КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів механіко-математичного факультету

(2 семестр другого курсу)

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2006

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр другого курсу)/ Упорядн. А. Я. Дороговцев, О. Г. Кукуш, М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 94 с.

Рецензенти

Доктор фіз.-мат. наук, проф. Ю.Ю.Трохимчук, Інститут математики НАН України

Доктор фіз.-мат. наук, проф. Ю.В.Богданський, НТУУ "Київський політехнічний інститут"

Затверджено Вченою Радою
механіко-математичного факультету
12 вересня 2005 р.

Зміст

Передмова

Пропонованй посібник містить завдання до практичних занять з нормативної дисципліни "Математичний аналіз". Він охоплює такі теми, що вивчаються на механіко-математичному факультеті в четвертому семестрі: "Невласні інтеграли, що залежать від параметра", "Кратні інтеграли", "Інтеграли по многовидах. Теорема Стокса", "Ряди та інтеграл Фур'є".

Виконання кожного практичного заняття передбачає:

1. Вивчення відповідного лекційного матеріалу; підготовку відповідей на контрольні запитання, що передують задачам у кожній роботі та охоплюють основні теоретичні положення, необхідні для розв'язання задач.

2. Розв'язання студентами біля дошки під керівництвом викладача трьох – п'яти основних задач (позначених літерою "О"). Коментуючи розв'язання цих задач, викладач акцентує увагу на типових прийомах і методах.

3. Самостійне розв'язання студентами трьох – п'яти простіших задач (позначених літерою "С"). У разі необхідності викладач допомагає студентам або дає потрібну консультацію.

4. Виконання студентами домашнього завдання, що складається з обов'язкових загальних для всіх задач та з індивідуальних завдань (позначених літерою "І").

5. Для зацікавлених студентів в аудиторну частину включені складніші додаткові задачі (позначені літерою "Д"), що дають поглиблене уявлення про поняття, які вивчаються.

Слід підкреслити, що самостійне виконання домашнього завдання є необхідною умовою успішного оволодіння матеріалом курсу.

У четвертому семестрі проводиться колоквіум з теми "Невласні інтеграли, що залежать від параметра. Кратні інтеграли". Передбачається також проведення трьох самостійних робіт на практичних заняттях. Докладну програму курсу на четвертий семестр наведено на стор. 90.

При підготовці цього методичного посібника використані матеріали підручників і задачників, список яких див. на стор. 93.

Заняття 1
Рівномірна збіжність невласних інтегралів

Контрольні запитання

1) *Означення рівномірно збіжних невласних інтегралів по необмеженому проміжку та від необмеженої функції.*
2) *Ознаки Веєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності невласних інтегралів.*

А 1

1.1. (О) Дослідити рівномірну збіжність інтегралів на множині $M_i,\ i = 1, 2$:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = [2, +\infty),\ M_2 = (1, +\infty);$
2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right),\ M_2 = (0, 1).$

1.2. (С) Нехай $0 < a < b$. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[a, b]$;
б) збігається нерівномірно на $[0, b]$.

1.3. (С) Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[0, 1]$;
б) збігається нерівномірно на $[0, +\infty]$.

1.4. (О) За допомогою ознак Веєрштрасса, Діріхле чи Абеля довести рівномірну збіжність інтегралів на множині M :

1) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\alpha)\, dx,$ $M = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + \alpha^2 + x^\alpha}\, dx,$ $M = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$;
3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha^2 x\, dx}{\alpha + x},\ M = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$;
4) $\int\limits_0^1 x^{-\alpha} \sin \frac{1}{x}\, dx,\ M = (0, 1);$
5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha^2 x}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} \alpha x\, dx,$ $M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-\alpha x}\, dx,$ $M = [0, +\infty).$

1.5*. (Д) Сформулювати відповідне означення рівномірної збіжності невласного інтеграла зі змінною особливістю та перевірити, чи збігаються наведені інтеграли рівномірно на множині M :

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{|x-\alpha|^\alpha},\ M=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right];$

2) $\int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx,\ M=[0,1];$

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{|\ln\alpha x|^\alpha},\ M=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right].$

В 1

1.6. (О) Довести, що *інтеграл Діріхле* $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$:

а) збігається рівномірно на кожному відрізку, що не містить точки $\alpha=0$;

б) збігається нерівномірно на кожному відрізку, що містить точку $\alpha=0$.

1.7. (О) Довести, що інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+1}$$

збігається нерівномірно на проміжку $(1,+\infty)$.

1.8. (О) Дати означення нерівномірної збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

на проміжку (c,d).

1.9. (І) Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+x\sqrt{x}},\ M=\left(\frac{3}{2},+\infty\right);$

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\alpha^2 x\,dx,$
$M=\left[\frac{1}{100},+\infty\right);$

3) $\int\limits_1^2\frac{dx}{(2-x)^\alpha},\ M=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right);$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx,$
$M=[-n,n],\ n\in\mathbb{N};$

5) $\int\limits_0^1\frac{e^{-\alpha x^2}\,dx}{(1-x^2)^\alpha},\ M=\left(0,\frac{2}{3}\right];$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{1+x^2}\,dx,\ M=\mathbb{R};$

7) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+2},$
$M=[0,1000];$

8) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}}\,dx,\ M=[0,50];$

9) $\int\limits_0^2\frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}},$
$M=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);$

10) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha e^{-x}}{1+x},\ M=\left[-\frac{1}{2},2\right].$

1.10. (І) Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x^2\,dx,\qquad M=(-\infty,1)\cup(1,+\infty);$

2) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin\alpha x^3\,dx,\ M=[2,+\infty);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(e^x\alpha)\,dx,\ M=(-\infty,-1];$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x^2}{1+x^\alpha}\,dx,\ M=[1,+\infty);$

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\ln x},\ M=\{\alpha|\ |\alpha|\geq 3\};$

6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\alpha x^2}{1+x}\cos\alpha x^3\,dx,$
$M=[2,+\infty);$

7) $\int\limits_0^{1} \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{(\sin x)^\alpha},$
$M=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right);$

8) $\int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x-1}\cdot\frac{dx}{(1-x)^\alpha},$
$M=(-\infty,1);$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x-\sqrt{x}+1}\,dx,\ M=[1,2];$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^\alpha\,dx,\ M=\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right].$

1.11. (I) Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M :

1) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\cdot\operatorname{arctg}\alpha x\,dx,\ M=\mathbb{R};$

2) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,$
$M=[0,+\infty);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1+\alpha x}{1+x}\,dx,$
$M=\left[\frac{1}{2},2\right];$

4) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx,$
$M=[2,+\infty);$

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)\,dx,$
$M=\mathbb{R};$

6) $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\ln(\alpha x)}\,dx,\ M=\left[\frac{1}{5},+\infty\right);$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cdot\frac{1+\sqrt{\alpha x}}{1+\sqrt{x}}\,dx,$
$M=[0,3];$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{\alpha}\,dx,$
$M=[\sqrt{2},+\infty);$

9) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(x+\alpha)}{\ln x}\,dx,$
$M=\left[-\frac{3}{2},-1\right];$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{x+\alpha\ln(1+x)}{x+1}\,dx,$
$M=[1,2].$

Заняття 2

Властивості невласних інтегралів, що залежать від параметра

Контрольні запитання

1) *Теореми про неперервність за параметром і про граничний перехід під знаком інтеграла для невласних інтегралів.*
2) *Теореми про диференційовність та інтегровність по відрізку за параметром для невласного інтеграла.*
3) *Інтеграл Фруллані.*

А 2

2.1. (О) Нехай для функції $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Довести, що при кожному $\alpha \geq 0$ інтеграл

$$I(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$$

збігається і

$$\lim_{\alpha \to 0+} I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2.2. (О) Довести неперервність на множині M функцій:

1) $I(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\sqrt{x}\,dx,\ \alpha \in M = (0, +\infty);$
2) $I(\alpha) := \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x} e^{-\alpha x}\,dx,\ \alpha \in M = [0, +\infty).$

2.3. (О) Довести, що функція

$$I(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

диференційовна на $\mathbb{R}$.

2.4. (С) Довести, що функція

$$I(\alpha) := \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} e^{-\alpha x}\,dx$$

неперервно диференційовна на $(0, +\infty)$.

2.5. (О) Нехай $a > 0, b > 0$. Використовуючи рівність

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int\limits_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha,\ x > 0,$$

обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad a > 0,\ b > 0.$$

2.6. (С) Для $\{a, b\} \subset (0, +\infty)$ обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx.$$

2.7. (Д) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$$

2.8. (Д) Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла у виразі

$$\lim_{\alpha\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx?$$

2.9. (Д) Для неперервної обмеженої функції $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ довести рівність

$$\lim_{\alpha\to 0+} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2}\, dx = f(0).$$

2.10***.** (Д) Дослідити неперервність функції

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\, dx, \quad \alpha \in (0, 1).$$

2.11. (Д) Нехай

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^3}{x^2} \exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{x}\right), & x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ 0, & x = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Довести, що функція f має частинні похідні, неперервні за кожною змінною, однак у точці $\alpha = 0$

$$\frac{d}{d\alpha} \int\limits_0^1 f(x, \alpha)\, dx \neq \int\limits_0^1 f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

2.12. (Д) Довести, що для функції

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} x^{-2}, & 0 < \alpha < x < 1, \\ -\alpha^{-2}, & 0 < x < \alpha < 1, \\ 0, & \text{у решті точок}, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x, \alpha)\, dx \right) d\alpha \neq \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx,$$

хоча всі інтеграли збігаються.

В 2

2.13. (I) Довести неперервність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{1+x^4}\, dx,$
$M = \mathbb{R};$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx,$
$M = \mathbb{R};$

3) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-\alpha)^2)\, dx,$
$M = \mathbb{R};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{1+x^4}\, dx,$
$M = \mathbb{R};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\, dx,$
$M = [0, +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{x+\alpha}{x^{1-\alpha}}\, dx,$
$M = [0, +\infty);$

7) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \ln^{\alpha}(1+x^2)\, dx,$
$M = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right);$

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^{\alpha}}\, dx,$
$M = (4, +\infty);$

9) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha} + x^{\alpha/2}}\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

10) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi - x)^{\alpha}}\, dx,$
$M = (0, 2).$

2.14. (I) Довести неперервну диференційовність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos 2\alpha x}{x^2}\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

2) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{1} x^{\alpha} \cdot \ln^n x\, dx, \ n \in \mathbb{N},$
$M = (-1, +\infty);$

5) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \exp(-\alpha x^2)}{x^2}\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cdot e^{-x}\, dx,$
$M = (-1, +\infty);$

7) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^n)\, dx,$
$n \in \mathbb{N}, \ M = (0, +\infty);$

8) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2)\, dx,$
$M = (0, +\infty);$

9) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} 2\alpha x}{x}\, dx, \ M = (0, +\infty);$

10) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{x} \cos x\, dx, \ M = (0, +\infty).$

2.15. (I) Довести інтегровність функції I по відрізку M :

1) $I(\alpha)=\int\limits_2^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha}\,dx,$
$M=\left[-3,\frac{1}{2}\right];$

2) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}+\ln(1+x)}\,dx,$
$M=\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right];$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-\alpha)^4)\,dx,$
$M=[-5,6];$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^3+x^\alpha}\,dx,$
$M=\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right];$

5) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha\exp(-x^{2\alpha})\,dx,$
$M=\left[\frac{1}{2},2\right];$

6) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha^4 x}{\sqrt[3]{x}}\operatorname{arctg}\alpha x\,dx,$
$M=\left[-1,-\frac{1}{2}\right];$

7) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha^2 x}{x+\alpha}\,dx,$
$M=\left[\frac{1}{3},3\right];$

8) $I(\alpha)=\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{(1-x^3)^\alpha}\,dx,$
$M=\left[0,\frac{2}{3}\right];$

9) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^{3+\alpha}+1},$
$M=[0,5];$

10) $I(\alpha)=\int\limits_1^{10} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt{x}}\,dx,$
$M=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$

2.16. (I) Для довільних чисел $a>0,\ b>0$ обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-ax^2)-\exp(-bx^2)}{x}\,dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}bx}{x}\,dx;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}ax^2-\operatorname{arctg}bx^2}{x}\,dx;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2-\sin bx^2}{x}\,dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}ax-\operatorname{arcctg}bx}{x}\,dx;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin a\sqrt{x}-\sin b\sqrt{x}}{x}\,dx;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos a\sqrt{x}-\cos b\sqrt{x}}{x}\,dx;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(ax+1)^{-3/2}-(bx+1)^{-3/2}}{x}\,dx;$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{ax+1}}-\frac{1}{\sqrt{bx+1}}\right)\cdot\frac{dx}{x};$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg}ax)^2-(\operatorname{arctg}bx)^2}{x}\,dx.$

Заняття 3

Властивості невласних інтегралів, що залежать від параметра (продовження)

Контрольні запитання

1) *Значення інтегралів Діріхле та Ойлера – Пуассона.*
2) *Теорема про інтегрування за параметром по півосі.*

А 3

3.1. (О) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbb{R};$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbb{R};$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx,\ \alpha > 0;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2x^2+10x+3)\, dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx,$ $\alpha > 0,\ \beta > 0.$

3.2*. (Д) Диференціюванням за параметром α функції

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

обчислити *інтеграл Діріхле*

$$D(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.3*. (Д) Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\, dy,\ x \in \mathbb{R},$$

обчислити *інтеграл Лапласа*

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.4*. (Д) Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy,\ x > 0,$$

обчислити *інтеграли Френеля:*

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx;$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

3.5. (Д) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx;$

2)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}.$

В 3

3.6. (О) Довести, що інтеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

є розв'язком задачі Коші

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha I(\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}; \qquad I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

і обчислити його.

3.7. (І) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}\,dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cdot e^{-x}\,dx,\ \alpha>0;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha>0;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha>0;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos x\,dx,$
$\alpha>0,\ \beta>0;$

6) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha<-1;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha>0;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx,\ \alpha>0.$

3.8. (І) Обчислити інтеграли:

1)* $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\right) dx,$
$\alpha>0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx,$
$\alpha>\beta>0;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}\,dx,\ \alpha>0;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\,dx,$
$\alpha>0,\ \beta>0;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\Big(e^{-\alpha x^2}+e^{-\beta x^2}+$
$+e^{-\gamma x^2}-3e^{-\delta x^2}\Big)\,dx,$
$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\subset(0,+\infty);$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-(x^2+x)}\,dx;$

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-(x^2-x)}\,dx.$

Заняття 4
Ойлерові інтеграли

Контрольні запитання

1) *Означення* Γ- *і* B-*функцій Ойлера.*
2) *Елементарні властивості ойлерових інтегралів: значення* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}$; *функціональні рівняння для* Γ-*функції; зв'язок між* Γ- *і* B-*функціями.*

А 4

4.1. (О) Обчислити інтеграл
$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.2. (С) Нехай
$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^\alpha)\,dx, \quad \alpha > 0.$$

1) Виразити функцію I через Γ-функцію Ойлера.
2) Знайти $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

4.3. (О) Звести інтеграл
$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$$
до Γ-функції та обчислити його.

4.4. (С) Звести інтеграли до Γ-функції та обчислити:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[\alpha]{1 - x^\alpha}}$, $\alpha > 1$.

4.5. (О) Знайти значення α, β, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові та обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta}\,dx$.

4.6***.** (Д) Довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність
$$\prod_{m=1}^{n} \int\limits_0^{+\infty} x^{m-1} \exp(-x^n)\,dx = n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

4.7***.** (Д) Довести формулу Ойлера
$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} \exp(-\lambda x \cos\alpha) \cos(\lambda x \sin\alpha)\,dx = \Gamma(\beta)\lambda^{-\beta} \cos\alpha\beta,$$

де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$.

4.8. (Д) Для $a > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ знайти довжину дуги кривої

$$r^n = a^n \cos n\varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{2n}.$$

В 4

4.9. (О) 1) Довести, що $\Gamma \in C^{(\infty)}((0, +\infty))$.

2) Довести, що $\mathrm{B} \in C^{(\infty)}((0, +\infty) \times (0, +\infty))$.

4.10. (І) Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\beta)\, dx$, $\beta > 0$;

2) $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x^\alpha}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x} x^\alpha\, dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} 3^{-x} (x-1)^\alpha\, dx$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \exp(-x^4)\, dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} x(x^2-1)^\alpha \exp(-x^2)\, dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha \cdot \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

4.11. (О) Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\, dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

4.12. (І) Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові, обчислити:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\, dx}{(1+x^2)^2}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{2+3x^\alpha}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)}{(x+1)^{\alpha+3}}\, dx$;

4) $\int\limits_1^2 \frac{(x-1)^\alpha(2-x)^2}{(x+2)^{\alpha+4}}\, dx$;

5) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $a > 0$;

6) $\int\limits_0^1 (1-x^\alpha)^\beta\, dx$, $\beta > -1$;

7) $\int\limits_0^1 x^2(1-x^\alpha)^\beta\, dx$, $\beta > -1$;

8) $\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x^3)\, dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x(1+x))^{3/4}}$;

10) $\int\limits_{-1}^1 \frac{((1+x)^2(1-x)^2)^\alpha}{(1+x^2)^{2\alpha+1}}\, dx$.

4.13. (О) Знайти площу фігури, обмеженої кривою

$$r^4 = \sin^3\varphi\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

4.14. (І) Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові, обчислити:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi} \sin^\alpha x\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}\,dx$ (заміна $\cos x = 1 - 2\sqrt{t}$);

4) $\int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1+\beta\cos x}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dx}{1+\beta\cos x},\ 0<\beta<1$
(заміна $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}$);

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^3}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^{-1/3} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx,\ n\in\mathbb{N}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-(\sqrt{x})^3}\,dx$.

Заняття 5

Ойлерові інтеграли (продовження)

Контрольні запитання

1) *Диференційовність* Γ- *і* B-*функцій Ойлера, формули для похідних.*
2) *Формула Вейєрштрасса для* Γ-*функції.*
3) *Розклад синуса в нескінченний добуток.*

А 5

5.1. (О) Виразити інтеграли через Γ-функцію та її похідні, обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-ax} \ln x\, dx,$ $a > 0,\ \alpha > -1;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\, dx,\ 0 < \alpha < 1.$

5.2. (О) Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx.$

5.3. (О) Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

5.4. (О) Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^\beta}\, dx, \quad \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1,$$

використовуючи рівність

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt}\, dx, \quad x > 0,\ \beta > 0.$$

5.5. (Д) Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cdot\sin\pi x\, dx.$

5.6. (Д) Знайти площу, обмежену кривою

$$|x|^s + |y|^s = a^s, \quad s > 0,\ a > 0.$$

В 5

5.7. (І) Виразити інтеграли через ойлерові та їх похідні, обчислити:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x\, dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln 2x}{1+x}\, dx,\ 0 < \alpha < 1;$

3) $\int\limits_0^1 \ln(-\ln x)\, dx;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\, dx,\ 0 < \alpha < 1;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\ln x}{1+x^3}\, dx;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{1+x^4}\, dx;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} \ln^2 x\, dx,$
$\alpha > -1,\ \beta > 0;$

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha \dfrac{\ln\ln x}{x^2}\, dx,\ \alpha > -1;$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\, dx$
$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1;$

10) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^3 x\, dx,\ \alpha > 0.$

5.8. (O) Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^\beta}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < \beta < 2,$$

використовуючи рівність

$$\tfrac{1}{x^\beta} = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt}\, dx, \quad x > 0,\ \beta > 0.$$

5.9. (I) Виразити інтеграли через похідні B-функції:

1) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x\, dx,$
$\alpha > 0,\ \beta > 0;$

2) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln(1-x)\, dx,$
$\alpha > 0,\ \beta > 0;$

3) $\int\limits_0^\pi \sin^\alpha x \ln(\sin x)\, dx,\ \alpha > -1;$

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^{2\alpha} x (\ln(\sin x) +$
$+ 2\ln(\cos x))\, dx,\ \alpha > -\dfrac{1}{2};$

5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \ln(\cos x)\, dx,\ \alpha > -1;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x)^\beta}\, dx,\ \beta > \alpha > 0;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(a^2+x^2)^\beta}\, dx,$
$2\beta > \alpha > 0,\ a > 0;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{(1+x^3)^\beta}\, dx,\ 3\beta > \alpha > 0;$

9) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x \times$
$\times \ln(1-x)\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

5.10. (I) Використовуючи формулу Вейєрштрасса для Γ-функції, обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)}$ за таких значень параметрів:

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \dfrac{1}{2},\ \beta_2 = \dfrac{3}{2};$

2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2},\ \beta_1 = \dfrac{3}{4},\ \beta_2 = \dfrac{1}{4};$

3) $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\dfrac{1}{2},\ \beta_1 = -\beta_2 = -\dfrac{3}{4};$

4) $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 5,\ \beta_1 = \dfrac{5}{2},$
$\beta_2 = \dfrac{11}{2};$

5) $\alpha_1 = \dfrac{1}{2},\ \alpha_2 = \dfrac{3}{2},\ \beta_1 = \beta_2 = 1.$

5.11. (I) Використовуючи розклад синуса в нескінченний добуток, розкласти в нескінченний добуток функції:

1) $\cos \pi\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R};$

2) $\operatorname{tg} \pi\alpha,\ \alpha \neq n - \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

5.12. (I) Обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha^2}{n^2}\right)\left(1 - \dfrac{\beta^2}{n^2}\right)$, якщо:

1) $\alpha = \dfrac{1}{3},\ \beta = \dfrac{1}{6};$ 2) $\alpha = \dfrac{1}{4},\ \beta = \dfrac{1}{3};$ 3) $\alpha = \dfrac{5}{4},\ \beta = \dfrac{5}{6}.$

Заняття 6

Означення інтеграла по брусу

Контрольні запитання

1) *Означення m-вимірного бруса, його діаметра та міри.*
2) *Поняття розбиття й підрозбиття m-вимірного бруса $(m = 2, 3)$. Діаметр розбиття.*
3) *Означення сум Дарбу, інтегральної суми.*
4) *Означення верхнього та нижнього інтегралів, інтегровної функції та інтеграла по брусу.*

А 6

6.1. (О) Нехай брус $Q = [0,1] \times [0,1]$, його розбиття $\lambda(n) = \lambda_1(n) \times \lambda_2(n)$ породжене розбиттями відрізків $[0,1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right\},$$
$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2^n-1}{2^n} < \frac{2^n}{2^n} = 1\right\}, \quad n \geq 1.$$

Описати розбиття $\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3)$. Чи є $\lambda(3)$ підрозбиттям $\lambda(2)$? При якому n розбиття $\lambda(n+1)$ є підрозбиттям $\lambda(n)$? Обчислити діаметр $|\lambda(n)|$.

