КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів механіко-математичного факультету

(1 семестр другого курсу)
Частина I

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2006

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина I)/ Упорядн. А. Я. Дороговцев, М. О. Денисьєвський, О. Г. Кукуш – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 79 с.

Рецензенти

Доктор фіз.-мат. наук О.М.Кулик, Інститут математики НАН України
Кандидат фіз.-мат. наук доц. С.В.Тищенко, КНУ імені Тараса Шевченка

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
9 жовтня 2006 р.

Зміст

Передмова

Пропонований посібник є другим виданням методичної розробки [4], доповненої відповідями до задач.

Пропоновані завдання охоплюють такі теми нормативного курсу, що вивчаються на механіко-математичному факультеті в третьому семестрі.

Частина I: метричні простори; неперервність і диференційовність функцій кількох дійсних змінних.

Частина II: диференціальне числення дійсних і векторнозначних функцій кількох змінних; невласні інтеграли; інтеграл Рімана, що залежить від параметра.

Виконання кожного практичного заняття передбачає:

1. Вивчення відповідного лекційного матеріалу; підготовку відповідей на контрольні запитання, що передують задачам та охоплюють основні теоретичні положення, необхідні для розв'язання задач.

2. Розв'язання студентами біля дошки під керівництвом викладача трьох – п'яти основних задач (позначених літерою "О"). Коментуючи розв'язання цих задач, викладач акцентує увагу на типових прийомах і методах.

3. Самостійне розв'язання студентами трьох – п'яти простіших задач (позначених літерою "С"). У разі необхідності, викладач допомагає студентам або дає потрібну консультацію.

4. Виконання студентами домашнього завдання, що складається з обов'язкових загальних для всіх задач та з індивідуальних завдань (позначених літерою "І").

5. Крім того, для зацікавлених студентів в аудиторну частину включені складніші додаткові задачі (позначені літерою "Д"), що дають поглиблене уявлення про поняття, які вивчаються.

Слід підкреслити, що самостійне виконання домашнього завдання є необхідною умовою успішного оволодіння матеріалом курсу.

У третьому семестрі проводиться колоквіум з теми "Метричні простори". Передбачається також проведення трьох самостійних робіт на практичних заняттях. Докладну програму курсу на третій семестр наведено на с. 71.

Заняття 1

Означення метрики та метричного простору. Куля, сфера, окіл точки

Контрольні запитання

1) *Означення метрики та метричного простору.*
2) *Простір $\mathbb{R}^m$ з евклідовою метрикою ρ.*
3) *Простір $C([a;b])$ з рівномірною метрикою ρ.*
4) *Означення відкритої та замкненої куль, сфери, околу точки.*

А 1

1.1. (О) Які з функцій

1) $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |\, x_1 - y_1 \,| + 2|\, x_2 - y_2 \,|$;
2) $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + |\, x_2 - y_2 \,|$; $\quad \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$,

визначають метрику на $\mathbb{R}^2$? У просторі $(\mathbb{R}^2,\, d_1)$ зобразити множини

$$\overline{B}((0,\, 0);\, 2), \quad \overline{B}((2,\, 3);\, 2), \quad S((0,\, 0);\, 1).$$

1.2. (О) Які з функцій

1) $d(x, y) = \max\limits_{t \in [0;\, 1/2]} |x(t) - y(t)|$;
2) $d(x, y) = \int\limits_0^1 |\, x(t) - y(t) \,|\, dt$;
3) $d(x, y) = \max\limits_{t \in [0;\, 1]} (e^{-t}|x(t) - y(t)|)$;

$\{x, y\} \subset C([0;\, 1])$,

визначають метрику на $C([0,\, 1])$?

1.3. (О) У просторі $C([0;\, 1])$ з рівномірною метрикою задано елементи

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = \frac{t}{2}, \quad x_3(t) = \frac{1}{2}, \quad x_4(t) = \sin \pi t, \quad t \in [0,\, 1].$$

Які з наведених співвідношень мають місце:

1) $x_2 \in \overline{B}(x_1;\, 1/3)$;
2) $x_4 \in \overline{B}(x_3;\, 1/2)$;
3) $x_4 \in B(x_3; 1)$;
4) $x_1 \in B(x_2;\, 1/2)$;
5) $x_4 \in S(x_3;\, 1/2)$;
6) $S(x_2;\, 1/4) \cap S(x_4; 1/4) \neq \varnothing$?

Дати графічну інтерпретацію.

1.4. (О) Нехай $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$ – метричні простори. Покладемо $X := X_1 \times X_2$ та

$$\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}, \quad \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset X.$$

Довести, що $(X,\, \rho)$ – метричний простір. Розглянути частковий випадок $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ з евклідовою метрикою.

1.5. (С) Які з наведених функцій

1) $d(x, y) = \sqrt{|\, x - y \,|}$;
2) $d(x, y) = |\, x^2 - y^2 \,|$,

$\{x,\, y\} \subset \mathbb{R}$, визначають метрику на $\mathbb{R}$?

1.6. (С) Показати, що функція

$$d\big((x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\big) = \sqrt{\frac{(x_1-y_1)^2}{4}+\frac{(x_2-y_2)^2}{9}},\ \{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\}\subset\mathbb{R}^2,$$

визначає метрику на $\mathbb{R}^2$. У просторі $(\mathbb{R}^2,\, d)$ зобразити множини

$$B\big((0,0);\,1\big), \qquad S\big((5,5);\,1\big).$$

1.7. (С) У просторі $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою описати множини

$$B(x_1;\,1/4), \quad B(x_2;\,1/4), \quad B(x_1;\,1/4)\cap B(x_2;\,1/4), \quad B(x_3;\,1/4),$$
$$\overline{B}(x_1;\,1/4)\cap \overline{B}(x_3;\,1/4),$$

де $x_1(t)=\frac{1}{2}, \quad x_2(t)=t, \quad x_3(t)=\sin\pi t, \quad t\in[0;\,1].$

1.8. (С) Довести, що в метричному просторі:

1) перетин двох околів точки x є околом цієї точки;

2) точки x та y, $x\neq y$, мають околи, що не перетинаються.

1.9. (Д) Довести, що функція

$$d(x,y)=\frac{|\,x-y\,|}{1+|\,x-y\,|}, \quad \{x,y\}\subset\mathbb{R},$$

визначає метрику на $\mathbb{R}$.

1.10. (Д) Нехай $(X,\,\rho)$ – метричний простір. Які з наведених функцій визначають метрику на X :

1) $d=\sqrt{\rho}$; 2) $d=\rho^2$; 3) $d=\min\{1,\,\rho\}$?

1.11. (Д) Нехай $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ опукла вгору, $f(t)=0 \iff t=0$. Довести, що для метрики ρ на множині X функція $f(\rho)$ також є метрикою.

1.12. (Д) Нехай

$$X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$$

та ρ – евклідова метрика на $\mathbb{R}^2$. Тоді $(X,\,\rho)$ – метричний простір. Зобразити в $(X,\,\rho)$ кулі $B\left((1/2,\,0);\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad B\big((1,\,0);\,1\big).$

Зауваження. У цьому прикладі куля більшого радіуса є підмножиною кулі меншого радіуса.

1.13. Нехай $p\ge 1$. Позначимо

$$l_p := \{x=(x_1,x_2,\ldots)\mid x_k\in\mathbb{R},\ k\ge 1;\quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<+\infty\},$$

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}, \quad \{x=(x_1,x_2,\ldots),\ y=(y_1,y_2,\ldots)\}\subset l_p.$$

Довести, що $(l_p,\,\rho_p)$ – метричний простір.

1.14. (Д) Які з наведених функцій:

1) $d(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,|\,x_k-y_k\,|$; 2) $d(x,y)=\sup\limits_{k\ge 1}|\,x_k-y_k\,|$,

$\{x = (x_1, x_2, \dots),\ y = (y_1, y_2, \dots)\} \subset l_2$, визначають метрику на множині l_2?

В 1

1.15. (О) Які з наведених функцій:

1) $d(x,y) = |\sin(x-y)|$; 2) $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$;

$\{x,y\} \subset \mathbb{R}$, визначають метрику на $\mathbb{R}$?

1.16. (О) Довести твердження та дати геометричну інтерпретацію:

1) для довільних околів $B(x_1; r_1)$ і $B(x_2; r_2)$ у просторі $(\mathbb{R}, \rho)$ існує такий окіл $B\big((x_1,x_2); r\big)$ у просторі $(\mathbb{R}^2, \rho)$, що
$$B\big((x_1,x_2); r\big) \subset B(x_1; r_1) \times B(x_2; r_2);$$
2) для довільного околу $B\big((x_1,x_2); r\big)$ у просторі $(\mathbb{R}^2, \rho)$ існують такі околи $B(x_1; r_1)$ та $B(x_2; r_2)$ у просторі $(\mathbb{R}, \rho)$, що
$$B(x_1; r_1) \times B(x_2; r_2) \subset B\big((x_1,x_2); r\big).$$

1.17. (О) Довести, що функція
$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$, $\{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$, визначає метрику на $\mathbb{R}^2$. Зобразити множини $B\big((0,0); 1\big)$, $S\big((1,1); 2\big)$ у просторі $(\mathbb{R}^2, d)$.

1.18. (О) Довести, що функція
$$d(x,y) = \Big(\int_0^1 \big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt\Big)^{1/2}, \quad \{x,y\} \subset C([0;1]),$$
визначає метрику на $C([0;1])$.

1.19. (О) Нехай $X \neq \varnothing$ та
$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad \{x,y\} \subset X.$$
Довести, що d – метрика на X *(дискретна метрика)*.

1.20. (І) Показати, що вказані функції визначають метрики на $\mathbb{R}^m$:

1) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$;

2) $d(x,y) = \big(\sum\limits_{k=1}^{m} k^2 (x_k - y_k)^2\big)^{1/2}$;

3) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|x_k-y_k|}{k}$;

4) $d(x,y) = \max\limits_{1 \le k \le m} |x_k - y_k|$;

5) $d(x,y) = \max\limits_{1 \le k \le m} k^{-1}|x_k - y_k|$;

6) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} k\,|x_k - y_k|$;

7) $d(x,y) = \max\limits_{1 \le k \le m} (k\,|x_k - y_k|)$;

8) $d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|} + \sum\limits_{k=2}^{m} |x_k - y_k|$;

9) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \big(\sum\limits_{k=2}^{m} (x_k - y_k)^2\big)^{1/2}$;

10) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \max\limits_{2 \le k \le m} |x_k - y_k|$;

де $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\} \subset \mathbb{R}^m$.

Заняття 2
Границя послідовності в метричному просторі

Контрольні запитання

1) *Означення збіжної послідовності в метричному просторі.*
2) *Характеризація збіжності в евклідовому просторі* $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$.
3) *Характеризація збіжності в просторі неперервних функцій з рівномірною метрикою.*

А 2

2.1. (О) Нехай $x_n \to x, \quad n \to \infty$ у метричному просторі $(X,\, \rho), \quad y \in X$. Довести, що $\rho(x_n, y) \to \rho(x, y), \quad n \to \infty$.

2.2. (О) Дослідити збіжність послідовностей у відповідних просторах:

1) $\left\{x_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2n+1}{n}\right) \,:\, n \ge 1\right\}$ у $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$;
2) $\left\{x_n = \left(\dfrac{\cos n\pi}{2},\; \dfrac{n+1}{n^2}\right) \,:\, n \ge 1\right\}$ у $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$;
3) $\{x_n(t) = t^n,\; t \in [0;\, 1] \,:\, n \ge 1\}$ у $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$;
4) $\{x_n(t) = t^2 + \dfrac{t}{n},\; t \in [0;\, 1] \,:\, n \ge 1\}$ у $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$;
5) $\{x_n(t) = t^n,\; t \in [0;\, 1] \,:\, n \ge 1\}$ у $C([0;\, 1])$ з метрикою
$d(x, y) = \int\limits_0^1 |\, x(t) - y(t)\,|\, dt, \quad \{x, y\} \subset C([0;\, 1])$.

2.3. (О) Нехай $(X_k,\, \rho_k), \quad k = 1, 2$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести, що послідовність $\{(x_n^{(1)},\, x_n^{(2)}) \,:\, n \ge 1\}$ збігається до елемента $(x^{(1)},\, x^{(2)})$ у просторі $(X,\, \rho)$ тоді й лише тоді, коли одночасно послідовність $\{x_n^{(1)} \,:\, n \ge 1\}$ збігається до $x^{(1)}$ та послідовність $\{x_n^{(2)} \,:\, n \ge 1\}$ збігається до $x^{(2)}$ відповідно у просторах $(X_1,\, \rho_1)$ та $(X_2,\, \rho_2)$.

2.4. (О) Нехай $X = (0;\, 1), \quad \rho$ – евклідова метрика на X. Довести, що послідовність $\left\{x_n = \dfrac{n}{2n+1} \,:\, n \ge 1\right\}$ збігається, а послідовності $\left\{y_n = \dfrac{1}{n} \,:\, n \ge 2\right\}$ та $\left\{z_n = 1 - \dfrac{1}{n} \,:\, n \ge 2\right\}$ розбігаються в $(X,\, \rho)$.

2.5. (С) Нехай послідовність $\{x_n \,:\, n \ge 1\}$ збігається в $(X,\, \rho)$, а послідовність $\{y_n \,:\, n \ge 1\} \subset X$ така, що $\rho(x_n, y_n) \to 0, \quad n \to \infty$. Довести, що послідовність $\{y_n \,:\, n \ge 1\}$ збігається в $(X,\, \rho)$ до тієї ж границі, що й послідовність $\{x_n \,:\, n \ge 1\}$.

2.6. (С) Нехай $\{x_n \,:\, n \geq 1\}$ – збіжна послідовність у метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що числова множина $\{\rho(x_n,\, x_m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ обмежена.

2.7. (С) Дослідити збіжність послідовностей у відповідних просторах. Для збіжних послідовностей знайти їх границі:

1) $\left\{x_n = \left(\dfrac{\sin n}{n},\ (-1)^n,\ \dfrac{1}{n^2}\right) \,:\, n \geq 1\right\}$ у $(\mathbb{R}^3,\, \rho)$;

2) $\left\{x_n = \left(\cos\dfrac{1}{n},\ \dfrac{2n-1}{n},\ \dfrac{2}{n}\right) \,:\, n \geq 1\right\}$ у $(\mathbb{R}^3,\, \rho)$;

3) $\left\{x_n(t) = t - \dfrac{\sin t}{n},\ t \in [0;\, \pi] \,:\, n \geq 1\right\}$ у $(C([0;\, \pi]),\, \rho)$;

4) $\{x_n(t) = \sin^n \pi t,\ t \in [0; 1] \,:\, n \geq 1\}$ у $(C([0;\, 1]),\, \rho)$.

2.8. (С) У дискретному просторі $(X,\, d)$, визначеному в задачі 1.19, для фіксованого $x \in X$ описати множини

$$B(x;\, 1), \quad \overline{B}\Big(x;\, \frac{1}{2}\Big), \quad S\Big(x;\, \frac{1}{2}\Big), \quad S(x;\, 1).$$

Охарактеризувати збіжні послідовності в просторі $(X,\, d)$.

2.9. (С) Нехай

$$C^{(1)}([0;1]) = \{x : [0;\, 1] \to \mathbb{R} \mid \forall\, t \in [0;\, 1]\ \exists\, x'(t);\quad x' \in C([0;\, 1])\},$$

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[0;\,1]} |\, x(t) - y(t)\,| + \max_{t\in[0;\,1]} |\, x'(t) - y'(t)\,|, \qquad \{x,y\} \subset C^{(1)}([0;\, 1]).$$

Довести, що ρ – метрика на $\left(C^{(1)}([0;\, 1])\right)$. Охарактеризувати збіжність послідовності елементів простору $\left(C^{(1)}([0;\, 1]).\ \rho\right)$. Дослідити збіжність таких послідовностей:

1) $\left\{x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n},\ t \in [0;\, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$;

2) $\left\{x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2},\ t \in [0;\, 1] \,:\, n \geq 1\right\}$.

2.10. (Д) Нехай $\{x_n \,:\, n \geq 1\}$ – така послідовність елементів метричного простору $(X,\, \rho)$, що кожна з трьох її підпослідовностей $\{x_{2n} \,:\, n \geq 1\}$, $\{x_{2n-1} \,:\, n \geq 1\}$ та $\{x_{3n} \,:\, n \geq 1\}$ збігається в $(X,\, \rho)$. Довести, що тоді послідовність $\{x_n \,:\, n \geq 1\}$ збігається в $(X,\, \rho)$.

2.11. (Д) Нехай для елементів $\{x,y\} \subset C\big((-\infty;+\infty)\big)$

$$\rho(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1,\, \rho_n(x,y)\},$$

де $\rho_n(x,y) := \max\limits_{t\in[-n;\,n]} |\, x(t) - y(t)\,|$. Довести, що $\left(C\big((-\infty;+\infty)\big),\, \rho\right)$ – метричний простір. Довести також, що збіжність у цьому просторі еквівалентна рівномірній збіжності на $[-n;\, n]$ при кожному $n \geq 1$.

2.12. (Д) Довести, що з обмеженої послідовності точок у $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Узагальнити це твердження на випадок простору $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$.

2.13. (Д) Навести приклад обмеженої послідовності в $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$, з якої не можна вибрати збіжну в цьому просторі підпослідовність.

2.14. (Д) Охарактеризувати збіжність у просторі $\big(C([a;\, b]),\, d\big)$, де
$$d(x, y) = \max_{t\in[a;\, b]} (e^{-t} |\, x(t) - y(t)\,|), \qquad \{x, y\} \subset C([a;\, b]).$$

2.15. (Д) Довести, що зі збіжності послідовності елементів у $(l_2,\, \rho)$ випливає їх покоординатна збіжність, але з покоординатної збіжності не випливає збіжність у $(l_2,\, \rho)$.

2.16. (Д) Нехай $\mathcal{P}_m([a;\, b])$ – множина всіх поліномів степеня не вище m з дійсними коефіцієнтами, що розглядаються на $[a;\, b]$. Для
$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k, \qquad x \in [a;\, b],$$
покладемо
$$\rho(p, q) = \sum_{k=0}^{m} |\, a_k - b_k\,|.$$
Довести, що $(\mathcal{P}_m([a;\, b],\, \rho)$ – метричний простір, збіжність у якому еквівалентна рівномірній збіжності на $[a;\, b]$.

2.17. (Д) *Відстанню* від точки $x \in X$ до непорожньої множини $A \subset X$ у просторі $(X,\, \rho)$ називається величина
$$\rho(x, A) = \inf_{y\in A} \rho(x, y).$$
Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty$ в $(X,\, \rho)$. Довести, що $\rho(x_n, A) \to \rho(x, A),\, n \to \infty$.

В 2

2.18. (О) Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty$ у просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що числова послідовність $\{\rho(x_n, x_{n+1})\ :\ n \ge 1\}$ збігається, знайти її границю.

2.19. (О) Послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ називається *обмеженою* в просторі $(X,\, \rho)$, якщо існує така куля $\overline{B}(z;\, r)$, що
$$\forall\, n \ge 1\ :\ x_n \in \overline{B}(z;\, r).$$
Довести, що збіжна послідовність обмежена.

2.20. (О) Дослідити збіжність послідовностей у відповідних просторах. Для збіжних послідовностей знайти їх границі:

1) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{m}{n}\right)\ :\ n \ge 1\right\}$ у $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$;
2) $\{x_n(t) = t^n(1-t),\, t \in [0;\, 1]\ :\ n \ge 1\}$ у $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$;
3) $\{x_n(t) = (1-t)^n,\, t \in [0;\, 1]\ :\ n \ge 1\}$ у $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$;

4) $\{x_n(t) = \cos^{2n} \pi t,\, t \in [0;\, 1] \;:\; n \geq 1\}$ у $\big(C([0;\,1]),\, \rho\big)$ та в $C([0;\,1])$ з метрикою $d(x,y) = \int\limits_0^1 |\, x(t) - y(t) \,|\, dt,\ \{x, y\} \subset C([0;\,1])$.

2.21. (I) Дослідити збіжність послідовностей у відповідних просторах. Знайти границі збіжних послідовностей.

У просторі $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$:

1) $\{x_n = (n+1, n+2, \ldots, n+m) \;:\; n \geq 1\}$;
2) $\left\{x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \ldots, \frac{1}{m^n}\right) \;:\; n \geq 1\right\}$;
3) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{m}{n}\right) \;:\; n \geq 1\right\}$;
4) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^m}\right) \;:\; n \geq 1\right\}$;
5) $\left\{x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots, \frac{n+m-1}{n}, \cos n\pi\right) \;:\; n \geq 1\right\}$.

У просторі $\big(C([0;\,1]),\, \rho\big)$:

6) $\{x_n(t) = 1 - t^n,\ t \in [0;\,1] \;:\; n \geq 1\}$;
7) $\{x_n(t) = (1 - t^3)\, t^n,\ t \in [0;\,1] \;:\; n \geq 1\}$;
8) $\{x_n(t) = n \sin \frac{t}{n},\ t \in [0;\,1] \;:\; n \geq 1\}$;
9) $\{x_n(t) = n \ln\!\Big(1 + \frac{t}{n}\Big),\ t \in [0;\,1] \;:\; n \geq 1\}$;
10) $\{x_n(t) = e^{-nt},\ t \in [0;\,1] \;:\; n \geq 1\}$.

Заняття 3

Внутрішня, гранична та ізольована точки множини

Контрольні запитання

1) Означення внутрішньої, граничної та ізольованої точок множини.

2) Теорема про характеризацію граничної точки множини.

А 3

3.1. (О) Для множини A в просторі $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;

2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > x_1\}$;

3) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$;

4) $A = \left\{\left(\dfrac{1}{n},\, \dfrac{1}{n^2}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

3.2. (О) Для множини A в просторі $\big(C\,([0;\,1]),\, \rho\big)$ знайти множини внутрішніх і граничних точок:

1) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid 1 < x(0) < 2\}$;
2) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) = 1\}$;
3) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid \min\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) > 0\}$.

3.3. (О) Нехай $A_1 \subset \mathbb{R},\ A_2 \subset \mathbb{R}$. Довести твердження:

1) $x_1,\, x_2$ – є внутрішніми точками відповідно множин A_1 та A_2 в $(\mathbb{R},\, \rho)$ тоді й лише тоді, коли (x_1, x_2) – внутрішня точка множини $A_1 \times A_2$ в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$;
2) якщо x_1 та x_2 – граничні точки відповідно множин A_1 та A_2 в $(\mathbb{R},\, \rho)$, то (x_1, x_2) – гранична точка множини $A_1 \times A_2$ в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$;
3) твердження, обернене до 2), – невірне.

3.4. (С) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множини A в просторі $(\mathbb{R},\, \rho)$:

1) $A = [0;\, 1]$; 2) $A = (0;\, 1)$; 3) $A = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

3.5. (С) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множини A в просторі $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$; 2) $A = \{\big((-1)^n, e^n\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3.6. (С) Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $C([0;\,1]),\, \rho)$:

1) $A=\{x\in C([0;\,1])\mid x(0)\geq 1\}$;
2) $A=\{x\in C([0;\,1])\mid x(0)=1,\ x(1)=0\}$.

