^x \frac{sf(s)ds}{\left(s^2 + 1\right)^2} + x\int_x^1 \frac{(s^2 - 1) f(s)}{\left(s^2 + 1\right)^2} ds.$$

6. Метод малого параметра (асимптотичний метод)

Розглянемо застосування методу малого параметра для знаходженнянаближених аналітичних розв´язків лінійного диференціального рівняння

$$L_\varepsilon(y) \equiv a(x,\varepsilon)y'' + b(x,\varepsilon)y' + c(x,\varepsilon)y = f(x,\varepsilon) \tag{33}$$

при наступних лінійних крайових умовах

$$\begin{aligned} U_1(y) &\equiv \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \gamma_1, \\ U_2(y) &\equiv \alpha_2 y(x_1) + \beta_2 y'(x_2) = \gamma_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Слід зауважити, що цей метод можна використовувати і для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь при більш загальних крайових умовах, в які може входити параметр $\varepsilon \in [0,1)$. Вигляд рівняння (33) і крайових умов (34) вибраний для спрощення викладок.

Застосовувати метод малого параметра зручно в тих випадках, коли відомий або може бути побудований розв´язок $y = y_0(x)$ близької (при $\varepsilon = 0$) до (33), (34) крайової задачі. Для значень параметра ε при $0 < \varepsilon < 1$ розв´язок крайової задачі шукається у вигляді ряду по степенях ε

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots. \tag{35}$$

Нехай коефіцієнти і права частина диференціального рівняння (33) мають наступні розклади в ряди по степеням ε:

$$
\begin{aligned}
a(x,\varepsilon) &= a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots, \\
b(x,\varepsilon) &= b_0(x) + \varepsilon b_1(x) + \varepsilon^2 b_2(x) + \cdots, \\
c(x,\varepsilon) &= c_0(x) + \varepsilon c_1(x) + \varepsilon^2 c_2(x) + \cdots, \\
f(x,\varepsilon) &= f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \cdots.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Підставимо вирази (35), (36) в диференціальне рівняння (33) і крайові умови (34) та прирівняємо між собою вирази з лівої та правої частин диференціального рівняння при однакових степенях ε. Для визначення $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),...$ будемо мати наступну послідовність крайових задач:

$$
\begin{cases} L_0(y_0) \equiv a_0(x)y_0'' + b_0(x)y' + c_0(x)y_0 = f_0(x), \\ U_1(y_0) = \gamma_1,\ U_2(y_0) = \gamma_2, \end{cases} \tag{а}
$$

$$
\left.\begin{matrix} L_0(y_1) \equiv f_1(x) - a_1 y_0'' - b_1 y_0' - c_0 y_0, \\ U_1(y_1) = 0, U_2(y_1) = 0 \end{matrix}\right\}, \tag{б}
$$

$$
\left.\begin{matrix} L_0(y_2) \equiv f_2(x) - a_1 y_1'' - b_1 y_1' - c_1 y_1 - a_2 y_0'' - b_2 y_0' - c_2 y_{0,} \\ U_1(y_2) = 0, U_2(y_2) = 0 \end{matrix}\right\} \tag{в}
$$

Якщо вдається розв′язати крайову задачу (а), то знаходження y_1(x), y_2(x),… зводиться до розв′язання послідовності крайових задач (б), (в), ... з одним і тим же диференціальним оператором L_0, відомими правими частинами диференціальних рівнянь і однорідними крайовими умовами. За наближений розв”язок крайової задачі (33), (34) беруть скінчене число членів ряду (35).

Зауваження. Якщо параметр ε явно в диференціальне рівняння не входить, то його можна ввести умовно.

Приклад. За допомогою методу малого параметра знайти наближений розв’язок крайової задачі (три перші члени – з точністю до членів з ε^3).

$$
(x^2 + \varepsilon x + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \tag{37}
$$

Можна взяти ε=0,01

$$
y(0) = \gamma_1, \qquad y(1) = \gamma_2
$$

Розв’язок. Позначимо число 0,01 через параметр ε. Знайдемо, наприклад, три перші член розкладу з (35), тобто розв’язок шукаємо у вигляді

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x). \qquad (35')$$

Підставивши вирази (35′) та

$$y'(x,\varepsilon) = y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \varepsilon^2 y_2'(x),$$

$$y''(x,\varepsilon) = y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2''(x)$$

в задане диференціальне рівняння (37) і прирівнявши до нуля (права частина $\equiv 0$) коефіцієнти при ε^0, ε^1, ε^2 одержимо слідуючі диференціальні рівняння для шуканих функцій $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$:

$$(x^2+1)y_0' - 2xy_0' + 2y_0 = 0, \qquad (38)$$

$$(x^2+1)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = -xy_0'', \qquad (39)$$

$$(x^2+1)y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 = -xy_1'', \qquad (40)$$