6.2. (С) Нехай брус $Q = [0,2] \times [0,1]$, його розбиття $\lambda(n) = \lambda_1(n) \times \lambda_2(n)$ породжене розбиттями відрізків $[0,2]$ і $[0,1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} < \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2\right\},$$
$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2^n-1}{2^n} < \frac{2^n}{2^n} = 1\right\}, \quad n \geq 0.$$

Визначити кількість елементів розбиття $\lambda(n)$ та обчислити його діаметр $|\lambda(n)|$. Показати, що розбиття $\lambda(1)$ є підрозбиттям $\lambda(0)$ і описати бруси $\{Q(1, 0/i, j)\}$ розбиття $\lambda(1)$ як підрозбиття $\lambda(0)$. Показати, що розбиття $\lambda(n+1)$ є підрозбиттям $\lambda(n)$ при кожному $n \geq 0$.

6.3. (С) Нехай розбиття $\lambda(m, n) = \lambda_1(m) \times \lambda_2(n)$ бруса $Q = [0,2] \times [0,1]$

породжене розбиттями відрізків $[0,2]$ і $[0,1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(m) = \left\{0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \ldots < \frac{2m-1}{2m} < \frac{2m}{2m} = 2\right\},$$

$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}, \quad m \ge 1,\ n \ge 1.$$

Для функцій 1) $f_1(x_1,x_2) = x_1 - x_2^2$, 2) $f_2(x_1,x_2) = \dfrac{1}{1+x_1x_2}$, $(x_1,x_2) \in Q$:

а) обчислити $L(f_k, \lambda(m,n))$, $U(f_k, \lambda(m,n))$;

б) для відмічених точок

$$\vec{\xi}(i,j) = \left(\frac{i+1}{m}, \frac{j+1}{n}\right) \in \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right],$$

$i = 0,1,\ldots,2m-1,\ j = 0,1,\ldots,n-1,$

записати інтегральну суму $S(f_k, \lambda(m,n), \{\xi(i,j)\}),\ k = 1,2.$

6.4. (О) Обчислити нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0,1] \times [0,1]$ від функцій

а) $f(x_1,x_2) = x_1x_2$; б) $g(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) + h(x_1+x_2)$, де

$$h(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

6.5. (Д) Довести, що для функції $f \in C(Q)$ кожна нижня й кожна верхня суми Дарбу є інтегральними сумами.

В 6

6.6. (І) Нехай для бруса $Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ задано його розбиття $\lambda(m,n) = \lambda_1(n) \times \lambda_2(m) \times \lambda_3(n)$, породжене розбиттями відрізків $[0,1]$, $[0,2]$ і $[0,3]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

$$\lambda_2(m) = \left\{0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \ldots < \frac{2m-1}{m} < \frac{2m}{m} = 2\right\},$$

$$\lambda_3(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{3\cdot 2^n - 1}{2^n} < \frac{3 \cdot 2^n}{2^n} = 3\right\}, \quad m,n \ge 1,$$

і відмічені точки

$$\vec{\xi}(i,j,k) = \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{m}, \frac{k}{2^n}\right) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right],$$

$i = 0,\ldots,n-1,\ j = 0,\ldots,2m-1,\ k = 0,\ldots,3\cdot 2^n - 1.$ Записати $L(f,\lambda(m,n))$, $U(f,\lambda(m,n))$, $S(f,\lambda(m,n),\{\vec{\xi}(i,j,k)\})$ для функцій:

1) $f(\vec{x}) = x_1x_2 - x_3$;
2) $f(\vec{x}) = x_1 + x_2x_3$;
3) $f(\vec{x}) = x_1 \ln(1 + x_2) - x_3$;
4) $f(\vec{x}) = x_3 \sin \dfrac{\pi x_1}{2} \cos \dfrac{\pi x_2}{4}$;
5) $f(\vec{x}) = (1 + x_1)^{x_2 - x_3}$;
6) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1}{1 + x_2x_3}$;
7) $f(\vec{x}) = \left(\dfrac{x_1x_2}{2}\right)^{1+x_3}$;
8) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1x_2}{1 + x_3}$;
9) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_3}$;
10) $f(\vec{x}) = x_1 - x_2 - x_3$,

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Q$.

6.7. (О) Нехай $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Знайти нижній та верхній інтеграли від функції f по брусу Q.

6.8. (І) Знайти нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0, 1] \times [0, 2]$ від функції f :

1) $f(\vec{x}) = (1 - x_1) \sin x_2$;
2) $f(\vec{x}) = x_1(1 - x_2)$;
3) $f(\vec{x}) = \cos x_1 \sin x_2$;
4) $f(\vec{x}) = x_1^3(1 - x_2)$;
5) $f(\vec{x}) = e^{x_1 - x_2}$;
6) $f(\vec{x}) = \left|x_1 - \dfrac{1}{2}\right| x_2$;
7) $f(\vec{x}) = x_1x_2^2$;
8) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1}{1 + x_2}$;
9) $f(\vec{x}) = x_1\sqrt{x_2}$;
10) $f(\vec{x}) = x_1 \ln(1 + x_2)$,

де $\vec{x} = (x_1, x_2) \in Q$.

Заняття 7

Обчислення інтеграла по брусу. Вимірні за Жорданом множини

Контрольні запитання

1) *Означення інтеграла по m-вимірному брусу.*
2) *Зведення інтеграла по m-вимірному брусу до повторного інтегрування.*
3) *Означення вимірної за Жорданом множини. Критерій вимірності.*

А 7

7.1. Обчислити інтеграли:

1) (О) $\int\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x_1^2 x_2 + \sqrt{x_2})\,dx_1 dx_2$;
2) (О) $\int\limits_{[0,1]^3} \sin(x_1 + x_2 + x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3$;
3) (С) $\int\limits_{[-1,1]\times[0,1]} \left(|x_1| \cos \frac{\pi x_2}{2}\right) dx_1 dx_2$;
4) (С) $\int\limits_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (x_1 x_3^2 + e^{x_2})\,dx_1 dx_2 dx_3$.

7.2. (О) Нехай

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

1) Для $n \geq 0$ визначити множини $A_{(n)}$, $A^{(n)}$, $\Delta A_{(n)}$ і обчислити їх міри Жордана.
2) Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана множини A, довести вимірність множини та знайти міру.

7.3. (С) Довести, що будь-яка обмежена підмножина прямої в $\mathbb{R}^2$ є вимірною за Жорданом і знайти її міру.

7.4. (О) Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана множини

$$A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Чи вимірна ця множина?

7.5. (Д) Довести, що прямокутник $Q = [a, b] \times [c, d]$ є вимірною за Жорданом множиною в $\mathbb{R}^2$ і має міру $m(Q) = (b - a)(d - c)$.

7.6. (Д) Чи завжди об'єднання зліченної сім'ї вимірних за Жорданом множин є вимірною множиною?

7.7. (Д) **Канторова множина.** Нехай $\alpha \in (0,1)$. Означимо

$$A_1 := \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), \quad K_1 := [0,1] \setminus A_1,$$

$$A_2 := \left(\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{16}, \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{16}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{16}, \frac{3}{4} + \frac{3\alpha}{16}\right), \quad K_2 := K_1 \setminus A_2,$$

і т. д. На n-му кроці з множини K_{n-1} вилучається об'єднання 2^{n-1} інтервалів, середина кожного з яких збігається із серединою відповідного відрізка множини K_{n-1} і довжина дорівнює $2^{1-2n}\alpha$. Покладемо $K := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Множина K називається *канторовою*. Довести, що канторова множина: а) незліченна; б) компактна; в) не містить жодного інтервалу; г) невимірна за Жорданом.

В 7

7.8. (І) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,1]\times[1,2]} (x_1 + x_2^3)\, dx_1 dx_2;$

2) $\int\limits_{[0,1]\times[2,3]} x_1 \sin(\pi x_2)\, dx_1 dx_2;$

3) $\int\limits_{[0,2\pi]\times[0,2]} x_2^2 \sin^2 x_1\, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{[1,2]\times[3,4]} (x_1 + x_2)^{-2}\, dx_1 dx_2;$

5) $\int\limits_{[0,1]^2} (x_1 \operatorname{sh} x_2 + \operatorname{ch} x_1)\, dx_1 dx_2;$

6) $\int\limits_{[-1,1]\times[-2,2]} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 dx_2,$
де $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2);$

7) $\int\limits_{[0,1]^3} x_1 x_2^2 x_3^3\, dx_1 dx_2 dx_3;$

8) $\int\limits_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3;$

9) $\int\limits_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x_1 \sqrt{x_3} \cos x_2 + x_1 x_2)\, dx_1 dx_2 dx_3;$

10) $\int\limits_{[0,1]^n} (x_1 + x_2^3 + x_3^7 + \ldots + x_n^{2^n-1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$

7.9. (І) Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = \int\limits_{[0,x]\times[0,x^2]} x_1 x_2 e^{-x_1 x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0,+\infty);$

2) $f(x) = \int\limits_{[0,x]^2} x_1 \ln(1 + x_1 x_2)\, dx_1 dx_2,\ x \in (0,+\infty);$

3) $f(x) = \int\limits_{[1,x]\times[x,1+x]} x_1^2 x_2^3\, dx_1 dx_2,\ x \in (1,+\infty);$

4) $f(x) = \int\limits_{[0,2]\times[0,x]} |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1|\, dx_1 dx_2,\ x \in (0,+\infty);$

5) $f(x) = \int\limits_{[0,x^2]\times[0,1]} x_1 e^{-x_1^2 x_2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0,+\infty);$

6) $f(x) = \int\limits_{[-1,x]\times[-2,x]} (|x_1| + |x_2|)\, dx_1 dx_2,\ x \in (-1, +\infty);$

7) $f(x) = \int\limits_{[0,x]^2} \sqrt{x_1^5 x_2^3}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0, +\infty);$

8) $f(x) = \int\limits_{[0,x^2]\times[0,x^3]} x_1 x_2 e^{x_1 - x_2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0, +\infty);$

9) $f(x) = \int\limits_{[0,x]^2} \sin(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2,\ x \in (0, +\infty);$

10) $f(x) = \int\limits_{[0,x]^3} x_1 e^{x_3} \cos x_2\, dx_1 dx_2 dx_3,\ x \in (0, +\infty).$

7.10. (I) Для множини $A \subset \mathbb{R}^2$ і $n \geq 0$ знайти $m(A_{(n)})$, $m(A^{(n)})$, $m(\Delta A_{(n)})$. Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана та довести вимірність множини A. Знайти $m(A)$.

1) $A = [0, 1] \times [0, 2];$
2) $A = [-1, 1]^2;$
3) $A = [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}];$
4) $A = \{(x_1, x_2)|\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\};$
5) $A = \{(x_1, x_2)|\ |x_1| + |x_2| \leq 1\};$
6) $A = \{(x_1, x_2)|\ |x_1| \leq x_2 \leq 1\};$
7) $A = \{(x_1, x_2)|\ 1 \leq x_2 \leq x_1 \leq 2\};$
8) $A = \{(x_1, x_2)|\ |x_1| \leq |x_2| \leq 1\};$
9) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 + x_2 \geq -2\};$
10) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1 = 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}.$

Заняття 8

Означення інтеграла по вимірній множині в $\mathbb{R}^m$. Обчислення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbb{R}^2$

Контрольні запитання

1) *Означення інтеграла по вимірній множині в $\mathbb{R}^m$.*
2) *Означення циліндричної множини в $\mathbb{R}^2$.*
3) *Зведення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbb{R}^2$ до повторного інтеграла.*

А 8

8.1. (О) Довести вимірність за Жорданом циліндричних множин у $\mathbb{R}^2$:

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sqrt{x_1},\ x_1 \in [1, 3]\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sin x_1,\ x_1 \in [0, \pi]\}$.

8.2. (О) Нехай $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1\}$. Обчислити за означенням інтеграл

$$\int\limits_A x_1\, dx_1 dx_2.$$

8.3. (О) Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
3) A – трикутник з вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 \le x_2 \le 1,\ x_1 \in [0, 1]\}$.

8.4. (О) Для функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x_1^3}^{x_1^2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1$; 2) $\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_{\sqrt{2x_1 - x_1^2}}^{\sqrt{2x_1}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1$.

8.5. (О) Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x_1 x_2 = a^2,\ x_1 + x_2 = \dfrac{5a}{2}$, де $a > 0$;
2) $x_2^2 = 2x_1 + 1,\ x_2^2 = -4x_1 + 4$.

8.6. (Д) Нехай $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$, $f \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$. Звести до інтеграла Рімана подвійний інтеграл

$$\int_A f(x_1)(x_2 - x_1)^n \, dx_1 dx_2.$$

8.7. (Д) Нехай $A(t) = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le (x_1 + t)^2,\ 0 \le x_1 \le 1\}$,

$$F(t) = \int_{A(t)} x_1 e^{\sqrt{x_2}} \, dx_1 dx_2,\ t \ge 0.$$

Обчислити $F'(t)$ на $[0, +\infty)$.

В 8

8.8. (І) Довести вимірність за Жорданом циліндричних множин:

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \ln x_1,\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \operatorname{arctg} x_1,\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
3) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le e^{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \sqrt[3]{x_1},\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sqrt[4]{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \cos x_1,\ 0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le x_1^2,\ -1 \le x_1 \le 1\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) |\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \le 1\}$;
9)* $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1\}$;
10)* $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\ 0 \le x_3 \le \ln x_1,\ (x_1, x_2) \in [1,2] \times [0,1]\}$.

8.9. (І) Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами, якщо:

1) A – трикутник з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$;
2) A – трапеція з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$;
3) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \le x_1\}$;
4) A обмежена кубічними параболами $x_2 = x_1^3$, $x_1 = x_2^3$;
5) A – паралелограм зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = x_1 + 3$, $x_2 = -2x_1 + 1$, $x_2 = -2x_1 + 5$;
6) A обмежена гіперболою $x_2^2 - x_1^2 = 1$ і колом $x_1^2 + x_2^2 = 4$;
7) A – трикутник зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = 2x_1$, $x_1 + x_2 = 6$;
8) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_2 \ge x_1^2,\ x_2 \le 4 - x_1^2\}$;
9) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_2 - 2x_1 \le 0,\ 2x_2 - x_1 \ge 0,\ x_1 x_2 \le 2\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 - x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0\}$.

8.10. (I) Для функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^4 \Big(\int\limits_{x_1}^{2x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

2) $\int\limits_{-6}^{2} \Big(\int\limits_{\frac{x_1}{4}-1}^{2-x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

3) $\int\limits_1^e \Big(\int\limits_0^{\ln x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

4) $\int\limits_{-1}^{1} \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{1-x_1^2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

5) $\int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{2-x_1}^{\sqrt{2x_1-x_1^2}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

6) $\int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\sin x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

7) $\int\limits_{-2}^{2} \Big(\int\limits_{-\sqrt{2-x_1^2/2}}^{\sqrt{2-x_1^2/2}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

8) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x_2}^{\sqrt{x_2}} f(x_1, x_2)\, dx_1 \Big) dx_2;$

9)* $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x_1^{2/3}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1 + \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^{1-\sqrt{4x_1-x_1^2-3}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1;$

10) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \Big(\int\limits_{-1}^{\sin x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1 + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} \Big(\int\limits_{\sin x_1}^{1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1.$

8.11. (I) Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 = 1;$

2) $x_1 = x_2,\ x_1 = 2x_2,\ x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + 3x_2 = 4;$

3) $x_1 x_2 = 1,\ x_1 x_2 = 4,\ x_2 = 3,\ x_2 = 5;$

4) $x_1 = x_2,\ x_2 = 5x_1,\ x_1 = 1;$

5) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1,\ x_1 + x_2 = 1;$

6) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1,\ \{a, b\} \subset (0, +\infty);$

7) $x_2^2 = 10x_1 + 25,\ x_2^2 = -6x_1 + 9;$

8) $x_1^2 x_2 = 4,\ x_1^2 x_2 = 9,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2;$

9) $\cos x_1 - x_2 + 1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_1 = \pi,\ x_2 = 0.$

Заняття 9

Обчислення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbb{R}^3$

Контрольне запитання

Зведення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbb{R}^3$ до повторного інтеграла.

А 9

9.1. (О) Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл:

1) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x_1} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 \right) dx_1$;

2) $\int\limits_A \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{9}}\, dx_1 dx_2$, де $A = \left\{ (x_1, x_2) \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \le 1 \right\}$.

9.2. (С) Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2, \quad x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$$

9.3. (С) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(2 + x_1 + x_2 + x_3)^3}$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;

2) $\int\limits_C x_1 x_2^2 x_3^3\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3 = x_1 x_2$, $x_2 = x_1,\ x_1 = 1,\ x_3 = 0,\ x_1 \ge x_2,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3$;

3) $\int\limits_C x_1 x_2 x_3\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3$;

4) $\int\limits_C x_1\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 2$, $x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;

5) $\int\limits_C (1 + 3x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) e^{x_1 x_2 x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

В 9

9.4. (І) Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл:

1) $\int\limits_A (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;

2) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_2\}$;

3) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 2\}$;

4) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;

5) $\int\limits_A (1 - x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;

6) $\int\limits_A (1-x_1-x_3)\,dx_1dx_3,\ A=\{(x_1,x_3)\,|\,0\le x_1+x_3\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_3\ge 0\};$

7) $\int\limits_A \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ 0\le x_1\le x_2\};$

8)* $\int\limits_A \sin\left(\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\}.$

9.5. (I) Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3=1+x_1+x_2,\ x_3=0,\ x_1+x_2=1,\ x_1=0,\ x_2=0;$
2) $x_1+x_2+x_3=2,\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3;\ x_i\ge 0,\ i=1,2;$
3) $x_3=\cos x_1\cos x_2,\ x_3=0,\ |x_1+x_2|\le\frac{\pi}{2},\ |x_1-x_2|\le\frac{\pi}{2};$
4) $x_3=x_1x_2,\ x_1+x_2+x_3=1,\ x_3=0;\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3;$
5) $x_3=x_1^2+x_2^2+1,\ x_1=4,\ x_2=4,\ x_i=0,\ i=1,2,3;$
6) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1+x_2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3;$
7) $x_2=\sqrt{x_1},\ x_2=2\sqrt{x_1},\ x_1+x_3=6,\ x_3=0;$
8) $x_3=9-x_2^2,\ 3x_1+4x_2=12,\ x_i=0,\ i=1,2,3.$

9.6. (I) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C x_1x_2x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=0,\ x_3=1;$

2) $\int\limits_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1,\ x_3=0$, $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2};$

3) $\int\limits_C x_1x_2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1$, $x_3=0,\ x_3=x_1^2+x_2^2;$

4) $\int\limits_C (x_1+x_2)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2+x_3=1,\ x_i=0,\ i=1,3;$

5) $\int\limits_C x_1x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ 0\le x_1\le x_2$, $0\le x_3\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\};$

6) $\int\limits_C (1+x_1)^{-1}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0$, $x_2\ge 0,\ 0\le x_3\le x_1x_2,\};$

7) $\int\limits_C (x_2+x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=1$, $x_1=x_2,\ x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x_1=0,\ x_3=0;$

8) $\int\limits_C (x_1-x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=2\sqrt{x_1x_2}$, $x_1=x_2,\ x_1=1,\ x_i=0,\ i=2,3;$

9) $\int\limits_C (1+x_1+x_2+x_3)^{-2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1+x_2+x_3=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3.$

Заняття 10

Обчислення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbb{R}^m$

10.1. (О) Нехай $f \in C(\mathbb{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

2) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{1-x_1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

10.2. (С) Нехай $f \in C([0,1])$. Замінити однократним інтеграл

$$\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1}\Big(\int\limits_0^{x_2} f(x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

10.3. (С) Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

1) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2)$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_1^2$.