3.7. (Д) Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $(\mathbb{R},\,\rho)$:

1) $A=\mathbb{Z}$;
2) $A=\mathbb{Q}$;
3)* $A=\{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\mid \{m,n\}\subset\mathbb{N}\}$;
4)* $A=\big\{\{\sqrt{n}\}\mid n\in\mathbb{N}\big\}$;
5)* $A=\{\sin n\mid n\in\mathbb{N}\}$.

3.8. (Д) Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$:

1) $A=\{(x_1,x_2)\mid x_2=rx_1,\ r\in\mathbb{Q}\}$;
2)* $A=\{(\sin n,\,\cos n)\mid n\in\mathbb{N}\}$;
3)* $A=\{(\sin n,\,\cos m)\mid n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\}$.

3.9. (Д) Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$:

1) $A=\{x\mid \max\limits_{t\in[0;\,1]}x(t)<1\}$;
2) $A=\{x\mid \max\limits_{t\in[0;\,1]}x(t)\leq 1\}$;
3) $A=\{x\mid x(0)+x(1)>0\}$;
4) $A=\{x\mid \int\limits_0^1|\,x(t)\,|\,dt>0\}$;
5) A – множина всіх поліномів на $[0;\,1]$;
6) A – множина всіх диференційовних функцій на $[0;\,1]$;
7) $A=\{x\mid \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt>1\}$.

3.10. (Д) Нехай $(X_k,\,\rho_k),\ k=1,2,$ – метричні простори, $X=X_1\times X_2$, $\rho=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести, що:

1) x_1 та x_2 є внутрішніми точками відповідно множин $A_1\subset X_1$ та $A_2\subset X_2$ тоді й лише тоді, коли (x_1,x_2) – внутрішня точка множини $A_1\times A_2$ в просторі $(X,\,\rho)$;
2) якщо x_1 та x_2 – граничні точки відповідно множин $A_1\subset X_1$ та $A_2\subset X_2$, то (x_1,x_2) – гранична точка множини $A_1\times A_2$ в просторі (X,ρ);
3) твердження, обернене до 2), – невірне.

В 3

3.11. (О) Нехай $X=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$ з евклідовою метрикою ρ. Знайти внутрішні та граничні точки в $(X,\,\rho)$ множини $A=\overline{B}\big((\frac{3}{4},\,0);\,1\big)$.

3.12. (О) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множин у $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$:

1) $A=\{(x_1,x_2)\mid x_2>x_1^2\}$;
2) $A=\{(x_1,x_2)\mid x_2=x_1^2\}$;
3) $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$;
4) $A=\left\{\left(\dfrac{1}{n},\,n\ln\!\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\right)\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

3.13. (O) Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty$, у метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що x – гранична точка множини $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ тоді й лише тоді, коли послідовність $\{x_n \ :\ n \geq 1\}$ містить нескінченно багато різних елементів.

3.14. (O) Нехай $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, ρ – евклідова метрика. Показати, що в $(X,\, \rho)$ має місце співвідношення

$$\overline{B}\big((0,0);\, 2\big) \subset \overline{B}\big((1,1);\, \sqrt{2}\big).$$

3.15. (I) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множин у $(\mathbb{R}, \rho)$:

1) $A = \mathbb{N}$;

2) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

3) $A = \{1\} \cup \Big\{1 + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;

4) $\Big\{\dfrac{m}{|\,m\,| + n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

3.16. (I) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множин у $(\mathbb{R}^2, \rho)$:

1) $A = \{(x_1, x_2) \,|\, |\,x_1\,| + |\,x_2\,| \ \leq 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0\}$;
3) $A = \Big\{\Big((-1)^n,\, \cos\dfrac{1}{n}\Big) \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;
4) $A = \Big\{\Big(\dfrac{m}{n},\, \dfrac{n}{m}\Big) \mid m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

3.17. (I) Знайти внутрішні, граничні та ізольовані точки множин у просторі $\big(C([0;\,1]),\, \rho\big)$:

1) $A = \{x \mid x(0) \cdot x(1) < 0\}$;
2) $A = \{x \mid \forall\, t \in [0;\,1]\ :\ x(t) > t\}$;
3) $A = \{x \mid \ x(1) \leq 1\}$;
4) $A = \Big\{\dfrac{\sin nt}{n},\ t \in [0;\,1] \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$.

Заняття 4
Відкриті та замкнені множини

Контрольні запитання

1) *Означення відкритої та замкненої множин.*
2) *Властивості відкритих множин.*
3) *Властивості замкнених множин.*
4) *Теорема про зв'язок між відкритими та замкненими множинами.*

А 4

4.1. (О) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$, замкнені:

1) $\{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 2\}$; 2) $\{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 < 2\}$?

4.2. (О) Довести, що множини A_1 та A_2 відкриті в $(\mathbb{R},\, \rho)$ тоді й лише тоді, коли $A_1 \times A_2$ – відкрита множина в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$.

4.3. (О) Які з наведених множин відкриті в $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$, замкнені:

1) $\{x \mid x(0) = 1\}$;
2) $\{x \mid t^2 < x(t) < t,\ t \in (0;\, 1)\}$;
3) $\{x \mid \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) \ge 3\}$?

4.4. (С) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R},\, \rho)$, замкнені:

1) $[0;\, 1]$;
2) $(0;\, 1)$;
3) $[0;\, 1)$;
4) $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
5) $\mathbb{N}$;
6) $\mathbb{Q}$?

4.5. (С) Які з підмножин множини $\widetilde{R} = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ відкриті в просторі $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$, замкнені?

4.6. (С) Які з наведених множин відкриті в $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$, замкнені:

1) $\{x \mid x(0) = x(1) = 0\}$;
2) $\{x \mid x(0) \cdot x(1) < 0\}$;
3) $\{x \mid \int\limits_0^1 x(t)\, dt = 0\}$?

4.7. (Д) Довести, що множина відкрита в $(\mathbb{R},\, \rho)$ тоді й лише тоді, коли вона відкрита в $(\mathbb{R},\, d)$, де
$$d(x, y) = \sqrt{|\, x - y\,|}, \qquad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

4.8. (Д) Довести, що в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$ будь-яка сім'я відкритих непорожніх множин, що попарно не перетинаються, не більш як злічення. Узагальнити це твердження на випадок евклідового простору $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$, де $m \in \mathbb{N}$.

4.9. (Д) Нехай x_1 та x_2 – фіксовані елементи в метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що у п. 1), 2) множини відкриті в $(X,\, \rho)$, а у п. 3), 4) множини замкнені в $(X,\, \rho)$:

1) $\{x \in X | \ \rho(x, x_1) + \rho(x, x_2) > 1\}$;
2) $\{x \in X | \ \rho(x, x_1) \cdot \rho(x, x_2) < 1\}$;
3) $\{x \in X | \ \rho(x, x_1) \geq 1\}$;
4) $\{x \in X | \ \rho(x, x_1) + \rho(x, x_2) \leq 1\}$.

4.10. (Д) Нехай (X_k, ρ_k), $k = 1, 2$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести, що $A_1 \times A_2$ – відкрита множина в просторі (X, ρ) тоді й лише тоді, коли A_1 та A_2 – відкриті множини відповідно в просторах (X_1, ρ_1) та (X_2, ρ_2).

4.11. (Д) Нехай A – множина в метричному просторі (X, ρ). Множина

$$\overline{A} := \bigcap_{F \text{ – замкнена}, \ A \subset F} F$$

називається *замиканням* A. Довести, що $\overline{A}$ складається з усіх точок самої множини A та з усіх її граничних точок.

4.12. (Д) Яку умову має задовольняти множина $A \subset [0; 1]$ для того, щоб множина $\{x \in C([0; 1]) \,|\, x(t) = 0, \ t \in A\}$ була замкненою в просторі $\big(C([0; 1]), \rho\big)$?

B 4

4.13. (О) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}, \rho)$, замкнені:

1) $[0; +\infty)$;
2) $[0; 2]$;
3) $(-1; 1]$;
4) $\mathbb{Q}$;
5) $\mathbb{Z}$;
6) $\{0\} \cup \{n^{-1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$?

4.14. (О) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^2, \rho)$, замкнені:

1) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = x_2\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 > 1\}$;
3) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_2 \leq 2^{x_1}\}$;
4) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_2 < \cos x_1\}$?

4.15. (О) Охарактеризувати відкриті, замкнені множини в дискретному просторі (X, d), визначеному в задачі 1.18.

4.16. (О) Які з наведених множин відкриті в $\big(C([0; 1]), \rho\big)$, замкнені:

1) $\{x \,|\, x(\frac{1}{2}) > 0\}$;
2) $\{x \,|\, x(t) = 0, \ t \in [0; \frac{1}{2}]\}$;
3) $\{x \,|\, \sqrt{t} < x < \sqrt[3]{t}, \ t \in (0; 1)\}$?

4.17. (І) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^2, \rho)$, замкнені:

1) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 > 9\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \,|\, |x_1| - x_2 = 3\}$;
3) $\{(x_1, x_2) \,|\, 1 \leq x_1 + x_2 < 2\}$;
4) $\Big\{(x_1, x_2) \,|\, \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_1^{2n}}{1 + x_1^{2n}} \leq \dfrac{1}{3}, \ |x_2| \leq 1\Big\}$?

4.18. (I) Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^3,\ \rho)$, замкнені:

1) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 4\}$;
2) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 2,\ 1 < x_3 \leq 2\}$;
3) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3,\ x_2 + x_3 \leq 4\}$?

4.19. (I) Які з наведених множин відкриті в $\big(C([0;\ 1]),\ \rho\big)$, замкнені:

1) $\{x \mid \forall\, t \in [0; 1]\ \exists\, x'(t);\ x' \in C([0;\ 1])\}$;
2) $\{x \mid x(t) = 0,\ t \in [\frac{1}{2};\ 1]\}$;
3) $\{x \mid 1 < x(t) < 2,\ t \in [0;\ 1]\}$;
4) $\{x \mid \min\limits_{t \in [0;\ 1]} x(t) \leq 0\}$?

4.20. (I) Які з наведених множин відкриті, замкнені у відповідних просторах?

У просторі $(\mathbb{R},\ \rho)$:

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n};\ 1+\dfrac{1}{n}\Big)$;
2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n;\ 2n+1]$;
3) $\bigcap\limits_{n=2}^{5}(\sqrt{n};\ \sqrt{n^3})$?

У просторі $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$:

4) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_1^2 + x_2\} \cap \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 > x_1 - 3\}$;
5) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 \leq 2,\ x_1 + x_2 \geq 3\}$;
6) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big\{(x_1, x_2) \mid |\, x_1\,| + |\, x_2\,| < 5 - \dfrac{1}{n}\Big\}$;
7) $\bigcap\limits_{n=1}^{3}\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - n)^2 + (x_2 - n)^2 \leq 4n^2\}$?

Заняття 5
Скрізь щільні множини. Сепарабельні простори

Контрольні запитання

1) *Означення скрізь щільної множини.*
2) *Означення сепарабельного метричного простору.*

А 5

5.1. (О) Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$; 2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; 3) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$?

5.2. (О) Нехай $(X_k,\, \rho_k), \quad k = 1, 2,$ – сепарабельні метричні простори, $X = X_1 \times X_2,\ \rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести сепарабельність простору $(X,\, \rho)$.

5.3. (О) Довести сепарабельність простору
$$X = \{(x_1,\, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
з відстанню ρ, що дорівнює довжині меншої дуги між точками кола X.

5.4. (О)

1) Чи є множина всіх поліномів, що розглядаються на відрізку $[0;\, 1]$, скрізь щільною в $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$?
2) Чи є множина всіх диференційовних функцій на $[0;\, 1]$ скрізь щільною в $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$?

5.5. (С) Довести, що множина A скрізь щільна в $(X,\, \rho)$ тоді й лише тоді, коли
$$\forall x \in X\ \exists \{x_n\ :\ n \geq 1\} \subset A\ :\ x_n \to x,\ n \to \infty.$$

5.6. (С) Довести сепарабельність простору $(\mathbb{R}^2,\, d)$ з метрикою
$$d\big((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\big) = \max\{|x_1 - y_1|,\, |x_2 - y_2|\},\ \ \{(x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

5.7. (С) Довести сепарабельність простору $C([0;\, 1])$ з інтегральною метрикою
$$d(x, y) = \int_0^1 |\, x(t) - y(t)\, |\, dt, \quad \{x, y\} \subset C([0;\, 1]).$$

5.8. (С) За яких умов дискретний простір $(X,\, d)$ (див. задачу 1.18) є сепарабельним?

5.9. (Д) Які з наведених множин скрізь щільні в просторі $\big(\mathcal{P}_m([a;\, b]),\, \rho\big)$ (див. задачу 2.16):

1) множина всіх поліномів степеня не вище m із цілими коефіцієнтами;
2) множина всіх поліномів степеня не вище m із раціональними коефіцієнтами?

5.10. (Д) Які з наведених множин скрізь щільні в $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$:

1) множина всіх поліномів парного степеня;
2) множина всіх неперервних функцій обмеженої варіації;
3) множина всіх кусково-лінійних неперервних функцій?

5.11. (Д) Які з наведених множин скрізь щільні в просторі $\big(C([a;\,b]),\,d\big)$ з інтегральною метрикою

$$d(x,y)=\int_a^b |\,x(t)-y(t)\,|\,dt, \qquad \{x,y\}\subset C([a;\,b]) :$$

1) множина всіх поліномів, що розглядаються на $[a;\,b]$;
2) множина всіх двічі диференційовних функцій на $[a;\,b]$;
3) $\{x\in C([a;\,b])\mid x(a)=0\}$;
4) $\{x\in C([a;\,b])\mid x(a)=x(b)\}$?

5.12. (Д) Для $p\ge 1$ довести сепарабельність простору $(l_p,\,\rho_p)$.

5.13. (Д) Довести, що в сепарабельному метричному просторі будь-яка непорожня відкрита множина є об'єднанням не більш як зліченної сім'ї відкритих куль.

5.14. (Д) Довести, що в сепарабельному метричному просторі будь-яка сім'я непорожніх відкритих множин, що попарно не перетинаються, не більш як зліченна.

5.15. (Д) Нехай $(X,\,\rho)$ – сепарабельний метричний простір, $A\subset X$, $A\ne\varnothing$. Довести, що $(A,\,\rho)$ – сепарабельний метричний простір.

5.16. (Д) Довести несепарабельність наведених просторів:

1) $l_\infty=\{x=(x_1,x_2,\dots)\mid x_k\in\mathbb{R},\ k\ge 1;\quad \sup\limits_{k\ge 1}|x_k|<+\infty\}$ з метрикою $\rho_\infty(x,y)=\sup\limits_{k\ge 1}|x_k-y_k|,\ \{x=(x_1,x_2,\dots),\,y=(y_1,y_2,\dots)\}\subset l_\infty$;
2) простір функцій обмеженої варіації $BV([a;\,b])$ з метрикою $\rho(x,y)=|\,x(a)-y(a)\,|+V(x-y;\,[a;\,b]),\ \{x,y\}\subset BV([a;\,b])$, де $V(f;\,[a;\,b])$ – варіація функції f на відрізку $[a;\,b]$.

В 5

5.17. (О) Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R},\,\rho)$:

1) $\mathbb{Z}$; 2) $\mathbb{Q}$; 3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; 4) $\Big\{\operatorname{tg}x\,|\ x\in\mathbb{Q}\cap\Big(-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big\}$?

5.18. (О) Довести сепарабельність простору $\mathbb{R}^2$ з метрикою

$$d\big((x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\big)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,\ \{(x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\}\subset\mathbb{R}^2.$$

5.19. (О) Які з наведених множин скрізь щільні в $C([0;\,1])$ з метрикою

$$d(x,y)=\Bigl(\int\limits_0^1\bigl(x(t)-y(t)\bigr)^2\,dt\Bigr)^{1/2},\quad \{x,y\}\subset C([0;\,1]):$$

1) множина всіх поліномів, що розглядаються на $[0;\,1]$;
2) множина всіх диференційовних функцій на $[0;\,1]$;
3)* множина всіх поліномів p, для яких $p(0)=0$?

5.20. (О) Довести, що множина $A\subset X$ скрізь щільна в метричному просторі $(X,\,\rho)$ тоді й лише тоді, коли A має непорожній перетин з кожною відкритою кулею в $(X,\,\rho)$.

5.21. (І) Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R},\,\rho)$:

1) $\left\{\frac{m}{n^2}\mid m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$;
2) $\left\{\frac{m}{\sqrt{n}}\mid m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$;
3) $\{\ln m-\ln n\mid \{m,n\}\subset\mathbb{N}\}$;
4) $\{n\cdot\sin r\mid n\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Q}\}$;
5) $\mathbb{N}$;
6) $\{r\sqrt{2}\mid r\in\mathbb{Q}\}$;
7) $\{n+\cos r\mid n\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Q}\}$?

5.22. (І) Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$:

1) $\{(n\cdot\sin r_1,\,n\cdot\cos r_2)\mid n\in\mathbb{N},\ \{r_1,\,r_2\}\subset\mathbb{Q}\cap[0;\,2\pi]\}$;
2) $\{(r_1+r_2,\,r_1-r_2)\mid \{r_1,\,r_2\}\subset\mathbb{Q}\}$;
3) $\{(x_1,\,x_2)\mid x_2=rx_1,\ r\in\mathbb{Q},\ x_1\in\mathbb{R}\}$;
4) $\left\{\left(\frac{n}{m},\,\frac{m}{n}\right)\mid \{m,\,n\}\subset\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$;
5) $\{(m+\sin r_1,\,n+\sin r_2)\mid \{m,\,n\}\subset\mathbb{Z},\ \{r_1,\,r_2\}\subset\mathbb{Q}\}$;
6) $\{(r_1\sqrt{2},\,r_2\sqrt{3})\mid \{r_1,\,r_2\}\subset\mathbb{Q}\}$;
7) $\{(n\cdot\cos r,\,n\cdot\sin r)\mid n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Q}\}$?

5.23. (І) Які з наведених множин скрізь щільні в $\bigl(C([0;\,1]),\,\rho\bigr)$:

1) множина всіх поліномів з ірраціональними коефіцієнтами;
2) множина всіх поліномів непарного степеня;
3) множина поліномів з вільним членом, що дорівнює нулю;
4) множина всіх поліномів вигляду
$$p(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^{2k},\ x\in[0;\,1],$$
де $m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \{a_0,\ldots,a_m\}\subset\mathbb{R}$;
5) множина всіх функцій вигляду
$$g(x)=\sum_{k=0}^{m}a_ke^{kx},\ x\in[0;\,1],$$
де $m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \{a_0,\ldots,a_m\}\subset\mathbb{R}$?

Заняття 6

Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори

Контрольні запитання

1) Означення фундаментальної послідовності в метричному просторі.

2) Означення повного метричного простору.

3) Приклади повних просторів.

А 6

6.1. (О) Нехай послідовність $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ точок простору (X, ρ) фундаментальна, а послідовність $\{y_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $\rho(x_n, y_n) \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що $\{y_n \ : \ n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність у просторі (X, ρ).

6.2. (О) Послідовність $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ точок метричного простору (X, ρ) задовольняє умову

$$\forall\, n \geq 1 \ : \quad \rho(x_n,\, x_{n+1}) \leq 2^{-n}.$$

Довести фундаментальність послідовності $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$.

6.3. (О) Які з наведених метричних просторів повні:

1) (X, ρ), де $X = (0;\, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\quad \{x, y\} \subset X$;

2) $(\mathbb{R}^2, d)$, де
$$d\big((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,\ \{(x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2?$$

6.4. (О) Довести повноту метричного простору $\big(C([a;\, b]),\, d\big)$, де
$$d(x, y) = \max_{t \in [a;\, b]} \big(e^{-t} \cdot |\, x(t) - y(t)\, |\big), \quad \{x, y\} \subset C([a;\, b]).$$

6.5. (С) Довести обмеженість фундаментальної послідовності елементів метричного простору.

6.6. (С) Нехай $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ й $\{y_n \ : \ n \geq 1\}$ – фундаментальні послідовності в метричному просторі (X, ρ). Довести збіжність числової послідовності $\{\rho(x_n,\, y_n) \ : \ n \geq 1\}$.

6.7. (С) Перевірити повноту простору $(\mathbb{R}^3, d)$ з метрикою
$$d\big((x_1, x_2, x_3),\, (y_1, y_2, y_3)\big) = \max_{1 \leq k \leq 3} |\, x_k - y_k\, |,$$
де $\{(x_1, x_2, x_3),\, (y_1, y_2, y_3)\} \subset \mathbb{R}^3$.

6.8. (С) Довести повноту простору $C([0;\, 1])$ з метрикою
$$d(x, y) = \max_{t \in [0;\, 1]} \big(e^{t} \cdot |\, x(t) - y(t)\, |\big), \quad \{x, y\} \subset C([0;\, 1]).$$

6.9. (Д) Нехай $(X_k,\, \rho_k)$, $\quad k = 1, 2,$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести такі твердження:

1) послідовність $\{(x_1^{(n)},\, x_2^{(n)}) \ : \ n \geq 1\}$ фундаментальна в просторі $(X,\, \rho)$ тоді й тільки тоді, коли послідовності $\{(x_1^{(n)} \ : \ n \geq 1\}$ та $\{(x_2^{(n)} \ : \ n \geq 1\}$ фундаментальні відповідно в просторах $(X_1,\, \rho_1)$ та $(X_2,\, \rho_2)$;
2) простір $(X,\, \rho)$ повний тоді й тільки тоді, коли обидва простори $(X_1,\, \rho_1)$ та $(X_2,\, \rho_2)$ повні.

6.10. (Д) Довести повноту простору $(l_2,\, \rho_2)$.

6.11. (Д) Нехай $(X,\, \rho)$ – метричний простір, $A \subset X$. Довести, що з повноти простору $(A,\, \rho)$ випливає замкненість множини A в просторі $(X,\, \rho)$.

6.12. (Д) Довести повноту простору $(C^{(1)}([0;\, 1]),\, \rho)$ (див. задачу 2.9).

6.13.* (Д) Довести неповноту таких просторів:

1) $C([a;\, b])$ з інтегральною метрикою

$$d(x,y) = \int_a^b |\, x(t) - y(t)\, |\, dt, \quad \{x,y\} \subset C([a;\, b]);$$

2) множина всіх неперервно диференційовних на $[a;\, b]$ функцій $C^{(1)}([a;\, b])$ з метрикою

$$d(x,y) = \max_{t \in [a;\, b]} |\, x(t) - y(t)\, |, \quad \{x,y\} \subset C^{(1)}([a;\, b]).$$

В 6

6.14. (О) Нехай $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність у метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що для будь-якого $x \in X$ числова послідовність $\{\rho(x_n, x) \ : \ n \geq 1\}$ фундаментальна.

6.15. (О) Нехай $(X,\, \rho)$ – повний метричний простір, A – замкнена множина в $(X,\, \rho)$. Довести, що $(A,\, \rho)$ – повний метричний простір.

6.16. (О) Нехай $\mathcal{P}([0;\, 1])$ – сім'я всіх поліномів, що розглядаються на відрізку $[0;\, 1]$,

$$\rho(p,q) = \max_{t \in [0;\, 1]} |\, p(t) - q(t)\, |, \quad \{p,q\} \subset \mathcal{P}([0;\, 1]).$$

Чи є $\big(\mathcal{P}([0;\, 1]),\, \rho\big)$ повним метричним простором?