Пдстановка иразу (35′) в крайові умови дає:

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) = \gamma_1,$$
$$y_0(1) + \varepsilon y_1(1) + \varepsilon^2 y_2(1) = \gamma_2.$$

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях параметра приводить до крайових умов для диференціальних рівнянь (38), (39), (40):

$$y_0(0) = \gamma_1, y_0(1) = \gamma_2 \qquad (41)$$

$$y_1(0) = y_1(1) = 0, \qquad (42)$$

$$y_2(0) = y_2(1) = 0, \qquad (43)$$

Розглянемо крайову задачу (38), (41). Із прикладу попереднього пункту випливає, що диференціальне рівняння (38) має загальний розв”язок

$y_0 = C_1 x + C_2(x^2 - 1),$

Підстановка якого в крайові умови (41) дає: $C_1 = \gamma_2, C_2 = -\gamma_1$. Отже, $y_0 = \gamma_2 x + \gamma_1(1 - x^2).$

Крайові задачі (39), (42) для $y_1(x)$, (40), (43) для $y_2(x)$ і т.д. мають один і той же диференціальний оператор та однорідні крайові умови. Тому для знаходження $y_1(x), y_2(x),\ldots$ скористаємось побудованою в попередньому пункті функцією Гріна. Тоді, враховуючи, що $-xy_0{}' = 2\gamma_1 x$, маємо

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{(x^2-1)s}{(s^2+1)^2} 2\gamma_1 ds + \int_x^1 \frac{x(s^2-1)s}{(s^2+1)^2} 2\gamma_1 s ds =$$

$$= \gamma_1 x \left[\ln \frac{2e}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} \right] + \gamma_1 (x^2-1)\left[arctgx - \frac{x}{x^2+1} \right].$$

Далі, обчисливши $y_1'' = 2\gamma_1 arctgx$ для розв"язку $y_2(x)$ крайової задачі (40), (43) маємо представлення

$$y_2(x) = -2\gamma_1(x^2-1)\int_0^x \frac{s^2 arctgs}{(s^2+1)^2} ds - 2\gamma_1 x \int_x^1 \frac{(s^2-1) s arctgs}{(s^2+1)^2} ds.$$

Підставив знайдені значення $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ у вираз (35′), одержимо з точністю ε^3 (груба оцінка!) наближений розв"язок крайової задачі (37).

§4. Власні значення і власні функції крайових задач

Як ми бачимо з попереднього матеріалу, крайова задача не завжди має розв"язок, а в прикладах §2 зустрічалися однорідні крайові задачі, існування нетривіальних розв"язків яких зв"язане з вибором значення параметра λ (задача 2) чи ω^2 (задача 2), що входять в диференціальні рівняння. Це приводить нас до задач на власні числа і власні функції.

Опишемо постановку таких задач для лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку в тих же позначеннях ( ), що використовувались раніше.

Розглянемо крайову задачу

$$L(y) + \lambda y = f(x), \tag{44}$$

$$U_1(y) = \gamma_1, \qquad U_2(y) = \gamma_2, \tag{45}$$

що містить параметр λ і відповідну їй однорідну крайову задачу

$$L(y) + \lambda y = 0, \quad U_1(y) = U_2(y) = 0. \tag{46}$$

Існування і властивості розв"язків крайової задачі (44), (45) багато в чому залежать від того, чи має крайова задача (46) нетривіальні розв"язки ($y(x) \neq 0$).

Означення. Значення параметра λ, при яких існують нетривіальні розв'язки крайової задачі (46), називаються *власними значеннями*, а відповідні їм розв"язки крайової задачі – *власними функціями* цієї ж задачі.

Задачу на власні числа і власні функції для диференціальних рівнянь 2-го порядку часто називають задачею Штурма-Ліувілля. Власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають ряд важливих властивостей, що широко використовуються як при розв"язуванні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, так і в інших розділах математики, фізики, техніки.

Виходячи з лінійності диференціального рівняння та крайових умов задачі (46), зрозуміло, що кожна власна функція визначається з точністю до постійного множника.

Множину власних чисел крайової задачі (46) називають її *спектром*.

Перед тим, як сформулювати інші властивості власних чисел і власних функцій, розглянемо приклади простих задач Штурма-Ліувілля, що виникли в §2. Так дослідження поведінки нагруженого силою P однорідного стержня постійного перетину, закріпленого в точках x_1= 0 і x_2 = l, привело до крайової задачі

$$y''(x)+\lambda y(x)=0, \qquad y(0)=y(l)=0, \tag{47}$$

де $\lambda=\dfrac{P}{EL}=const$ (задача б).