10.4. (С) Обчислити m-кратний інтеграл

$$\int\limits_{[0,1]^m} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2\,dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

10.5. (О) Обчислити об'єм m-вимірного симплекса $\int\limits_A dx_1dx_2\ldots dx_m$, де

$$A = \{(x_1,x_2,\ldots,x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1,2,\ldots,m\}.$$

10.6. (Д) Обчислити m-кратний інтеграл

$$\int\limits_A \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}\,dx_1dx_2\ldots dx_m,$$

де A – m-вимірний симплекс (див. задачу 10.5).

В 10

10.7. (І) Нехай $f \in C(\mathbb{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

2) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{1-x_1}\Big(\int\limits_0^{x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

3) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1}\Big(\int\limits_0^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

4) $\int\limits_{-2}^2\Big(\int\limits_0^{\sqrt{4-x_1^2}}\Big(\int\limits_1^2 f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

5) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^0\Big(\int\limits_0^{1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

6) $\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

7) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1+x_2+1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

8) $\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_0^{x_1+x_2+2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

9) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{x_1}\Big(\int\limits_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

10) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_{x_1}^1\Big(\int\limits_0^{x_1+x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

10.8. (I) Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = x_1 + x_2,\ x_3 = x_1x_2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0;$
2) $x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 = \pm 1,\ x_1 - x_2 = \pm 1;$
3) $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 1 - x_1 - x_2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$
4) $x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
5) $x_3 = 4 - x_2^2,\ x_3 = x_2^2 + 2,\ x_1 = -1,\ x_1 = 2;$
6) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1^2 + 2x_2^2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 = 1;$
7) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2),\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1^3;$
8) $x_3 = \ln(x_1 + 2),\ x_3 = \ln(6 - x_1),\ x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_1 - x_2 = 2;$
9) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
10) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

10.9. (I) Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int\limits_{[0,1]^m} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)\,dx_1dx_2\ldots dx_m;$

2) $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,2]^{m-2}} (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3)\,dx_1dx_2\ldots dx_m;$

3) $\int\limits_{[0,\pi]^m} \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

4) $\int\limits_{[-\pi,\pi]^m} \cos^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

5) $\int\limits_{[0,1]\times[0,2]^{m-1}} (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

6) $\int\limits_{[0,1]\times[0,2]\times[0,1]^{m-2}} (x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{m+1} x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

7) $\int\limits_{[0,1]^m} (e^{x_1-x_2} + e^{x_2-x_3} + \ldots + e^{x_{m-1}-x_m} + e^{x_m-x_1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

8) $\int\limits_{[0,\pi]^m} (\sin x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin m x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

9) $\int\limits_{[-\pi,\pi]^m} \left(\cos x_1 + \cos \frac{x_2}{2} + \ldots + \cos \frac{x_m}{m}\right)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m;$

10)* $\int\limits_A x_1 x_2 \ldots x_m\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots +$ $+ x_m \le 1,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$.

10.10. (О) Для функції $f \in C([0, +\infty))$ довести рівність

$$\int\limits_0^t \Bigl(\int\limits_0^{x_1} \Bigl(\int\limits_0^{x_2} \Bigl(\ldots \Bigl(\int\limits_0^{x_{m-1}} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_m)\, dx_m\Bigr) \ldots\Bigr) dx_3\Bigr) dx_2\Bigr) dx_1 =$$

$$= \frac{1}{m!} \left(\int\limits_0^t f(x)\, dx\right)^m, \quad t \ge 0.$$

Вказівка. Показати, що обидві частини рівності є розв'язком тієї самої задачі Коші.

Заняття 11

Формула заміни змінних. Полярні координати

Контрольне запитання

Формула переходу до полярних координат.

А 11

11.1. (О) Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$; 2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\}$.

11.2. (С) Нехай $f \in C([0, +\infty))$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{3}x_1} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_2 \right) dx_1$;

2) $\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_1 dx_2.$

11.3. (С) Нехай $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $a \in (0, 2\pi)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

$$\int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^\varphi f(r, \varphi)\, dr\Big) d\varphi.$$

11.4. (С) Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\int\limits_A \sin\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)\, dx_1 dx_2, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid \pi^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\pi^2\}.$$

11.5. (О) Перейшовши до полярних координат, обчислити площу фігури

$$A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2)^2 \le 2(x_1^2 - x_2^2), \quad x_1^2 + x_2^2 \ge 1\}.$$

11.6. (О) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_A \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R^2} - \frac{x_2^2}{R^2}}\, dx_1 dx_2, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le R^2\},\ R > 0.$$

11.7. (Д) Знайти похідні функцій:

1) $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) := \int\limits_{A(t)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,$

де $A(t) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - t)^2 + (x_2 - t)^2 \le t^2\}$;

2) $[0,+\infty) \ni t \mapsto g(t) := \int\limits_{A(t)} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2,$

де $A(t) = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le t^2\},\ f \in C(\mathbb{R}^2).$

В 11

11.8. (I) Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int\limits_A f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le \pi^2\};$
2) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\};$
3) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1x_2 \ge 0\};$
4) $A = \{(x_1,x_2) \mid 4 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1x_2 \le 0\};$
5) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\};$
6) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 \le 2x_2\};$
7) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ |x_1| \le x_2\};$
8) $A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ |x_1| \le |x_2|\};$
9) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4x_2\};$
10) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 + x_2 \ge 0\}.$

11.9. (I) Нехай $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

1) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

3) $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\sqrt{2}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

5) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

6) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}}^{2} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

8) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

9) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi;$

10) $\int\limits_0^{\pi/3} \Big(\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\pi/3+\varphi)}} f(r,\varphi)\,dr \Big) d\varphi.$

11.10. (I) Нехай $f \in C(\mathbb{R})$. Перейти до полярних координат і замінити інтеграли однократними:

1) $\int\limits_A f\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid |x_2| \le |x_1| \le 1\};$

2) $\int\limits_A f(x_2/x_1)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le x_1-\frac{5}{36}\};$

3) $\int\limits_A f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;1\le x_1^2+x_2^2\le 4\};$

4) $\int\limits_A f(\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 4,\;x_1\le x_2\};$

5) $\int\limits_A f(\sqrt[4]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le x_2\}.$

11.11. (I) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \ln(1+x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1,\;x_1\ge 0,\;x_2\ge 0\};$

2) $\int\limits_A \cos(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1,\;x_1\ge 0,\;x_2\le 0\};$

3) $\int\limits_A (1-2x_1-3x_2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 4\};$

4) $\int\limits_A \sqrt{4-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 2x_1\};$

5) $\int\limits_A \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\,dx_1dx_2,$
$A=\{(x_1,x_2)\,|\;1\le x_1^2+x_2^2\le 9,\;\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}\le x_2\le\sqrt{3}x_1\};$

6) $\int\limits_A \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 dx_1dx_2,$
$A=\{(x_1,x_2)\,|\;1\le x_1^2+x_2^2\le 4,\;x_1\ge 0,\;x_2\le x_1\};$

7) $\int\limits_A \exp(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;1\le x_1^2+x_2^2\le 4\};$

8) $\int\limits_A \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 4,\;|x_1|\le|x_2|\};$

9) $\int\limits_A \sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1,\;x_1+x_2\ge 0\};$

10) $\int\limits_A \operatorname{sh}(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\,|\;4\le x_1^2+x_2^2\le 9\}.$

11.12. (I) Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^2x_2;$

2) $(x_1^2+x_2^2)^3=x_1x_2^4;$

3) $x_1^2+x_2^2=1,\;x_1^2+x_2^2=2x_1;$

4) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^3-3x_1x_2^2;$

5) $x_1^2+x_2^2=4,\;\dfrac{x_2}{2}\le x_1\le 2x_2;$

6) $x_1^2+x_2^2=1,\;x_1^2+x_2^2=4,$
$x_1\ge\dfrac{1}{2};$

7) $x_1^2+x_2^2=1,\;x_1^2+x_2^2=4,$
$x_2\ge-\dfrac{1}{2};$

8) $x_1^2+x_2^2=1,\;x_1+x_2\ge 1;$

9) $x_1^2+x_2^2=2\sqrt{2}x_1-1,$
$x_1=x_2,\;x_1=-x_2;$

10) $x_1^2+x_2^2=4x_1-3,\;x_1=0,$
$x_2=-1,\;x_2=1.$

Заняття 12

Загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі

Контрольні запитання

1) Формула переходу до узагальнених полярних координат.

2) Загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі.

3) Формула переходу до циліндричних координат у $\mathbb{R}^3$.

А 12

12.1. Запровадити узагальнені полярні координати та обчислити якобіан переходу до цих координат. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) (О) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{c} + \dfrac{x_2}{d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset (0, +\infty);$

2) (С) $\sqrt[4]{\dfrac{x_1}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{x_2}{b}} = 1, \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0;\ \{a, b\} \subset (0, +\infty).$

12.2. Обчислити площі фігур, що лежать у вказаній частині площини $\mathbb{R}^2$ і обмежені лініями:

1) (О) $x_1x_2 = 1,\ x_1x_2 = 2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0;$

2) (С) $x_2^2 = 2x_1,\ x_2^2 = 4x_1,\ x_1^2 = 6x_2,\ x_1^2 = 8x_2.$

12.3. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) (О) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 = x_1,\ x_1^2 + x_2^2 = 2x_1,\ x_3 = 0;$

2) (С) $x_3^2 = x_1x_2,\ x_1^2 + x_2^2 = 4;$

3) (С) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1x_2 = 1,\ x_1x_2 = 2,\ x_2 = \dfrac{x_1}{2},\ x_2 = 2x_1,\ x_3 = 0.$

В 12

12.4. (I) Обчислити площі фігур, що лежать у вказаній частині площини $\mathbb{R}^2$ і обмежені лініями:

1) $x_1^3 + \dfrac{x_2^3}{8} = x_1^2 + 4x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

2) $(x_1 - x_2)^4 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0;$

3) $(x_1 + 2x_2)^4 = x_1^2 + 4x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

4) $(2x_1 + 3x_2)^4 = 4x_1^2 - x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

5) $\left(\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3}\right)^5 = x_1^2x_2^2;$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

6) $(x_1 - x_2)^5 = 4x_1^2x_2^2;$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0;$

7) $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{12} = x_1x_2;$

8) $\left(2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{12} = 2x_1x_2;$

9) $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{10} = x_1^2x_2^2;$

10) $x_1^3 + x_2^3 = 9x_1^2 + x_2^2;$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

12.5. (I) Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_2 = 2x_1,\ x_2 = 3x_1;$
2) $x_1^2 = x_2,\ x_1^2 = 2x_2,\ x_1^3 = x_2^2,\ x_1^3 = 2x_2^2;$
3) $x_2 = x_1^5,\ x_2 = 2x_1^5,\ x_2 = x_1^6,\ x_2 = 2x_1^6;$
4) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1,\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2,\ x_1 = x_2,\ 4x_1 = x_2;$
5) $\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 1,\ \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 4,\ x_1 = x_2,\ 8x_1 = x_2;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$
6) $x_2 = \sqrt{x_1},\ x_2 = 2\sqrt{x_1},\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = 2;$
7) $x_2 = x_1^3,\ x_2 = 5x_1^3,\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = 2x_1^2;$
8) $x_2 = x_1\sqrt{x_1},\ x_2 = 2x_1\sqrt{x_1},\ x_2 = 2x_1,\ x_2 = \frac{1}{2}x_1;$
9) $x_2 = 7x_1^7,\ x_2 = 9x_1^7,\ x_2 = 7x_1^9,\ x_2 = 9x_1^9;$
10) $x_1x_2 = 4,\ x_1x_2 = 8,\ x_1 = 2x_2,\ x_1 = \frac{1}{2}x_2;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

12.6. (I) Обчислити площі фігур, обмежених лініями, через подвійний інтеграл по брусу у відповідній системі координат:

1) $x_1 + x_2 = 2,\ x_1 + x_2 = 3,\ x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 - 2x_2 = 1;$
2) $x_1 - x_2 = 3,\ x_1 - x_2 = 4,\ x_1 + 2x_2 = 1,\ x_1 + 2x_2 = 2;$
3) $5x_1 + 7x_2 = 3,\ 6x_1 + 8x_2 = 2,\ 5x_1 + 7x_2 = 4,\ 6x_1 + 8x_2 = 1;$
4) $x_1 - 3x_2 = 5,\ x_2 - 3x_1 = 6,\ x_1 - 3x_2 = 6,\ x_2 - 3x_1 = 5;$
5) $x_1 + \pi x_2 = 3,\ \pi x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + \pi x_2 = 5,\ \pi x_1 + x_2 = 6;$
6) $6x_1 + 7x_2 = 4,\ 7x_1 + 8x_2 = 5,\ 6x_1 + 7x_2 = 6,\ 7x_1 + 8x_2 = 6;$
7) $x_1 + 3x_2 = 1,\ x_1 + 3x_2 = 2,\ x_1 = 2x_2,\ x_2 = 2x_1;$
8) $x_1 + 2x_2 = 1,\ x_1 + 2x_2 = 3,\ x_1 = 3x_2,\ x_2 = 3x_1;$
9) $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = -1,\ x_1 = 2x_2,\ x_2 = 2x_1;$
10) $5x_1 + x_2 = 2,\ 5x_1 + x_2 = 3,\ x_1 + 5x_2 = 1,\ x_1 + 5x_2 = 2.$

12.7. (I) Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3 = x_1 + x_2,\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2x_1x_2,\ x_3 = 0;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \geq |x_1|;$
3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 0;$
4) $x_3 = \exp(-x_1^2 - x_2^2),\ x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 4;$
5) $x_3 = \cos\dfrac{\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2},\ x_3 = 0,\ x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \sqrt{3}x_1;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1;$
6) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1 + x_2;$
7) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = -1,\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1;\ \{a, b, c\} \subset (0, +\infty);$
8) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = x_3,\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b},\ x_3 = 0;\ \{a, b\} \subset (0, +\infty);$
9) $(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3 = 1,\ x_3 = 0;$
10) $x_3 = x_1x_2,\ x_1^2 = x_2,\ x_1^2 = 2x_2,\ x_2^2 = x_1,\ x_2^2 = 2x_1,\ x_3 = 0.$

Заняття 13

Формула заміни змінних у потрійному інтегралі

Контрольні запитання

1) Формула переходу до сферичних координат.

2) Загальна формула заміни змінних у потрійному інтегралі.

А 13

13.1. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) (О) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3$;

2) (С) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}} x_3^2\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

13.2. (О) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_C (x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2dx_3,$$

де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_3$ та $x_3=2$, перейшовши до циліндричних координат.

13.3. (С) Перейшовши до циліндричних координат, обчислити об'єм тіла, що лежить у області $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2\le x_3^2\}$ і обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$.

13.4. (О) Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1x_2=1$, $x_1x_2=2$, $x_1=2x_2$, $2x_1=x_2$; $\quad x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, зробивши відповідну заміну змінних.

13.5. (С) Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $4x_1^2+4x_2^2=x_3^2$, $x_3=2$.

В 13

13.6. (І) Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int\limits_C (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3=0$;

2) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1=2x_2$, $x_2=2x_1$; $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$;

3) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3\}$;

4) $\int\limits_C \exp((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2})\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$;

5) $\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_1x_3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

6) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_3^3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

7) $\int\limits_{-1}^{0}\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} x_1x_2x_3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

8)* $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_1=x_2$, $x_2=1$, $x_1=0$, $x_3=0$;

9) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $x_3=2\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $x_1=\pm x_2$, $x_1^2+x_2^2=1$; $x_1\ge 0$;

10) $\int\limits_C \sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$; $x_i\ge 0$, $i=1,2,3$.

13.7. (I) Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат:

1) $\int\limits_C (x_1^2+x_2^2)^2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_1^2+x_2^2=2x_3$, $x_1^2+x_2^2=1$;

2) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_3=3$, $|x_1|\le|x_2|$;

3) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$, $(x_1^2+x_2^2)^2=4(x_1^2-x_2^2)$;

4) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_1+x_3=2$;

5) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2=1$;

6) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$, $x_1^2+x_2^2=x_3$; $x_1^2+x_2^2\le x_3$;

7) $\int\limits_{0}^{2}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{2x_1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{0}^{3} x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

8) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_1$, $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=0$;

9) $\int\limits_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетином куль $\overline{B}((0,0,0),1)$ і $\overline{B}((0,0,1),1)$ в евклідовій метриці;

10) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетином куль $\overline{B}((0,0,0),2)$ і $\overline{B}((0,0,-2),2)$ в евклідовій метриці.

13.8. (I) Зробити відповідну заміну змінних та обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_3^2}{9}\right)^2=x_1$;
2) $(x_1^2+4x_2^2+9x_3^2)^2=x_1^2+4x_2^2$;
3) $(x_1^2+4x_2^2+9x_3^2)^2=$
$=x_1^2+4x_2^2-9x_3^2$;
4) $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}+x_3^2=1$, $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=x_3$; $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}\le x_3$;
5) $x_1^2+x_2^2+x_3^4=1$;
6) $(x_1^2+x_2^2)^2+x_3^4=1$;
7) $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1+x_2$; $x_i\ge 0$, $i=1,2,3$;
8) $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1-x_2$; $x_i\ge 0$, $i=1,2,3$;
9) $x_1^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_3^2=4$, $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$; $x_1>0$;
10) $x_1-x_2+x_3=\pm1$,
$x_1+x_2-x_3=\pm1$,
$-x_1+x_2+x_3=\pm1$.

13.9. (I) Знайти координати центрів ваги тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3^2=x_1^2+x_2^2$, $x_3=0$, $x_1^2+x_2^2=1$;
2) $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=1$; $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$;
3) $x_3=x_1^2+9x_2^2$, $x_3=4$; $x_1\ge 0$;
4) $x_3^2=1-x_1^2-x_2^2$, $x_3=0$; $x_3\ge 0$;
5) $x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=\pm1$; $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$;
6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_3=0$; $x_3\le 0$;
7) $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=1$; $x_1\le x_2\le 2x_1$;
8) $x_3^2=x_1^2+x_2^2$, $x_3^2=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1^2+x_2^2=1$;
9) $x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=\pm1$; $0\le x_1\le x_2$;
10) $x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=0$, $x_3=2$; $x_1/2\le x_2\le 2x_1$.

Заняття 14

Невласні кратні інтеграли

Контрольні запитання

1) *Означення невласного кратного інтеграла від необмеженої функції.*
2) *Означення невласного кратного інтеграла по необмеженій множині.*

А 14

14.1. (O) Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$, $f \in C(A)$ і

$$0 < \inf_{(x_1,x_2)\in A} |f(x_1, x_2)| \leq \sup_{(x_1,x_2)\in A} |f(x_1, x_2)| < +\infty.$$

За яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

14.2. (C) Дослідити, за яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1 + |x_1|^\alpha)(1 + |x_2|^\beta)}.$$

14.3. (C) Дослідити, за яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^\alpha x_2^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 1\},$$

і обчислити його.