6.17. (О) Нехай

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{3} |\, x_k - y_k\, |, \ \{x = (x_1, x_2, x_3), \ y = (y_1, y_2, y_3)\} \subset X.$$

Чи є метричний простір $(X,\, d)$ повним?

6.18. (I) З'ясувати, чи є повними такі простори:

1) $(\mathbb{Z},\ \rho)$; 3) $([0;\ 1],\ \rho)$; 5) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \rho)$;
2) $(\mathbb{Q},\ \rho)$; 4) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \rho)$; 6) $((-\infty;\ 1]\cup\{2\},\ \rho)$

(у п. 1) – 6) ρ – евклідова метрика на $\mathbb{R}$);

7) $(\mathbb{R}^3,\ d)$, $\quad d(x,y)=\max\limits_{1\le k\le 3}\sqrt{|\,x_k-y_k\,|}$,
$\{x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3)\}\subset\mathbb{R}^3$;

8) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ з евклідовою метрикою ρ.

6.19. (I) Довести повноту простору $(\mathbb{R}^m,\ d)$, якщо для $\{x=(x_1,\ldots,x_m),$ $y=(y_1,\ldots,y_m)\}\subset\mathbb{R}^m$:

1) $d(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{m}|\,x_k-y_k\,|$;

2) $d(x,y)=\max\limits_{1\le k\le m}|\,x_k-y_k\,|$;

3) $d(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{|\,x_k-y_k\,|}{k}$;

4) $d(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{m}k\,|\,x_k-y_k\,|$;

5) $d(x,y)=\max\limits_{1\le k\le m}\dfrac{|\,x_k-y_k\,|}{k}$;

6) $d(x,y)=\max\limits_{1\le k\le m}k\,|\,x_k-y_k\,|$;

7) $d(x,y)=\sqrt{|\,x_1-y_1\,|}+\sum\limits_{k=2}^{m}|\,x_k-y_k\,|$;

8) $d(x,y)=|\,x_1-y_1\,|+\max\limits_{2\le k\le m}|\,x_k-y_k\,|$;

9) $d(x,y)=\big(\sum\limits_{k=1}^{m}k^2(x_k-y_k)^2\big)^{1/2}$;

10) $d(x,y)=|\,x_1-y_1\,|+\big(\sum\limits_{k=2}^{m}(x_k-y_k)^2\big)^{1/2}$.

6.20. (I) Послідовність $\{x_n\ :\ n\ge 1\}$ точок метричного простору $(X,\ \rho)$ задовольняє умови:

а) $\forall\, n\ge 1\ :\ \rho(x_n,x_{n+2})\le a_n$; б) $\rho(x_n,x_{n+1})\to 0,\ n\to\infty$.

Довести, що послідовність $\{x_n\ :\ n\ge 1\}$ фундаментальна в кожному з наведених випадків:

1) $a_n=3^{-n}$;

2) $a_n=e^{-n}$;

3) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$;

4) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$;

5) $a_n=\dfrac{1}{n\,\ln^2(n+1)}$;

6) $a_n=\dfrac{1}{n}\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$;

7) $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $\quad n\ge 1$.

8) Чи є послідовність $\{x_n\ :\ n\ge 1\}$ фундаментальною, якщо $a_n=\dfrac{1}{n}$, $\quad n\ge 1$?

Заняття 7

Дійсні функції на $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$. Границя функції в точці. Властивості границь

Контрольні запитання

1) *Означення границі функції* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *у точці.*
2) *Властивості границь.*

А 7

7.1. (О) Виходячи з означення, знайти границю

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (0,0,\ldots,0)} (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|).$$

7.2. (О) Довести, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, визначена співвідношенням

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0 < x_2 < x_1^2, \\ 0 & \text{у решті точок}, \end{cases}$$

не має границі в точці $(0,\ 0)$, але звуження цієї функції на будь-яку пряму

$$A_\alpha = \{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

де $\alpha \in [0;\ 2\pi)$ фіксоване, має границю 0 у точці $(0,\ 0)$.

7.3. (О) Знайти границі:

1) $\displaystyle\lim_{(x_1, x_2) \to (0,\,0)} (x_1^2 + x_2^2)^{x_1^2 x_2^2}$;

2) $\displaystyle\lim_{(x_1, x_2) \to (1,\,0)} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

7.4. (О) Знайти границі:

1) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}$;

2) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} (x_1^2 + x_2^2)\, e^{-(x_1 + x_2)}$;

3) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} \left(\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^{x_1^2}$.

7.5. (С) Для фіксованого числа $a \in \mathbb{R}$ знайти границю

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (0, a)} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1}.$$

7.6. (С) Знайти границі:

1) $\displaystyle\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (0,0,\ldots,0)} \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_m)}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} (\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}+x_1+x_2^2+\ldots+x_m^m)$.

7.7. (С) Чи існують границі:

1) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} \dfrac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_m^3}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$?

7.8. (С) Знайти границі:

1) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x_1^2x_2^2}-1}{x_1^2+x_2^2}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)}{1-\cos(x_1^2+x_2^2)}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (1+x_1^2\,x_2^2)^{(x_1^2+x_2^2)^{-1}}$.

7.9. (Д) Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2\,x_2}{x_1^4+x_2^2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

не має границі в точці $(0,0)$, але її звуження на будь-яку пряму

$$A_\alpha=\{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)\mid t\in\mathbb{R}\},$$

де $\alpha\in[0;2\pi)$ фіксоване, має границю 0 у точці $(0,0)$.

7.10. (Д) Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_2\exp(-x_1^{-2})}{x_2^2+\exp(-2x_1^{-2})},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

не має границі в точці $(0,0)$, але її звуження на кожну множину

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_2=cx_1^\alpha,\ x_1>0\},$$

де $\alpha>0$ та $c\in\mathbb{R}$ фіксовані, має границю 0 у точці $(0,0)$.

В 7

7.11. (І) Знайти та зобразити множини визначення функцій відповідно в просторах $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$:

1) $f(x_1,x_2)=\ln(-x_1-x_2)$;

2) $f(x_1,x_2)=\sqrt{3-x_1^2-x_2^2}$;

3) $f(x_1,x_2)=\sqrt{-x_1}+\sqrt{-x_2}$;

4) $f(x_1,x_2)=\dfrac{\sqrt{4x_1^2-x_2^2}}{\ln(1-x_1^2-x_2^2)}$;

5) $f(x_1,x_2,x_3)=\ln(x_1x_2x_3)$;

6) $f(x_1,x_2)=\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{x_2^2-1}$;

7) $f(x_1,x_2)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2-1)(4-x_1^2-x_2^2)}$;

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(-1 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$;

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln\sqrt{e^{x_1 x_2}(x_3 - x_2^2)}$;

10) $f(x_1, x_2, x_3) = \arcsin\dfrac{x_1}{a} + \arcsin\dfrac{x_2}{b} + \arcsin\dfrac{x_3}{c}$, де $\{a, b, c\}$ – фіксовані числа, $abc \neq 0$.

7.12. (О) З'ясувати, чи існують границі:

1) $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_m)\to(0,\ldots,0)} \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_m)\to(0,\ldots,0)} \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

7.13. (І) Сформулювати означення границі в таких випадках:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to-\infty}} f(x_1, x_2)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} f(x_1, x_2)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty \\ x_2\to+\infty}} f(x_1, x_2)$;

4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty \\ x_2\to-\infty}} f(x_1, x_2)$;

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to1 \\ x_2\to-\infty}} f(x_1, x_2)$;

6) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to0}} f(x_1, x_2)$;

7) $\lim\limits_{\substack{x_1\to1 \\ x_2\to+\infty}} f(x_1, x_2)$;

8) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty \\ x_2\to0}} f(x_1, x_2)$.

7.14. (І) Знайти границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} \dfrac{x_1 + x_2}{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to1}} \left(1 + \dfrac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1^2}{x_1+x_2}}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x_1^4x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$;

4) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x_1^4+x_2^4}\right)}{x_1^4 + x_2^4}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} \dfrac{(x_1 + x_2)^2}{(x_1^2 + x_2^4)^2}$;

6) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} (x_1^2 + x_2^2)\sin\dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$;

7) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,1)} f(x_1, x_2)$, де

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2}{x_1^3 - x_2^3}, & x_1 \neq x_2, \\[2mm] \dfrac{4}{3}, & x_1 = x_2; \end{cases}$$

8) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2)$, де

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(1 + x_2)}{x_1^2 + x_2}, \quad x_2 = x_1^2,\ x_1 \in \mathbb{R};$$

9) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ x_2\to+\infty}} f(x_1, x_2)$, де

$$f(x_1, x_2) = \left(1 + \frac{1}{x_1^2}\right)^{x_2}, \quad x_2 = x_1^2,\ x_1 \in \mathbb{R};$$

10) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,1)} f(x_1,x_2)$, де

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2x_2}{\sqrt{1+x_1^2x_2}-1}, & x_1x_2\neq 0,\\ 2, & x_1x_2=0.\end{cases}$$

7.15. (I) Довести, що наведені границі не існують:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to -\infty}} x_1x_2$;

2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} (x_1-x_2)$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_1^{x_2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to -\infty\\ x_2\to -\infty}} \dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$;

6) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to +\infty}} x_1^{x_2}$;

8) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to 0}} x_1^{x_2}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \dfrac{x_1}{x_2}$;

10) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \dfrac{x_1}{x_2}$.

Заняття 8

Границя функції в точці. Повторні границі

Контрольні запитання

1) *Означення границі функції, визначеної на метричному просторі.*
2) *Означення повторних границь.*

А 8

8.1. (О) З'ясувати, чи існують границі наведених дійсних функцій на $\big(C([0;\,1],\,\rho\big)$ в точці $x_0 \in C([0;\,1])$, де $x_0(t) = 0,\ t \in [0;\,1]$:

1) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt;$

2) $f(x) = \int\limits_0^1 tx^2(t)\,dt;$

3) $f(x) = \dfrac{\Big(\int\limits_0^1 x(t)\,dt\Big)^2}{\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt}.$

8.2. (О)

1) Довести, що функція
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\},$$
має обидві повторні границі в точці $(0,\,0)$, але подвійна границя в цій точці не існує.

2) Довести, що функція
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}, \quad x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,$$
має подвійну границю в точці $(0,\,0)$, але обидві повторні границі в цій точці не існують.

8.3. (С) Довести, що існують обидві повторні границі функції
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, \quad x_1 \neq -x_2,$$
в точці $(0,\,0)$, але подвійна границя в цій точці не існує.

8.4. (С) Знайти повторні границі $\lim\limits_{x_1 \to +\infty}\big(\lim\limits_{x_2 \to +\infty} f(x_1, x_2)\big)$ і $\lim\limits_{x_2 \to +\infty}\big(\lim\limits_{x_1 \to +\infty} f(x_1, x_2)\big)$ таких функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,\,0)\};$

2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^{x_2}}{1 + x_1^{x_2}}, \quad (x_1, x_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R};$

3) $f(x_1, x_2) = \sin\dfrac{\pi x_1}{2x_1 + x_2}, \quad x_2 \neq -2x_1.$

8.5. (Д) З'ясувати, чи існує границя дійсної функції
$$f(x) = \Big(\int\limits_0^1 \big(t + x(t)\big)^2\,dt - \tfrac{1}{3}\Big)\Big(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\Big)^{-1/3},\ x \neq x_0,$$

на $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$ в точці x_0, де $x_0(t)=0,\ t\in[0;\,1]$.

8.6. (Д)

1) Навести приклад дійсної функції двох змінних, для якої подвійна границя та одна з повторних у точці $(0,\,0)$ існують та рівні між собою, а інша повторна границя не існує.
2) Навести приклад дійсної функції двох змінних, для якої існує лише одна повторна границя в точці $(0,\,0)$ та не існує подвійна границя в цій точці.

8.7. (Д) Нехай для дійсної функції двох змінних у деякій точці існують подвійна границя та одна з повторних. Довести рівність цих границь.

В 8

8.8. (О) З'ясувати, чи існує границя дійсної функції

$$f(x)=\int\limits_0^1\big(t+x(t)\big)^2\,dt+x(0)$$

на $\big(C([0;\,1],\,\rho\big)$ в точці x_0, де $x_0(t)=0,\ t\in[0;\,1]$.

8.9. (О) Знайти обидві повторні границі кожної з функцій у точці $(a,\,b)$:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1x_2}\operatorname{tg}\dfrac{x_1x_2}{1+x_1x_2},\quad x_1x_2\notin\{0,-1\};\quad a=0,\ b=+\infty;$
2) $f(x_1,x_2)=\log_{x_1}(x_1+x_2),\quad x_1>0,\ x_1\neq 1,\ x_1+x_2>0;$ $a=1,\ b=0.$

8.10. (І) З'ясувати, чи існують подвійна та кожна з повторних границь у точці $(0,\,0)$ таких функцій:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2\sin\frac{1}{x_1}+x_2}{x_1+x_2},\quad x_1\neq 0,\ x_1+x_2\neq 0;$
2) $2f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1\sin\dfrac{1}{x_2}, & x_2\neq 0,\\ 0, & x_2=0,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
3) $f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2-x_2^2}{|x_1|-|x_2|}, & |x_1|\neq|x_2|,\\ 0, & |x_1|=|x_2|,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
4) $f(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1x_2\neq 0,\\ 1, & x_1x_2=0,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
5) $f(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ x_2, & x_1\in\mathbb{Q},\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
6) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_2}{x_1},\quad x_1\neq 0.$

Заняття 9

Дійсні неперервні функції на $\mathbb{R}^m$

Контрольні запитання

1) *Означення дійсної неперервної функції на* $\mathbb{R}^m$.
2) *Властивості неперервних функцій.*

А 9

9.1. (О) Знайти точки розриву функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\};$

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{x_1^3 + x_2^3}, & x_1 \neq -x_2, \\ (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)^{-1}, & x_1 = -x_2,\ x_1 \neq 0, \\ 1, & x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

9.2. (О) Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\,0), \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

неперервна в точці 0 за будь-якою змінною при довільному фіксованому значенні іншої , але як функція двох змінних розривна в точці $(0,\,0)$.

9.3. (О) Нехай функції $f : (a_1;\, b_1) \times (a_2;\, b_2) \to \mathbb{R},\ \varphi : (a_1;\, b_1) \to (a_2;\, b_2)$ неперервні. Довести, що функція

$$F(x) = f\big(x,\, \varphi(x)\big), \quad x \in (a_1;\, b_1)$$

неперервна на $(a_1;\, b_1)$.

9.4. (О) Для фіксованого вектора $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ знайти точки неперервності функції

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \Big(\sum_{k=1}^{m} (x_k - a_k)^2\Big)^{1/2} \exp\Big(-\sum_{k=1}^{m} |x_k|\Big), \quad (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

9.5. (О) Довизначити за неперервністю функцію

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\},$$

у точці $(0,\,0)$.

9.6. (С) Довести, що функція

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\,0), \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

розривна в точці $(0, 0)$, але при кожному $\alpha \in [0; 2\pi)$ неперервна на прямій
$$A_\alpha = \{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

9.7. (С) Нехай дійсні функції $f : (a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \to \mathbb{R}$, $\varphi : (a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \to (a_1; b_1)$, $\psi : (a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \to (a_2; b_2)$ неперервні. Довести, що функція
$$F(x_1, x_2) = f\big(\varphi(x_1, x_2),\, \psi(x_1, x_2)\big), \quad (x_1, x_2) \in (a_1; b_1) \times (a_2; b_2)$$
неперервна на $(a_1; b_1) \times (a_2; b_2)$.

9.8. (С) Знайти множини, на яких наведені функції є неперервними:

1) $f(x_1, \ldots, x_m) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|}, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m;$

2) $f(x_1, \ldots, x_m) = \big(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\big)^{-1} \exp\Big(-\big(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\big)^{-1}\Big),$
$(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \ldots, 0)\}.$

9.9. (С) Довизначити за неперервністю функцію
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2^3}{x_1^4 + x_2^4}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$
у точці $(0, 0)$.

9.10. (Д) Нехай
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2, \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Довести, що функції f і φ розривні на множинах визначення, але їх суперпозиція
$$F(x_1, x_2) = \varphi\big(f(x_1, x_2)\big), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
є неперервною функцією на $\mathbb{R}^2$.

9.11. (Д) Нехай функції $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ k = 1, 2$, неперервні. Довести, що функція
$$F(x_1, \ldots, x_m) = \max\{f_1(x_1, \ldots, x_m),\ f_2(x_1, \ldots, x_m)\},\ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$
неперервна на $\mathbb{R}^m$.

9.12. (Д) Нехай G – відкрита множина в $\mathbb{R}^2$, функція $f : G \to \mathbb{R}$ неперервна за першою змінною при кожному фіксованому значенні другої змінної та задовольняє умову Ліпшиця за другою змінною, тобто
$$\exists\, L \geq 0\ \forall\, (x, y) \in G\ \forall\, (x, z) \in G : \ |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|.$$
Довести, що $f \in C(G)$.

9.13. (Д) Нехай $f \in C([a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2])$, послідовність функцій $\{\varphi_n : [a_1;\, b_1] \to [a_2;\, b_2] \,:\, n \geq 1\}$ збігається рівномірно на $[a_1;\, b_1]$. Довести, що послідовність функцій

$$\{F_n(x) = f\big(x,\, \varphi_n(x)\big), \quad x \in [a_1;\, b_1] \,:\, n \geq 1\}$$

рівномірно збігається на $[a_1;\, b_1]$.

В 9

9.14. (I) Знайти точки розриву дійсних функцій на $\mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 16 - x_1^2 - x_2^2, & x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > 16; \end{cases}$

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, & x_1 \neq -x_2, \\ 1, & x_1 = -x_2; \end{cases}$

3) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 - 3}{x_1^2 + x_2^2 - 4}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 4, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 4; \end{cases}$

4) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2^2}{x_1 + x_2^2}, & x_1 \neq -x_2^2, \\ 0, & x_1 = -x_2^2; \end{cases}$

5) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{x_1^3 - x_2^3}, & x_1 \neq x_2, \\ 3, & x_1 = x_2; \end{cases}$

6) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \ln(9 - x_1^2 - x_2^2), & x_1^2 + x_2^2 < 9, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq 9; \end{cases}$

7) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{3}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\, 0); \end{cases}$

8) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}, & |x_1| \neq |x_2|, \\ 1, & |x_1| = |x_2|; \end{cases}$

9) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x_1 + x_2}, & x_1 \neq -x_2, \\ 0, & x_1 = -x_2; \end{cases}$

10) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 x_2}, & x_1 x_2 \neq 0, \\ 1, & x_1 x_2 = 0. \end{cases}$

9.15. (I) Довести неперервність дійсних функцій на $\mathbb{R}^m$:

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m);$
2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \cos(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m);$
3) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2);$
4) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m)^{1/3};$
5) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + mx_m);$
6) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}{1 + x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_m^4};$
7) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)}{2(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)};$
8) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \arcsin^2\Bigl(\dfrac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|}{1 + |x_1| + \ldots + |x_m|}\Bigr);$
9) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sqrt{x_1^2 + x_2^4 + x_3^6 + \ldots + x_m^{2m}};$
10) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \operatorname{ctg}\bigl(\exp(-|x_1| - |x_2| - \ldots - |x_m|)\bigr).$

9.16. (I) Довизначити за неперервністю на $\mathbb{R}^2$ дійсну функцію f, визначену на множині A :

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 1)^2(x_2 - 2)^3}{(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2},$
$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\};$

у задачах 2–10 множина $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{e^{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2};$
3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^6 + x_2^6} \cdot \exp\Bigl(-\dfrac{1}{x_1^6 + x_2^6}\Bigr);$
4) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{1 + x_1^2 x_2^2} - 1}{x_1^2 + x_2^2};$
5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\ln(1 + |x_1 x_2|)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$
6) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\sin(x_1^4 x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2};$
7) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1 - \cos(x_1^4 + x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2};$
8) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2^2}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} - 1};$
9) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\sin(x_1^3 + x_2^3)}{x_1^2 + x_2^2};$
10) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1 x_2^2)^{\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}}.$

Заняття 10

Неперервні функції. Теорема про характеризацію неперервності

Контрольні запитання

1) *Означення неперервного в точці відображення одного метричного простору в інший.*
2) *Теорема про характеризацію неперервного відображення.*

А 10

10.1. (О) Довести неперервність на $\big(C[a;\, b]),\, \rho\big)$ дійсних функцій:

1) $f(x) = x(a)$;
2) $f(x) = \int\limits_a^b \sin x(t)\, dt$;
3) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2) \sin t\, dt$, $[a;\, b] = [0;\, 1]$.

10.2. (О) Довести неперервність відображення $f : C([0;\, 1]) \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \Big(\int\limits_0^1 x(t) \sin \pi t\, dt,\ \int\limits_0^1 x(t) \cos \pi t\, dt\Big).$$

На $C([0;\, 1])$ розглядається рівномірна метрика, на $\mathbb{R}^2$ – евклідова.

10.3. (О) Нехай (X, ρ) – метричний простір, $f \in C(X; \mathbb{R})$. Довести твердження:

1) множини $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$; $\{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$ замкнені;
2) множина $\{x \in X \mid 1 < f(x) < 2\}$ відкрита.

10.4. (О) Довести, що множини

1) $\{(x_1, \ldots, x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^m x_k^2 = 1\}$;
2) $\{(x_1, \ldots, x_m) \mid 1 \leq \sum\limits_{k=1}^m x_k^2 \leq 4\}$

замкнені й обмежені в $(\mathbb{R}^m, \rho)$.

10.5. (С) Довести, що наведені дійсні функції неперервні на $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$:

1) $f(x) = x(a) + x(b)$;
2) $f(x) = \max\limits_{t \in [a;\, b]} x(t)$.

10.6. (С) Довести, що множина

$$\Big\{x \in C([a;\, b]) \mid \int\limits_a^b x^3(t)\, dt \geq 1\Big\}$$

замкнена в $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$.

10.7. (С) Довести, що множина

$$\big\{(x_1, \ldots, x_m) \mid 10 \leq e^{x_1} + \ldots + e^{x_m} \leq 100\big\}$$

замкнена в $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$. Чи є ця множина обмеженою?

10.8. (Д) Для відображення f із задачі 10.2 знайти $f\big(C([0;\, 1])\big)$.

10.9. (Д) Довести, що дійсна функція

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-k} \int_a^b x^k(t)\, dt$$

неперервна на $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$.

10.10. (Д) Довести, що множина

$$\Big\{x \in C([a;\, b]) \mid \int_a^b x^2(t)\, dt < \int_a^b |\, x(t)\,|\, dt\Big\}$$

відкрита в $\big(C([a;\, b],\, \rho\big)$.

10.11. (Д) Довести неперервність відображень простору $\big(C([a;b]), \rho\big)$ в себе:

1) $\big(f(x)\big)(t) = \int_a^t \sin x(u)\, du,\ t \in [a;\, b]$;

2) $\big(f(x)\big)(t) = \int_a^b \sin\big(t + x(u)\cdot t^2\big)\, du,\ t \in [a;\, b]$.

10.12. (Д) Довести, що множина

$$\Big\{(x_1, x_2, \ldots) \in l_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} x_k < 1\Big\}$$

відкрита в $(l_2,\, \rho)$. Чи є вона обмеженою в цьому просторі?

10.13. (О) Нехай $(X_k,\, \rho_k),\quad k = 1, 2$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4). Довести, що простір $(X,\, \rho)$ зв'язний тоді й лише тоді, коли обидва простори $(X_k,\, \rho_k),\ k = 1, 2$ зв'язні.