Очевидно, при λ=0, коли загальний розвязок диференціального рівняння має вигляд $y=C_1x+C_2$, і при $\lambda<0$, коли загальний розв"язок $y=C_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$, немає нетривіальних розв"язків, що задовільняли б крайовим умовам $y(0)=y(l)=0$. Отже, крайова задача (47) може мати лише додатні власні значення.

Розглянемо випадок $\lambda>0$.

Підставляючи загальний розв"язок диференціального рівняння

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{48}$$

в крайові умови, для визначення C_1, C_2 одержимо систему рівнянь

$$C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0,$$
$$C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

де, як і в одному з попередніх виразів, через $\sqrt{\lambda}$ позначено арифметичне значення квадратного кореня з $\lambda>0$ ($-\lambda>0$).

Із першого рівняння маємо $C_1=0$, а друге рівняння набирає вигляду

$$C_2\sin\sqrt{\lambda l} = 0.$$

Так як шукаємо розв"язок $y\neq 0$, то $C_2\neq 0$ і для визначення λ маємо рівняння $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$; звідси отримаємо:

$$\sqrt{\lambda}l = k\pi, \qquad \lambda = (\frac{k\pi}{l})^2, k\in N.$$

Враховуючи загальний розв"язок (48), одержані значення λ і C_1, бачимо, що крайова задача (47) має нескінчене число власних чисел і відповідних власних функцій:

$$\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, \quad y_k(x) = C_k\sin\frac{k\pi}{l}x \ \ (k = 1;2;3;\ldots, C_k - \text{довільні сталі}).$$

Отримані власні числа мають той механічний (фізичний) зміст, що через них виражаються критичні навантаження для стержня, а власні функції з точністю до сталого множника описують форми рівноваги стержня при відповідних навантаженнях.

Аналогічно досліджується задача Штурма-Ліувілля, що отримана в задачі 2) §2.

Приведемо без доведень деякі властивості власних чисел і власних функцій крайової задачі (46).

1) Існує нескінчена послідовність $\{\lambda_n\}$ власних чисел і відповідна їм нескінчена послідовність власних функцій $\{y_n(x)\}$.

2) Кожному власному значенню відповідає (з точністю до сталого множника) одна власна функція ($\lambda_n \leftrightarrow C_n y_n(x)$).

Зауважимо, що поряд з сталими власними значеннями, коли одному власному значенню відповідає одна власна функція (що має місце для крайової задачі (46)), існують кратні власні значення, коли деякому власному значенню λ_0 відповідає дві лінійно незалежні власні функції (для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку більше таких розв'язків існувати не може). Така стуація буде, наприклад, при крайових умовах, що виражають періодичність.

Справді, розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) - y(2\pi) = 0,\ \ y'(0) - y'(2\pi) = 0,\ \lambda>0.$$

Виходячи із загального розв'язку

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

і задовольняючи вказаним крайовим умовам, легко бачити, що кожному власному числу $\lambda_n = n^2$ відповідають дві лінійно незалежні функції

$$y_{n(1)} = \cos nx,\ \ y_{n(2)} = \sin nx.$$

3) Власні функції $y_n(x)$ утворюють на відрізку $[x_1, x_2]$ ортогональну систему функцій $\{y_n(x)\}$, тобто

$$\int_{x_1}^{x_2} y_n(x) y_m(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

При застосуваннях систем власних функцій $\{y_n(x)\}$ до розв'язування крайових задач (метод Гальоркіна, метод коллокацій) та до інших математичних проблем виникає питання про можливість розкладу заданої функції $F(x)$ в збіжний ряд Фур'є за функціями цієї системи. На це питання відповідає

Теорема Стєклова. Якщо функція $F(x) \in C^2[x_1, x_2]$ і задовольняє однорідні граничні умови з (46), то її можна розвинути в абсолютно і рівномірно збіжний на $[x_1, x_2]$ ряд за власними функціями крайової задачі (46)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n y_n(x).$$

Зауважимо, що коефіцієнти ν_n легко визначаються за загальною схемою розкладу в ряд Фур'є, виходячи з ортогональності системи функцій $\{y_n(x)\}$.