14.4. (C) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) \cos(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2.$$

14.5. (O) Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $f \in C(A)$ і $f(x_1, x_2) \neq 0$, $(x_1, x_2) \in A$. За яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

14.6. (C) Дослідити збіжність невласного інтеграла

$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \leq x_1^2 \leq 1\}.$$

14.7. (C) Нехай $A \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C(A)$ і

$$0 < \inf_{(x_1,x_2,x_3)\in A} |f(x_1, x_2, x_3)| \leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in A} |f(x_1, x_2, x_3)| < +\infty.$$

Дослідити, за яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

у випадках:

1) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$.

14.8. (Д) Довести співвідношення:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid \; x_1^2+x_2^2 \le \pi(2n+1)\}} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = 2\pi$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid \; x_1^2+x_2^2 \le 2\pi n\}} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = 0$.

Чи збігається інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 \ ?$$

14.9. (Д) Довести, що інтеграл

$$\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid \; x_1 \ge 1, \; x_2 \ge 1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1 dx_2$$

розбігається, хоча обидва повторні інтеграли

$$\int\limits_1^{+\infty} \Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1 \Big) dx_2 \quad \text{і} \quad \int\limits_1^{+\infty} \Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_2 \Big) dx_1$$

збігаються.

14.10. (Д) Дати означення невласного інтеграла

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{|x_1 - x_2|^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

та дослідити його збіжність. Обчислити цей інтеграл.

Зауваження. При $\alpha > 0$ в околі кожної точки прямої $x_1 = x_2$ підінтегральна функція необмежена.

В 14

14.11. (І) Дослідити, за яких значень параметрів збігаються інтеграли:

1) $\int\limits_A \dfrac{dx_1 dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^\alpha}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1\}, \; \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $\int\limits_A \dfrac{dx_1 dx_2}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \ge 1\}, \; \alpha > 0, \; \beta > 0$;
3) $\int\limits_A \dfrac{\sin x_1 \sin x_2}{(x_1 + x_2)^\alpha}\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \ge 1\}, \; \alpha \in \mathbb{R}$;
4) $\int\limits_A \dfrac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\}, \; \alpha \in \mathbb{R}$;

5) $\int\limits_A \dfrac{\cos(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 1,\ x_1\le x_2\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

6) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^4+x_2^4)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha\in\mathbb{R};$

7) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_1\le x_2\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

8) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2-1)^\alpha\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 4\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

9) $\int\limits_A \sin((x_1^2+x_2^2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\ x_1^2+x_2^2\ge 1\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

10) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \dfrac{dx_1dx_2}{(1+|x_1|+|x_2|)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

14.12. (I) Обчислити інтеграли (задачі 1–5) чи виразити їх через інтеграли Ойлера (задачі 6–10):

1) $\int\limits_A \dfrac{dx_1dx_2}{(x_1+x_2)^2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\ge 1,\ 0\le x_1\le 1\};$

2) $\int\limits_A \dfrac{dx_1dx_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\};$

3) $\int\limits_A \dfrac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 1\};$

4) $\int\limits_A \dfrac{dx_1dx_2}{x_1^2+x_2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\ge 0,\ x_1\ge 0,\ x_1^2+x_2\le 1\};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2))\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_1\le x_2\};$

6) $\int\limits_A e^{-x_1}x_2^\alpha\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le x_1\},\ \alpha>0;$

7) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^2+x_2^2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha>0;$

8) $\int\limits_A (1-x_1)^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le x_1\le 1\},\ \alpha>-1,$
$\beta>-1;$

9)* $\int\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le 1-x_1,\ x_1\ge 0\},$
$\alpha>-1,\ \beta>-1;$

10) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha(1-x_1^2-x_2^2)^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\},\ \alpha>-1,\ \beta>-1.$

14.13. (I) Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\ge 0, x_2\ge 0\};$

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1x_2\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2;$

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^2+x_1+x_2^2-x_2))\,dx_1dx_2;$

4) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1\exp(-x_1^2+x_1-x_2^2)\,dx_1dx_2;$

5) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1^3x_2^3\exp(-x_1^4-x_2^4)\,dx_1dx_2;$

6) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1+x_2)\exp(-(x_1^2+2x_2^2+x_1+x_2))\,dx_1dx_2;$

7) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+x_1x_2)\exp(-(x_1^2-x_1+x_2^2))\,dx_1dx_2;$

8) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1^2+x_2^2)\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2;$

9) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x_1^2+x_2^2}\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2;$

10) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(2x_1^2+3x_1+5x_2^2+4x_2+1))\,dx_1dx_2.$

14.14. (I) Дослідити, за яких значень параметрів збігаються інтеграли:

1) $\int\limits_A \dfrac{dx_1dx_2}{|x_1|^\alpha+|x_2|^\beta},\ A=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|+|x_2|\le 1\},\ \alpha>0,\ \beta>0;$

2) $\int\limits_A |\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}|^\alpha\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

3) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le x_1\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

4) $\int\limits_{[0,1]^3} \dfrac{dx_1dx_2dx_3}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma},\ \{\alpha,\beta,\gamma\}\in\mathbb{R};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha)\,dx_1dx_2dx_3,$
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\},\ \ \alpha\in\mathbb{R};$

6) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3,\ A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 2x_1\},$
$\alpha\in\mathbb{R};$

7) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3,\ A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le x_2\},$
$\alpha\in\mathbb{R};$

8) $\int\limits_A (|x_1|+|x_2|+|x_3|)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3,$
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|+|x_2|+|x_3|\le 1\},\ \ \alpha\in\mathbb{R};$

9) $\int\limits_A (x_1^4+x_2^4+x_3^4)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3,\ A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^4+x_2^4+x_3^4\le 1\},$
$\alpha\in\mathbb{R};$

10) $\int\limits_A (|x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+|x_3|^\alpha)^{\alpha-6}\,dx_1dx_2dx_3,$
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+|x_3|^\alpha\le 1\},\ \alpha>0.$

Заняття 15
Криволінійні інтеграли другого роду

Контрольні запитання

1) *Означення криволінійного інтеграла другого роду та формула для його обчислення.*
2) *Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду.*

А 15

15.1. (О) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$ уздовж кривої Γ з початком у точці $(0,0)$ і кінцем у точці $(1,2)$, якщо:

1) Γ – відрізок прямої;
2) Γ – парабола, вісь якої – вісь ординат Ox_2;
3) Γ – ламана, що складається з відрізка OB осі Ox_1 і відрізка BA, паралельного осі Ox_2.

15.2. Обчислити криволінійні інтеграли:

1) (С) $\int\limits_{\Gamma}\big((x_1^2 - 2x_1x_2)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_2)\,dx_2\big)$, де Γ – відрізок параболи $x_2 = x_1^2,\ x_1 \in [-1,1]$, рух по якому відповідає зростанню x_1;
2) (С) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{(x_1+x_2)\ dx_1 - (x_1-x_2)\ dx_2}{x_1^2+x_2^2}$, де Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;
3) (С) $\int\limits_{\Gamma}(x_2\ dx_1 + x_3\ dx_2 + x_1\ dx_3)$, де Γ – виток гвинтової лінії $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $x_3 = 2t$, $0 \le t \le 2\pi$, рух по Γ відповідає зростанню t;
4) (О) $\int\limits_{\Gamma}\big((x_2^2 - x_3^2)\ dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\ dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\ dx_3\big)$, де Γ – контур, який обмежує частину сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_i \ge 0,\ \ i = 1,2,3,$ і пробігається так, що зовнішній бік цієї поверхні залишається ліворуч.

15.3. (О) Сила $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2)$. Знайти роботу сили, яка витрачається на переміщення матеріальної точки по дузі параболи $x_2^2 = 8x_1$ від точки $(2,4)$ до точки $(4,4\sqrt{2})$.

15.4. (С) Знайти роботу, що виконує сила земного тяжіння з переміщення матеріальної точки масою m з точки (x_1,x_2,x_3) у точку (y_1,y_2,y_3). Вважати вісь аплікат Ox_3 спрямованою вертикально вгору.

В 15

15.5. (I) Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – границя трикутника з вершинами $(0,0),(2,1),(1,2)$, що пробігається в напрямку $(0,0)\to(2,1)\to(1,2)\to(0,0)$; $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + x_1x_2^2\,dx_2$;
2) $\Gamma = \{(x_1,x_2)\,|\,|x_1|+|x_2|=1\}$ пробігається за рухом годинникової стрілки; $\omega = x_1\,dx_1 - x_1x_2\,dx_2$;
3) Γ – замкнений контур, що складається з відрізків ліній $x_2 = x_1^2$, $x_2 = x_1 + 2$ і пробігається проти руху годинникової стрілки; $\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2$;
4) Γ – крива, що складається з відрізка прямої від точки $(-1,0)$ до точки $(0,1)$ і розташованої в першому квадранті дуги кола з центром у точці $(0,0)$ і радіусом 1, що пробігається від точки $(0,1)$ до точки $(1,0)$; $\omega = x_1\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$;
5) Γ – межа квадрата з вершинами $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = -x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_1 + {}+ x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_2$;
6) Γ – крива $x_2 = 1 - |1-x_1|,\ 0\le x_1\le 2$, що пробігається в напрямку зростання x_1; $\omega = (x_1^2+x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2-x_2^2)\,dx_2$;
7) Γ – еліпс $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_2^2}{9}=1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = (x_1+x_2)\,dx_1 + (x_1-x_2)\,dx_2$;
8) Γ – арка циклоїди $x_1 = t-\sin t,\ x_2 = 1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$, що пробігається в напрямку зростання t; $\omega = (2-x_2)\,dx_1 + x_1\,dx_2$;
9) Γ – відрізок прямої від точки $(0,\pi)$ до точки $(\pi,0)$; $\omega = \sin x_2\,dx_1 + {}+ \sin x_1\,dx_2$;
10) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_2 = x_1^2, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + 2x_1x_2^2\,dx_2$.

15.6. (I) Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0),(1,0,2),(0,1,0)$; $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 - x_3\,dx_3$;
2) Γ – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$; $\omega = -x_1\,dx_1 + {}+ x_2x_3\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3$;
3) Γ – межа трикутника з вершинами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, що пробігається в напрямку $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$; $\omega = x_1x_3\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;
4) Γ – межа прямокутника, що пробігається в напрямку $(1,0,0)\to{}\to(1,1,0)\to(0,1,1)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 - x_2\,dx_2 + {}+x_1x_3\,dx_3$;

5) $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_2| = 4 - x_1^2, x_3 = 0\}$, що пробігається в напрямку від точки $(2, 0, 0)$ до точки $(0, 4, 0)$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з точки $(0, 0, 1)$; $\omega = x_1 x_2\, dx_1 + x_2^2\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3$;

6) Γ – відрізок прямої від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$; $\omega = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + (x_1 + x_2 - 1)\, dx_3$;

7) Γ – дуга гвинтової лінії $x_1 = 2\cos t, x_2 = 2\sin t, x_3 = \dfrac{t}{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$, від точки перетину з площиною $x_3 = 0$ до точки перетину з площиною $x_3 = 1$; $\omega = x_2 x_3\, dx_1 + x_3 x_1\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3$;

8) Γ – відрізок прямої від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(4, 4, 4)$; $\omega = \dfrac{x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 - x_2 + 2x_3}}$;

9) Γ – межа прямокутника, що пробігається у напрямку $(1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (0, 1, 1) \to (0, 0, 1) \to (1, 0, 0)$; $\omega = x_1 x_2\, dx_1 - dx_2$;

10) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)$; $\omega = \sin x_1\, dx_1 + \sin x_2\, dx_2 + \sin x_3\, dx_3$.

15.7. (I) Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_2 - x_3)\, dx_1 + (x_3 - x_1)\, dx_2 + (x_1 - x_2)\, dx_3$;

2) Γ – частина кривої Вівіані $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = x_1, x_3 \geq 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі $Ox_1 (x_1 > 1)$; $\omega = x_2^2\, dx_1 + x_3^2\, dx_2 + x_1^2\, dx_3$;

3) Γ – лінія перетину сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ і циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, що лежить в області $x_3 \geq 0$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(dx_1 + dx_2 + dx_3)$;

4) Γ – замкнена ламана лінія, що з'єднує точки $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2 + x_3}}\, dx_1 + \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1 + x_2 + x_3}}\, dx_2 + \dfrac{x_3}{\sqrt{x_1 + x_2 + x_3}}\, dx_3$;

5) Γ – перетин поверхні куба $|x_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, і площини $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_1\, dx_1 - x_3\, dx_2 + x_2\, dx_3$;

6) Γ – перетин циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ і площини $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_3\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_1\, dx_3$;

7) Γ – перетин циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$ і площини $x_1 = x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1^2 x_2\, dx_1 + dx_2 + x_1\, dx_3$;

8) Γ – перетин циліндра $\max\{|x_1|,|x_2|\}=1$ і площини $x_2=x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1x_2(\,dx_1+\,dx_2+\,dx_3)$;
9) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_2=x_1\sqrt{3}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega=(x_1+x_2)(\,dx_1+\,dx_2+\,dx_3)$;
10) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4, x_2=-x_1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega=(x_1-x_2)(\,dx_1+\,dx_2+\,dx_3)$.

15.8. (I) Нехай $\vec{F}(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ – силове поле. Знайти роботу поля, що витрачається на пересування матеріальної точки з точки A в точку B уздовж орієнтованої кривої Γ.

1) Сила $\vec{F}$ має постійну величину F і напрямлена вздовж додатної півосі Ox_1; $A=(1,0),\ B=(0,1)$; Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2=1$, що лежить у першому квадранті.
2) Сила $\vec{F}$ напрямлена в початок координат і за абсолютною величиною дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A=(0,0)$, $B=(1,1)$; Γ – відрізок прямої.
3) Задача 2) для частини параболи $x_2=x_1^2$, $0\le x_1\le 1$.
4) Напрямок сили $\vec{F}$ повернутий на кут $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою відносно радіус-вектора $\vec{r}$ точки її докладання, $|\vec{F}|=\dfrac{1}{|\vec{r}|}$; $A=(2,0)$, $B=(0,2)$; Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2=4$, що лежить у першому квадранті.
5) $\vec{F}(x_1,x_2) = \left(x_1x_2+\dfrac{x_2^2\sin x_1}{2}, \dfrac{x_1^2-2x_2\cos x_1}{2}\right)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; $A=B=(1,0)$; Γ – коло $x_1^2+x_2^2=1$, що пробігається за годинниковою стрілкою.
6) $\vec{F}(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_1+x_2)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; $A=(0,0),\ B=(1,1)$, Γ – відрізок прямої.
7) Задача 6), де Γ – дуга параболи $x_2=x_1^2$.
8) $\vec{F}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; $A=B=(0,1)$; Γ – коло $x_1^2+x_2^2=1$, що пробігається проти годинникової стрілки.
9) $\vec{F}(x_1,x_2)=(2x_1x_2,x_1^2)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; $A=(1,0),\ B=(0,3)$; Γ – відрізок прямої.
10) Сила $\vec{F}$ напрямлена в початок координат і за модулем дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A=(1,0),\ B=(0,2)$; Γ – чверть еліпса $x_1^2+\frac{x_2^2}{4}=1$, що лежить у першому квадранті.

Заняття 16

Поверхневі інтеграли другого роду

Контрольні запитання

1) *Означення поверхневого інтеграла другого роду та формули для його обчислення.*
2) *Зовнішній диференціал диференціальної форми.*

А 16

16.1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) (О) S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
2) (С) S – зовнішній бік поверхні симплекса $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\}$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_2 + x_3\,dx_1 \wedge dx_3$;
3) (О) S – зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $0 \le x_3 \le 1$; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 - x_1)\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$;
4) (С) S – зовнішній бік поверхні циліндра $x_1^2 + x_3^2 = 1$, $|x_2| \le 2$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
5) (С) S – верхній бік поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $1 \le x_3 \le 2$; $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1 \wedge dx_2$.

16.2. (Д) Обчислити похідну $\dfrac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} (x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3)$, $t > 0$, де $S(t)$ – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2$, $t > 0$.

16.3. (С) Знайти зовнішній диференціал форми:

1) $x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2$;
2) $P(x_1, x_2)\,dx_1 + Q(x_1, x_2)\,dx_2, \quad \{P, Q\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$;
3) $P(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 + Q(x_1, x_2, x_3)\,dx_2 + R(x_1, x_2, x_3)\,dx_3$, $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$;
4) $P(x_1, x_2, x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1, x_2, x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$, $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.

В 16

16.4. (I) Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – верхній бік трикутника з вершинами $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$; $\omega = (x_1+1)\,dx_2 \wedge dx_3 - (2x_2+1)\,dx_3 \wedge dx_1$;
2) S – нижній бік поверхні $2x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1-1)^2 + x_2^2 \le 1$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
3) S – зовнішній бік бічної поверхні циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $|x_3| \le 1$; $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1\,dx_1 \wedge dx_2$;
4) S – зовнішній бік еліпсоїда $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$; $\omega = dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2$;
5) S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + (x_2-1)^2 + (x_3+1)^2 = 1$; $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1 \wedge dx_2$;
6) S – зовнішній бік нижньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$; $\omega = x_1^2 x_2^2 x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
7) S – зовнішній бік еліпсоїда $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$; $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
8) S – той бік поверхні $x_2^2 = 1 - x_1$, $0 \le x_3 \le x_1$, який видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_2^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3\,dx_3 \wedge dx_1 - x_1\,dx_1 \wedge dx_2$;
9) S – той бік поверхні $x_3^2 = x_1, x_2^2 \le 1 - x_1, x_2 \ge 0$, який видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = 2x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + 3x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
10) S – внутрішній бік верхньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $\omega = x_1 x_2\,dx_2 \wedge dx_3$;
11) S – зовнішній бік поверхні призми з вершинами $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_1+x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$;
12) S – зовнішній бік поверхні призми з вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$; $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 - 3x_1\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_1 \wedge dx_2$;
13) S – внутрішній бік поверхні симплекса $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3 \le 1,\ x_i \ge 0;\ i=1,2,3\}$; $\omega = 2x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1$;
14) S – зовнішній бік поверхні куба $[0,1]^3$; $\omega = x_1 x_2\,dx_2 \wedge dx_3 + 3x_1 x_2 x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
15) S – зовнішній бік поверхні циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$, $0 \le x_3 \le 2$; $\omega = x_1^2 x_2^2\,dx_2 \wedge dx_3 - (x_1^2 + x_3^2)\,dx_3 \wedge dx_1$;

16) S – зовнішній бік поверхні куба $[0,1]^3$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;

17) S – зовнішній бік поверхні паралелепіпеда $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 3$; $\omega = e^{x_1}\,dx_2 \wedge dx_3 + e^{x_2}\,dx_3 \wedge dx_1 + e^{x_3}\,dx_1 \wedge dx_2$;

18) S – зовнішній бік поверхні, розташованої в першому октанті та складеної з поверхні циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 4$ і площин $x_3 = 3$, $x_i = 0$, $i = 1,2,3$; $\omega = x_2x_3\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3$;

19) S – зовнішній бік поверхні, розташованої в першому октанті та складеної з поверхонь параболоїда обертання $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ і координатних площин; $\omega = x_1^2x_3\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2x_2\,dx_1 \wedge dx_3$;

20) S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, 0 \le x_3 \le 2, x_1 \ge 0\}$; $\omega = x_3x_1\,dx_1 \wedge dx_2$;

21) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 - x_2^2\right\}$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3$;

22) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$; $\omega = x_2^2\,dx_1 \wedge dx_3$;

23) S – внутрішній бік поверхні піраміди з вершинами $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3$;

24) S – внутрішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3^2 \ge x_1^2 + x_2^2, 1 \le x_3 \le 2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 \wedge dx_3$;

25) S – зовнішній бік поверхні куба $[-1,1]^3$; $\omega = dx_2 \wedge dx_1$;

26) S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$; $\omega = x_1^2x_2^2\,dx_2 \wedge dx_3$;

27) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\right\}$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1$;

28) S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\}$; $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;

29) S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\}$; $\omega = (x_1 - x_3)\,dx_2 \wedge dx_3$;

30) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4, x_1 \le x_2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2 + x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$.