В 10

10.14. (І) Довести неперервність дійсних функцій на $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$:

1) $f(x) = \int_a^b x^2(t)\, dt$;

2) $f(x) = \int_a^b \operatorname{arctg} x(t)\, dt$;

3) $f(x) = \max\limits_{t \in [a;\, b]} \operatorname{arctg} x(t)$;

4) $f(x) = \int_a^b \exp\big(x(t)\big)\, dt$;

5) $f(x) = \min\limits_{t \in [a;\, b]} \ln(1 + |\, x(t)\,|)$;

6) $f(x) = \int_a^b \cos x(t)\, dt$;

7) $f(x) = \int_a^b x^3(t)\, dt$;

8) $f(x) = e^{x(a)} + \ln\big(1 + |x(b)|\big)$;

9) $f(x) = \dfrac{\max\limits_{t \in [a;\, b]} |\sin x(t)|}{1 + |\, x\big(\frac{a+b}{2}\big)\,|}$;

10) $f(x) = \int_a^b \dfrac{x(t)}{1 + x^2(t)}\, dt$.

Вказівка. Скористатись теоремою Лагранжа про скінченні прирости.

10.15. (I) З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті в $(\mathbb{R}^m, \rho)$:

1) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} k^{-2}x_k^2 = 1\}$;

2) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \sqrt{|x_k|} \le 1\}$;

3) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^3 > 100\}$;

4) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} kx_k < 10\}$;

5) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ 1 \le \sum\limits_{k=1}^{m} e^{x_k} \le 2\}$;

6) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \ln(1+|x_k|) = e\}$;

7) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\, 1 < \prod\limits_{k=1}^{m} x_k < 3\}$;

8) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \prod\limits_{k=1}^{m} (x_k)^k \ge 5\}$;

9) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{arctg}|x_k| < \dfrac{m\pi}{4}\}$;

10) $\{(x_1,\ldots,x_m)|\ \sum\limits_{k=1}^{m} k^{-1}x_k \le \pi\}$.

10.16. (I) З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті в $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$:

1) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k| = 1,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k = 0\}$;

2) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 < 1,\ \prod\limits_{k=1}^{m} x_k > 0\}$;

3) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \max\limits_{1\le k\le m} |x_k| \ge 1,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^3 = 2\}$;

4) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \le 25,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \le 20,\ x_1 = 3\}$;

5) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \min\limits_{1\le k\le m} x_k > 5,\ x_2 < 35\}$;

6) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\, e^{x_1+x_2} + e^{x_2+x_3} + \ldots + e^{x_{m-1}+x_m} > 1,\ \prod\limits_{k=1}^{m} x_k < 2\}$;

7) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \cos x_k > \dfrac{m}{2},\ \sum\limits_{k=1}^{m} \sin|x_k| < \dfrac{m}{2},\ \operatorname{tg}(x_1+x_2) > 1\}$;

8) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \ln(1+|x_k|) \ge 2,\ 1 \le \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \le 2\}$;

9) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{arctg} x_k = \dfrac{\pi m}{4},\ \min\limits_{1\le k\le m} x_k \ge 1,\ \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k)^k \le m\}$;

10) $\{(x_1,\ldots,x_m)\,|\, 2 < \sum\limits_{k=1}^{m} x_k < 3,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k > 0\}$.

10.17. (I) Довести неперервність наведених відображень $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1,\ldots,x_m) = (\sum\limits_{k=1}^{m} kx_k,\ x_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{m} k|x_k|)$;

2) $f(x_1,\ldots,x_m) = (\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|,\ \sum\limits_{k=1}^{m} k^{-1}x_k)$;

3) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(\sqrt{|x_1|} + \sum\limits_{k=2}^{m} x_k,\ \max\limits_{1\le k\le m} |x_k|\Big);$

4) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(\max\limits_{1\le k\le m} (kx_k),\ \max\limits_{1\le k\le m} (k^{-1}x_k)\Big);$

5) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(|x_1| + \max\limits_{1\le k\le m} |x_k|,\ \sum\limits_{k=1}^{m} k^2 x_k^2\Big);$

6) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(x_1 + (\sum\limits_{k=2}^{m} x_k^2)^{1/2},\ \sum\limits_{k=1}^{m} \arcsin \dfrac{x_k}{1+|x_k|}\Big);$

7) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^{x_k} e^{t^2}\,dt,\ \min\limits_{1\le k\le m} (kx_k)\Big);$

8) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(\prod\limits_{k=1}^{m} x_k,\ x_2\Big);$

9) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big(x_1^2 \cdot (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 + \sum\limits_{k=2}^{m} x_k^4)^{-1},\ \max\limits_{1\le k\le m} \operatorname{arctg} x_k\Big);$

10) $f(x_1,\dots,x_m) = \Big((1+|x_1|)^{x_2+x_m},\ (1+|x_2|)^{x_1+x_3}\Big).$

Заняття 11

Неперервні функції. Теорема про характеризацію неперервності

Контрольні запитання

1) *Означення рівномірно неперервного відображення одного метричного простору в інший.*
2) *Означення компактної множини.*
3) *Критерії компактності в* $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$ *та в* $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$.
4) *Властивості неперервних функцій на компакті.*
5) *Теорема Кантора про рівномірну неперервність.*

А 11

11.1. (О) Довести, що наведені дійсні функції рівномірно неперервні на $\mathbb{R}^m$:

1) $f(x_1, \ldots, x_m) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m$, де числа $\{a_k \,:\; 0 \le k \le m\}$ фіксовані;
2) $f(x_1, \ldots, x_m) = \sin(x_1 + \ldots + x_m)$;
3) $f(x_1, \ldots, x_m) = \operatorname{arctg} x_1 + \ldots + \operatorname{arctg} x_m$.

11.2. (О) Нехай множини F_1 та F_2 компактні в метричному просторі $(X,\, \rho)$. Чи компактні в цьому просторі множини:

1) $F_1 \cup F_2$, 2) $F_1 \cap F_2$, 3) $F_1 \setminus F_2$?

11.3. (О) Чи компактні наведені множини в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \le 1\}$;
3) $\{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
4) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 4,\; x_1 x_2 \le 1\}$?

11.4. (О)

1) Нехай F – компактна множина в метричному просторі $(X,\, \rho)$, $a \in X \setminus F$. Довести, що в множині F існує точка, що знаходиться на найменшій (найбільшій) відстані від a.
2) Довести, що функція
$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} |x_k| - \operatorname{arctg}(x_1 + \ldots + x_m)$$
на множині
$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid k \le x_k \le k+1,\; 1 \le k \le m\}$$
досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

11.5. (С) Довести, що дійсна функція
$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_1^2 + \ldots + x_m^2, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

неперервна, але не є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}^m$.

11.6. (С) Довести, що сума рівномірно неперервних дійсних функцій є рівномірно неперервною функцією.

11.7. (С) Нехай L – фіксоване невід'ємне число. Довести, що множина $\big\{x \in C([0;\,1]) \mid |x(0)| \le 1;\ \forall \{t_1, t_2\} \subset [0;\,1]:\ |x(t_1) - x(t_2)| \le L|t_1 - t_2|\big\}$ компактна в $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$.

11.8. (С) Довести, що функція

$$f(x_1, \ldots, x_m) = e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_{m-1} - x_m} + e^{x_m - x_1}$$

на множині

$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid 1 \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| \le 2,\ \prod_{k=1}^{m} x_k \ge 0\},$$

досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

11.9. (Д) Довести, що функція $f : C([a;\,b]) \to C([a;\,b])$

$$\big(f(x)\big)(t) = \int_a^b tx(t)\,dt,\ t \in [a;\,b],$$

рівномірно неперервна в $\big(C([a;\,b]),\,\rho\big)$.

11.10. (Д) Нехай F_k – компактна множина в метричному просторі $(X_k,\,\rho_k)$, $k = 1, 2$. Довести, що множина $F_1 \times F_2$ компактна в декартовому добутку $(X,\,\rho)$ цих просторів: $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.4).

11.11. (Д) Довести некомпактність наведених множин у $\big(C([0;\,1],\,\rho\big)$:

1) $\{t^n,\ t \in [0;\,1]\ :\ n \ge 1\}$;
2) замкнена куля $\overline{B}(0;\,1) = \{x \in C([0;\,1]) \mid \max\limits_{t \in [0;\,1]} |x(t)| \le 1\}$.

11.12. (Д)

1) Довести, що кожна замкнена куля в $(l_2,\,\rho)$ некомпактна.
2) Нехай $\{a_n\ :\ n \ge 1\} \subset [0;\,+\infty)$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$. Довести, що множина $\{(x_1, x_2, \ldots) \mid 0 \le |x_n| \le a_n,\ n \ge 1\}$ компактна в $(l_2,\,\rho)$.

11.13. (Д) Нехай $(X,\,\rho)$ – повний метричний простір. Для кожного $n \ge 1$: $\overline{B}_{n,1}, \ldots, \overline{B}_{n,m(n)}$ – довільний скінченний набір замкнених куль з радіусом $\frac{1}{n}$. Означимо

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m(n)} \overline{B}_{n,k}.$$

Довести, що множина K компактна в $(X,\,\rho)$.

В 11

11.14. (О) Нехай f та g – дійсні обмежені рівномірно неперервні функції, що визначені на підмножині A метричного простору. Довести, що їх добуток $f \cdot g$ – рівномірно неперервна на A функція.

11.15. (О) Нехай множини $F_k,\ k \geq 1$, компактні в просторі $(X,\,\rho)$. Чи компактні наведені множини в $(X,\,\rho)$:

1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, де n – фіксоване натуральне число;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$; 3) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$; 4) $X \setminus F_1$?

11.16. (І) Довести, що наведені дійсні функції рівномірно неперервні на відповідній множині A в $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$:

1) $f(x_1,x_2) = \sin(x_1 - |x_2|),\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ x_1^4 + x_2^4 \leq 100\}$;
2) $f(x_2,x_2) = \cos x_1x_2,\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ 16 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 25\}$;
3) $f(x_1,x_2) = \ln(1 + |x_1| + x_2^2),\ A = [1;\,2] \times [2;\,3]$;
4) $f(x_1,x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{t^2}\,dt,\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$;
5) $f(x_1,x_2) = \operatorname{arctg}^2(x_1x_2),\ A = \big\{(x_1,x_2)\,|\ \max\{|x_1|,|x_2|\} \leq 3\big\}$;
6) $f(x_1,x_2) = \arcsin\Big(\dfrac{x_1x_2}{1+|x_1x_2|}\Big),\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ |x_1| + |x_2| \leq 1\}$;
7) $f(x_1,x_2) = \exp(x_1^2 + x_2^2),\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ (x_1-x_2)^2 + (x_1+x_2)^2 \leq 1\}$;
8) $f(x_1,x_2) = x_1e^{x_2} + x_2e^{x_1},\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1^4 - x_2 \leq 1\}$;
9) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 \operatorname{arctg} x_1,\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ \sqrt{|x_1|} + x_2^2 \leq 2\}$;
10) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2},\ A = \{(x_1,x_2)\,|\ x_1 = x_2,\ 0 \leq x_1 \leq 1\}$.

11.17. (І) Чи компактні наведені множини в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$:

1) $\Big\{\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{m}{n}\Big)\,|\ n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \{(0,0,\ldots,0)\}$;
2) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq 9\}$;
3) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} \sqrt{|x_k|} \leq 1\}$;
4) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ \sqrt{|x_1|} + \max\limits_{2\leq k\leq m} |x_k| \leq 2\}$;
5) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ \prod\limits_{k=1}^{m} x_k \leq 1\}$;
6) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + \ldots + (x_m-1)^2 < 4\}$;
7) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m \leq 1\}$;
8) $\Big\{\Big(\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{\sin 2n}{n}, \ldots, \dfrac{\sin mn}{n}\Big)\,|\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;
9) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k| \leq 2,\ \sum\limits_{k=1}^{m} e^{x_k} \geq 3\}$;
10) $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,|\ -k \leq x_k \leq k,\ 1 \leq k \leq m\}$?

Заняття 12
Обчислення частинних похідних. Похідні за напрямком

Контрольні запитання

1) *Похідна за напрямком та її властивості.*
2) *Частинні похідні та їх властивості.*
3) *Формула для обчислення похідної за напрямком.*

А 12

12.1. (С) Знайти всі частинні похідні першого порядку функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 + \ln(x_1 + x_2^2) + x_1 \sin(x_1 + x_2), \quad x_1 > -x_2^2;$
2) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + \dfrac{x_1}{x_2} + \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} + \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{x_2}, \quad x_1x_2 > 0;$
3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^{x_2} + \arcsin \dfrac{1}{1 + x_1^2x_2^2}, \quad x_1 > 0;$
4) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + 2^{x_2} \operatorname{tg} x_1 + \cos^6(x_1x_2), \quad x_1 \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\};$
5) $f(x_1, x_2) = e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)} \operatorname{arctg} x_1^2, \quad x_1x_2 \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

12.2. (С) Знайти вказані частинні похідні функцій:

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3},$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \sin(x_2x_3) + (x_1^2 + x_2^2)e^{x_1 + x_3}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$$
2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \ \dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3},$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \ln(x_2x_3) + x_1x_2x_3e^{x_1 + x_2 + x_3}, \quad x_i > 0, \ i = 1, 2, 3;$$
3) $\dfrac{\partial^m f(\vec{0})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m},$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp\Big(\prod_{i=1}^m x_i\Big) + \ln\Big(1 + \sum_{i=1}^m x_i\Big), \quad \sum_{i=1}^m x_i > -1.$$

12.3. (О) Нехай
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\,0). \end{cases}$$
Довести, що $f''_{12}(0,\,0) \neq f''_{21}(0,\,0)$.

12.4. (С) Нехай
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\}.$$
Для $(x_1, x_2) \in A$ обчислити:

1) $g(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2};$

2) $h(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}$.

12.5. (С) Нехай
$$\Delta u = u''_{11} + u''_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$
Знайти Δf для таких функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
2) $f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

12.6. (С) Для фіксованих $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n}$ таких функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + 2x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
3) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)e^{x_1 - x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
4) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1 + x_2), \quad x_1 + x_2 > -1$;
5) $f(x_1, x_2) = (1 + 2x_1 + x_2)^\alpha, \quad 2x_1 + x_2 > -1$, де α – фіксоване дійсне число.

12.7. (С)

1) Знайти похідну функції
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^5, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
в точці $\vec{x}^{\,0} = (1,\, 1)$ за напрямком $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{2},\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2) Знайти похідну функції
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$
в точці $\vec{x}^{\,0} = (1, 1, 1)$ за напрямком $\vec{a} = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$. Знайти довжину градієнта в цій точці.

12.8. (Д)

1) Довести, що при довільних $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ функція
$$f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\},$$
задовольняє *рівняння Лапласа*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}.$$
2) Довести, що при довільних $\{a, \sigma\} \subset \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ функція
$$f(t, x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi t}} \exp\Big(-\frac{(x - a)^2}{4\sigma^2 t}\Big), \quad (t, x) \in (0; +\infty) \times \mathbb{R},$$
задовольняє *рівняння теплопровідності*
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0; +\infty) \times \mathbb{R}.$$

3) Довести, що при довільних $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}$ функція

$$f(x_1, x_2, x_2) = \Big(\sum_{k=1}^{3} (x_k - a_k)^2\Big)^{-1/2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a_1, a_2, a_3)\},$$

задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a_1, a_2, a_3)\}.$$

4) Довести, що при довільних $\{c_1, c_2, a\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ функція

$$f(x_1, x_2, x_3) = r^{-1}(c_1 e^{-ar} + c_2 e^{ar}),$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, задовольняє *рівняння Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = a^2 f, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

12.9. (Д) Довести, що наведені функції розривні в деяких точках, але мають обидві частинні похідні першого порядку на $\mathbb{R}^2$. Знайти точки розриву цих функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0); \end{cases}$

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \exp(-1/x_1^2)}{x_2^2 + \exp(-2/x_1^2)}, & x_1 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases}$

В 12

12.10. (І) Знайти частинні похідні першого порядку функцій:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2/x_3}, \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}, \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0,\ \left|\dfrac{x_2}{x_3}\right| < 1;$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = \Big(\operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2}\Big)^{x_3}, \quad x_1 x_2 > 0;$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = \Big(\sin \dfrac{x_1}{x_2}\Big)^{x_3}, \quad x_2 \neq 0,\ 0 < \dfrac{x_1}{x_2} < \pi;$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = \big(\operatorname{tg} x_1\big)^{x_2/x_3}, \quad 0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2},\ x_3 \neq 0;$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = \exp\big(x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\big), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

7) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + \ln x_2 + \ln\ln x_3), \quad x_k > e,\ k = 1, 2, 3;$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln \dfrac{1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1;$

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \operatorname{ctg}^2 x_3}, \quad 0 < x_3 < \dfrac{\pi}{2};$

10) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1x_2-x_3}{1+e^{x_1}+\sin x_2}, \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$

12.11. (I) Знайти градієнт і похідну функції $f\ :\ \mathbb{R}^m\ \to\ \mathbb{R}$ у точці $\vec{x}^{\,0}=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ за напрямком $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,\ldots,1),\ \vec{a}=\bigl(1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{m+1}\bigr);$

2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\exp(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2),$
$\vec{x}^{\,0}=(1,0,0,\ldots,0),\ \vec{a}=(0,1,1,\ldots,1);$

3) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\ln(1+\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}),$
$\vec{x}^{\,0}=\bigl(1,-1,1,\ldots,(-1)^{m+1}\bigr),\ \vec{a}=(1,1,\ldots,1);$

4) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\operatorname{arctg}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,2,0,0,\ldots,0),\ \vec{a}=(1,2,\ldots,m);$

5) $f(x_1,x_2\ldots,x_m)=\sin\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots x_m^2},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,0,0,\ldots,0,1),\ \vec{a}=(m,m-1,\ldots,2,1);$

6) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum\limits_{k=1}^{m}\cos^2 x_k^k,$
$\vec{x}^{\,0}=(0,0,\ldots,0),\ \vec{a}=(1,2,\ldots,m);$

7) $f(x_1,x_2\ldots,x_m)=\arcsin\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,0,0,\ldots,0),\ \vec{a}=(0,1,2,\ldots,m-1),\ m\geq 2;$

8) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_m^4)}{2(1+x_1^4+x_2^4+\ldots+x_m^4)},$
$\vec{x}^{\,0}=(0,0,\ldots 0),\ \vec{a}=(1,1,\ldots,1);$

9) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}+\pi)},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,\ldots,1),\ \vec{a}=\bigl(-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^m\bigr);$

10) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\dfrac{x_1x_2\ldots x_m}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2},$
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,\ldots,1),\ \vec{a}=(1,1,\ldots,1).$

12.12. (I) Нехай функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ має похідну третього порядку,

$$f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1\cdot x_2\cdot x_3), \quad (x_1,x_2,x_2)\in\mathbb{R}^3.$$

Довести, що для деякої функції $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f'''_{123}(x_1,x_2,x_3)=h(x_1\cdot x_2\cdot x_3), \quad (x_1,x_1,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

12.13. (I) Нехай функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ має похідну другого порядку. Знайти всі частинні похідні другого порядку функцій:

1) $f(x_1,x_2)=g(x_1+x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

2) $f(x_1,x_2)=g\Bigl(\dfrac{x_2}{x_1}\Bigr), \quad x_1\neq 0;$

3) $f(x_1,x_2)=g(\sqrt{x_1^2+x_2^2}), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\,0)\};$

4) $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1^2+x_2^2+x_3^2),\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

5) $f(x_1,x_2)=\int\limits_0^{x_1+x_2} g(t)\,dt,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

6) $f(x_1,x_2)=\int\limits_0^{x_1\cdot x_2} g(t)\,dt,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

12.14. (I) Нехай функція $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ має всі частинні похідні другого порядку. Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

1) $f(x_1,x_2)=g(ax_1,\,bx_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, де a,b – фіксовані дійсні числа;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1+x_2,x_3),\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

12.15. (I) Нехай функція $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ має всі частинні похідні другого порядку. Для довільних $\{a_i,\ i=1,2,3\}\subset\mathbb{R}$ означимо

$$f(x_1,x_2,x_3)=g(a_1x_1,\,a_2x_2,\,a_3x_3),\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Знайти всі частинні похідні другого порядку функції f.

12.16. (I) Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2},\quad x_1\neq x_2$;

$$f_1'+f_2'=\frac{x_1-x_2}{x_1^2+x_2^2};$$

2) $f(x_1,x_2)=\sin x_1+\cos(\sin x_1-\sin x_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$f_1'\cos x_2+f_2'\cos x_1=\cos x_1\cos x_2;$$

3) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_2}{\operatorname{arctg}(x_1^2-x_2^2)+\pi},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$x_1^{-1}f_1'+x_2^{-1}f_2'=x_2^{-2}f,\quad x_1x_2\neq 0;$$

4) для $n\in\mathbb{N}\quad f(x_1,x_2)=x_1^n\exp\Big(\dfrac{x_2}{x_1^2}\Big),\quad x_1\neq 0$;

$$x_1f_1'+2x_2f_2'=nf;$$

5) $f(x_1,x_2)=x_2\ln\big(1+(x_1^2-x_2^2)^2\big),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$x_2^2f_1'+x_1x_2f_2'=x_1f;$$

6) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2},\quad x_1\neq x_2$;

$$x_1f_1'+x_2f_2'=0;$$

7) $f(x_1,x_2)=\cos(x_1+\sin x_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$f_1'\cdot f_{12}''=f_2'\cdot f_{11}'';$$

8) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_2^2}{3x_1}+x_1^4x_2^4,\quad x_1\neq 0$;

$$x_1^2f_1'-x_1x_2f_2'+x_2^2=0;$$

9) $f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1+x_2}-x_2\ln\big(1+(x_1+x_2)^2\big),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$;

$$f_{11}''-2f_{12}''+f_{22}''=0;$$

10) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^5\sin\dfrac{x_2^2+x_3^2}{x_1^2},\quad x_1\neq 0;$

$$x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=5f.$$

12.17. (I) Нехай функції $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ мають похідні другого порядку. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1,x_2)=g(x_1^2+x_2^2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

$$x_2f_1'-x_1f_2'=0;$$

2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_2^2}{3x_1}+g(x_1x_2),\quad x_1\neq 0;$

$$x_1^2f_1'-x_1x_2f_2'+x_2^2=0;$$

3) $f(x_1,x_2)=e^{x_2}g\Big(x_2\exp\Big(\dfrac{x_1^2}{2x_2}\Big)\Big),\quad x_2\neq 0;$

$$(x_1^2-x_2^2)f_1'+x_1x_2f_2'=x_1x_2f;$$

4) $f(x,t)=g(x-at)+h(x+at),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad a$ – фіксоване дійсне число;

$$f''_{tt}=a^2f''_{xx};$$

5) $f(x_1,x_2)=x_1g(x_1+x_2)+x_2h(x_1+x_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

$$f''_{11}-2f''_{12}+f''_{22}=0;$$

6) $f(x_1,x_2)=g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big)+x_1h\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big),\quad x_1\neq 0;$

$$x_1^2f''_{11}+2x_1x_2f''_{12}+x_2^2f''_{22}=0;$$

7) $f(x_1,x_2)=x_1^ng\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big)+x_1^{n-1}h\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big),\quad x_1\neq 0,\quad n$ – фіксоване натуральне число;

$$x_1^2f''_{11}+2x_1x_2f''_{12}+x_2^2f''22=n(n-1)f;$$

8) $f(x_1,x_2)=g\big(x_1+h(x_2)\big),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

$$f_1'\cdot f''_{12}=f_2'\cdot f''_{11};$$

9) $f(x_1,x_2)=g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big),\quad x_1\neq 0;$

$$x_1f_1'+x_2f_2'=0;$$

10) $f(x_1,x_2)=x_1g(x_2^2-x_1^2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

$$x_1^2f_2'+x_1x_2f_1'=x_2f.$$

Заняття 13

Диференційовні функції. Диференціал

Контрольні запитання

1) *Означення диференційовної в точці функції однієї змінної.*
2) *Означення диференційовної в точці функції m змінних.*
3) *Необхідні та достатні умови диференційовності.*
4) *Означення диференціала першого та вищих порядків.*

А 13

Нехай функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^m$. Диференціалом $df(\vec{x}^{\,0}; \cdot)$ функції f у точці $\vec{x}^{\,0}$ є лінійна функція

$$df(\vec{x}^{\,0};\, \vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_k} a_k, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

13.1. (О) Дослідити диференційовність у точці $\vec{x}^{\,0}$ наведених функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0} = (0, 0);$
2) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_1}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0} = (0, 0);$
3) $f(x_1, x_2) = \operatorname{tg} \dfrac{x_1^2}{x_2}, \quad x_2 \neq 0, \ \left|\dfrac{x_1^2}{x_2}\right| < \dfrac{\pi}{2}; \quad \vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right);$
4) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0); \end{cases} \quad \vec{x}^{\,0} = (0, 0);$
5) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m;$ $\vec{x}^{\,0} = (0, 0, \ldots, 0).$

13.2. (С) Дослідити диференційовність у точці $(0, 0)$ функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0); \end{cases}$
3) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \cos \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$

13.3. (С) Знайти диференціал першого порядку в точці $\vec{x}^{\,0}$, обчислити його значення для вектора $\vec{a}$:

1) $f(x_1,x_2) = x_1^m x_2^n, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad m,n$ – фіксовані натуральні числа; $\quad \vec{x}^{\,0} = (1,2), \ \vec{a} = (2,1)$;

2) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2} + \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_2 \neq 0; \quad \vec{x}^{\,0} = (1,1), \ \vec{a} = (1,2)$;

3) $f(x_1,x_2) = \sin\sqrt{x_1^2+x_2^2} + \cos(x_1 - x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \ \vec{a} = (1/2, \, -1)$.