Повертаючсь до розв"язування задачі Штурма-Ліувілля (46), можна рекомендувати дотримуватись слідуючої найпростішої схеми:

знаходять, коли це можливо, загальний розв”язок диференціального рівняння $y = C_1 y_1^0(x) + C_2 y_2^0(x)$ і підставляють його в задані крайові умови; це приведе до лінійної системи однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення C_1, C_2. Умовою наявності нетривіального розв”язку крайової задачі (46) являтиметься умова рівності нулю головного визначника $\Delta(\lambda)$ цієї системи. Розв”язки рівняння $\Delta(\lambda)=0$ будуть власними значеннями даної крайової задачі, а потім, використовуючи загальний розв”язок, знаходимо власні функції.

Приклад. Знайти власні значення і власні функції крайової задачі

$$y'' + \lambda^2 = 0, \qquad (\lambda \neq 0) \tag{49}$$

$$y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \tag{50}$$

Розв’язок. Побудувавши загальний розв”язок диференціального рівняння (49)

$$y = C_1 \lambda \cos \lambda x + C_2 \lambda \sin \lambda x, \tag{51}$$

знаходимо

$$y' = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x \tag{52}$$

Підставляючи (52) і (51) в крайові умови (50), одержимо систему лінійних рівнянь для визначення C_1, C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_2 \lambda = 0, \\ C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Рівняння $\Delta(\lambda)=0$ в нашому випадку має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \cos \lambda\pi & \sin \lambda\pi \end{vmatrix} = 0, \text{ або } -\lambda \cos \lambda\pi = 0.$$

Так як по умові $\lambda \neq 0$, то для знаходження власних чисел маємо рівняння $\cos \lambda\pi = 0$. Розв”язками цього рівняння буде наступна множина значень λ:

$$\lambda \equiv \lambda_n = \frac{2n+1}{2}, \quad n = 0;1;2;\ldots$$

Відповідну множину власних функцій одержимо із загального розв”язку (51), підставивши туди знайдені значення λ і $C_2=0$ (це видно з системи (53)):

$$y_n(x) = C_1 \cos\frac{2n+1}{2}x, \qquad n = 0;1;2;\ldots.$$

Задачі

1 Розв'язати крайові задачі:

1
$$y'' - 4y' + 13y = 0$$
$$\begin{cases} 2y(0) - y'(0) = 3, \\ y(\frac{\pi}{2}) + 3y'(\frac{\pi}{2}) = e^{\pi} \end{cases}$$

2
$$y'' + y = xe^{x}$$
$$\begin{cases} -2y(0) + y'(0) = 1, \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

3
$$y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$$
$$\begin{cases} 5y(0) + y'(0) = 2, \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

4
$$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$$
$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(\frac{\pi}{3}) + y'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

6
$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2}$$
$$y(1) = \frac{1}{2}$$
$$y(4) = 0$$

7
$$xy'' - y' = x^2$$
$$\begin{cases} y(1) + y'(1) = 5, \\ y(2) - y'(2) = 2 \end{cases}$$

9
$$xy'' + y' = x^2 + 1$$
$$\begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 3, \\ y'(3) = 5 \end{cases}$$

10
$$\left.\begin{aligned} & xy'' + 2y' = 10x, \\ & y(1) + y'(1) = -10, \\ & y(3) + 3y'(3) = 30 \end{aligned}\right\}$$

11
$$\left.\begin{aligned} & y'' - 2y' + y = 4e^{x}, \\ & y(0) - y'()) = 0, \\ & 2y(1) - y'(1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

12
$$\left.\begin{aligned} & x^3 y'' + x^2 y' = 1, \\ & y(1) + 2y'(1) = 1, \\ & y(e) + ey'(e) = 2 \end{aligned}\right\}$$

II. Представити в інтегральному вигляді (за допомогою функції Гріна) розв'язки наступних крайових задач:

1
$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = f_1(x)$$
$$\begin{cases} y(1) + y'(0) = 0, \\ 2y(2) - y'(2) = 0 \end{cases}$$

2
$$x^2 y'' + xy' - 4y = f_2(x)$$
$$y(1) = y(3) = 0$$

3
$$xy'' - y' = f_3(x)$$
$$y(2) = y'(4) = 0$$

4
$$xy'' + 2y' = f_4(x)$$
$$y'(1) = y(3) = 0$$

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1965, 704с.
2. Карташев А.П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., Наука, 1979, 288с.
3. Краснов М. Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Высш. Школа, 1979, 288 с.
4. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. К., Вища Школа, 1981, 504 с.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969. 526с.
6. Самойленко А.М., Перестук М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. К., Либідь, 1994, 360с.
7. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння. К., Вища школа, 1994, 454с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.2, 1974, 656с.; т.4, ч.2, 1981, 552 с., М., Наука.
9. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1985, 232с.
10. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., Ин. лит., 1962, 352с.