Заняття 17

Інтеграл від диференціала. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Зовнішній диференціал форми

Контрольні запитання

1) *Формула для обчислення криволінійного інтеграла від диференціала.*
2) *Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.*
3) *Зовнішній диференціал від диференціальної форми.*

А 17

17.1. (О) Перевірити, чи є форма ω повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B \omega$:

1) $\omega = (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)x_1^{-2},\ A = (2,1),\ B = (1,2)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_2;
2) $\omega = (x_1^4 + 4x_1x_2^3)\,dx_1 + (6x_1^2x_2^2 - 5x_2^4)\,dx_2,\ A = (-2,-1),\ B = (3,0)$;
3) $\omega = e^{x_1}(\cos x_2\,dx_1 - \sin x_2\,dx_2),\ A = (0,0),\ B = (2,3)$;
4) $\omega = x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3,\ A = (1,2,3),\ B = (6,1,1)$.

17.2. (С) Визначити функцію $z : A \to \mathbb{R}$ за її диференціалом в A :

1) $dz = (x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;
2) $dz = (x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)x_1^{-3},\ (x_1,x_2) \in A = [1,+\infty) \times \mathbb{R}$;
3) $dz = \cos x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;
4) $dz = (x_1^2 - 2x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_3)\,dx_2 + (x_3^2 - 2x_1x_2)\,dx_3$, $(x_1,x_2,x_3) \in A = \mathbb{R}^3$.

17.3. (О) Знайти роботу сили $\vec{F}(x_1,x_2) = (0,-mg),\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g > 0$, з переміщення матеріальної точки масою m з положення (x_1^0, x_2^0) у положення (y_1^0, y_2^0).

17.4. (О) Знайти зовнішній диференціал форми ω :

1) $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2$;
2) $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2 - x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_2$;
3) $\omega = P(x_1,x_2)\,dx_1 + Q(x_1,x_2)\,dx_2$, де $\{P,Q\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$;
4) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 + Q(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 + R(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$;
5) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + {}$ $+R(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.

17.5*. (Д) Нехай $f \in C(\mathbb{R})$, Γ – кусково-гладка замкнена крива в $\mathbb{R}^3$. Довести, що $\int\limits_\Gamma f(x_1^2 + x_2^2)(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2) = 0$.

17.6*. (Д) Довести, що множина $A = \left\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2\right\}$ для довільного $R > 0$ не є однозв'язною.

Вказівка. Розглянути інтеграл від форми $\omega = \dfrac{x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in A$.

В 17

17.7. (І) Перевірити, чи є форма ω повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B \omega$:

1) $\omega = x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1,\ A = (1, -2),\ B = (2, -1)$;
2) $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2,\ A = (1, 0),\ B = (-3, 2)$;
3) $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_2,\ A = (2, 2),\ B = (0, 1)$;
4) $\omega = (x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2},\ A = (3, 4),\ B = (0, 1)$, шлях інтегрування не містить точки $(0, 0)$;
5) $\omega = (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)(x_1 - x_2)^{-2},\ A = (-1, 0),\ B = (0, 1)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 = x_2$;
6) $\omega = \cos(x_1x_2)(x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2),\ A = (0, \pi),\ B = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$;
7) $\omega = e^{x_2}(\,dx_1 + x_1\,dx_2),\ A = (1, 0),\ B = (2, 1)$;
8) $\omega = (\,dx_1 + 2\,dx_2)(x_1 + 2x_2)^{-1},\ A = (e, 2e),\ B = (0, e)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 + 2x_2 = 0$;
9) $\omega = (4x_1^3 + x_2)\,dx_1 + x_1\,dx_2,\ A = (1, 1),\ B = (-1, 2)$;
10)* $\omega = f(x_1 + x_2)(\,dx_1 + \,dx_2),\ f \in C(\mathbb{R}),\ A = (0, 0),\ B = (5, 2)$;
11) $\omega = x_1^2\,dx_1 - x_2\,dx_2 + x_3^3\,dx_3,\ A = (1, 1, 1),\ B = (2, 0, 2)$;
12) $\omega = (x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2},\ A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 3, 4)$, шлях інтегрування не містить точки $(0, 0, 0)$;
13) $\omega = \sin(x_1 + x_2 + x_3)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3),\ A = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}),\ B = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
14) $\omega = \sin(x_2x_3)\,dx_1 + x_1x_3\cos(x_2x_3)\,dx_2 + x_1x_2\cos(x_2x_3)\,dx_3$, $A = (1, 1, \pi), B = (2, \frac{\pi}{2}, 3)$;
15) $\omega = 4x_1^3x_2\,dx_1 + (x_1^4 + 2x_2x_3)\,dx_2 + x_2^2\,dx_3,\ A = (1, -1, 1)$, $B = (-1, 1, -1)$;
16) $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3),\ A = (3, 4, 0),\ B = (0, 0, 5)$;
17) $\omega = e^{x_1x_2}(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + \,dx_3),\ A = (1, 1, e),\ B = (0, 2, 1)$;
18) $\omega = (2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3)\,dx_1 + (x_1^2x_3 + 2x_1x_2x_3)\,dx_2 + (x_1^2x_2 + x_1x_2^2)\,dx_3$, $A = (1, 3, 1),\ B = (3, 1, 3)$;
19) $\omega = (x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3)x_3^{-2},\ A = (1, 1, 1),\ B = (2, 2, 4)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_3;
20) $\omega = \operatorname{sh} x_1\,dx_1 + \operatorname{ch} x_2\,dx_2 + e^{x_3}\,dx_3,\ A = (0, 0, 0),\ B = (1, -1, 1)$.

17.8. (І) Визначити функцію $z : A \to \mathbb{R}$, що на A має такий диференціал:

1) $dz = x_1^{x_2 - 1}(x_2\,dx_1 + x_1 \ln x_1\,dx_2),\ (x_1, x_2) \in A = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$;
2) $dz = (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)(x_1 + x_2)^{-2},\ (x_1, x_2) \in A = [1, +\infty)^2$;
3) $dz = (x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2)(x_1x_2)^{-1/2},\ (x_1, x_2) \in A = [1, +\infty)^2$;

4) $dz = (3x_1^2 + 2x_1x_2)\,dx_1 + x_1^2\,dx_2,\ (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;

5) $dz = \dfrac{dx_1 + dx_2}{\cos^2(x_1 + x_2)},\ (x_1, x_2) \in A = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)^2$;

6) $dz = \left(\ln(x_1 + x_2) + \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}\right) dx_1 + \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} dx_2,\ (x_1, x_2) \in A = [1, +\infty)^2$;

7) $dz = (4x_1^3 + x_1 - x_2)\,dx_1 + (x_2 - x_1)\,dx_2,\ (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;

8) $dz = 2x_1x_2\,dx_1 + (x_1^2 + 9x_2^2)\,dx_2),\ (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;

9) $dz = (\cos(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2))\,dx_1 + (\cos(x_1 + x_2) + {}$ $+ \sin(x_1 - x_2))\,dx_2,\ (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2$;

10) $dz = (\operatorname{sh}(x_1 + x_2) + \operatorname{ch}(x_1 - x_2))\,dx_1 + (\operatorname{sh}(x_1 + x_2) - \operatorname{ch}(x_1 - x_2))\,dx_2$, $(x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2$.

17.9. (I) Обчислити роботу сили $\vec{F}$ з переміщення матеріальної точки масою m з положення A в положення B :

1) $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (0, 1),\ B = (2, 0)$;

2) $\vec{F}(x_1, x_2) = \left(-\dfrac{mx_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}, -\dfrac{mx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}\right),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $A = (1, 0),\ B = (3, 4)$, шлях точки не містить точки $(0, 0)$;

3) $\vec{F}(x_1, x_2) = (-mx_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), -mx_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ B = (2, 1)$;

4) $\vec{F}(x_1, x_2) = \left(x_1x_2 + \dfrac{x_2^2 \sin x_1}{2}, \dfrac{x_1^2 - 2x_2 \cos x_1}{2}\right),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $A = (0, 0),\ B = (\pi, 1)$;

5) $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = B = (1, 1)$;

6) $\vec{F}(x_1, x_2) = (2x_1x_2, x_1^2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (2, 0),\ B = (0, 1)$;

7) $\vec{F}(x_1, x_2) = (-m, -m),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (1, 2),\ B = (2, 1)$;

8) $\vec{F}(x_1, x_2) = (m, 2m),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (1, 3),\ B = (3, 2)$;

9) $\vec{F}(x_1, x_2) = (m, -3m),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (5, 5),\ B = (4, 6)$;

10) $\vec{F}(x_1, x_2) = (m, 0),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (2, 1),\ B = (-5, -6)$.

17.10. (I) Визначити зовнішній диференціал форми ω :

1) $\omega = x_1x_2\,dx_1 + \sin(x_1x_2)\,dx_2$; 2) $\omega = \operatorname{ch} x_1\,dx_1 + \operatorname{sh}(x_1 + x_2)\,dx_2$;

3) $\omega = x_1x_3\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2 + x_3x_1\,dx_3$;

4) $\omega = e^{x_1 + x_2}\,dx_1 + \cos^2 x_2\,dx_2 + \operatorname{arctg}(x_1x_3)\,dx_3$;

5) $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;

6) $\omega = 2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$;

7) $\omega = x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3$;

8) $\omega = \sum\limits_{k=1}^{m} \exp(x_k^k)\,dx_k$;

9)* $\omega = \sum\limits_{k=1}^{m} \sin x_k\,dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1}$.

Заняття 18
Формула Гріна. Обчислення площі

Контрольні запитання

1) *Формула Гріна.*
2) *Формула для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла.*

А 18

18.1. (О) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) Γ – контур трикутника ABC з вершинами $A(1,1), B(0,0), C(0,2)$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1+x_2)^2\,dx_1 - (x_1^2+x_2^2)\,dx_2$;
2) Γ – еліпс $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 - (x_1 - x_2)\,dx_2$;
3) Γ – крива, що обмежує множину $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \sin x_1\}$ та пробігається в додатному напрямку; $\omega = e^{x_1}\big((1 - \cos x_2)\,dx_1 - -(x_2 - \sin x_2)\,dx_2\big)$;
4) Γ – верхнє півколо $x_1^2+x_2^2 = 2x_1$, що пробігається від точки $A(2,0)$ до точки $O(0,0)$; $\omega = (e^{x_1}\sin x_2 - x_2)\,dx_1 + (e^{x_1}\cos x_2 - 1)\,dx_2$ (доповнити криву Γ до замкненої кривої прямолінійним відрізком OA осі Ox_1);
5) Γ – проста замкнена крива, що не проходить через початок координат і пробігається в додатному напрямку; $\omega = \dfrac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$.

   Вказівка. Розглянути два випадки: 1) множина, обмежена кривою Γ, не містить початку координат; 2) крива Γ оточує початок координат.

18.2. (О) Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) еліпсом $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}\,,\ a > 0,\ b > 0$;
2) параболою $(x_1 + x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
3) кривою $\left(\dfrac{x_1}{a}\right)^n + \left(\dfrac{x_2}{b}\right)^n = 1,\ \{a, b, n\} \subset (0, +\infty),$ і осями координат.

   Вказівка. Покласти $x_1 = a(\cos\varphi)^{\frac{2}{n}},\ x_2 = a(\sin\varphi)^{\frac{2}{n}}$.

В 18

18.3. (I) Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, де Γ – границя заданої множини $F \subset \mathbb{R}^2$, що пробігається в додатному напрямку:

1) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\big\}$;
$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + x_2[x_1 x_2 + \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})]\, dx_2$;

2) $F = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 1 + x_1\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_1 + {}$ $+ x_1 x_2\, dx_2$;

3) $F = \{(x_1, x_2) \,|\, |x_1| + |x_2| \le 1\}$; $\omega = x_1 x_2^2\, dx_1 + x_1^3\, dx_2$;

4) F – множина точок квадрата $[0, 1]^2$, що лежать поза кругом
$\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$; $\omega = x_1^2\, dx_1 + x_1 x_2\, dx_2$;

5) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge x_2^2 - 2, x_1 \le 2\big\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_1 + x_1 x_2\, dx_2$;

6) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge x_1^2 - 2, x_1 \le |x_2|\big\}$; $\omega = x_1 x_2\, dx_1 + (x_1 + 3x_2)\, dx_2$;

7) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1\big\}$; $\omega = x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2$;

8) $F = \Big\{(x_1, x_2) \,|\, -1 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le \sqrt{1 - x_1^2}\Big\}$;
$\omega = -3x_1^2 x_2\, dx_1 + 3x_1 x_2^2\, dx_2$;

9) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, -1 \le x_1 \le x_2^2, 0 \le x_2 \le 1\big\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_1 - {}$ $- x_1 x_2\, dx_2$;

10) $F = \big\{(x_1, x_2) \,|\, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\big\}$; $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2)$.

18.4. (I) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої та скориставшись формулою Гріна:

1) Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1, 0)$ до точки $B(-1, 0)$; $\omega = x_1 x_2^2\, dx_2 - x_1^2 x_2\, dx_1$;

2) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 4$, $x_1 \ge 0$, що пробігається від точки $A(0, -2)$ до точки $B(0, 2)$; $\omega = e^{-(x_1^2 - x_2^2)}(\cos(2x_1 x_2)\, dx_1 + \sin(2x_1 x_2)\, dx_2)$;

3) Γ – дуга еліпса $x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} = 1$, $x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1, 0)$ до точки $B(-1, 0)$; $\omega = (x_1 x_2 + x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 x_2 + x_1 - x_2)\, dx_2$;

4) Γ – нижнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_2 \le 0$, що пробігається від точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 0)$; $\omega = (x_1 x_2 + x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 x_2 + x_1 - x_2)\, dx_2$;

5) Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 1)$; $\omega = (x_2 - x_1^2)\, dx_1 + (x_1 + x_2^2)\, dx_2$;

6) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 \le x_2$, що пробігається від точки $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ до точки $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\omega = x_1 x_2^2\,dx_1 - x_1^3\,dx_2$;

7) Γ – дуга косинусоїди $x_2 = \cos x_1,\ -\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$, що пробігається в напрямку зростання x_1; $\omega = (2x_1 + 3x_2)\,dx_1 + 5x_2\,dx_2$;

8) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(-1,0), (-1,1), (1,1), (1,0)$; $\omega = x_1 x_2^2\,dx_1 + e^{x_1+x_2}\,dx_2$;

9) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$; $\omega = x_1^2 x_2\,dx_1 + (x_1 - x_2)x_2$;

10) Γ – крива, що складається з відрізка прямої, який з'єднує точки $(-1,0)$ і $(0,1)$, і дуги кола з центром у точці $(0,0)$ радіусом 1, розташованої в першій чверті площини; пробігається в напрямку $(-1,0) \to (0,1) \to (1,0)$; $\omega = x_2^2\,dx_1 + x_1 x_2\,dx_2$.

18.5. (I) Використовуючи формулу Гріна, обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) астроїдою $\left\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid 0 \le t \le 2\pi\right\}$;

2)* кривою $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2$ і осями координат;

3)* кривою $(x_1 + x_2)^3 = x_1 x_2$ (покласти $x_2 = x_1 t$);

4)* кривою $x_1^4 + x_2^4 = x_1^3 + x_2^3$ і осями координат;

5) кардіоїдою $\{(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$;

6) параболою $(x_1 - x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;

7) гіпоциклоїдою $\{(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$;

8)* петлею декартового листа $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1 x_2$ (покласти $x_2 = x_1 t$);

9) лемніскатою $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2$;

10) дугою гіперболи $x_1 = \operatorname{ch} t,\ x_2 = 2\operatorname{sh} t$ від точки $M(x_1^0, x_2^0)$ до точки перетину з віссю Ox_1, відрізком цієї осі та відрізком прямої OM.

Заняття 19

Формула Остроградського – Гаусса та формула Стокса

Контрольні запитання

1) Формула Остроградського – Гаусса.

2) Формула Стокса.

А 19

19.1. (О) Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, де в задачах 1–3 S – гладенька поверхня, що обмежує тіло скінченного об'єму V :

1) $\omega = x_2 x_3\, dx_2 \wedge\, dx_3 + x_3 x_1\, dx_3 \wedge\, dx_1 + x_1 x_2\, dx_1 \wedge\, dx_2$;
2) $$\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge\, dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge\, dx_1 + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge\, dx_2;$$
3) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge\, dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge\, dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge\, dx_2$;
4) $\omega = x_1^3\, dx_2 \wedge\, dx_3 + x_2^3\, dx_3 \wedge\, dx_1 + x_3^3\, dx_1 \wedge\, dx_2$, де S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.

19.2. (О) Обчислити об'єм тіла, обмеженого тором $x_1 = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $x_2 = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ x_3 = a\sin\psi;\quad \{\varphi, \psi\} \subset [0, 2\pi];\ 0 < a \le b$.

19.3. (С) Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma (x_2\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x_1\, dx_3)$, де Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.

19.4. (С) Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma \big((x_2 - x_1)\, dx_1 + (x_3 - x_1)\, dx_2 + (x_1 - x_2)\, dx_3\big)$, де Γ – еліпс $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 + 2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.

В 19

19.5. (І) Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – зовнішній бік поверхні тіла $\big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, |x_3| \le 1\big\}$, $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_2 \wedge\, dx_3$;
2) S – внутрішній бік поверхні куба $[0, 1]^3$, $\omega = x_1 x_3\, dx_2 \wedge\, dx_3 + (x_1^2 + x_3^2)\, dx_1 \wedge\, dx_2$;
3) S – зовнішній бік поверхні тіла $\big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\big\}$, $\omega = x_1\, dx_2 \wedge\, dx_3 + 2x_2\, dx_3 \wedge\, dx_1$;
4) S – внутрішній бік поверхні тіла $\big\{(x_1, x_2, x_3) \mid\ x_2^2 \le 2 - x_1, 0 \le x_3 \le x_1\big\}$, $\omega = x_1^2\, dx_2 \wedge\, dx_3 + x_3^2\, dx_1 \wedge\, dx_2$;

5) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\right\}$, $\omega=x_1^3\,dx_2\wedge\,dx_3+x_2^3\,dx_3\wedge\,dx_1+x_3^3\,dx_1\wedge\,dx_2$;

6)* S – зовнішній бік поверхні $|x_1-x_2+x_3|+|x_2-x_3+x_1|+|x_3-x_1+x_2|=1$, $\omega=(x_1-x_2+x_3)\,dx_2\wedge\,dx_3+(x_2-x_3+x_1)\,dx_3\wedge\,dx_1+(x_3-x_1+$ $+x_2)\,dx_1\wedge\,dx_2$;

7) S – зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2,\ 0\le x_3\le 1$; $\omega=x_1^2\,dx_2\wedge\,dx_3+x_2^2\,dx_3\wedge\,dx_1+x_3^2\,dx_1\wedge\,dx_2$ (приєднати частину площини $x_3=1,\ x_1^2+x_2^2\le 1$);

8) S – зовнішній бік поверхні призми $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1+x_2\le 1,\,x_3\le 1,\right.$ $\left.x_i\ge 0,\ i=1,2,3\right\}$ без нижньої основи; $\omega=x_1x_3\,dx_1\wedge\,dx_2+$ $+x_3\,dx_2\wedge\,dx_3+x_1x_2x_3\,dx_3\wedge\,dx_1$;

9) S – зовнішній бік поверхні призми $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;|x_1|+|x_2|\le 1,\right.$ $\left.0\le x_3\le 1\right\}$ без верхньої основи, $\omega=x_1^2x_2\,dx_2\wedge\,dx_3+\,dx_1\wedge\,dx_2$;

10) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_3\le x_1^2+x_2^2,\right.$ $\left.x_i\ge 0,\ i=1,2,3\right\}$ без нижньої основи $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1,\right.$ $\left.x_3=0,\ x_i\ge 0,\ i=1,2\right\}$, $\omega=x_2^2x_3\,dx_1\wedge\,dx_2+x_1^2x_3\,dx_2\wedge\,dx_3$.

19.6. (I) Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$, де $r>0$;
2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_2$;
3) поверхнею $x_1=\cos(\varphi-\psi),\ x_2=\sin(\varphi-\psi),\ x_3=\sin\psi,\ \{\varphi,\psi\}\subset$ $\subset[0,2\pi]$, і площинами $x_3=\pm 1$;
4) поверхнею $x_1=t_1\cos t_2,\ x_2=t_1\sin t_2,\ x_3=-t_1+\cos t_2,\ t_1\ge 0,$ $t_2\in[0,2\pi]$, і площиною $x_3=0$;
5) поверхнею $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ і площиною $x_3=h,\ h>0$;
6) поверхнею $x_1^2+x_2^2=r^2$ і площинами $x_3=0,\ x_3=h,\ h>0,\ r>0$;
7) поверхнею $x_3=x_1^2+x_2^2$ і площиною $x_3=h,\ h>0$;
8) поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ і площиною $x_3=h,\ r>h>0,\ x_3\ge h$;
9) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}+\dfrac{x_3^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0$;
10)* поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ і $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_3^2=1$.