13.4. (О) Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити добуток

$$1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3.$$

13.5. (Д) Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0), \end{cases}$$

на $\mathbb{R}^2$ неперервна та має обмежені частинні похідні першого порядку, але недиференційовна в точці $(0,0)$.

13.6. (Д) Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1^2+x_2^2)\sin\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0): \end{cases}$$

а) має частинні похідні першого порядку на $\mathbb{R}^2$, які розривні в точці $(0,0)$ та необмежені в будь-якому її околі;

б) диференційовна в точці $(0,0)$.

13.7. (Д) Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2\right), & x_1 x_2 \neq 0, \\ 0, & x_1 x_2 = 0: \end{cases}$$

а) має всі частинні похідні будь-якого порядку в точці $(0,0)$;

б) похідні не залежать від порядку диференціювання;

в) f недиференційовна в точці $(0,0)$.

13.8. (Д) Для яких $\alpha > 0$ функція

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\alpha}, \quad (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$$

диференційовна в точці $(0,0,\ldots,0)$?

В 13

13.9. (I) Довести диференційовність функцій у точці $\vec{x}^{\,0}$, використовуючи достатні умови диференційовності:

1) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^2-x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0}=(2,1);$
2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1+2x_2}{2x_1+x_2}, \quad x_2\neq -2x_1; \quad \vec{x}^{\,0}=(1,0);$
3) $f(x_1,x_2)=(\sin x_1)^{x_2}, \quad 0<x_1<\pi; \quad \vec{x}^{\,0}=\Big(\dfrac{\pi}{2},2\Big);$
4) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1+x_2^2), \quad x_1>-x_2^2; \quad \vec{x}^{\,0}=(e,0);$
5) $f(x_1,x_2)=\arcsin\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\neq(0,0); \quad \vec{x}^{\,0}=(\sqrt{2},\sqrt{2});$
6) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_2e^{2x_1}}, \quad x_2>-e^{-2x_1}; \quad \vec{x}^{\,0}=\Big(2,\dfrac{\pi}{3}\Big);$
7) $f(x_1,x_2)=x_2^{\cos x_1}, \quad x_2>0; \quad \vec{x}^{\,0}=\Big(2,\dfrac{\pi}{3}\Big);$
8) $f(x_1,x_2)=\operatorname{tg}(x_1-x_2)+\operatorname{ctg}(x_1+x_2), \quad \{x_1,x_2\}\subset\Big(0;\dfrac{\pi}{2}\Big);$
$\vec{x}^{\,0}=\Big(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\Big);$
9) $f(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}(x_1^2+2x_2^2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0}=\Big(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big);$
10) $f(x_1,x_2)=\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x_2}{x_1}, \quad x_1\neq 0,\ 0<\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{\pi}{2}; \quad \vec{x}^{\,0}=\Big(2,\dfrac{\pi}{2}\Big).$

13.10. (I) Знайти диференціали першого та другого порядків функцій:

1) $f(x_1,x_2)=x_1x_2^3-3x_1^2x_2^2+2x_2^4, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
2) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1+x_2^2}, \quad x_1>0;$
3) $f(x_1,x_2)=\sqrt{\ln x_1x_2}, \quad x_1x_2>1;$
4) $f(x_1,x_2)=\ln(x_1^3+2x_2^3-x_3^3), \quad x_1^3+2x_2^3-x_3^3>0;$
5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{x_2x_3}, \quad x_1>0;$
6) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_3}{x_1^2+x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\neq(0,0);$
7) $f(x_1,x_2,x_3)=\sin(x_1x_2)+\cos\big(\operatorname{tg}(x_3-x_1)\big), \quad |\,x_3-x_1\,|<\pi/2;$
8) $f(x_1,x_2,x_3)=\operatorname{arctg}\dfrac{x_1+x_2}{1-x_2x_3}, \quad x_2x_3\neq 1;$
9) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1x_2x_3}{e^{x_3}\cos^2 x_1}, \quad |\,x_1\,|<\dfrac{\pi}{2};$
10) $f(x_1,x_2,x_3)=\arcsin(x_1-x_2x_3), \quad x_k\in(0;\,1),\ 1\le k\le 3.$

13.11. (I) Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити вирази:

1) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3};$ 2) $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1);$

3) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$;

4) $(2,003)^2 \cdot (3,998)^3 \cdot (1,002)^2$;

5) $0,97^{1,05}$;

6) $\sqrt{3,98^2 + 3,01^2}$;

7) $\dfrac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{1,05^3}}}$;

8) $1,04^{2,02}$;

9) $\cos 61^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ$;

10) $\operatorname{arctg} \dfrac{1,02 + 1,01}{1 + 1,02 \cdot 1,01}$.

13.12. (I) Знайти диференціали порядку n функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2(x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 3;$
2) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 3;$
3) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2), \quad x_1 > -x_2; \quad n = 10;$
4) $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 6;$
5) $f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ a, b$ – фіксовані дійсні числа; $n = 5$;
6) $f(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{ctg} x_2, \quad 0 < x_k < \dfrac{\pi}{2},\ k = 1, 2; \quad n = 3;$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{1 + x_1 + x_2 + x_3}, \quad x_k > 0,\ 1 \le k \le 3; \quad n = 7;$
8) $f(x_1, x_2, x_3) = \exp(ax_1 + bx_2 + cx_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a, b, c$ – фіксовані дійсні числа; $n = 8$;
9) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln\Big(x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3}\Big), \quad x_k > 0,\ 1 \le k \le 3; \quad n = 4;$
10) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3)^6, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad n = 18.$

Заняття 14
Диференціювання складних функцій

Контрольне запитання

Формула для обчислення частинних похідних складної функції.

А 14

14.1. (С) Нехай функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференційовна на $\mathbb{R}^2$. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^4}{12} - \dfrac{x_1^3(x_2 + x_3)}{6} + \dfrac{x_1^2 x_2 x_3}{2} + g(x_2 - x_1,\, x_3 - x_1),$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$
$$f_1' + f_2' + f_3' = x_1 x_2 x_3;$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 x_2}{x_3} \ln x_1 + x_1 g\Big(\dfrac{x_2}{x_1},\, \dfrac{x_3}{x_1}\Big), \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0,$
$$x_1 f_1' + x_2 f_2' + x_3 f_3' = f + \frac{x_1 x_2}{x_3}.$$

14.2. (С) Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовні на $\mathbb{R}$. Послідовним диференціюванням одержати співвідношення, що містять саму функцію f та її похідні, але не містять функцій g та h :

1) $f(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0);$

2) $f(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2) + h(x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

14.3. (С) Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ мають неперервні похідні другого порядку на множинах визначення. Знайти диференціали першого та другого порядків наведених складних функцій:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = g\left(x_1 x_2,\, \dfrac{x_2}{x_3}\right), \quad x_3 \neq 0;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1^2 + x_2^2,\, x_1^2 - x_2^2,\, 2x_1 x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

14.4. (С) Використовуючи властивість інваріантності форми першого диференціала, знайти диференціал складної функції
$$f(x_1, x_2) = y_1 \sin y_2 + y_2 \cos y_1, \text{ де } y_1 = \frac{x_1}{x_2},\ y_2 = x_1 x_2,\ x_2 \neq 0.$$

14.5. (Д) Знайти двічі диференційовну функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що задовольняє на $\mathbb{R}^2$ рівняння
$$f_{22}'' = \cos x_2$$
та умови $f(x_1, 0) = 0,\ f_2'(x_1, 0) = x_1^2,\ x_1 \in \mathbb{R}.$

14.6. (Д) Навести приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що має неперервну похідну f_{12}'', але похідна f_2' якої в певній точці $\vec{x}^{\,0}$ не існує.

В 14

14.7. (I) Нехай функції $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовні на множинах визначення. Послідовним диференціюванням одержати співвідношення, що містять саму функцію f та її похідні, але не містять функцій g, h, u :

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + h(x_1 \cdot x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
2) $f(x_1, x_2) = x_1 h\Big(\dfrac{x_1}{x_2^2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
3) $f(x_1, x_2) = h(x_1) + u(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
4) $f(x_1, x_2) = x_1 h\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big) + x_2 u\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
5) $f(x_1, x_2) = h(x_1 \cdot x_2) + u\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
6) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 - x_2,\ x_2 - x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = g\Big(\dfrac{x_1}{x_2},\ \dfrac{x_2}{x_3}\Big), \quad x_2 x_3 \neq 0;$
8) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^k g\Big(\dfrac{x_3}{x_1},\ \dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0,\ k$ – фіксоване дійсне число.

14.8. (I) Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ мають неперервні похідні другого порядку на множинах визначення. Знайти диференціали першого та другого порядків наведених складних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\};$
2) $f(x_1, x_2) = h(x_1 + x_2,\ x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
3) $f(x_1, x_2) = h\Big(x_1^2 x_2,\ \dfrac{x_1}{x_2^2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
4) $f(x) = u(x, x^2, x^3), \quad x \in \mathbb{R};$
5) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$
6) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1 - x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$
8) $f(x_1, x_2) = u\Big(\dfrac{x_1}{x_2},\ x_1 - x_2,\ x_1 + x_2\Big), \quad x_2 \neq 0;$
9) $f(x_1, x_2, x_3) = u(ax_1, bx_2, cx_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a, b, c$ – фіксовані дійсні числа;
10) $f(x_1, x_2, x_3) = u(x_1 x_2,\ \sin x_2,\ x_1 + x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

14.9. (I) Використовуючи властивість інваріантності форми першого диференціала, знайти диференціали складних функцій:

1) $f(x) = y_1 y_2 \operatorname{arctg}(y_1 y_2), \quad y_1 = x^2 + 1,\ y_2 = x^3,\ x \in \mathbb{R};$
2) $f(x_1, x_2) = y_1^{y_2} + y_2^{y_1}, \quad y_1 = x_1^2 + x_2^2,\ y_2 = x_1^2 - x_2^2,\ x_1 > x_2 > 0;$

3) $f(x_1, x_2) = y_1^2 y_2^3 y_3^4, \quad y_1 = \arcsin \dfrac{x_1}{x_2},\ y_2 = \sqrt{x_2^2 - x_1^2},$
$y_3 = \ln x_2,\ 0 < x_1 < x_2;$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 + y_1^2 y_2), \quad y_1 = x_1 + x_2 + x_3,$
$y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3;$

5) $f(x_1, x_2) = y_1 y_2 + \sin y_1 \cdot \cos y_2, \quad y_1 = x_1 \sin x_2,\ y_2 = x_2^2,$
$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

6) $f(x) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2, \quad y_1 = \sin x,\ y_2 = e^x,\ x \in \mathbb{R};$

7) $f(x_1, x_2) = y_1^2 y_2 - y_2^2 y_1, \quad y_1 = x_1 \cos x_2,\ y_2 = x_1 \sin x_2,$
$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

8) $f(x_1, x_2) = y_1^2 \ln y_2, \quad y_1 = \dfrac{x_1}{x_2},\ y_2 = 3x_1 - 2x_2,\ 0 < x_2 < \dfrac{3x_1}{2};$

9) $f(x) = \operatorname{tg}\Big(\dfrac{3}{y_1} + 2y_1^2 - y_2\Big), \quad y_1 = x^{-1},\ y_2 = \sqrt{x},\ x > 0,$
$3x + 2x^{-2} - \sqrt{x} \notin \Big\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\};$

10) $f(x_1, x_2) = e^{y_1 y_2}, \quad y_1 = x_1^2 - x_2^2,\ y_2 = e^{x_1 x_2},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

Заняття 15
Диференціювання неявних функцій

Контрольне запитання

Поняття про неявну функцію.

У задачах до занять 15 і 16 припускається існування відповідних неявних функцій та існування їх похідних потрібного порядку.

А 15

15.1. (О) За яких умов стосовно функції $f:(a;\,b)\to\mathbb{R}$ рівняння
$$f(x)\cdot y=0,\quad x\in(a;\,b),$$
має єдиний неперервний розв'язок $y(x)=0,\ x\in(a;\,b)$?

15.2. (О) Розглянемо рівняння
$$x^2+y^2=1,\quad x\in[-1;\,1].$$

1) Скільки всього функцій $y=y(x),\ x\in[-1;\,1]$, задовольняють це рівняння?
2) Скільки неперервних функцій $y=y(x),\ x\in[-1;\,1]$, задовольняють це рівняння?
3) Скільки неперервних функцій $y=y(x),\ x\in[-1;\,1]$, задовольняють це рівняння в кожному з випадків:

   а) $y(0)=1$; б) $y(1)=0$?

15.3. (С) Навести приклади функцій $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що задовольняють рівняння
$$y^2(x)=1+x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$
Знайти: а) додатні розв'язки; б) неперервні розв'язки цього рівняння.

15.4. (С) Розглянемо рівняння
$$x^2=y^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

1) Скільки функцій $y=y(x),\ x\in\mathbb{R}$, задовольняють це рівняння?
2) Скільки неперервних функцій $y=y(x),\ x\in\mathbb{R}$, задовольняють це рівняння ?
3) Скільки диференційовних функцій $y=y(x),\ x\in\mathbb{R}$, задовольняють це рівняння ?
4) Скільки неперервних функцій $y=y(x), x\in\mathbb{R}$, задовольняють це рівняння в кожному з випадків:

   а) $y(1)=1$; б) $y(0)=0$?
5) Скільки неперервних функцій $y=y(x), x\in\left(\frac{1}{2};\,\frac{3}{2}\right)$, задовольняють це рівняння, якщо $y(1)=1$?

15.5. (О) Функція $y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ при фіксованому $a\in\mathbb{R}$ задовольняє рівняння
$$y^3-3x_1x_2y=a^3,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Знайти частинні похідні першого порядку функції в тих точках, де вони існують.

15.6. (С) Нехай $B = B\big((1,-2);\, r\big)$ – деякий окіл точки $(1,-2) \in \mathbb{R}^2$. Функція $y : B \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3y^2 + x_1x_2 - y - 9 = 0, \quad (x_1, x_2) \in B, \qquad y(1,-2) = 1.$$

Знайти частинні похідні другого порядку функції y в точці $(1,-2)$.

15.7. (С) Нехай функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ має неперервні частинні похідні другого порядку на $\mathbb{R}^2$, функція $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$f(x_1 + y,\ x_2^2 + y^2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Знайти y''_{12}.

В 15

15.8. (І) Знайти похідні першого та другого порядків функції $y = y(x)$, визначеної відповідним рівнянням:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
2) $y - \varepsilon \cdot \sin y = x, \quad \varepsilon \in (0;\, 1)$ фіксоване;
3) $x^3y - y^3x = a^4, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
4) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
5) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, \quad a \neq 0$ фіксоване;
6) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
7) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

15.9. (О) Нехай функція $y = y(x)$ при фіксованих $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}$, $c \neq 0$, задовольняє алгебраїчне рівняння

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Довести, що

$$\frac{d^3}{dx^3}\big((y'')^{-2/3}\big) = 0.$$

15.10. (І) Знайти частинні похідні першого порядку функції $y = y(x_1, x_2)$, визначеної відповідним рівнянням:

1) $e^y - x_1x_2y = 0$;
2) $x_1 + x_2 + y = e^y$;
3) $x_1x_2 + x_1y + x_2y^2 = 1$;
4) $\dfrac{x_1}{y} = \ln\Big(\dfrac{y}{x_2}\Big) + 1$;
5) $x_1 + x_2 + y = e^{-(x_1+x_2+y)}$;
6) $x_1^2 - 2x_2^2 + y^2 - 4x_1 + 2y = 5$;
7) $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ фіксоване;
8) $x_1 \cos x_2 + x_2 \cos y + y \cos x_1 = a, \quad a \in \mathbb{R}$ фіксоване.

15.11. (І) Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ двічі диференційовні на множинах визначення. Довести, що функція $y = y(x_1, x_2)$ задовольняє відповідне рівняння:

1) $y = x_2 f\left(\dfrac{y}{x_1}\right);$ $\qquad x_1 y_1' + x_2 y_2' = y;$

2) $y = x_1 + x_2 f(x);$ $\qquad \dfrac{\partial g(y)}{\partial x_2} = f(y)\dfrac{\partial g(y)}{\partial x_1};$

3) $h(cx_1 - ay, cx_2 - by) = 0,$ де $(a,\, b) \neq (0,\, 0);$ $\qquad ay_1' + by_2' = c;$

4) $x_1 - x_2 + y = f(x_1^2 + x_2^2 + y^2);$ $\quad (x_2 + y)y_1' + (y - x_1)y_2' + x_1 + x_2 = 0;$

5) $x_1 - ay = f(x_2 - by),$ де $(a,\, b) \neq (0,\, 0);$ $\qquad ay_1' + by_2' = 1;$

6) $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = x_2 f\left(\dfrac{y}{x_2}\right);$ $\qquad (x_1^2 - x_2^2 - y^2)y_1' + 2x_1x_2y_2' = 2x_1y;$

7) $h(x_1 + yx_1^{-1},\ x_2 + yx_1^{-1}) = 0;$ $\qquad x_1y_1' + x_2y_2' = y - x_1x_2.$

15.12. (I) Нехай функція $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ диференційовна на $\mathbb{R}^3$. Рівняння

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

задає три неявні функції: $x_1 = f(x_2, x_3)$, $x_2 = g(x_3, x_1)$, $x_3 = h(x_1, x_2)$. Довести тотожності:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 1;$ $\qquad$ 2) $\dfrac{\partial g}{\partial x_3} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -1.$

15.13. (I) Рівняння

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3 = 0$$

задає неявні функції $x_3 = f(x_1, x_2)$ та $x_2 = g(x_3, x_1)$. Нехай

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Обчислити в точці $\vec{x}^{\,0} = (1, 1, 1)$ похідні:

1) $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h\big(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\big);$ $\qquad$ 2) $\dfrac{\partial}{\partial x_1} h\big(x_1, g(x_3, x_1), x_3\big).$

15.14. (I) Для функції $y = f(x_1, x_2)$, визначеної наведеним співвідношенням, знайти $df(\vec{x}^{\,0}; \vec{a})$ при заданих $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0)$, $y^0 = f(\vec{x}^{\,0})$ та $\vec{a}$:

1) $y^3 - x_1y + x_2 = 0, \quad \vec{x}^{\,0} = (3, -2),\ y^0 = 2,\ \vec{a} = (3, -2);$

2) $x_1y^5 + x_2^3y - x_1^3 = 0, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, 0),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (2, 1);$

3) $x_1 - x_2y + e^y = 0, \quad \vec{x}^{\,0} = (-1, 2),\ y^0 = 0,\ \vec{a} = (1, 1);$

4) $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = 3x_1x_2y, \quad \vec{x}^{\,0} = (-1, -1),\ \ y^0 = 1,\ \vec{a} = (-1, 1);$

5) $x_1^2 + 2x_2^2 + y^2 = 4, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, -1),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (2, 3);$

6) $x_1^3 + x_2^3 - y^3 = 10, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, 1),\ y^0 = -2,\ \vec{a} = (1, -1);$

7) $x_1^2 + x_2^2 = 2y^2, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, -1),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (2, 2);$

8) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3y^2 + x_1x_2 - y = 9, \quad \vec{x}^{\,0} = (-1, 2),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (4, 5);$

9) $x_1^2 - x_2^2 + y^2 = 1, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, 1),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (0, 1);$

10) $8x_1^2 - 3x_2^4 - y^3 = 0, \quad \vec{x}^{\,0} = (1, 0),\ y^0 = 2,\ \vec{a} = (-1, -1).$

Заняття 16
Диференціювання неявних функцій (продовження)

16.1. (О) Знайти вказані похідні функцій f_1 та f_2, заданих системами рівнянь:

1) $\dfrac{df_k}{dx}, \quad k = 1,\, 2;$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) + x &= 0 \\ f_1^2(x) + f_2^2(x) + x^2 &= 1; \end{cases}$$

2) $\dfrac{d^2 f_k(x^0)}{dx^2}, \quad k = 1,\, 2; \quad x^0 = 2,\ f_1(2) = 1,\ f_2(2) = -1;$

$$\begin{cases} f_1^2(x) + f_2^2(x) &= \dfrac{x^2}{2} \\ f_1(x) + f_2(x) + x &= 2. \end{cases}$$

16.2. (О) Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 \qquad (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2. \\ f &= y_1^3 + y_2^3, \end{cases}$$

1) Знайти явний вираз $f = f(x_1, x_2)$ та область визначення цієї функції.
2) Знайти похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, не використовуючи явний вираз для функції f.

16.3. (С) Нехай функції y_1 та y_2 задані системою рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ x_1 \sin y_2(x_1, x_2) &= x_2 \sin y_1(x_1, x_2). \end{cases}$$

Знайти диференціали $dy_1,\ dy_2$.