19.7. (I) Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma\omega$:

1) Γ – перетин поверхні $x_1^2+x_2^2=1$ і площини $x_1+x_2+x_3=1$; обхід за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega=(x_3-x_2)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_2-x_1)\,dx_3$;

2) Γ – перетин поверхонь $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2Rx_1,\ x_1^2+x_2^2=2rx_1,$ $x_3>0,\ 0<r<R$, який пробігається так, що менша область, обме-

жена Γ на поверхні сфери, залишається зліва; $\omega = (x_2^2 + x_3^2)\,dx_1 + (x_1^2 + x_3^2)\,dx_2 + (x_1^2 + x_2^2)\,dx_3$;

3) Γ – переріз поверхні куба $[0,1]^3$ площиною $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{3}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_2^2 - x_3^2)\,dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\,dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_3$;
4) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = \dfrac{1}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку оі Ox_3; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 + (x_1 - x_3)\,dx_3$;
5) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ площиною $x_2 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_2; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 + (x_1 - x_3)\,dx_3$;
6) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ площиною $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1^2 + x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - x_3^2)\,dx_3$;
7) Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ площиною $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;
8) Γ – переріз еліпсоїда $x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = \dfrac{1}{2}$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$;
9) Γ – переріз циліндричної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$ площиною $x_1 = x_3$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_3$;
10) Γ – переріз конічної поверхні $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ площиною $x_1 + 2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1 - x_2 + x_3)\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2$;
11) Γ – еліпс $\left\{(\sin^2 t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t) \mid 0 \le t \le \pi\right\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = (x_2 + x_3)\,dx_1 + (x_3 + x_1)\,dx_2 + (x_1 + x_2)\,dx_3$;
12) Γ – крива $\{(\cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_2^2x_3^2\,dx_1 + x_1^2x_3^2\,dx_2 + x_1^2x_2^2\,dx_3$;
13) Γ – крива $\{(\sin t, \sin 5t, \sin 3t) \mid 0 \le t \le \pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_1^2x_3\,dx_1 + x_1^2x_3\,dx_2 + x_1x_2^2\,dx_3$;
14) Γ – виток гвинтової лінії $\{(\cos t, \sin t, t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = (x_1^2 - x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - x_3x_1)\,dx_2 + (x_3^2 - x_1x_2)\,dx_3$. *Вказівка.* Доповнити криву Γ прямолінійним відрізком.

Заняття 20
Довжина дуги. Криволінійні інтеграли першого роду

Контрольні запитання

1) Формула для обчислення довжини дуги.

2) Формула для обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

3) Формула для обчислення маси кривої та координат її центру ваги.

А 20

20.1. (О) Обчислити довжину кривої Γ :

1) Γ – дуга кривої $\left\{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки $(3,3,2)$;

2) $\Gamma = \{(t\cos t,\ t\sin t, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$.

20.2. (О) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f dl$:

1) $\Gamma = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, $a > 0$, $b > 0$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

2) Γ – дуга кривої $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $x_2^2 = x_1$ від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,1,\sqrt{2})$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

20.3. (С) Знайти масу кривої $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = 4x_1,\ 0 \le x_1 \le 1\right\}$, якщо лінійна щільність цієї кривої в точці $(x_1, x_2) \in \Gamma$ дорівнює $|x_2|$.

20.4. (С) Визначити центр ваги однорідної кривої Γ :

1) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid 0 \le t \le \pi\}$;

2) $\Gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \mid -1 \le t \le 0\}$;

3) $\Gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \mid -\infty \le t \le 0\}$.

В 20

20.5. (І) Обчислити довжину кривої Γ :

1) $\Gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid 0 \le t \le 1\}$;

2)* Γ – дуга кривої $\left\{\left(x_1, \arcsin x_1, \frac{1}{4}\ln\frac{1 - x_1}{1 + x_1}\right) \mid -1 < x_1 < 1\right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0);

3) $\Gamma = \left\{\left(t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{t^2}{2}\right) \mid 0 \le t \le 1\right\}$;

4) $\Gamma = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{t^3}{3}, t\right) \mid 0 \le t \le 4\right\}$;

5) $\Gamma = \left\{\left(\dfrac{t^2}{2}, \dfrac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}, \dfrac{t^3}{3}\right) \mid 4 \le t \le 9\right\}$;

6) $\Gamma = \left\{\left(t, \dfrac{4\sqrt{2}}{5}t^{5/4}, \dfrac{2}{3}t^{3/2}\right) \mid 0 \le t \le 1\right\}$;

7) $\Gamma = \left\{\left(\dfrac{t^4}{4}, t, \dfrac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}\right) \mid 1 \le t \le 2\right\}$;

8) $\Gamma = \left\{\left(\dfrac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, \ln t\right) \mid e^{-1} \le t \le e\right\}$;

9) $\Gamma = \left\{\left(\dfrac{2}{3}t^{3/2}, t\sqrt{2}, 2t^{1/2}\right) \mid 1 \le t \le 4\right\}$;

10) $\Gamma = \left\{(t, 2\sqrt{2}e^{t/2}, e^t) \mid \ \ln 2 \le t \le \ln 3\right\}$.

20.6. (I) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f dl$:

1) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 = x_2,$ $x_1 \ge x_2;\quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

2) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

3) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (2,1), (1,2)$; $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

4) Γ – межа сектора круга $x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge |x_2|$; $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

5) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (1,0), (0,1)$; $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

6) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

7) $\Gamma = \{(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

8) $\Gamma = \{(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \mid 0 \le t \le t_0\}$, $t_0 > 0$; $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

9) $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1\right\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^{4/3} + x_2^{4/3},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

10) Γ – межа сектора $\left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_2 \le x_1\right\}$; $f(x_1, x_2) = \exp(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

11) Γ – межа трикутника з вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

12) Γ – межа прямокутника з вершинами $(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

13) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2+3x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

14) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

15) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(0,0,0),(1,1,1),(3,2,1)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

16)* Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1+x_2+x_3=0$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

17) $\Gamma=\{(t\cos t,t\sin t,t)\mid 0\le t\le t_0\},\ t_0>0$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

18) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1=x_2$, що лежить у першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

19) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4,\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_3\ge 0$, що лежить у першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

20) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_2=x_3$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_2-x_3$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

20.7. (I) Знайти масу кривої Γ з лінійною щільністю ρ :

1) $\Gamma=\{(x_1,\ln x_1)\mid 1\le x_1\le e\}$; $\rho(x_1,x_2)=x_1^2,\ (x_1,x_2)\in\Gamma$;

2) $\Gamma=\left\{(a\cos t,b\sin t)\mid\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\},\ a>0,\ b>0$; $\rho(x_1,x_2)=x_2$, $(x_1,x_2)\in\Gamma$;

3) $\Gamma=\left\{\left(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{3}\right)\mid 0\le t\le 1\right\}$; $\rho(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{2x_2},\ (x_1,x_2,x_3)\in\Gamma$;

4) $\Gamma=\left\{\left(x_1,\frac{x_1^2}{2}\right)\mid 1\le x_1\le 2\right\},\ \rho(x_1,x_2)=\frac{x_2}{x_1},\ (x_1,x_2)\in\Gamma$;

5) $\Gamma=\left\{(\ln(1+t^2),2\,\mathrm{arctg}\,t-t)\mid 0\le t\le 1\right\},\ \rho(x_1,x_2)=x_2e^{-x_1}$, $(x_1,x_2)\in\Gamma$.

20.8. (I) Визначити центр ваги однорідної кривої Γ :

1) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=1\right\}$;

2) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid x_2^2=x_1^3-x_1^4\right\}$;

3) $\Gamma=\{(x_1,\mathrm{ch}\,x_1)\mid -1\le x_1\le 1\}$;

4) Γ – дуга кола радіусом a при центральному куті $2\varphi,\ 0<\varphi<\pi$;

5) $\Gamma=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1^{2/3}+x_2^{2/3}=1,\ x_2\ge 0\right\}$.

Заняття 21

Площа поверхні. Поверхневі інтеграли першого роду

Контрольні запитання

1) Формула для обчислення площі поверхні.

2) Формула для обчислення поверхневого інтеграла першого роду.

А 21

21.1. (О) Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні):

1) $x_3 = x_1 x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1;$

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \quad \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} \le 1; \quad 0 < b < a.$

21.2. (О) Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні):

1) $x_1 = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad x_2 = (b + a\cos\theta)\sin\varphi, \quad x_3 = a\sin\theta;$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2; \quad 0 < a \le b, \quad 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi,$ $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$. Чому дорівнює поверхня всього тора ($\varphi_1 = 0,$ $\varphi_2 = 2\pi, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 2\pi$)?

2) $x_1 = r\cos\varphi, \ x_2 = r\sin\varphi, \ x_3 = \varphi; \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

21.3. (О) Обчислити поверхневі інтеграли першого роду $\int\limits_S f\, d\sigma$:

1) S – поверхня $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \ x_3 \ge 0, \ a > 0; \ f(x_1, x_2, x_3) =$ $= x_1 + x_2 + x_3, \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

2) S – поверхня тетраедра $x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \ x_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3;$ $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2)^{-2}, \ (x_1, x_2, x_3) \in S;$

3) S – частина поверхні конуса $x_1 = r\cos\varphi\sin\alpha, \ x_2 = r\sin\varphi\sin\alpha,$ $x_3 = r\cos\alpha; \ 0 \le r \le a, \ 0 \le \varphi \le 2\pi; \ a, \alpha$ – сталі, $a > 0, \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2, \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

21.4. (С) Знайти масу параболічної оболонки

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2, 0 \le x_3 \le 1\right\}$$

зі щільністю $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in S.$

В 21

21.5. (І) Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні):

1) $x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1^2 + x_3^2 = 1;$

2) $\dfrac{x_3^2}{2} = x_1 x_2, \ \dfrac{1}{2} \le x_1 + x_2 \le 1, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$

3) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \ x_1^2 + x_2^2 \le 2x_2;$

4) $x_3 = x_1 - x_2,\ |x_1 - x_2| \le 1,\ |x_1 + x_2| \le 1;$

5) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ -x_1 \le x_3 \le x_1,\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

6) $(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + x_3 = 8,\ x_3 \ge 0;$

7) $(x_1 + 2x_2)^2 + x_3 = 1,\ 0 \le x_2 \le \frac{1}{2},\ x_3 \ge 0;$

8) $x_3 = x_1^2 - 2x_2^2,\ x_1^2 + 4x_2^2 \le 1,\ x_3 \ge 0;$

9) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2^2 \le x_1^2;$

10) $(x_1^2 + x_2^2)x_3 = x_1 + x_2,\ 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

21.6. (I) Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні):

1) $x_1 = R\cos\varphi\sin\psi,\ x_2 = R\sin\varphi\sin\psi,\ x_3 = R\cos\psi;\quad R > 0,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le \pi;$

2) $x_1 = R\cos\varphi\cos\psi,\ x_2 = R\sin\varphi\cos\psi,\ x_3 = R\sin\psi; \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$ $\psi_1 \le \psi \le \psi_2;\ R > 0,\ 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi,\ 0 \le \psi_2 < \psi_2 \le \dfrac{\pi}{2};$

3) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = r\sqrt{\cos 2\varphi};\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4},$ $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi};$

4) $x_1 = \cos\varphi\cos\psi,\ x_2 = \sin\varphi\cos\psi,\ x_3 = \sin\psi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ $-\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2},\ |\cos\psi| \ge |\cos\varphi|;$

5) $x_1 = \cos\varphi\sin\psi,\ x_2 = \sin\varphi\sin\psi,\ x_3 = \cos\psi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ $0 \le \psi \le \pi,\ |\sin\psi| \le |\sin\varphi|;$

6) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = \dfrac{r^2}{2};\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ r^2 \le \sin 2\varphi;$

7) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = \dfrac{r^2}{2}\cos 2\varphi;\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

8) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = \dfrac{r^2}{2};\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi;$

9) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = r;\ 0 \le r \le 2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi;$

10) $x_1 = 2r\cos\varphi,\ x_2 = 3r\sin\varphi,\ x_3 = r^2\left(\cos^2\varphi - \dfrac{3\sin^2\varphi}{2}\right);\ 0 \le r \le 1,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ |\cos 2\varphi| \ge \dfrac{\sqrt{3}\,|\sin\varphi|}{2}.$

21.7. (I) Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S f\,d\sigma$:

1) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4,\ 0 \le x_3 \le x_2 + 3\right\};\ f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2,$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

2) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3\};$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

3) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3^2=x_1^2+x_2^2,\ 1\le x_3\le 2\right\}$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

4) S – частина циліндра $x_1^2+x_2^2=1$, що вирізана площинами $x_3=0,\ x_3=x_1+2$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

5) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid 2x_3=x_1^2,\ x_2\ge 0,\ x_1\le 2,\ x_1\ge x_2\right\}$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

6) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

7) $S=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|+|x_2|=1,\ 0\le x_3\le 1\}$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+$ $+2x_2+3x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

8) S – поверхня призми з вершинами $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(0,1,0),$ $(1,1,0),(1,1,1)$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2+3x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$;

9) S – поверхня куба $[0,1]^3$; $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

21.8***.** Нехай $f\in C(\mathbb{R}),\ \{a,b,c\}\in\mathbb{R}$. Довести формулу Пуассона:

$$\int\limits_S f(ax_1+bx_2+cx_3)\,d\sigma=2\pi\int\limits_{-1}^{1} f(x\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,dx,$$

де S – сферична поверхня $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.

21.9. (I) Знайти масу:

1) півсфери $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3\ge 0\right\}$ зі щільністю $\rho(x_1,x_2,x_3)=x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in S$;

2) сфери $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$ зі щільністю $\rho(x_1,x_2,x_3)=x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in S$.

21.10. (I) Знайти центр ваги однорідної поверхні:

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3$;

2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ a\le x_3\le 1,\ a\in[-1,1)$;

3) $x_1=r\cos\varphi,\ x_2=r\sin\varphi,\ x_3=\varphi;\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi$;

4) $3x_3=2(x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}),\ x_1+x_2\le 1$;

5) $x_1^2=2-2x_3,\ 0\le x_2\le x_1,\ x_3\ge 0$;

6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1^2+x_2^2\le x_1,\ x_3\ge 0$;

7) $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_1^2+x_2^2\le x_1$;

8) $x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_1+x_2\le 1$.

Заняття 22

Основні поняття теорії поля

Контрольні запитання

1) *Визначення градієнта скалярного поля.*
2) *Визначення дивергенції, ротора, циркуляції та потоку векторного поля.*
3) *Векторний запис формул Гаусса – Остроградського та Стокса.*

А 22

22.1. (С) Знайти градієнт поля $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + +3x_1 - 2x_2 - 6x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, в точці $(2, 0, 1)$. В якій точці градієнт поля є нульовим вектором?

22.2. (О) Нехай $\vec{a} \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ – векторне поле в $\mathbb{R}^3$, $M \in \mathbb{R}^3$, S – гладенька замкнена поверхня, що оточує точку M і обмежує тіло об'ємом V, $\vec{n}(\vec{x})$ – зовнішня нормаль до поверхні S у точці $\vec{x} \in S$, $d(S) = \max\{||\vec{x} - \vec{y}|| \mid \vec{x}, \vec{y} \in S\}$ – діаметр поверхні S. Довести, що

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{V} \int\limits_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma.$$

22.3. (О) Знайти ротор векторного поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_2}{x_3}\vec{i} + \dfrac{x_3}{x_1}\vec{j} + \dfrac{x_1}{x_2}\vec{k}$, $x_1x_2x_3 \neq 0$, в точці $(1, 2, -2)$.

22.4. (О) Знайти потік радіус-вектора $\vec{r}$:

1) через зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1$;
2) через зовнішній бік основи конуса
   $\{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$.

22.5. (О) Знайти роботу радіус-вектора $\vec{r}$ уздовж відрізка гвинтової лінії $\{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$; $a > 0$, $b > 0$ – фіксовані сталі; крива пробігається в напрямку зростання параметра.

22.6. (С) Знайти роботу поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 - x_3}\vec{i} + e^{x_3 - x_1}\vec{j} + e^{x_1 - x_2}\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, уздовж прямолінійного відрізка від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 3, 5)$.

22.7. (О) Довести, що поле $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3(2x_1 + x_2 + x_3)\vec{i} + x_3x_1(x_1 + +2x_2 + x_3)\vec{j} + x_1x_2(x_1 + x_2 + 2x_3)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, є потенціальним, і знайти потенціал цього поля.

22.8. (C) Знайти потенціал гравітаційного поля

$$\vec{a} = -\frac{m}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

що створюється масою m, розташованою в початку координат.

22.9. (Д) Знайти потік векторного поля з попередньої задачі через зовнішній бік гладенької замкненої поверхні, що оточує початок координат.

22.10. (Д) Нехай $\{e_i, 1 \le i \le n\} \subset \mathbb{R}, \{\vec{r_i}, 1 \le i \le n\} \subset \mathbb{R}^3$, ρ – евклідова метрика в $\mathbb{R}^3$. Знайти потік вектора $\vec{a}(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi\rho(\vec{r}, \vec{r_i})}\right)$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{r_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, через зовнішній бік замкненої поверхні S, що обмежує тіло, яке містить точки $\vec{r_i},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

В 22

22.11. (І) Знайти градієнт скалярного поля u в точці $\vec{r}_0$:

1) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1, -3, 4);$
2) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1, -1, 1);$
3) $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (2, 1, 3);$
4) $u(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},\ \vec{r}_0 = (2, 1, 1);$
5) $u(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$ $\vec{r}_0 = (1, 2, 2);$
6) $u(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2x_3}\sin x_1,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (\pi, 2, -1);$
7) $u(x_1, x_2, x_3) = \arcsin\dfrac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3},\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\ \vec{r}_0 = (1, 1, 2);$
8) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2 - x_3},\ x_1 > 0;\ \vec{r}_0 = (2, 3, 4);$
9) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 \operatorname{arctg}(x_1x_2x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = \left(1, 3, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);$
10) $u(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1x_2) \cdot \sin(x_1x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$ $\vec{r}_0 = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\pi}\right).$

22.12. (І) Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:

1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r},\ \vec{r} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (2, 2, 1);$
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},\ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\},\ \vec{r}_0 = (3, 1, 1);$
3) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1\vec{i} - x_2\vec{j} + x_3\vec{k}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},\ (x_1, x_2) \ne (0, 0),\ \vec{r}_0 = (3, 4, 5);$
4) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\vec{i} + x_2x_3\vec{j} + x_3x_1\vec{k},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1, -3, \pi);$
5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_2 + x_3}(\vec{i} + \vec{j}) + \ln(1 + x_1^2)\vec{k},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$ $\vec{r}_0 = (1, -1, 1);$
6) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2}\vec{i} + x_2^{x_3}\vec{j} + x_3^{x_1}\vec{k},\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\ \vec{r}_0 = (2, 3, 1);$

7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\vec{i} + \sqrt{x_2^2-x_3^2}\vec{j} + \sqrt{x_1^2-x_3^2}\vec{k},\ |x_1| \geq |x_2| \geq$ $\geq |x_3|,\ \vec{r}_0 = (4,3,2)$;
8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2)\vec{i} + \cos(x_2-x_3)\vec{j} + \mathrm{tg}(x_1-x_3)\vec{k}$, $|x_1-x_3| < \dfrac{\pi}{2},\ \vec{r}_0 = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$;
9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}),\ x_1+x_2+x_3 \neq -1$, $\vec{r}_0 = (1,2,-2)$;
10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1-x_2}{1+x_3^2}(\vec{i}+\vec{j})+e^{x_1x_2}\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1,2,-3)$.

22.13. (I) Знайти ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:
1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r},\ \vec{r}\in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (2,1,2)$;
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \exp(||\vec{r}||^2)\vec{r},\ \vec{r}\in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1,-2,-2)$;
3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_2}{x_1}\vec{i} + \dfrac{x_3}{x_2}\vec{j} + \dfrac{x_1}{x_3}\vec{k},\ x_1x_2x_3 \neq 0,\ \vec{r}_0 = (1,1,-1)$;
4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}),\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_0 = (5,2,3)$;
5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2-x_3)\vec{i} + (x_2+x_3)\vec{j} - x_2\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,-1)$;
6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)\vec{i} - x_2x_3\vec{j} + x_1x_2x_3\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_0 = (3,2,1)$;
7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^3+x_1)\vec{i} - x_1\vec{j} + x_3\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1,1,1)$;
8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2)\vec{i}+2x_2^3\vec{j}+\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ \vec{r}_0 = (2,-1,2)$;
9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_3^2)\vec{i} + |x_2|\vec{j} + |x_3|\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,2)$;
10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = |x_1-x_2|\vec{i} + |x_2-x_3|\vec{j} + |x_3-x_1|\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,3)$.

22.14. (I) Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішній бік поверхні S :
1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\vec{i} + x_3x_1\vec{j} + x_1x_2\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ S$ – бічна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1$;
2) $\vec{a}$ з п.1), S – повна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 2$;
3) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r},\ \vec{r}\in \mathbb{R}^3,\ S = \left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3 = 1-\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x_3 \geq 0\right\}$;
4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2\vec{i} + x_3\vec{j} + x_1\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ S$ – піраміда, обмежена площинами $x_1+x_2+x_3 = 1,\ x_i = 0, i = 1,2,3$;
5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1^2\vec{i} + x_2^2\vec{j} + x_3^2\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ S$ – бічна поверхня конуса $x_1^2+x_2^2 \leq 4x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1$;
6) $\vec{a}$ з п.5),S – повна поверхня конуса $x_1^2+x_2^2 \leq x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1$;
7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1^3\vec{i} + x_2^3\vec{j} + x_3^3\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,\ S$ – повна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \leq 1,\ -1 \leq x_3 \leq 1$;

8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}),\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ S$ – поверхня куба $[0,1]^3$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)\vec{i}+(x_2-x_3)\vec{j}+(x_3-x_1)\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, S – поверхня піраміди, обмеженої площинами $x_1+x_2+x_3=2$, $x_i=0,\ i=1,2,3$;

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $S=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|+|x_2|+|x_3|=1\}$.

22.15. (I) Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж гладенької замкненої кривої Γ :

1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=-x_2\vec{i}+x_1\vec{j}+2\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\Gamma=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

2) $\vec{a}$ з п.1), $\Gamma=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid (x_1-2)^2+x_2^2=1,\ x_3=0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=(-x_2\vec{i}+x_1\vec{j})(x_1^2+x_2^2)^{-1},\ (x_1,x_2)\neq(0,0)$, $\Gamma\subset\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1>0\}$;

4) $\vec{a}$ з п.3); $\Gamma=\{(\sin t,\cos t,t(2\pi-t))\mid 0\le t\le 2\pi\}$, крива пробігається в напрямку зростання t;

5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{x_2}\vec{i}+\dfrac{1}{x_3}\vec{j}+\dfrac{1}{x_1}\vec{k},\ x_1x_2x_3\neq 0,\ \Gamma$ – прямолінійний відрізок від точки $(1,1,1)$ до точки $(2,4,8)$;

6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3)\vec{i}+(2+x_1)\vec{j}+(x_1+x_2)\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ \Gamma$ – менша дуга великого кола сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=25$ від точки $A(3,4,0)$ до точки $B(0,0,5)$;

7) $\vec{a}(\vec{r})=\sin||\vec{r}||\cdot\vec{r},\ \vec{r}\in\mathbb{R}^3,\ \Gamma$ – крива з початком у точці $(0,0,0)$ і з кінцем у точці $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$;

8) $\vec{a}(\vec{r})=-\dfrac{m}{||\vec{r}||^3}\vec{r},\ \vec{r}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\},\ m>0;\Gamma$ – крива з початком у точці $(1,2,2)$ і кінцем у точці $(0,0,1)$, що не проходить через точку $(0,0,0)$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3(2x_1+x_2+x_3)\vec{i}+x_1x_3(x_1+2x_2+x_3)\vec{j}+x_1x_2(x_1+$ $+x_2+2x_3)\vec{k},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\Gamma$ – крива з початком у точці $(3,5,-4)$ і кінцем у точці $(0,1,2)$.

22.16. (I) Переконатися в потенціальності поля
$$\vec{a}(x_1,x_2,x_3)=\frac{2}{(x_2+x_3)^{1/2}}\vec{i}-\frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{j}-\frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{k},$$
$x_i>0,\ i=1,2,3$, і знайти роботу цього поля вздовж шляху, що лежить у першому октанті й веде від точки $A(1,1,3)$ до точки $B(2,4,5)$.

Заняття 23

Простір $R([a,b])$ із середньоквадратичною відстанню. Скалярний добуток. Лінійна залежність

Контрольні запитання

1) *Означення скалярного добутку в просторі $R([a,b])$.*
2) *Ортогональність. Лінійна незалежність функцій.*

А 23

23.1. (С) Нехай $f \in R([0,1])$. За якої умови на функцію f існує таке $a \in \mathbb{R}$, що для функції $g(t) = 1 + at,\ t \in [0,1]$, справджується рівність $(f,g) = 0$?

23.2. (С) Визначити співвідношення між $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при якому функції $1+\alpha t$, $1+\beta t$, $t \in [0,1]$, ортогональні.

23.3. (С) За яких $m, n \in \mathbb{N}$ функції $\sin nt,\ \sin mt,\ t \in [0, 2\pi]$, ортогональні в $R([0,2\pi])$?

23.4. (О) Довести, що функція $f \in R([-1,1])$ ортогональна довільному поліному степеня не вище n у $R([-1,1])$ тоді й лише тоді, коли f ортогональна кожній з функцій $1, t, t^2, \ldots, t^n,\ t \in [-1,1]$.

23.5. (О) Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – набір лінійно незалежних функцій у $R([a,b])$. Довести, що $\det\big((f_i, f_j)_{i,j=1}^n\big) \neq 0$.

23.6. (С) Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – набір лінійно незалежних функцій у $R([a,b])$. Довести, що для довільних дійсних чисел $c_1, \ldots, c_n$ існує функція $f \in R([a,b])$, для якої $(f, f_i) = c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

23.7. (С) Довести, що функції $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$, $t \in [0, 2\pi]$, попарно ортогональні та мають відмінну від нуля норму в просторі $R([0,2\pi])$. Вивести звідси лінійну незалежність цих функцій.

23.8. (О) Для функцій $1, t, t^2,\ t \in [-1,1]$, провести процес ортогоналізації.

23.9. (Д) Довести лінійну незалежність функцій:

1) $t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_n},\ t \in [a,b]$, де $\alpha_i \in (0, +\infty)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $a > 0$;
2) $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \ldots, e^{\alpha_n t},\ t \in [a,b]$, де $\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j$.

23.10. (Д) Чи є функції $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$, $t \in \mathbb{R}$, лінійно незалежними на відрізку: а) $[a,b]$ при $b - a \geq 2\pi$; б) $[0,\pi]$?

23.11. (Д) Нехай функція f кусково-стала на $[a,b]$ і

$$\forall\, n \geq 0\ :\ \int_a^b t^n f(t)\, dt = 0.$$

Довести, що f дорівнює нулю в усіх точках неперервності.

23.12. (I) За яких значень $m, n \in \mathbb{N}$ наведені функції є ортогональними:

1) $\cos nt, \cos mt,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
2) $\sin nt, \sin mt,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
3) $\sin nt, \cos mt,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
4) $\sin nt, \sin mt,\ t \in [0, 3\pi]$;
5) $\cos nt, \cos mt,\ t \in [0, 3\pi]$;
6) $\sin nt, \cos mt,\ t \in [0, 3\pi]$?

23.13. (I) Визначити числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ так, щоб були ортогональними функції:

1) $1 + \alpha t, \beta t^2,\ t \in [0, 1]$;
2) $\alpha t, 1 + \beta t^2,\ t \in [-1, 1]$;
3) $\alpha t, 1 - \beta t^3,\ t \in [0, 1]$;
4) $\alpha t + t^2, \beta t,\ t \in [0, 2]$.

23.14. (I) Довести, що функція $f \in R([0, 2\pi])$ ортогональна довільному тригонометричному поліному $T_n = \alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt), t \in [0, 2\pi]$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le n$, тоді й лише тоді, коли f ортогональна кожній із функцій $1, \cos t, \sin t, ..., \cos nt, \sin nt,\ t \in [0, 2\pi]$.

23.15. (I) Довести, що довільний набір ортогональних і нормованих функцій є набором лінійно незалежних функцій.

23.16. (I) Нехай деякий поліном $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m,\ a_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, задовольняє умову $\int\limits_a^b P(t) t^n \, dt = 0,\ n \ge 0$. Довести, що $P(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$. Що можна стверджувати про поліном P, якщо умова ортогональності виконується для всіх $n \ge 2$?

23.17. (I) Провести процес ортогоналізації наведених функцій:

1) $1,\ \cos t,\ \sin t,\ t \in [0, 3\pi]$;
2) $1,\ \sin t,\ \sin 2t,\ t \in [0, 3\pi]$;
3) $1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ t \in [0, 3\pi]$;
4) $1,\ \sin 2t,\ \sin 3t,\ t \in [0, 3\pi]$;
5) $1,\ \cos 2t,\ \cos 3t,\ t \in [0, 3\pi]$;
6) $1,\ t,\ t^2,\ t \in [0, 1]$;
7) $1,\ t,\ t^2,\ t \in [0, 2]$;
8) $t,\ t^2,\ t^3,\ t \in [0, 1]$;
9) $t,\ t^2,\ t^3,\ t \in [0, 2]$;
10) $1,\ t^2,\ t^3,\ t \in [-1, 1]$.

Заняття 24

Задача про найкраще середньоквадратичне наближення. Повні та замкнені в $R([a,b])$ послідовності функцій

Контрольні запитання

1) *Визначення повної системи функцій.*
2) *Визначення замкненої системи функцій.*
3) *Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля.*
4) *Формула для розв'язку задачі про найкраще середньоквадратичне наближення.*

А 24

24.1. (О) Для функції $f(t) = e^t, t \in [-1,1]$ знайти $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такі, щоб відстань $||f - g||$ від функції f до функції $g(t) = \alpha + \beta t, t \in [-1,1]$, була найменшою. Задачу розв'язати двома способами:

1) безпосередньою мінімізацією $||f-g||^2$ по α, β;
2) побудовою за парою функцій $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ t \in [-1,1]$, ортогональної пари нормованих функцій.

24.2. (С) Для функції $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi, \\ 1, & \pi \le t \le 2\pi, \end{cases}$ і заданого $m \in \mathbb{N}$ визначити тригонометричний поліном T_m степеня не вище за m, який мінімізує відстань $||f - T_m||$. *Вказівка.* Послідовність

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, ...,\ t \in [0, 2\pi],$$

є ортонормованою.

24.3. (О) Довести повноту й замкненість у просторі $R([a,b])$ послідовності $1, t^2, t^4, ..., t^{2n}, ...,\ t \in [a,b],\ a \ge 0$. *Вказівка.* Використати повноту в $R([c,d])$ послідовності $1, t, t^2, t^3, ..., t^n, ...,\ t \in [c,d]$.

24.4. (С) Довести повноту й замкненість у просторі $R([0,\pi])$ послідовності $1, \cos t, \cos 2t, ...,\ \cos nt, ..., t \in [0,\pi]$. *Вказівка.* Використати повноту в $R([0,2\pi])$ послідовності $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, ..., t \in [0, 2\pi]$.

24.5. (О) Довести повноту й замкненість у просторі $R([0,1])$ послідовності $1, e^{-t}, e^{-2t}, ..., e^{-nt}, ..., t \in [0,1]$.

24.6. (С) Нехай $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ – замкнена ортонормована послідовність у $R([a,b])$ і для $f \in R([a,b])$ $c_n(f) = (f, \varphi_n),\ n \ge 1$. Довести узагальнену рівність Парсеваля: $(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) c_n(g),\ f, g \in R([a,b])$.

В 24

24.7. (І) Нехай $m\in\mathbb{N}$ – фіксоване. Для функції $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ визначити тригонометричний поліном T заданого вигляду, що мінімізує відстань $||f-T||=\sqrt{\int\limits_a^b (f(t)-T(t))^2dt}$:

1) $f(t)=t,\ t\in[0,2\pi]$; T – тригонометричний поліном степеня не вище m;
2) $f(t)=\dfrac{\pi-t}{2},\ t\in[0,2\pi]$; T – тригонометричний поліном степеня не вище m;
3) $f(t)=t,\ t\in[0,\pi]$; $T(t)=\alpha_0+\sum\limits_{n=1}^{m}\alpha_n\cos nt,\ t\in[0,\pi]$; $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le m$;
4) $f(t)=t,\ t\in[0,\pi]$; $T(t)=\sum\limits_{n=1}^{m}\beta_n\sin nt,\ t\in[0,\pi]$; $\beta_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le m$;
5) $f(t)=t,\ t\in[0,2\pi]$; $T(t)=\alpha\sin t+\beta\sin^2 t,\ t\in[0,2\pi]$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
6) $f(t)=t,\ t\in[0,3\pi]$; $T(t)=\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos 2t,\ t\in[0,3\pi]$; $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. *Вказівка.* Переконатися, що функції $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=\cos t$, $\varphi_3(t)=\cos 2t,\ t\in[0,3\pi]$, попарно ортогональні на $[0,3\pi]$;
7) $f(t)=t,\ t\in[0,3\pi]$; $T(t)=\alpha\sin t+\beta\sin 2t,\ t\in[0,3\pi]$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Вказівка.* Переконатися, що функції $\varphi_1(t)=\sin t$, $\varphi_2(t)=\sin 2t$, $t\in[0,3\pi]$, ортогональні на $[0,3\pi]$;
8) $f(t)=t,\ t\in[0,3\pi]$; $T(t)=\alpha\cos t+\beta\cos 3t,\ t\in[0,3\pi]$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Вказівка.* Переконатися, що функції $\varphi_1(t)=\cos t$, $\varphi_2(t)=\cos 3t$, $t\in[0,3\pi]$, ортогональні на $[0,3\pi]$.

24.8. (І) Довести повноту й замкненість наведеної послідовності функцій:

1) $\sin t,\sin 2t,\sin 3t,...,\sin nt,...,\ t\in[0,\pi]$, у просторі $R([0,\pi])$;
2) $1,\cos 2t,\sin 2t,\cos 4t,\sin 4t,...,\cos 2nt,\sin 2nt,...,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, у просторі $R\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$;
3) $t^3,t^4,...,t^{3+n},...,\ t\in[a,b]$, у просторі $R([a,b]),a>0$;
4) $t^3,t^6,t^9,...,t^{3n},...,\ t\in[1,2]$, у просторі $R([1,2])$;
5) $1,\ln t,\ln^2 t,\ln^3 t,...,\ln^n t,...,\ t\in[e,e^2]$, у просторі $R([e,e^2])$.

24.9. (І) Довести, що послідовність функцій не є повною:

1) $1,t^2,t^4,t^6,...,t^{2n},...,\ t\in[-1,1]$, у просторі $R([-1,1])$;
2) $t,t^3,t^5,...,t^{2n+1},...,\ t\in[-1,1]$, у просторі $R([-1,1])$;
3)* $1,\cos t,\sin t,...,\cos nt,\sin nt,...,\ t\in[0,3\pi]$, у просторі $R([0,3\pi])$.

24.10. (О) Довести повноту й замкненість у просторі $R([1,2])$ послідовності функцій $1, e^{-t^2}, e^{-2t^2}, ..., e^{-nt^2}, ...,\ t \in [1,2]$.

24.11. (І) Для замкненої (див. задачу 24.4) у $R([0,\pi])$ послідовності функцій $1, \cos t, \cos 2t, ..., \cos nt, ..., t \in [0,\pi]$, і заданої функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t,\ t \in [0,\pi]$;
2) $f(t) = \sin t,\ t \in [0,\pi]$;
3) $f(t) = \sin 2t,\ t \in [0,\pi]$.

24.12. (І) Для замкненої (див. задачу 24.8 п. 1)) у $R([0,\pi])$ послідовності функцій $\sin t, \sin 2t, ..., \sin nt, ...,\ t \in [0,\pi]$, і заданої функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t,\ t \in [0,\pi]$;
2) $f(t) = 1,\ t \in [0,\pi]$;
3) $f(t) = \cos t,\ t \in [0,\pi]$;
4) $f(t) = \cos 2t,\ t \in [0,\pi]$.

24.13. (І) Для замкненої (див. задачу 24.8 п. 2)) у $R\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ послідовності функцій $1, \cos 2t, \sin 2t, \cos 4t, \sin 4t, ..., \cos 2nt, \sin 2nt, ...,\ t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, і заданої функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t,\ t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;
2) $f(t) = \sin t,\ t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;
3) $f(t) = \cos t,\ t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Заняття 25

Розклад функції в ряд Фур'є. Збіжність у точці

Контрольні запитання

1) *Коефіцієнти та ряд Фур'є за тригонометричною послідовністю.*
2) *Рівність Парсеваля.*
3) *Ознаки збіжності ряду Фур'є в точці.*

А 25

25.1. (О) Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $f(t) = \sin^2 t,\ t \in [0, 2\pi];$
2) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} t, & t \in (-\pi, \pi), \\ 0, & t = \pi; \end{cases}$
3) $f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi];$
4) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & t \in (0, 2\pi), \\ 0, & t = 0; \end{cases}$
5) $f(t) = \pi^2 - t^2, t \in [-\pi, \pi].$

25.2. (О) Розкласти функцію $f(t) = t^2$ у ряд вигляду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt,\ t \in [0, \pi],\ \alpha_n \in \mathbb{R},\ n \geq 0$, на $[0, \pi]$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,\ t \in [0, \pi],\ \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1$, на $[0, \pi]$;
3) $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),\ t \in [0, 2\pi),\ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq 0$, на $[0, 2\pi)$.

В яких точках ці ряди збігаються до відповідних значень функції f? Записати для них рівність Парсеваля.

В 25

25.3. (І) Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, в яких він збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = |t|,\ t \in [-\pi, \pi];$
2) $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos t),\ t \in [0, 2\pi];$
3) $f(t) = \operatorname{sgn}(\sin t),\ t \in [0, 2\pi];$
4) $f(t) = |\sin t|,\ t \in [0, 2\pi];$
5) $f(t) = |\cos t|,\ t \in [0, 2\pi];$
6) $f(t) = \cos(t\sqrt{2}),\ t \in [0, 2\pi);$
7) $f(t) = \sin(t\sqrt{2}),\ t \in [0, 2\pi);$
8)* $f(t) = \arcsin(\sin t),\ t \in [0, 2\pi];$
9)* $f(t) = \arccos(\cos t), t \in [0, 2\pi];$
10) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\pi, 0), \\ 3, & t \in [0, \pi); \end{cases}$
11) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi); \end{cases}$

12) $f(t)=\begin{cases} t, & t\in(-\pi,0),\\ 0, & t\in[0,\pi]; \end{cases}$ 13) $f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[-\pi,0),\\ t, & t\in[0,\pi). \end{cases}$

25.4. (I) Розкласти функцію f у ряд вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos nt,\ t\in[0,\pi],\ \alpha_n\in\mathbb{R}$, $n\geq 0$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t)=\sin t, t\in[0,\pi]$;

2) $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \pi-t, & t\in[\frac{\pi}{2},\pi]; \end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ t-\frac{\pi}{2}, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$

25.5. (I) Розкласти функцію f у ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin nt,\ t\in[0,\pi],\ \beta_n\in\mathbb{R}$, $n\geq 1$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t)=\cos t, t\in[0,\pi]$;

2) $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \pi-t, & t\in[\frac{\pi}{2},\pi]; \end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ t-\frac{\pi}{2}, & t\in(\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$

25.6. (O) Нехай функція f періодична з періодом 2π і

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{\pi}, & t\in[0,\pi],\\ -1, & t\in(\pi,2\pi). \end{cases}$$

Не виписуючи ряду Фур'є для f, знайти значення суми цього ряду в точках $t_k=k\pi,\ 0\leq k\leq 3$.

25.7. (I) Знайти суми тригонометричних рядів для $t\in\mathbb{R}$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{2^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nt}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha\,\sin nt}{3^n},\ \alpha\in\mathbb{R}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 nt}{2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)t}{e^{2n-1}}$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nt}{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{n!}$.

Вказівка. Розглянути тригонометричні ряди як дійсну та уявну частини суми степеневого ряду в комплексній площині $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, де $z=e^{it}$.