16.4. (С) Нехай функції $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ k = 1,\, 2, 3$, диференційовні на $\mathbb{R}^3$ і функція f визначена системою рівнянь

$$\begin{cases} f(x) &= F_1(x, y_1, y_2) \\ F_2(x, y_1, y_2) &= 0 \\ F_3(x, y_1, y_2) &= 0. \end{cases}$$

Знайти f'.

16.5. (С) Нехай функції $F_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференційовні на областях визначення, функція f визначена системою рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) & = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ F_2(x_2, y_1, y_2) & = 0 \\ F_3(y_1, y_2) & = 0. \end{cases}$$

Знайти частинні похідні першого порядку функції f.

16.6. (Д) Нехай $g \in C(\mathbb{R})$, функція $y = y(x_1, x_2)$ визначена рівнянням

$$\int\limits_{\sin(x_1+x_2)}^{x_1x_2 - y} g(t)\,dt = 0.$$

Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$.

В 16

16.7. (І) Обчислити похідні функцій f_1 та f_2, визначених системою рівнянь:

1) $\begin{cases} f_1(x) & = y^2 + y^{-2} \\ f_2(x) & = y^3 + y^{-3} \\ x & = y + y^{-1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x & = e^y \\ f_1(x) & = 3y^2 \\ f_2(x) & = \ln(1+y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} f_1(x) & = \operatorname{tg} y \\ f_2(x) & = \sin y \\ x & = -y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) & = x + f_1(x) \\ \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} & = \operatorname{tg} x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} f_1(x)e^{f_2(x)} & = \cos x \\ f_1^2(x) + f_2^2(x) & = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} f_1(x) - f_2^2(x) & = x^2 \\ x^2 - xf_2(x) + f_2^2(x) & = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + f_1^2(x) - f_2^2(x) & = 0 \\ x^2 + 2f_1^2(x) + 3f_2^2(x) & = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sin f_1(x) - \cos f_2(x) & = x \\ \cos f_1(x) - \sin f_2(x) & = x^2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \ln\big(1 + xf_1(x)\big) & = f_2(x) \\ \ln\big(1 - xf_2(x)\big) & = f_1(x); \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + f_1(x) + f_2(x) & = a \\ x^3 + f_1^3(x) + f_2^3(x) & = 3xf_1(x)f_2(x), \end{cases}$ де $a \in \mathbb{R}$ фіксоване.

16.8. (І) Знайти похідні другого порядку в точці x^0 функцій f_1 та f_2, визначених системою рівнянь при заданих значеннях $f_k(x^0) = a_k,\ k = 1, 2:$

1) $\begin{cases} 8x^2 - f_2^3(x) - 3f_1^4(x) & = 0 \\ x^3 + 5f_1(x) - f_2^2(x) & = -3, \end{cases}$ $\quad x^0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2;$

2) $\begin{cases} x + f_1(x) + f_2(x) &= 0 \\ x^3 + f_1^3(x) - f_2^3(x) &= 10, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -2;$

3) $\begin{cases} f_2(x) - x^2 - f_1^2(x) &= 0 \\ x^2 - xf_1(x) + f_1^2(x) &= 1, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2;$

4) $\begin{cases} f_1(x) &= y^2 + y^{-2} \\ f_2(x) &= y^3 + y^{-3} \\ x &= y + y^{-1}, \end{cases}$ $x^0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2;$

5) $\begin{cases} f_1^2(x) + f_2^2(x) - 2x^2 &= 0 \\ f_1^2(x) + 2f_2^2(x) + x^2 &= 4, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1;$

6) $\begin{cases} x^2 + f_1^2(x) - f_2^2(x) &= 0 \\ x^2 + 2f_1^2(x) + 3f_2^2(x) &= 1, \end{cases}$ $x^0 = 0,\ a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ a_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}};$

7) $\begin{cases} x^2 - f_1^2(x) + f_2^2(x) &= 1 \\ f_1^2(x) - 2x + f_2(x) &= 0, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1.$

16.9. (I) Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ визначена наведеною нижче системою рівнянь. Знайти явний вираз функції f та область її визначення. Знайти похідні першого порядку функції f, не використовуючи її явного вигляду:

1) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{y_1}{y_2} \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= \dfrac{y_1^2 - y_2^2}{2y_1 + y_2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 y_2 \\ f &= y_1^{-2} + y_2^{-2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 &= y_1 \cos y_2 \\ x_2 &= y_1 \sin y_2 \\ f &= 2y_2, \end{cases}$
$y_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right);$

5) $\begin{cases} x_1 &= \cos y_1 \sin y_2 \\ x_2 &= \sin y_1 \sin y_2 \\ f &= \cos y_2, \end{cases}$
$y_2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right];$

6) $\begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= y_1 y_2 \\ f &= y_1^3 - y_2^3. \end{cases}$

16.10. (I) Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана наведеною нижче системою рівнянь. Виразити диференціал df через $f,\ x_k,\ dx_k,\ k = 1,\,2$:

1) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= y_1^2 y_2^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 &= y_1 \cos y_2 \\ x_2 &= y_1 \sin y_2 \\ f &= y_1^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= \sqrt{a}(\sin y_1 + \cos y_2) \\ x_2 &= \sqrt{a}(\cos y_1 - \sin y_2) \\ f &= 1 + \sin(y_1 - y_2), \end{cases}$ $a > 0$ фіксоване;

4) $\begin{cases} x_1 &= y_2 \cos y_1 - y_1 \cos y_1 + \sin y_1 \\ x_2 &= y_2 \sin y_1 - y_1 \sin y_1 - \cos y_1 \\ f &= (y_1 - y_2)^2. \end{cases}$

16.11. (I) Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана наведеною нижче системою рівнянь. Виразити диференціал df через $y_1,\ y_2,\ dx_1,\ dx_2$:

1) $\begin{cases} x_1 &= e^{y_1} \cos y_2 \\ x_2 &= e^{y_1} \sin y_2 \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 &= e^{y_1 + y_2} \\ x_2 &= e^{y_1 - y_2} \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + \ln y_2 \\ x_2 &= y_2 - \ln y_1 \\ f &= 2y_1 + y_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2^2 \\ x_2 &= y_1^2 - y_2^3 \\ f &= 2y_1 y_2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 &= a \cos y_1 \sin y_2 \\ x_2 &= b \cos y_1 \cos y_2 \\ f &= c \sin y_1, \end{cases}$
$\{a, b, c\} \subset (0;\, +\infty).$

Відповіді

1.1. 1) Так; 2) ні. **1.2.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **1.3.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. **1.5.** 1) Так; 2) ні. **1.10.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **1.14.** 1) Так; 2) так. **1.15.** 1) Ні; 2) так.

2.2. 1) Збігається до $(0, 2)$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається до $x(t) = t^2, t \in [0;\, 1]$; 5) збігається до $x(t) = 0, t \in [0;\, 1]$. **2.7.** 1) Розбігається; 2) збігається до $(1, 2, 0)$; 3) збігається до $x(t) = t, t \in [0;\, \pi]$; 4) розбігається. **2.8.** $B(x;\, 1) = \{x\}$, $\overline{B}\Big(x;\, \frac{1}{2}\Big) = \{x\}$, $S\Big(x;\, \frac{1}{2}\Big) = \varnothing$, $S(x;\, 1) = X \setminus \{x\}$; $x_n \to x,\ n \to \infty \iff \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ x_n = x$. **2.9.** $x_n \to x$, $n \to \infty$, у просторі $(C^{(1)}([0; 1]), \rho) \iff \exists t_0 \in [0; 1] :\ x_n(t_0) \to x(t_0)$, $n \to \infty$, і $x'_n \underset{[0;1]}{\rightrightarrows} x'_0$, $n \to \infty$. 1) Розбігається; 2) збігається до $x(t) = 0$, $t \in [0;\, 1]$. **2.13.** $x_n(t) = \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$, $t \in [a; b]$, $n \geq 1$. **2.14.** Рівномірна збіжність. **2.18.** 0. **2.20.** 1) Збігається до $(0, 0, \ldots, 0)$; 2) збігається до $x(t) = 0, t \in [0; 1]$; 3) розбігається; 4) розбігається в рівномірній метриці, збігається в метриці d до $x(t) = 0, t \in [0; 1]$. **2.21.** 1) Розбігається; 2) збігається до $(1, 0, 0, \ldots, 0)$; 3) збігається до $(0, 0, \ldots, 0)$; 4) збігається до $(0, 0, \ldots, 0)$; 5) розбігається; 6) розбігається; 7) збігається до $x(t) = 0, t \in [0; 1]$; 8) збігається до $x(t) = t, t \in [0; 1]$; 9) збігається до $x(t) = t, t \in [0; 1]$; 10) розбігається.

3.1. 1) $A^\circ = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = A$, $A' = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq x_1\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \widetilde{A} = \varnothing$, $A' = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$; 4) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{(0, 0)\}$, $\widetilde{A} = A$. **3.2.** 1) $A^\circ = A$, $A' = \{x \in C([0;\, 1]) \mid 1 \leq x(0) \leq 2\}$; 2) $A^\circ = \varnothing$, $A' = A$; 3) $A^\circ = A$, $A' = \{x \in C([0;\, 1]) \mid \min\limits_{t \in [0;\, 1]} x(t) \geq 0\}$. **3.4.** 1) $A^\circ = (0;\, 1)$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = A$, $A' = [0;\, 1]$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{0\}$, $\widetilde{A} = A$. **3.5.** 1) $A^\circ = A$, $A' = \{(x_1, x_2) | \, 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = A' = \varnothing$, $\widetilde{A} = A$. **3.6.** 1) $A^\circ = \{x \in C([0;\, 1]) | \, x(0) > 1\}$, $A' = A$; 2) $A^\circ = \varnothing$, $A' = A$. **3.7.** 1) $A^\circ = A' = \varnothing$; 2) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \mathbb{R}$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \mathbb{R}$; 4) $A^\circ = \varnothing$, $A' = [0; 1]$; 5) $A^\circ = \varnothing$, $A' = [-1; 1]$. **3.8.** 1) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \mathbb{R}^2$; 2) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = [-1; 1] \times [-1; 1]$. **3.9.** 1) $A^\circ = A$, $A' = \{x | \max\limits_{t \in [0;\, 1]} x(t) \leq 1\}$; 2) $A^\circ = \{x | \max\limits_{t \in [0;\, 1]} x(t) < 1\}$, $A' = A$; 3) $A^\circ = A$, $A' = \{x | \, x(0) + x(1) \geq 0\}$; 4) $A^\circ = A$, $A' = C([0; 1])$; 5) $A^\circ = \varnothing$, $A' = C([0; 1])$; 6) $A^\circ = \varnothing$, $A' = C([0; 1])$; 7) $A^\circ = A$, $A' = \{x | \int\limits_0^1 x^2(t)\, dt \geq 1\}$. **3.11.** $A^\circ = \{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 < 1,\ (x_1 - \frac{3}{4})^2 + x_2^2 < 1\}$, $A' = \{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 < 1,\ (x_1 - \frac{3}{4})^2 + x_2^2 \leq 1\}$. **3.12.** 1) $A^\circ = A$,

$A' = \{(x_1, x_2)|\, x_2 \ge x_1^2\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = \varnothing$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \mathbb{R}^2$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 4) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{(0,1)\}$, $\widetilde{A} = A$. **3.15.** 1) $A^\circ = A' = \varnothing$, $\widetilde{A} = \mathbb{N}$; 2) $A^\circ = \widetilde{A} = \varnothing$, $A' = \mathbb{R}$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{1\}$, $\widetilde{A} = \{1+\frac{1}{n}\mid n \in \mathbb{N}\}$; 4) $A^\circ = \widetilde{A} = \varnothing$, $A' = [-1;1]$. **3.16.** 1) $A^\circ = \{(x_1, x_2)|\, |x_1| + |x_2| < 1\}$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = A$, $A' = \{(x_1, x_2)|\, x_1 \ge 0\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\widetilde{A} = A$; 4) $A^\circ = \widetilde{A} = \varnothing$, $A' = \{(x_1, x_2)|\, x_1 x_2 = 1\}$. **3.17.** 1) $A^\circ = A$, $A' = \{x|\, x(0)\cdot x(1) \le 0\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 2) $A^\circ = A$, $A' = \{x|$ $\forall t \in [0;1] : x(t) \ge t\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \{x|\, x(1) < 1\}$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 4) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{x(t) = 0,\, t \in [0;1]\}$, $\widetilde{A} = A$.

4.1. 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, незамкнена. **4.3.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) невідкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена. **4.4.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) відкрита, незамкнена; 3) невідкрита, незамкнена; 4) невідкрита, незамкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) невідкрита, незамкнена. **4.5.** Відкритою є тільки порожня підмножина. $\widetilde{A} = \{(x_1, 0)|\, x_1 \in A\}$ замкнена $\iff$ A замкнена в $(\mathbb{R}, \rho)$. **4.6.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) відкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена. **4.12.** $A \ne \varnothing$. **4.13.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) невідкрита, незамкнена; 4) невідкрита, незамкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) невідкрита, замкнена. **4.14.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) відкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена; 4) відкрита, незамкнена. **4.15.** Кожна множина є відкритою та замкненою одночасно. **4.16.** 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) невідкрита, незамкнена. **4.17.** 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) невідкрита, незамкнена; 4) невідкрита, замкнена. **4.18.** 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена. **4.19.** 1) Невідкрита, незамкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) відкрита, незамкнена; 4) невідкрита, замкнена. **4.20.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) відкрита, незамкнена; 4) відкрита, незамкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) відкрита, незамкнена; 7) невідкрита, замкнена.

5.1. 1) Не є скрізь щільною; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна.
5.4. 1) Так; 2) так. **5.8.** Множина X не більш ніж злічення. **5.9.** 1) Не є скрізь щільною; 2) скрізь щільна. **5.10.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна. **5.11.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) скрізь щільна. **5.17.** 1) Не є скрізь щільною; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) скрізь щільна. **5.19.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна. **5.21.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) скрізь щільна; 5) не є скрізь щільною; 6) скрізь щільна; 7) скрізь щільна. **5.22.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) не є скрізь щільною; 5) скрізь щільна; 6) скрізь щільна;

7) не є скрізь щільною. **5.23.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) не є скрізь щільною; 4) скрізь щільна; 5) скрізь щільна.

6.3. 1) Неповний; 2) повний. **6.16.** Ні. **6.17.** Так. **6.18.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так; 7) так; 8) так. **6.20.** 8) Ні.

7.1. 0. **7.3.** 1) 1; 2) $\ln 2$. **7.4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **7.5.** a. **7.6.** 1) 1; 2) 0; 3) 1. **7.7.** 1) Не існує; 2) 0. **7.8.** 1) 0; 2) 0; 3) 1. **7.11.** 1) $\{(x_1,x_2)|\,x_1+x_2<0\}$; 2) $\{(x_1,x_2)|\,x_1^2+x_2^2\le 3\}$; 3) $\{(x_1,x_2)|\,x_1\le 0,\, x_2\le 0\}$; 4) $\{(x_1,x_2)|\,x_1^2+ +x_2^2<1,\, 4x_1^2-x_2^2\ge 0\}$; 5) $\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1x_2x_3>0\}$; 6) $\{(x_1,x_2)|\,|x_1|\le 1, |x_2|\le 1\}$; 7) $\{(x_1,x_2)|\,1\le x_1^2+x_2^2\le 4\}$; 8) $\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1^2+x_2^2-x_3^2<-1\}$; 9) $\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_2^2<x_3\}$; 10) $\{(x_1,x_2,x_3)|\,|x_1|\le|a|,\,|x_2|\le|b|,\,|x_3|\le|c|\}$. **7.12.** 1) Не існує; 2) не існує. **7.14.** 1) 0; 2) e; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 1; 7) $\frac{4}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) e; 10) 2.

8.1. 1) 0; 2) 0; 3) не існує. **8.4.** 1) $0, 1$; 2) $1, 1$; 3) $0, 1$. **8.5.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. **8.6.** 1) $f(x_1,x_2)=x_1(\sin\frac{1}{x_1}+\sin\frac{1}{x_2})$; 2) $f(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}$. **8.8.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= =\frac{1}{3}$. **8.9.** 1) $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to+\infty} f(x_1,x_2))=0$, $\lim\limits_{x_2\to+\infty}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))=1$; 2) $\lim\limits_{x_1\to 1}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,\,x_2))=1$, $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 1} f(x_1,\,x_2))=\infty$.
8.10. 1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)$ не існує; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))=1$; 2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)=0$; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))$ не існує; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))=0$; 3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)=0$; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))=0$; 4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)=0$; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))=0$; 5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)=0$; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))$ не існує; 6) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1,x_2)$ не існує; $\lim\limits_{x_1\to 0}(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0}(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))$ не існує.

9.1. 1) $f\in C(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$; 2) $(0,0)$. **9.4.** $f\in C(\mathbb{R}^m)$. **9.5.** $f(0,0)=0$. **9.8.** 1) $\mathbb{R}^m$; 2) $\mathbb{R}^m\setminus\{(0,\ldots,0)\}$. **9.9.** $f(0,0)=1$. **9.14.** 1) $\{(x_1,x_2)|\,x_1^2+ +x_2^2=16\}$; 2) $\{(x_1,x_2)|\,x_1+x_2=0\}$; 3) $\{(x_1,x_2)|\,x_1^2+x_2^2=4\}$; 4) $\{(x_1,x_2)|\,x_1+x_2^2=0\}$; 5) $\{(x_1,x_2)|\,x_1=x_2\}$; 6) $\{(x_1,x_2)|\,x_1^2+x_2^2= =9\}$; 7) $(0,0)$; 8) $\{(x_1,x_2)|\,|x_1|=|x_2|\}$; 9) $\{(x_1,x_2)|\,x_1=-x_2\}$; 10) $\{(x_1,x_2)|\,x_1x_2=0\}$. **9.16.** 1) $f(1,2)=1$; 2) $f(0,0)=0$; 3) $f(0,0)=0$; 4) $f(0,0)=0$; 5) $f(0,0)=0$; 6) $f(0,0)=0$; 7) $f(0,0)=0$; 8) $f(0,0)=0$; 9) $f(0,0)=0$; 10) $f(0,0)=1$.

10.7. Обмежена при $m = 1$, необмежена при $m \geq 2$. **10.8.** $\mathbb{R}^2$. **10.12.** Необмежена. **10.15.** 1) Замкнена, невідкрита; 2) замкнена, невідкрита; 3) незамкнена, відкрита; 4) незамкнена, відкрита; 5) замкнена, невідкрита; 6) замкнена, невідкрита; 7) незамкнена, відкрита; 8) незамкнена, відкрита; 9) незамкнена, відкрита; 10) замкнена, невідкрита. **10.16.** 1) Замкнена, невідкрита; 2) незамкнена, відкрита; 3) замкнена, невідкрита; 4) замкнена, невідкрита; 5) незамкнена, відкрита; 6) незамкнена, відкрита; 7) незамкнена, відкрита; 8) замкнена, невідкрита; 9) замкнена, невідкрита; 10) незамкнена, відкрита.

11.2. 1) Компактна; 2) компактна; 3) може бути компактною (напр., якщо $F_1 \cap F_2 = \varnothing$), може бути некомпактною (напр., якщо $F_2 = \{x\}$, де x – гранична точка множини F_1). **11.3.** 1) Компактна; 2) некомпактна; 3) некомпактна; 4) компактна. **11.15.** 1) Компактна; 2) не обов'язково компактна, напр. $F_k = [k, k+1]$ у $(\mathbb{R}, \rho)$; 3) компактна; 4) не обов'язково компактна, напр. $F_1 = [1, 2]$ в $(\mathbb{R}, \rho)$. **11.17.** 1) Компактна; 2) компактна; 3) компактна; 4) компактна; 5) некомпактна; 6) некомпактна; 7) компактна; 8) некомпактна; 9) компактна; 10) компактна.

12.1. 1) $f_1' = 4x_1^3 - 8x_1x_2^2 + \frac{1}{x_1+x_2^2} + \sin(x_1 + x_2) + x_1 \cos(x_1 + x_2)$; $f_2' = 8x_2(x_2^2 - x_1^2) + \frac{2x_2}{x_1+x_2^2} + x_1 \cos(x_1 + x_2)$; 2) $f_1' = x_2 + x_2^{-1} - \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_2-1}$, $f_2' = x_1 - \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_2}\left(\ln\frac{x_1}{x_2} - 1\right)$; 3) $f_1' = x_2^2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} + x_2x_1^{x_2-1} - 2x_2(1 + x_1^2x_2^2)^{-1}(2 + x_1^2x_2^2)^{-1/2}$, $f_2' = -x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} + x_1^{x_2}\ln x_1 - 2x_1(1 + x_1^2x_2^2)^{-1}(2 + x_1^2x_2^2)^{-1/2}$; 4) $f_1' = \cos x_1 + 2^{x_2}\cos^{-2} x_1 - 6x_2 \sin(x_1x_2)\cos^5(x_1x_2)$, $f_2' = 2^{x_2}\ln 2 \cdot \operatorname{tg} x_1 - 6x_1 \sin(x_1x_2)\cos^5(x_1x_2)$; 5) $f_1' = -x_2e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}\sin^{-2}(x_1x_2)\operatorname{arctg} x_1^2 + 2x_1e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}(1 + x_1^4)^{-1}$, $f_2' = -x_1e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}\sin^{-2}(x_1x_2)\operatorname{arctg} x_1^2$. **12.2.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1\sin(x_2x_3) + (2 + 4x_1 + x_2^2)e^{x_1+x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = -x_1^3x_2x_3\sin(x_2x_3) + 2x_2e^{x_1+x_3}$; 2) $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = x_3(2+x_1)(1+x_2)e^{x_1+x_2+x_3}$, $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3} = (1+x_1)(2+x_2)(3+x_3)e^{x_1+x_2+x_3}$; 3) $\frac{\partial^m f(0)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 1 + (-1)^{m-1}(m-1)!$. **12.4.** 1) $g(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$; 2) $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$. **12.5.** 1) 0; 2) 0. **12.6.** 1) $2(-1)^m(m+n-1)!(nx_1 + mx_2)(x_1 - x_2)^{-(m+n+1)}$; 2) $2^n\sin(x_1 + 2x_2 + \frac{m+n}{2}\pi)$; 3) $(-1)^n((x_1 + m)^2 + (x_2 - n)^2 - m - n)$; 4) $(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!(1 + x_1 + x_2)^{-(m+n)}$; 5) $2^m\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m-n+1)(1 + 2x_1 + x_2)^{\alpha-m-n}$. **12.7.** 1) $1 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$; 2) $f_{\vec{a}}'(1,1,1) = \cos\alpha + 2\cos\beta + 3\cos\gamma$, $|\operatorname{grad} f| = \sqrt{14}$. **12.10.** 1) $f_1' = \frac{x_2}{x_3} \times x_1^{x_2/x_3-1}$, $f_2' = x_3^{-1}x_1^{x_2/x_3}\ln x_1$, $f_3' = x_2x_3^{-2}x_1^{x_2/x_3}\ln x_1$; 2) $f_1' = \arcsin\frac{x_2}{x_3} \times x_1^{\arcsin(x_2/x_3)-1}$, $f_2' = (x_3^2 - x_2^2)^{-1/2}x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}\ln x_1$, $f_3' = -x_2x_3^{-1}(x_3^2 -$

$- x_2^2)^{-1/2}x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}\ln x_1$; 3) $f_1' = x_2x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1}\bigl(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3-1}$, $f_2' = -x_1x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1}\bigl(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3-1}$, $f_3' = \bigl(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3}\ln\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$; 4) $f_1' = x_2^{-1}x_3\bigl(\sin\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3-1}\cos\frac{x_1}{x_2}$, $f_2' = x_1x_2^{-2}x_3\bigl(\sin\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3-1}\cos\frac{x_1}{x_2}$, $f_3' = \bigl(\sin\frac{x_1}{x_2}\bigr)^{x_3}\ln\sin\frac{x_1}{x_2}$; 5) $f_1' = \cos^{-2}x_1(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3-1}$, $f_2' = x_3^{-1}(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3}\cdot\ln\operatorname{tg}x_1$, $f_3' = -x_2x_3^{-2}(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3}\ln\operatorname{tg}x_1$; 6) $f_1' = (3x_1^2+x_2^2+x_3^2)\exp\bigl(x_1\times\times(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\bigr)$, $f_2' = 2x_1x_2\exp\bigl(x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\bigr)$, $f_3' = 2x_1x_3\exp\bigl(x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\bigr)$; 7) $f_1' = (x_1+\ln x_2+\ln\ln x_3)^{-1}$, $f_2' = (x_2(x_1+\ln x_2+\ln\ln x_3))^{-1}$, $f_3' = (x_3(x_1+\ln x_2+\ln\ln x_3)\ln x_3)^{-1}$; 8) $f_i' = 2x_i\bigl((x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\bigr)^{-1}$, $i=1,2,3$; 9) $f_1' = -\sin x_1\cos x_1(\cos^2x_1+\sin^2x_2+\operatorname{ctg}^2x_3)^{-1/2}$, $f_2' = \sin x_2\cos x_2(\cos^2x_1+\sin^2x_2+\operatorname{ctg}^2x_3)^{-1/2}$, $f_3' = -\cos x_3\sin^{-3}x_3\cdot(\cos^2x_1+\sin^2x_2+\operatorname{ctg}^2x_3)^{-1/2}$; 10) $f_1' = \bigl(x_2(1+\sin x_2)+(x_2-x_1x_2+x_3)e^{x_1}\bigr)(1+e^{x_1}+\sin x_2)^{-2}$, $f_2' = \bigl(x_1(1+e^{x_1}+\sin x_2)-(x_1x_2-x_3)\cos x_2\bigr)(1+e^{x_1}+\sin x_2)^{-2}$, $f_3' = -(1+e^{x_1}+\sin x_2)^{-1}$.

12.11. 1) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = m^{-1/2}(1,1,\ldots,1)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{1}{2\sqrt{m}}(1+(-1)^{m-1})$; 2) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = (2e,0,\ldots,0)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = 0$; 3) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = \frac{1}{m+\sqrt{m}}\times\times(1,-1,1,\ldots,(-1)^{m+1})$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{1}{2(m+\sqrt{m})}(1+(-1)^{m-1})$; 4) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = \frac{1}{6\sqrt5}(1,2,0,\ldots,0)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{\sqrt5}{6}$; 5) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = \frac{\cos\sqrt2}{\sqrt2}(1,0,0,\ldots,0,1)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = 2^{-1/2}(m+1)\cos\sqrt2$; 6) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = (0,0,\ldots,0)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = 0$; 7) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = \frac{2}{3\sqrt5}(1,1,0,0,\ldots,0)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{2}{3\sqrt5}$; 8) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = (0,0,\ldots0)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = 0$; 9) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = -\bigl(\sqrt{m}(\sqrt{m}+\pi)\ln^2(\sqrt{m}+\pi)\bigr)^{-1}\cdot(1,1,\ldots,1)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{1}{2\sqrt{m}(\sqrt{m}+\pi)\ln^2(\sqrt{m}+\pi)}(-1+(-1)^m)$; 10) $\operatorname{grad}f(\vec{x}^{\,0}) = (m-1)(m+1)^{-2}(1,1,\ldots,1)$, $f'_{\vec a}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}$. **12.13.** 1) $f''_{11}(x_1,x_2) = f''_{12}(x_1,x_2) = f''_{22}(x_1,x_2) = g''(x_1+x_2)$, 2) $f''_{11}(x_1,x_2) = x_1^{-4}x_2^2g''(\frac{x_2}{x_1}) + 2x_1^{-3}x_2g'(\frac{x_2}{x_1})$, $f''_{12}(x_1,x_2) = -x_2x_1^{-3}g''(\frac{x_2}{x_1}) - x_1^{-2}g'(\frac{x_2}{x_1})$, $f''_{22}(x_1,x_2) = x_1^{-2}\cdot g''(\frac{x_2}{x_1})$; 3) $f''_{11}(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)^{-1}\bigl(x_1g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2}) + x_2^2g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\bigr)$, $f''_{12}(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\bigl(g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2}) - (x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\bigr)$, $f''_{22}(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)^{-1}\bigl(x_2g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2}) + x_1^2g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\bigr)$; 4) $f''_{ii}(x_1,x_2,x_3) = 2(g'(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + 2x_i^2g''(x_1^2+x_2^2+x_3^2))$, $i=1,2,3$, $f''_{ij}(x_1,x_2,x_3) = 4x_ix_jg''(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3$; 5) $f''_{11}(x_1,x_2) = f''_{12}(x_1,x_2) = f''_{22}(x_1,x_2) = g'(x_1+x_2)$; 6) $f''_{11}(x_1,x_2) = x_2^2g'(x_1x_2)$, $f''_{12}(x_1,x_2) = g(x_1x_2) + x_1x_2g'(x_1x_2)$, $f''_{22}(x_1,x_2) = x_1^2g'(x_1x_2)$.

12.14. 1) $f''_{11}(x_1,x_2) = a^2g''_{11}(ax_1,bx_2)$, $f''_{12}(x_1,x_2) = abg''_{12}(ax_1,bx_2)$, $f''_{22}(x_1,x_2) = b^2g''_{22}(ax_1,bx_2)$; 2) $f''_{11}(x_1,x_2,x_3) = f''_{12}(x_1,x_2,x_3) = f''_{22}(x_1,x_2,x_3) = g''_{11}(x_1+x_2,x_3)$, $f''_{13}(x_1,x_2,x_3) = f''_{23}(x_1,x_2,x_3) = g''_{12}(x_1+x_2,x_3)$, $f''_{33}(x_1,x_2,x_3) = g''_{22}(x_1+x_2,x_3)$. **12.15.** $f''_{ij}(x_1,x_2,x_3) = g''_{ij}(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3)$, $i=1,2,3$.

13.1. 1) Недиференційовна; 2) $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = a_1 + a_2$; 3) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = 2(2a_1 - a_2)$; 4) $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = 0$; 5) недиференційовна. **13.2.** 1) недиференційовна; 2) $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = 0$; 3) $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = 0$. **13.3.** 1) $df(\vec{x};\,\vec{a}) = x_1^{m-1}x_2^{n-1}(mx_2a_1 + nx_1a_2)$; $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = 2^{n-1}(4m+n)$; 2) $df(\vec{x};\,\vec{a}) = (x_2^{-1} + x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1})a_1 - (x_1x_2^{-2} - x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1})a_2$; $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = \frac{1}{2}$; 3) $df(\vec{x};\,\vec{a}) = (x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}\cos(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - \sin(x_1 - x_2))a_1 + (x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}\cos(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + \sin(x_1 - x_2))a_2$; $df(\vec{x}^{\,0};\,\vec{a}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
13.4. $108,972$. **13.8.** $\alpha > \frac{1}{2}$. **13.10.** 1) $df = (x_2^3 - 6x_1x_2^2)\,dx_1 + 2x_2(3x_1x_2 - 3x_1^2 + 4)\,dx_2$; $d^2f = -6x_2^2\,dx_1^2 + 12x_2(x_2 - 2x_1)\,dx_1dx_2 + 2(6x_1x_2 - 3x_1^2 + 4)dx_2^2$; 2) $df = \frac{1}{3}(x_1 + x_2^2)^{-2/3}(dx_1 + 2x_2dx_2)$; $d^2f = \frac{1}{3}(x_1 + x_2^2)^{-2/3}(-\frac{2}{3}(x_1 + x_2^2)^{-1}(dx_1^2 + 4x_2\,dx_1dx_2) + (-\frac{8}{3}(x_1 + x_2^2)^{-1}x_2^2 + 2)\,dx_2^2)$; 3) $df = \frac{1}{2\sqrt{\ln x_1x_2}} \times (x_1^{-1}\,dx_1 + x_2^{-1}\,dx_2)$; $d^2f = -\frac{1}{2\sqrt{\ln x_1x_2}}\big((\frac{1}{2\ln x_1x_2} + 1)x_1^{-2}\,dx_1^2 + (x_1x_2 \times \ln x_1x_2)^{-1}\,dx_1dx_2 + (\frac{1}{2\ln x_1x_2} + 1)x_2^{-2}\,dx_2^2\big)$; 4) $df = 3(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1} \times (x_1^2\,dx_1 + 2x_2^2\,dx_2 - x_3^2\,dx_3)$; $d^2f = 3(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1}\big(x_1(2 - 3x_1^3(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1})\,dx_1^2 + 2x_2(2 - 3x_2^3(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1})\,dx_2^2 - x_3(2 - 3x_3^3(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1})dx_3^2 - 6(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3)^{-1}(2x_1^2x_2^2dx_1dx_2 - x_1^2x_3^2dx_1dx_3 - 2x_2^2x_3^2dx_2dx_3)\big)$; 5) $df = x_2x_3x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1 + x_3x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_2 + x_2x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_3$; $d^2f = x_2x_3(x_2x_3 - 1)x_1^{x_2x_3-2}\,dx_1^2 + x_3^2x_1^{x_2x_3}\ln^2 x_1\,dx_2^2 + x_2^2x_1^{x_2x_3}\ln^2 x_1\,dx_3^2 + 2\big(x_3 \times (1 + x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1dx_2 + x_2(1 + x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1dx_3 + (1 + x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_2dx_3\big)$; 6) $df = -2x_1x_3(x_1^2 + x_2^2)^{-2}\,dx_1 - 2x_2x_3(x_1^2 + x_2^2)^{-2}\,dx_2 + (x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,dx_3$; $d^2f = 2(x_1^2 + x_2^2)^{-2}\big(x_3(3x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,dx_1^2 + x_3(3x_2^2 - x_1^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,dx_2^2 + 8x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,dx_1dx_2 - 2x_1\,dx_1dx_3 - 2x_2\,dx_2dx_3\big)$; 7) $df = \big(x_2\cos(x_1x_2) + \cos^{-2}(x_3 - x_1)\sin(\mathrm{tg}(x_3 - x_1))\big)\,dx_1 + x_1\cos(x_1x_2)\,dx_2 - \big(\cos^{-2}(x_3 - x_1)\sin(\mathrm{tg}(x_3 - x_1))\big)\,dx_3$; $d^2f = \big(-x_2^2\sin x_1 + (2\sin(x_3 - x_1)\cdot\sin\mathrm{tg}(x_3 - x_1) - \cos\mathrm{tg}(x_3 - x_1)\cdot\cos^{-1}(x_3 - x_1))\cos^{-3}(x_3 - x_1)\big)\,dx_1^2 - x_1^2\sin x_1x_2\,dx_2^2 - \cos^{-3}(x_3 - x_1)\cdot(\cos^{-1}(x_3 - x_1)\cdot\cos\mathrm{tg}(x_3 - x_1) + 2\sin(x_3 - x_1)\cdot\sin\mathrm{tg}(x_3 - x_1))\,(dx_3^2 - 2\,dx_1dx_3) + 2(\cos x_1x_2 - x_1x_2\sin x_1x_2)\,dx_1dx_2$; 8) $df = \big((1 - x_1x_2x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2\big)^{-1}\big((1 + x_2x_3(x_2 + x_3))\,dx_1 + (1 + x_1x_3(x_1 + x_3))\,dx_2 + (1 + x_1x_2(x_1 + x_2))\,dx_3\big)$; $d^2f = 2\big((1 - x_1x_2x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2\big)^{-2}\Big(\big((1 + x_2x_3(x_2 + x_3))(x_2x_3(1 - x_1x_2x_3) - x_1 - x_2 - x_3)\big)\,dx_1^2 + \big((1 + x_1x_3(x_1 + x_3))(x_1x_3(1 - x_1x_2x_3) - x_1 - x_2 - x_3)\big)\,dx_2^2 + \big((1 + x_1x_2(x_1 + x_2))(x_1x_2(1 - x_1x_2x_3) - x_1 - x_2 - x_3)\big)\,dx_3^2 + \big(x_3(2x_2 + x_3)((1 - x_1x_2x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2) - 2(1 + x_2x_3(x_2 + x_3))(x_1x_3(x_1x_2x_3 - 1) + x_1 + x_2 + x_3)\big)\,dx_1dx_2 + \big(x_2(2x_3 + x_2)((1 - x_1x_2x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2) - 2(1 + x_2x_3(x_2 + x_3))(x_1x_2(x_1x_2x_3 - 1) + x_1 + x_2 + x_3)\big)\,dx_1dx_3 + \big(x_1(2x_3 + x_1)((1 - x_1x_2x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2) - 2(1 + x_1x_3(x_1 + x_3))(x_1x_2(x_1x_2x_3 - 1) + x_1 + x_2 + x_3)\big)\,dx_2dx_3\Big)$;

9) $df = e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\big(x_2x_3(1+2x_1\sin x_1\cos^{-1}x_1)\cos^{-2}x_1\,dx_1+x_1x_3\,dx_2+$ $+x_1x_2(1-x_3)\,dx_3\big)$; $d^2f = 2x_2x_3e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(2\operatorname{tg}x_1+3x_1\operatorname{tg}^2x_1+x_1)\,dx_1^2+$ $+x_1x_2(x_3-2)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\,dx_3^2+2x_3e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(1+2x_1\operatorname{tg}x_1)\,dx_1dx_2+$ $+2x_2(1-x_3)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(1+2x_1\operatorname{tg}x_1)\,dx_1dx_3+2x_1(1-x_3)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\times$ $\times\,dx_2dx_3$; 10) $df = (1-(x_1-x_2x_3)^2)^{-1/2}\,(dx_1-x_3\,dx_2-x_2\,dx_3)$; $d^2f =$ $=(1-(x_1-x_2x_3))^{-3/2}(x_1-x_2x_3)\,(dx_1^2+x_3^2\,dx_2^2+x_2^2\,dx_3^2-2x_3\,dx_1dx_2-$ $-2x_2\,dx_1dx_3+2(x_1^2-1-x_1x_2x_3)(x_1-x_2x_3)^{-1}\,dx_2dx_3)$. **13.11.** 1) $\frac{61}{180}$; 2) $0,005$; 3) $\frac{(3-\sqrt{3})\pi}{360}$; 4) $257,408$; 5) $0,97$; 6) $4,99$; 7) $1,0575$; 8) $1,08$; 9) $\frac{1}{2}+\big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\frac{\pi}{180}$; 10) $\frac{\pi}{4}$. **13.12.** 1) $d^3f = 6(dx_1^3-3(dx_1^2dx_2-dx_1dx_2^2)+$ $+dx_2^3)$; 2) $d^3f = -4(3\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_1^3\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_1^3-12x_2(\sin(x_1^2+$ $+x_2^2)+2x_1^2\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_1^2dx_2-12x_1(\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2\cos(x_1^2+x_2^2))\times$ $\times\,dx_1dx_2^2-4(3\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_1^3\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_2^3$; 3) $d^{10}f = -9!\,(x_1+$ $+x_2)^{-10}\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k\,dx_1^kdx_2^{10-k}$; 4) $d^6f = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k\cos(x_1+\frac{k\pi}{2})(e^{x_2}+(-1)^{6-k}\times$ $\times\,e^{-x_2})\,dx_1^kdx_2^{6-k}$; 5) $d^5f = e^{ax_1+bx_2}\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^ka^kb^{5-k}\,dx_1^kdx_2^{5-k}$; 6) $d^3f =$ $=2(1+\operatorname{tg}^2x_1)(1+3\operatorname{tg}^2x_1)\operatorname{ctg}x_2\,dx_1^3-6\operatorname{tg}x_1(1+\operatorname{tg}^2x_1)(1+\operatorname{ctg}^2x_2)\times$ $\times\,dx_1^2dx_2+6(1+\operatorname{tg}^2x_1)\operatorname{ctg}x_2(1+\operatorname{ctg}^2x_2)\,dx_1dx_2^2-2(1+\operatorname{ctg}^2x_2)(1+$ $+3\operatorname{ctg}^2x_2)\,dx_2^3$; 7) $d^7f = -7!\,(1+x_1+x_2+x_3)^{-8}(dx_1+dx_2+dx_3)^7$; 8) $d^8f = \exp(ax_1+bx_2+cx_3)\cdot(a\,dx_1+b\,dx_2+c\,dx_3)^8$; 9) $2(x_1^{-3}\,dx_1^4+$ $+x_2^{-3}\,dx_2^4+x_3^{-3}\,dx_3^4)$; 10) $17153136\,dx_1^6dx_2^6dx_3^6$.

14.2. 1) $x_2f_1'=x_1f_2'$; 2) $f_{11}''=f_{22}''$. **14.3.** 1) $df = x_2g_1'\,dx_1+(x_1g_1'+$ $+x_3^{-1}g_2')\,dx_2-x_2x_3^{-2}g_2'\,dx_3$, $d^2f = x_2^2g_{11}''\,dx_1^2+(x_1^2g_{11}''+x_3^{-2}g_{22}'')\,dx_2^2+$ $+x_2x_3^{-3}(2g_2'+x_2x_3^{-1}g_{22}'')\,dx_3^2+2(g_1'+x_1x_2g_{11}''+x_2x_3^{-1}g_{12}'')\,dx_1dx_2+2x_2^2x_3^{-2}g_{12}''\cdot$ $\cdot\,dx_1dx_3-2x_3^{-2}(g_2'+x_2(x_1g_{12}''+x_3^{-1}g_{22}''))\,dx_2dx_3$; 2) $df = 2\big((x_1(h_1'+h_2')+$ $+x_2h_3')\,dx_1+(x_2(h_1'-h_2')+x_1h_3')\,dx_2\big)$, $d^2f = 2\Big(\big(h_1'+h_2'+2x_1^2(h_{11}''+2h_{12}''+$ $+h_{22}'')+4x_1x_2(h_{13}''+h_{23}'')+2x_2^2h_{33}''\big)\,dx_1^2+2\big(h_3'+2x_1^2(h_{13}''+h_{23}'')+2x_1x_2(h_{11}''-$ $-h_{22}''+h_{33}'')+2x_2^2(h_{13}''-h_{23}'')\big)\,dx_1dx_2+\big(h_1'-h_2'+2x_1^2h_{33}''+4x_1x_2(h_{13}''-$ $-h_{23}'')+2x_2^2(h_{11}''-2h_{12}''+h_{22}'')\big)\,dx_2^2\Big)$. **14.4.** $df = \Big((\sin y_2-y_2\sin y_1)\sqrt{y_1y_2^{-1}}+$ $+(y_1\cos y_2+\cos y_1)\sqrt{y_1^{-1}y_2}\Big)\,dx_1+\Big((y_1\cos y_2+\cos y_1)\sqrt{y_1y_2}-(\sin y_2-$ $-y_2\sin y_1)y_1\sqrt{y_1y_2^{-1}}\Big)\,dx_2$. **14.5.** $1+x_1^2x_2-\cos x_2$. **14.6.** $f(x_1,x_2)=|x_2|$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\vec{x}^{\,0}=\vec{0}$. **14.7.** 1) $x_1^2f_{11}''=x_2^2f_{22}''$; 2) $2x_1f_1'+x_2f_2'=2f$; 3) $f_{12}''=0$; 4) $x_1f_1'+x_2f_2'=f$; 5) $x_1^2f_{11}''-x_2^2f_{22}''=x_2f_2'-x_1f_1'$; 6) $f_1'+$ $+f_2'+f_3'=0$; 7) $x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=0$; 8) $x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=kf$. **14.8.** 1) $(x_1^2+2x_2^2)^{-1/2}g'\cdot(x_1\,dx_1+2x_2\,dx_2)$, $d^2f=(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big(2x_2^2(x_1^2+$ $+x_2^2)^{-1/2}g'+x_1^2g''\big)\,dx_1^2+2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big(x_1^2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'+2x_2^2g''\big)\,dx_2^2+$ $+4x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big((x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'+x_1g''\big)\,dx_1dx_2$; 2) $df=(h_1'+h_2')\,dx_1+$

$+ (h_1' - h_2')\, dx_2$, $d^2 f = (h_{11}'' + 2h_{12}'' + h_{22}'')\, dx_1^2 + (h_{11}'' - 2h_{12}'' + h_{22}'')\, dx_2^2 +$ $+(h_{11}''-h_{22}'')\, dx_1 dx_2$; 3) $df = (2x_1x_2h_1' + x_2^{-2}h_2')\, dx_1 + (x_1^2h_1' - 2x_1x_2^{-3}h_2')\, dx_2$, $d^2 f = \big(2(x_2h_1' + 2x_1^2x_2^2h_{11}'' + 2x_1x_2^{-1}h_{12}'') + x_2^{-4}h_{22}''\big)\, dx_1^2 + 2\big(2x_1h_1' - 2x_2^{-3}h_2' +$ $+ 2x_1^3x_2h_{11}'' - 3x_1^2x_2^{-2}h_{12}'' - 2x_1x_2^{-5}h_{22}''\big)\, dx_1dx_2 + \big(6x_1x_2^{-4}h_2' + x_1^4h_{11}'' - 2x_1x_2^{-3} \times$ $\times (1+x_1)^2h_{12}'' + 4x_1^2x_2^{-6}h_{22}''\big)\, dx_2^2$; 4) $df = (u_1' + 2xu_2' + 3x^2u_3')\, dx$, $d^2 f =$ $= (2u_2' + 6xu_3' + u_{11}'' + 4x^2u_{22}'' + 9x^4u_{33}'' + 4xu_{12}'' + 6x^2u_{13}'' + 12x^3u_{23}'')dx^2$; 5) $df =$ $= g' \cdot (x_2x_3\, dx_1 + x_1x_3\, dx_2 + x_1x_2\, dx_3)$, $d^2 f = g'' \cdot (x_2^2x_3^2\, dx_1^2 + x_1^2x_3^2\, dx_2^2 +$ $+ x_1^2x_2^2\, dx_3^2) + 2(g'' \cdot x_1x_2x_3^2 + g' \cdot x_3)\, dx_1dx_2 + 2(g'' \cdot x_1^2x_2x_3 + g' \cdot x_1)\, dx_2dx_3 +$ $+ 2(g'' \cdot x_1x_2^2x_3 + g' \cdot x_2)\, dx_1dx_3$; 6) $df = 2g' \cdot (x_1\, dx_1 - x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)$, $d^2 f = 2\big((2g'' \cdot x_1^2 + g')\, dx_1^2 + (2g'' \cdot x_2^2 - g')\, dx_2^2 + (2g'' \cdot x_3^2 + g')\, dx_3^2 + 4g'' \times$ $\times (-x_1x_2\, dx_1dx_2 - x_2x_3\, dx_2dx_3 + x_1x_3\, dx_1dx_3)\big)$; 7) $df = h_1'\, dx_1 - h_1'\, dx_2 +$ $+ h_2'\, dx_3$, $d^2 f = h_{11}''\, dx_1^2 + h_{11}''\, dx_2^2 + h_{22}''\, dx_3^2 + 2(-h_{11}''\, dx_1dx_2 + h_{12}''(dx_1dx_3 -$ $- dx_2dx_3))$; 8) $df = (x_2^{-1}u_1' + u_2' + u_3')\, dx_1 + (-x_1x_2^{-2}u_1' - u_2' + u_3')\, dx_2$, $d^2 f = \big(x_2^{-2}u_{11}'' + u_{22}'' + u_{33}'' + 2(x_2^{-1}(u_{12}'' + u_{13}'') + u_{23}'')\big)\, dx_1^2 + \big(2x_1x_2^{-3}u_1' +$ $+ x_1^2x_2^{-4}u_{11}'' + u_{22}'' + u_{33}'' + 2x_1x_2^{-2}(u_{12}'' - u_{13}'') - 2u_{23}''\big)\, dx_2^2 + 2\big(-x_2^{-2}u_1' -$ $- x_1x_2^{-3}u_{11}'' - u_{22}'' + u_{33}'' - x_2^{-2}(x_1 + x_2)u_{12}'' - x_2^{-2}(x_1 - x_2)u_{12}''\big)\, dx_1dx_2$; 9) $df =$ $= au_1'\, dx_1 + bu_2'\, dx_2 + cu_3'\, dx_3$, $d^2 f = a^2u_{11}''\, dx_1^2 + b^2u_{22}''\, dx_2^2 + c^2u_{33}''\, dx_3^2 +$ $+ 2abu_{12}''\, dx_1dx_2 + 2acu_{13}''\, dx_1dx_3 + 2bcu_{23}''\, dx_2dx_3$; 10) $df = (x_2u_1' + u_3')\, dx_1 +$ $+ (x_1u_1' + \cos x_2 \cdot u_2')\, dx_2 + u_3'\, dx_3$, $d^2 f = (x_2^2u_{11}'' + u_{33}'')\, dx_1^2 + (x_1^2u_{11}'' -$ $- \sin x_2 \cdot u_2' + \cos^2 x_2 \cdot u_{22}'')\, dx_2^2 + u_{33}''\, dx_3^2 + 2(u_1' + x_1(x_2u_{11}'' + u_{13}'') + (x_2u_{12}'' +$ $+ u_{23}'')\cos x_2)\, dx_1dx_2 + 2(x_1u_{13}'' + \cos x_2 \cdot u_{23}'')\, dx_2dx_3 + 2(x_2u_{13}'' + u_{33}'')\, dx_1dx_3$.

14.9. 1) $df = \Big(2\big(y_2 \operatorname{arctg}(y_1y_2) + y_1y_2^2(1 + y_1^2y_2^2)^{-1}\big)\sqrt[3]{y_2} + 3\big(y_1 \operatorname{arctg}(y_1y_2) +$ $+ y_1^2y_2(1 + y_1^2y_2^2)^{-1}\big)(y_1 - 1)\Big)\, dx$; 2) $df = \sqrt{2}\big(\sqrt{y_1 + y_2}(y_2y_1^{y_2 - 1} + y_1y_2^{y_1 - 1} +$ $+ y_2^{y_1}\ln y_2 + y_1^{y_2}\ln y_1)\, dx_1 + \sqrt{y_1 - y_2}(y_2y_1^{y_2 - 1} - y_1y_2^{y_1 - 1} + y_2^{y_1}\ln y_2 - y_1^{y_2}\ln y_1) \times$ $\times dx_2\big)$; 3) $df = y_1y_2^2y_3^3\big((2y_3 - 3y_1y_2^{-1}y_3e^{y_3}\sin y_1)\, dx_1 + (-2y_3\sin y_1 +$ $+ 3y_1y_2^{-1}y_3e^{y_3} + 4y_1y_2e^{-y_3})\, dx_2\big)$; 4) $df = 2(1 + y_1^2y_2)^{-1}\big(y_1(x_1y_1 + y_2)\, dx_1 +$ $+ y_1(x_2y_1 + y_2)\, dx_2 + y_1(x_3y_1 + y_2)\, dx_3\big)$; 5) $df = (y_2 + \cos y_1 \cos y_2)\sin\sqrt{y_2} \times$ $\times dx_1 + \big(y_1(y_2 + \cos y_1 \cos y_2)(\sin\sqrt{y_2})^{-1}\cos\sqrt{y_2} + \sqrt{y_2}\big)\, dx_2$; 6) $df = \big((2y_1 +$ $+ y_2)\cos(\ln y_2) + y_2(y_1 + 2y_2)\big)\, dx$; 7) $df = x_1(\cos x_2 - \sin x_2)\big(3x_1\sin x_2 \times$ $\times \cos x_2\, dx_1 - x_1^2(1 - \sin x_2\cos x_2)\, dx_2\big)$; 8) $df = y_1y_2^{-1}\Big(\big(2(3y_1 - 2)\ln y_2 +$ $+ 3y_1\big)\, dx_1 - 2y_1\big((3y_1 - 2)\ln y_2 - 1\big)\, dx_2\Big)$; 9) $df = \big(3 - 4y_1^3 - (2y_2)^{-1}\big) \times$ $\times \cos^{-2}\big(3y_1^{-1} + 2y_1^2 - y_2\big)\, dx$; 10) $df = e^{y_1y_2}\big((2x_1y_2 + x_2y_1y_2)\, dx_1 + (-2x_2y_2 +$ $+ x_1y_1y_2)\, dx_2\big)$.

15.1. $\overline{\{x|\ f(x) \neq 0\}} = [a;\, b]$. **15.2.** 1) Безліч. Напр., $y_\alpha(x) = -\sqrt{1 - x^2} \times$ $\times \mathbb{I}_{[-1;\alpha]}(x) + \sqrt{1 - x^2} \cdot \mathbb{I}_{(\alpha;1]}(x)$, $x \in [-1; 1]$; $\alpha \in [-1; 1]$; 2) y_{-1}, y_1; 3) а) y_1; б) y_{-1}, y_1. **15.3.** $y_\alpha(x) = -\sqrt{1 + x^2} \cdot \mathbb{I}_{(-\infty;\alpha]}(x) + \sqrt{1 + x^2} \cdot \mathbb{I}_{(\alpha;+\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; а) $y(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; б) y; $z(x) = -\sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

15.4. 1) Безліч. Напр., $y_\alpha(x) = -x \cdot \mathbb{I}_{(-\infty;\alpha)}(x) + x \cdot \mathbb{I}_{(\alpha;+\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$; 2) $y_{-\infty}, y_{+\infty}, y_0, -y_0$; 3) $y_{-\infty}, y_{+\infty}$; 4) а) $y_{-\infty}, y_0$; б) $y_{-\infty}, y_{+\infty}, y_0, -y_0$; 5) $y(x) = x$, $x \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. **15.5.** $y_1' = x_2 y(y^2 - x_1x_2)^{-1}$, $y_2' = x_1 y \times$ $\times (y^2 - x_1x_2)^{-1}$, $x_1x_2 \neq y^2$. **15.6.** $y_{11}'' = -2/5$, $y_{12}'' = -1/5$, $y_{22}'' = -394/25$. **15.7.** $y_{12}'' = 4x_2\big(y(f_2')^2 f_{11}'' - (1+y)f_1'f_2'f_{12}'' - f_1'f_{22}'' - f_1'f_2'\big)(f_1' + 2yf_2')^{-3}$. **15.8.** 1) $y' = (x+y)(y-x)^{-1}$, $y'' = 2(x^2 + 2xy - y^2)(x-y)^{-3}$; 2) $y' =$ $= (1 - \varepsilon\cos y)^{-1}$, $y'' = \varepsilon \sin y(\varepsilon\cos y - 1)^{-3}$; 3) $y' = x^{-1}y(y^2 - 3x^2)(x^2 -$ $- 3y^2)^{-1}$, $y'' = 12x^{-2}y(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)(x^2-3y^2)^{-3}$; 4) $y' = x(y^2 -$ $- 2x)\big(y(2y^2 - x)\big)^{-1}$, $\big(y^2 - 6x^2 + y(2x+1)y' + (x - 6y^2)y'^2\big)\big(y(2y^2-x)\big)^{-1}$; 5) $y' = x(a^2 - 2(x^2+y^2))\big(y(a^2+2(x^2+y^2))\big)^{-1}$, $y'' = -\big(4xyy' + (a^2 + 2(x^2 +$ $+ 3y^2))y'^2\big)\big(y(a^2+2(x^2+y^2))\big)^{-1}$; 6) $y' = (x+y)(x-y)^{-1}$, $y'' = 2(x^2+y^2)(x-$ $-y)^{-3}$; 7) $y' = (e^y + ye^x - ye^{xy})(xe^{xy} - e^x - xe^y)^{-1}$, $y'' = y'(2e^x + 2e^y - 2(1+$ $+ xy)e^{xy} - x(xe^{xy} - e^y)y')(xe^{xy} - e^x - xe^y)^{-1}$. **15.10.** 1) $y_1' = x_2y(x_1x_2 +$ $+ e^y)^{-1}$, $y_2' = x_1y(x_1x_2 + e^y)^{-1}$; 2) $y_1' = y_2' = (e^y - 1)^{-1}$; 3) $y_1' = -(x_2 +$ $+ y)(x_1 + 2x_2y)^{-1}$, $y_2' = -(x_1 + y^2)(x_1 + 2x_2y)^{-1}$; 4) $y_1' = y(x_1+y)^{-1}$, $y_2' = y^2(x_1+y)^{-1}$; 5) $y_1' = y_2' = -1$; 6) $y_1' = (2-x_1)(1+y)^{-1}$, $y_2' = 2x_2(1+$ $+y)^{-1}$; 7) $y_1' = -x_1y^{-1}$, $y_2' = -x_2y^{-1}$; 8) $y_1' = (\cos x_2 - y\sin x_1)(x_2 \sin y -$ $-\cos x_1)^{-1}$, $y_2' = (\cos y - x_1 \sin x_2)(x_2 \sin y - \cos x_1)^{-1}$. **15.13.** 1) -2; 2) -1. **15.14.** 1) $8/9$; 2) $4/5$; 3) 1; 4) 0; 5) 4; 6) 0; 7) 0; 8) -7; 9) 1; 10) $-4/3$.

16.1. 1) $f_1' = (x - f_2)(f_2 - f_1)^{-1}$, $f_2' = (f_1 - x)(f_2 - f_1)^{-1}$; 2) $f_{11}'' = -\frac{1}{4}$, $f_{22}'' = \frac{1}{4}$. **16.2.** 1) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1(3x_2 - x_1^2)$, $2x_2 \geq x_1^2$; 2) $f_1' = -3y_1y_2$, $f_2' = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$. **16.3.** $dy_1 = (x_1 \cos y_2 + x_2\cos y_1)^{-1}\big((x_1\cos y_2 + \sin y_2)\,dx_1 +$ $+ (x_1\cos y_2 - \sin y_1)\,dx_2\big)$, $dy_2 = (x_1\cos y_2 + x_2\cos y_1)^{-1}\big((x_2\cos y_1 - \sin y_2)\times$ $\times dx_1 + (x_2 \cos y_1 + \sin y_1)\,dx_2\big)$. **16.4.** $f' = \frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y_1,y_2)}\left(\frac{\partial(F_2,F_3)}{\partial(y_1,y_2)}\right)^{-1}$. **16.5.** $f_1' =$ $= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, $f_2' = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(F_3,F_1)}{\partial(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial(F_2,F_3)}{\partial(y_1,y_2)}\right)^{-1}$. **16.6.** $\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 - g^{-1}(x_1x_2 - y)\times$ $\times g\big(\sin(x_1+x_2)\big)\cos(x_1+x_2)$. **16.7.** 1) $f_1' = 2x$, $f_2' = 3(x^2-1)$; 2) $f_1' =$ $= 6x^{-1}\ln x$, $f_2' = \big(x(1+\ln x)\big)^{-1}$; 3) $f_1' = -\big(2\sqrt{-x}\cos^2\sqrt{-x}\big)^{-1}$, $f_2' =$ $= -\cos\sqrt{-x}\big(2\sqrt{-x}\big)^{-1}$; 4) $f_1' = (\cos^2 x - f_1^2)(2f_2 - 1)^{-1}\cos^{-2} x$, $f_2' =$ $= \big(f_2(\cos^2 x + f_1^2) - f_1^2\big)\big(f_1(2f_2 - 1)\cos^2 x\big)^{-1}$; 5) $f_1' = f_2 e^{-f_2}\sin x \cdot (f_1^2 -$ $- f_2)^{-1}$, $f_2' = f_1e^{-f_2}\sin x \cdot (f_2 - f_1^2)^{-1}$; 6) $f_1' = 2(f_2^2 - x^2)(2f_2 - x)^{-1}$, $f_2' =$ $= (f_2 - 2x)(2f_2 - x)^{-1}$; 7) $f_1' = 4x(5f_1)^{-1}$, $f_2' = x(5f_2)^{-1}$; 8) $f_1' =$ $= (2x\sin f_2 + \cos f_2)(\cos f_1 \cos f_2 - \sin f_1 \sin f_2)^{-1}$, $f_2' = (2x\cos f_1 + \sin f_1)\times$ $\times(\sin f_1 \sin f_2 - \cos f_1\cos f_2)^{-1}$; 9) $f_1' = \big(xf_1 + f_2(1+xf_1)^{-1}\big)\Delta^{-1}$, $f_2' =$ $= \big(xf_2 + f_1(xf_2 - 1)^{-1}\big)\Delta^{-1}$, де $\Delta = x^2 + \big((1+xf_1)(xf_2-1)\big)^{-1}$; 10) $f_1' =$ $= (xf_1 - f_2^2 - f_1f_2)\Delta^{-1}$, $f_2' = (f_1^2 - xf_2 + f_1f_2)\Delta^{-1}$, де $\Delta = (f_2 - f_1)(x +$ $+ f_1 + f_2)$. **16.8.** 1) $f_1''(x^0) = 26/45$, $f_2''(x^0) = 4/3$; 2) $f_1''(x^0) = -4/5$,

$f_2''(x^0)=4/5$; 3) $f_1''(x^0)=-2$, $f_2''(x^0)=0$; 4) $f_1''(x^0)=2$, $f_2''(x^0)=12$; 5) $f_1''(x^0)=-46/9$, $f_2''(x^0)=34/9$; 6) $f_1''(x^0)=-4/\sqrt{5}$, $f_2''(x^0)=-1/\sqrt{5}$; 7) $f_1''(x^0)=f_2''(x^0)=-2/3$. **16.9.** 1) $f=\frac{1}{4}(x_1^2-x_2^2)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $f_1'=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$, $f_2'=\frac{1}{2}(y_2-y_1)$; 2) $f=x_2(x_1+1)(2x_1+1)^{-1}$, $x_1\neq-1/2$, $f_1'=y_2^2(y_2-y_1)(2y_1+y_2)^{-2}$, $f_2'=(y_1+y_2)(2y_1+y_2)^{-1}$; 3) $f=x_2^{-2}(x_1^2-2x_2)$, $x_2\neq 0$, $x_1^2\geq 4x_2$, $f_1'=2(y_1y_2)^{-2}(y_1+y_2)$, $f_2'=-2(y_1y_2)^{-3}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)$; 4) $f=2\operatorname{arctg}x_1^{-1}x_2$, $x_1\neq 0$, $f_1'=-y_1^{-1}\sin y_2$, $f_2'=-y_1^{-1}\cos y_2$, $y_1\neq 0$; 5) $f=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, $x_1^2+x_2^2\leq 1$, $f_1'=-\cos y_1\sin y_2(\cos y_2)^{-1}$, $f_2'=$ $=-\sin y_1\sin y_2(\cos y_2)^{-1}$, $y_2\neq\pm\frac{\pi}{2}$; 6) $f=x_1(x_1^2+3x_2)$, $x_1^2+4x_2\geq 0$, $f_1'=3(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)$, $f_2'=3(y_1-y_2)$. **16.10.** 1) $df=\frac{1}{4}(x_1^2-x_2^2)(x_1\,dx_1+$ $+\,x_2\,dx_2)$; 2) $df=2(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2)$; 3) $df=a^{-1}(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2)$; 4) $df=2(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2)$. **16.11.** 1) $df=e^{-y_1}\big((y_2\cos y_2-y_1\sin y_2)\,dx_1+$ $+\,(y_2\sin y_2+y_1\cos y_2)\,dx_2\big)$; 2) $df=\frac{1}{2}\big(x_1^{-1}\ln x_1\,dx_1-x_2^{-1}\ln x_2\,dx_2\big)$; 3) $df=(1+y_1y_2)^{-1}\big(y_2(2y_1+1)\,dx_1+y_1(y_2-2)\,dx_2\big)$; 4) $df=2(4y_1y_2+$ $+3y_2^2)^{-1}\big((3y_2^3+2y_1^2)\,dx_1+(2y_2^2-y_1)\,dx_2\big)$; 5) $df=-c\cdot\operatorname{ctg}y_1(a^{-1}\sin y_2\,dx_1+$ $+\,b^{-1}\cos y_2\,dx_2)$, $y_1\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Програма курсу

Метричні простори

Означення метрики та метричного простору. Приклади метричних просторів. Елементарні властивості метрики: нерівність трикутника, нерівність для довжини ламаної, нерівність чотирикутника. Означення декартового добутку метричних проторів. $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$ як декартів добуток одновимірних евклідових просторів. Означення збіжної послідовності в метричному просторі та її границі. Елементарні властивості збіжних послідовностей. Охарактеризувати збіжні послідовності в $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$ та в $(C([a,b]),\ \rho)$. Означення відкритої кулі в метричному просторі. Означення внутрішньої точки множини та відкритої множини. Основні властивості відкритих множин. Теореми про структуру відкритих множин у $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$. Означення граничної точки множини в метричному просторі. Теорема про характеризацію граничної точки. Означення замкненої множини в метричному просторі. Властивості замкнених множин. Означення замикання множини в метричному просторі. Означення скрізь щільної множини в метричному просторі; еквівалентні твердження. Означення сепарабельного метричного простору. Приклади сепарабельних метричних просторів. Означення фундаментальної послідовності в меричному просторі та повного простору. Приклади повних просторів. Теорема Кантора про вкладені кулі. Теорема про поповнення метричного простору. Приклад: поповнення (a,b) з евклідовою метрикою ρ. Означення границі функції з одного метричного простору в інший. Теорема про єдиність границі. Граничні властивості арифметичних операцій з дійсними функціями. Означення подвійної та повторних границь. Зв'язок між ними (приклади). Означення неперервної функції. Арифметичні властивості неперервних функцій. Неперервність векторнозначного відображення. Неперервність суперпозиції. Приклади неперервних функцій з $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$ в $(\mathbb{R},\ \rho)$. Теорема про характеризацію неперервної функції. Означення гомеоморфізму. Означення рівномірно неперервної на множині функції. Приклади. Означення компактної множини в метричному просторі. Властивості компактних множин. Означення ε-сітки. Критерій Хаусдорфа. Критерій компактності множини в термінах послідовностей. Критерій компактності в $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$. Означення рівномірно обмеженої та рівностепенево неперервної сім'ї функцій. Критерій компактності в $(C([a,b]),\ \rho)$ (теорема Арцела – Асколі). Властивості неперервних функцій на компактних множинах. Означення зв'язної множини. Приклад зв'язної множини. Теорема про образ зв'язної множини при неперервному відображенні. Означення нерухомої точки відображення, означення стискаючого відображення. Теорема Банаха про нерухому точку. Наслідок. Застосування теореми Банаха: існування розв'язку рівнянь $f(x)=x,\ \ F(x)=0$, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, інтегрального рівняння Фредгольма другого роду; теорема про неявну функцію. Означення алгебри функцій. Теорема Стоуна – Вейєрштрасса. Класичні теореми Вейєрштрасса про рівномірне наближення.

Функції кількох змінних

Означення похідної за напрямком. Зв'язок з похідною функції однієї змінної. Означення частинної похідної. Властивості похідної за напрямком: теорема про арифметичні дії; про середнє значення. Теореми про похідну за напрямком $c\vec{a}$ та за напрямком $\vec{a}+\vec{b}$. Означення градієнта функції, його геометричний зміст. Означення лінійної функції. Означення диференційовної функції, диференціала. Властивості диференційовної в точці функції. Теорема про достатні умови диференційовності функції кількох змінних. Наслідок. Властивості диференційовних функцій кількох змінних: теорема про арифметичні дії; диференційовність суперпозиції. Означення похідної другого порядку за напрямками $\vec{a},\ \vec{b}$. Означення частинних похідних другого порядку. Теорема про мішані похідні другого порядку. Означення частинних похідних і диференціала другого порядку; похідних за напрямками та частинних похідних порядку n. Формула та ряд Тейлора для функцій кількох змінних. Означення локальних екстремумів. Теорема про необхідні умови локального екстремуму. Знаковизначені матриці та критерій Сільвестра; лема про збереження знаковизначеності функціональної матриці. Теорема про достатні умови локального екстремуму. Означення опуклої функції кількох змінних. Умови опуклості в термінах відповідної функції скалярного аргумента та в термінах другої похідної. Векторнозначні відображення. Приклади. Лінійне відображення та його матриця, їх властивості. Означення неперервного векторнозначного відображення. Критерій неперервності в термінах компонент. Означення диференційовного векторнозначного відображення та похідної відображення. Критерій диференційовності в термінах компонент відображення. Матриця Якобі. Теорема про диференційовність складного відображення. Наслідок для якобіанів. Аналог теореми про середнє значення для векторнозначних відображень. Лема про локальний гомеоморфізм. Теорема про існування та властивості оберненого відображення. Теорема про існування та властивості неявного відображення. Означення локального відносного (умовного) екстремуму. Необхідні умови відносного локального екстремуму (правило множників Лагранжа). Достатні умови відносного локального екстремуму. Приклад: екстремуми квадратичної форми на сфері та власні числа матриці форми.

Невласні інтеграли та інтеграли Рімана, що залежать від параметра

Означення невласного інтеграла по необмеженому проміжку. Приклади. Елементарні властивості. Збіжність невласних інтегралів від невід'ємних функцій: критерій збіжності та ознаки порівняння. Означення абсолютно та умовно збіжних невласних інтегралів по необмеженому проміжку. Зв'язок між абсолютною збіжністю та збіжністю. Приклад: інтеграл Діріхле. Ознаки Діріхле та Абеля збіжності невласного інтеграла по необмеженому проміжку. Приклади застосування. Означення невласного інтеграла від необмеженої функції. Приклади. Основні властивості. Теореми про неперервність, диференційовність та інтегровність за параметром інтеграла Рімана. Означення рівномірно збіжної сім'ї функцій. Теорема про граничний перехід за параметром під знаком інтеграла Рімана.

Література

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ : Сборник задач. – К., 1987.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз : Підручник. – К., 1994.– Ч. 2.
3. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – К., 2004.
4. Дороговцев А. Я., Денисьєвський М. О., Кукуш О. Г. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина I). – К., 2000.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1972.
6. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М., 1967.

Навчальне видання
Навчальні завдання
до практичних занять з математичного аналізу
для студентів механіко-математичного факультету
(1 семестр другого курсу, частина І)

Упорядники ДОРОГОВЦЕВ Анатолій Якович
ДЕНИСЬЄВСЬКИЙ Микола Олексійович
КУКУШ Олександр Георгійович