Заняття 26

Розклад функції в ряд Фур'є (продовження)

Контрольні запитання

1) *Коефіцієнти та ряд Фур'є для функції з довільним періодом. Рівність Парсеваля.*
2) *Теорема про почленне інтегрування ряду Фур'є.*
3) *Теорема про почленне диференціювання ряду Фур'є.*

А 26

26.1. (С) Функцію f, періодичну з періодом $2l$, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $l > 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, l), \\ 0, & t \in [l, 2l); \end{cases}$

2) $l = \frac{1}{2},\ f(t) = \{t\},\ t \in \mathbb{R}$ (дробова частина числа t).

26.2. (О) Використовуючи розклад $t = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n},\ t \in (-\pi, \pi)$, почленним інтегруванням отримати розклад у ряд Фур'є функцій:

1) $f(t) = t^2,\ t \in (-\pi, \pi)$; 2) $f(t) = t^3,\ t \in (-\pi, \pi)$.

26.3. (С) Нехай $\alpha \in [0, \pi)$. Записати рівність Парсеваля для функції f, періодичної з періодом 2π і такої, що $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \alpha, \\ 0, & \alpha \le |t| \le \pi. \end{cases}$ Використовуючи цю рівність Парсеваля, знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

26.4. (О) Нехай $\alpha \in (-1, 1)$. Користуючись формулами $\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, де $z = e^{it}$, $\overline{z} = e^{-it}$, $t \in \mathbb{R}$, отримати розклад у ряд Фур'є функції

$$f(t) = \frac{\alpha \sin t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

26.5. (О) Нехай f – періодична функція з періодом 2π така, що

$$f(t) = \begin{cases} \sin^2 t, & t \in [0, \pi], \\ 0, & t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Розкласти функцію f у ряд Фур'є та застосувати до нього теорему про почленне диференціювання.

26.6. (Д) Нехай

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nt, \ t \in \mathbb{R}.$$

Довести, що $f \in C^{(\infty)}((0, 2\pi))$.

В 26

26.7. (І) Функцію f, періодичну з періодом $2l$, розкласти в ряд Фур'є. Визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f, і записати рівність Парсеваля:

1) $l = 1, \ f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ t, & 0 \le t \le 1; \end{cases}$

2) $l = 2, \ f(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t < 0, \\ 2, & 0 \le t < 2; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < l/2, \\ l - t, & l/2 \le t \le l, \end{cases}$ f – непарна функція;

4) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le l/2, \\ t - l/2, & l/2 \le t \le l, \end{cases}$ f – парна функція;

5) $f(t) = \begin{cases} l/2 - t, & 0 \le t \le l/2, \\ 0, & l/2 < t \le l, \end{cases}$ f – парна функція;

6) $l = 2, \ f(t) = \dfrac{t}{2}, \ 0 \le t \le 2, f$ – парна функція.

26.8. (О) Нехай $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n^3}, t \in \mathbb{R}$. Довести, що існує $f' \in C(\mathbb{R})$, значення якої можуть бути отримані почленним диференціюванням ряду. Довести, що для довільного $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \ : \ f''(t) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n}$. За допомогою формули для суми цього ряду визначити функцію f.

26.9. (О) Нехай $\alpha \in (-1, 1)$. Користуючись формулами Ойлера

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \ \sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), \ t \in \mathbb{R}, \ \text{де } z = e^{it}, \ \overline{z} = e^{-it},$$

отримати розклад у ряд Фур'є функції $f(t) = \dfrac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2}, \ |\alpha| < 1.$

Заняття 27

Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Контрольні запитання

1) *Інтеграл Фур'є та умови його збіжності.*
2) *Перетворення Фур'є.*
3) *Формула обернення для перетворення Фур'є.*

А 27

27.1. (О) Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. За яких значень t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} t, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$ 2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi \ ? \end{cases}$

27.2. (О) Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t) = \exp\left(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right), \ t \in \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0;$

2) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le a, \\ 0, & |t| > a; \end{cases} \quad a \ge 0;$

3) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

4) $f(t) = e^{-a|t|}, \ t \in \mathbb{R}; \ a > 0;$

5) $f(t) = (1+t^2)^{-1}, \ t \in \mathbb{R}.$

27.3. (С) Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)|f(t)|\, dt < +\infty$. Виразити перетворення Фур'є функції $t^2 f(t), \ t \in \mathbb{R},$ через перетворення Фур'є функції f.

27.4. (С) Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}), \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt < +\infty; \ f(t) \to 0, \ |t| \to +\infty.$ Знайти зв'язок між перетвореннями Фур'є функцій f і f'.

Відповіді

1.1. 1) Збігається рівномірно на M_1, збігається нерівномірно на M_2; 2) збігається рівномірно на M_1, збігається нерівномірно на M_2. **1.5.** 1) Збігається рівномірно; 2) збігається рівномірно; 3) збігається рівномірно.

2.5. $\ln\frac{b}{a}$. **2.6.** $\ln\frac{b}{a}$. **2.7.** $2\ln 2$. **2.8.** Ні. **2.16.** 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; 2) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$; 3) $\frac{\pi}{4}\ln\frac{a}{b}$; 4) 0; 5) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$; 6) 0; 7) $2\ln\frac{b}{a}$; 8) $\ln\frac{b}{a}$; 9) $\ln\frac{b}{a}$; 10) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$.

3.1. 1) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$; 2) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$; 3) $\sqrt{\alpha\pi}$; 4) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{31/2}$; 5) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. **3.2.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$. **3.3.** $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. **3.4.** $I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. **3.5.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt{\pi}$. **3.6.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-\frac{\alpha^2}{4})$. **3.7.** 1) $\frac{\pi}{2}(|\beta|-|\alpha|)$; 2) $\ln(1+\alpha)$; 3) $\alpha^{-(n+1)}n!$; 4) $(2\alpha)^{-n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(2n-1)!!$; 5) $\frac{1}{2}(\ln(1+\beta^2)-\ln(1+\alpha^2))$; 6) $(-\alpha-1)^{-n-1}n!$; 7) $\frac{\pi|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$; 8) $\frac{3}{8}\pi\alpha|\alpha|$. **3.8.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\alpha}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; 5) $\frac{3}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta}$; 6) $\frac{1}{2}(3\ln\delta-$ $-\ln\alpha\beta\gamma)$; 7) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\pi^2 e}$; 8) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\pi^2 e}$.

4.1. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **4.2.** 1) $\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. 2) 1. **4.3.** $\frac{3\pi}{512}$. **4.4.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\pi\left(\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1}$. **4.5.** 1) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$, $\beta>0$; 2) $\pi\left(|\beta|\sin\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)^{-1}$, $\beta\neq 0$, $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$. **4.8.** $\frac{a}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. **4.10.** 1) $\beta^{-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$, $\alpha>-1$; 2) $\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 3) $\Gamma(\alpha-1)$, $\alpha>1$; 4) $(\ln 2)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 5) $\frac{1}{3}(\ln 3)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 6) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{4})$, $\alpha>-1$; 7) $(2e)^{-1}\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 8) $\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 9) $2\Gamma(2(\alpha+1))$, $\alpha>-1$. **4.12.** 1) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(2-\frac{\alpha+1}{2})$, $-1<\alpha<3$; 2) $2^{\frac{2}{\alpha}-1}\pi(\alpha 3^{\frac{2}{\alpha}}\sin\frac{2\pi}{\alpha})^{-1}$, $\alpha>2$; 3) $(2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2))^{-1}$, $\alpha>-1$; 4) $(18\times$ $\times 4^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3))^{-1}$, $\alpha>-1$; 5) $\frac{1}{16}\pi a^4$; 6) $\alpha^{-1}\mathrm{B}(\alpha^{-1},\beta+1)$, $\alpha>0$; 7) $\alpha^{-1}\mathrm{B}(3\alpha^{-1},\beta+1)$, $\alpha>0$; 8) $\frac{1}{3}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{3},2)$, $\alpha>-1$; 9) $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$; 10) . **4.13.** $2\sqrt{2}\pi$. **4.14.** 1) $\pi(2\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{-1}$, $|\alpha|<1$; 2) $\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$, $\alpha>-1$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$; 4) $(1-\beta^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{B}(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2})$, $\alpha>0$; 5) $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$; 6) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$; 7) 3; 8) $\frac{n!}{2}$; 9) $\frac{2}{3}\Gamma(\frac{9}{4})$.

5.1. 1) $\frac{d}{d\alpha}\left(a^{-(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\right)$; 2) $-\pi^2\frac{\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}$. **5.2.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **5.4.** $\frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}}$. **5.5.** $\frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi e}{2}$. **5.6.** $\frac{2a^2}{s}\Gamma^2(\frac{1}{s})\Gamma^{-1}(\frac{2}{s})$. **5.7.** 1) $\frac{1}{4}\Gamma'(\frac{1}{2})$; 2) $\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}(\ln 2-\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha)$; 3) $\Gamma'(1)$; 4) $\pi^3\frac{1+\cos^2\pi\alpha}{\sin^3\pi\alpha}$; 5) $\frac{2\pi^2}{27}$; 6) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$; 7) $\beta^{-\alpha-1}(\Gamma''(\alpha+1)-2\Gamma'(\alpha+1)\times$ $\times\ln\beta+\Gamma(\alpha+1)\ln^2\beta)$; 8) $\Gamma'(\alpha+1)$; 9) $\ln(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})-\ln(\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2})$; 10) $\Gamma'''(\alpha)$. **5.8.** $\frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}}$. **5.9.** 1) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$; 2) $\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$; 3) $\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$; 4) $\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\frac{1}{2})$; 5) $\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2})$; 6) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{B}(\beta-\alpha,\alpha)$; 7) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a^{\alpha-2\beta}\times\right.$ $\left.\times\mathrm{B}(\beta-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2})\right)$; 8) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathrm{B}(\beta-\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3})$; 9) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$. **5.10.** 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$;

3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{3465\pi}{8192}$; 5) $\frac{8}{3\pi}$. **5.11.** 1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4\alpha^2}{(2n-1)^2}\Big)$; 2) $\pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha^2n^{-2}}{1-4\alpha^2(2n-1)^{-2}}$. **5.12.** 1) $\frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{\pi^2}$; 3) $-\frac{6\sqrt{2}}{25\pi^2}$.

6.4. а) $\frac{1}{4}$; б) $I_* = \frac{1}{4}$, $I^* = \frac{5}{4}$. **6.7.** $I_* = 0$, $I^* = 1$. **6.8.** 1) $I_* = I^* = \frac{1-\cos 2}{2}$; 2) $I_* = I^* = 0$; 3) $I_* = I^* = (1-\cos 2)\sin 1$; 4) $I_* = I^* = 0$; 5) $I_* = I^* =$ $= (e-1)(1-e^{-2})$; 6) $I_* = I^* = \frac{1}{2}$; 7) $I_* = I^* = \frac{4}{3}$; 8) $I_* = I^* = \frac{1}{2}\ln 3$; 9) $I_* = I^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; 10) $I_* = I^* = \frac{3\ln 3}{2} - 1$.

7.1. 1) $\frac{4(1+2\sqrt{2})}{3}$; 2) $\cos 3 - 3\cos 2 + 3\cos 1 - 1$; 3) $\frac{2}{\pi}$; 4) $\frac{13}{3} + 2e(e-1)$. **7.2.** 1) $m(A_{(n)}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$, $m(A^{(n)}) = \frac{1}{2} + 7\cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) =$ $= 2^{-(n-2)} + 2^{-2(n-1)}$; 2) $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = \frac{1}{2}$. **7.4.** $m_*(A) = 0$, $m^*(A) = 1$, невимірна. **7.6.** Ні. Див. задачу 7.4 **7.8.** 1) $\frac{17}{4}$; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $\frac{8\pi}{3}$; 4) $\ln\frac{25}{24}$; 5) $\frac{\operatorname{ch} 1 - 1}{2} + \operatorname{sh} 1$; 6) $f(1,2) - f(-1,2) - f(1,-2) + f(-1,-2)$; 7) $\frac{1}{24}$; 8) 18; 9) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sin 2 - \sin 1) + \frac{3}{4}$; 10) $1 - \frac{1}{2^n}$. **7.9.** 1) $\frac{1}{2}(1 + \frac{4}{x} -$ $-(1+\frac{4}{x})\exp(-x^5))$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{5}{4}x^2 + (1+\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2})\ln(1+x^2)$; 3) $\frac{1}{2}(x^3-1)(1+$ $+2x)(1+2x+2x^2)$; 4) $\frac{1}{2}(1+(x-1)|x-1|)$; 5) $2x^{-1}(1-e^{-x^4})$; 6) $3|x|(x+$ $+1) + \frac{5}{2}$; 7) $\frac{24}{35}x^5$; 8) $2x^3e^{x^2} + 3x^5e^{-x^3} + x^3(3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2)e^{x^2-x^3}$; 9) $\frac{2}{x}(1-\cos x^2)$; 10) $xe^x(\sin x + \frac{x}{2}(\sin x + \cos x))$. **7.10.** 1) $m(A_{(n)}) = 2$, $m(A^{(n)}) = 2 + 3\cdot 2^{-n+1} + 2^{-2(n+1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{-n+1} + 2^{-2(n+1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 2$; 2) $m(A_{(n)}) = 4$, $m(A^{(n)}) = 4 + 2^{-n+3} +$ $+ 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-n+3} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) =$ $= 4$; 3) $m(A_{(n)}) = 2^{2-n}[2^n\sqrt{2}]$, $m(A^{(n)}) = 2^{-2(n-1)}(2^n+1)([2^n\sqrt{2}]+1)$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-2(n-1)}[2^n\sqrt{2}] + 2^{-n+2} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) =$ $= m(A) = 4\sqrt{2}$; 4) $m(A_{(n)}) = 2^{-1} - 2^{-(n+1)}$, $m(A^{(n)}) = 2^{-1} + 7\cdot 2^{-(n+1)} +$ $+ 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = (2^n+1)2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) =$ $= \frac{1}{2}$; 5) $m(A_{(n)}) = 2(1-2^{-n})$, $m(A^{(n)}) = 2(1+2^{-n})(1+2^{1-n})$, $m(\Delta A_{(n)}) =$ $= 5\cdot 2^{-n} + 2^{1-2n}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 2$; 6) $m(A_{(n)}) = 1 -$ -2^{-n}, $m(A^{(n)}) = 1 + 5\cdot 2^{-n} + 2^{2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{n-1} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 1$; 7) $m(A_{(n)}) = 2^{-1} - 2^{-(n+1)}$, $m(A^{(n)}) =$ $2^{-1} + 7\cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = (2^n+1)2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) =$ $m^*(A) = m(A) = \frac{1}{2}$; 8) $m(A_{(n)}) = 2 - 2^{-n+1}$, $m(A^{(n)}) = 2 +$ $+ 5\cdot 2^{-n+1} + 2^{-2n+3}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{-n+2} + 2^{-2n+3}$, $n \geq 0$, $m_*(A) =$ $= m^*(A) = m(A) = 2$; 9) $m(A_{(n)}) = 2 - 2^{-n}$, $m(A^{(n)}) = 2 + 7\cdot 2^{-n} +$ $+ 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{3-n} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) =$ $= 2$; 10) $m(A_{(n)}) = 0$, $m(A^{(n)}) = m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-n+1} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 0$.

8.2. $\frac{1}{6}$. **8.5.** 1) $(\frac{15}{8} - 2\ln 2)a^2$; 2) $2\sqrt{2}$. **8.7.** $2e^t(e-2+t)$. **8.11.** 1) π;

2) $\frac{4}{15}$; 3) $3\ln\frac{5}{3}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{3}$; 6) πab; 7) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; 8) 5; 9) π.

9.2. $88/105$. **9.3.** 1) $\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$; 2) $1/364$; 3) $1/48$; 4) $4/3$; 5) e.
9.5. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{3\pi-4}{6}$; 3) π; 4) $\frac{17}{12}-2\ln 2$; 5) $\frac{560}{3}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; 8) 45.
9.6. 1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{7}{192}$; 5) $\frac{2-\sqrt{2}}{20}$; 6) $\frac{1}{12}$; 7) $\frac{\pi+4\sqrt{2}}{32}$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{3}{4}-\ln 2$.

10.3. 1) $\frac{3}{35}$. **10.4.** $\frac{m(3m+1)}{12}$; **10.5.** $\frac{a^m}{m!}$. **10.6.** $\frac{2}{(2m+1)(m-1)!}a^{m+\frac{1}{2}}$. **10.8.** 1) $\frac{7}{24}$; 2) $2\pi-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{32\pi}{3}$; 5) 8; 6) $\frac{7}{12}$; 7) $\frac{83}{1890}$; 8) $4(4-3\ln 3)$; 9) $\frac{\pi}{6}$; 10) $\frac{5\pi}{6}$. **10.9.** 1) $\frac{m}{3}$; 2) $4m-\frac{15}{2}$, $m\geq 2$; 3) $0, m=2k$; $2^m, m=4k-3$; $-2^m, m=4k-1$; $k\geq 1$; 4) $2^{m-1}\pi^m$; 5) $2^{m-2}(1+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\ldots+\frac{2^{m+1}}{m+1})$; 6) $-1, m=2k$; $0, m=2k+1$; $k\geq 1$; 7) $\frac{m(e-1)^2}{e}$; 8) $2\pi^{m-1}(1+3^{-1}+5^{-1}+$ $+\ldots+(2\left[\frac{m+1}{2}\right]-1)^{-1})$; 9) $2^m\pi^{m-1}(2\sin\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+m\sin\frac{\pi}{m})$, $m\geq 2$; 10) $\frac{1}{(2m)!}$.

11.4. $-6\pi^2$. **11.5.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **11.6.** $\frac{2}{3}\pi R^2$. **11.7.** 1) $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(3\Gamma^2(\frac{3}{4})+\frac{1}{3}\Gamma^2(\frac{1}{4})\right)t^2$; 2) $t\int\limits_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,d\varphi$. **11.11.** 1) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$; 2) $\frac{\pi}{4}\sin 1$; 3) 4π; 4) $\frac{8\pi}{3}$; 5) $\frac{1}{6}\pi^2$; 6) $\frac{\pi^3}{128}$; 7) $\pi e(e^3-1)$; 8) $\frac{\pi}{2}(1-\cos 4)$; 9) $\frac{3\pi}{8}$; 10) $\pi(\operatorname{ch}9-\operatorname{ch}4)$.
11.12. 1) $\frac{\pi}{32}$; 2) $\frac{\pi}{512}$; 3) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $2(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arcctg}2)$; 6) $4\arccos\frac{1}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4}$; 7) $\frac{10\pi}{3}-4\arccos\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4}$; 8) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; 9) $1-\frac{\pi}{4}$; 10) $4-\frac{\pi}{2}$.

12.1. 1) $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{d^2}\right)$; 2) $\frac{ab}{70}$. **12.2.** 1) $\frac{\ln 2}{2}$; 2) $\frac{4}{3}$. **12.3.** 1) $\frac{45\pi}{32}$; 2) $\frac{32}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$; 3) $\frac{9}{2}$. **12.4.** 1) $\frac{1028\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{32}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{81}$; 5) $\frac{216}{35}$; 6) $\frac{4}{315}$; 7) $\frac{1}{30}$; 8) $\frac{\sqrt{2}}{240}$; 9) $\mathrm{B}(10,10)$; 10) $\frac{164\pi}{9\sqrt{3}}+3$. **12.5.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{217}{120}$; 3) $\frac{381}{128}$; 4) $\frac{35}{24}-\frac{8\sqrt{6}}{9}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{11529}{1600}$; 6) $-\frac{38}{3}+\frac{16\sqrt{2}}{3}+\frac{5\sqrt{5}}{12}+4\sqrt{3}$; 7) $\frac{31}{100}$; 8) $\frac{3069}{5120}$; 9) $\frac{1}{40}\left(\frac{9^9+7^9}{63^4}\right)-\frac{2}{5}$; 10) $4\ln 2$. **12.6.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{8}$; 5) $\frac{4}{\pi^2-1}$; 6) 2; 7) $\frac{9}{70}$; 8) $\frac{32}{35}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{24}$. **12.7.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{16}{9}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\pi(1-e^{-4})$; 5) $\frac{2(\pi-2)}{3\pi}$; 6) $\frac{\pi}{8}$; 7) $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi abc}{3}$; 8) $\frac{3\pi ab}{8}$; 9) $\frac{2\pi}{3}$; 10) $\frac{3}{4}$.

13.1. 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$. **13.2.** $\frac{16\pi}{3}$; **13.3.** π. **13.4.** $\frac{9}{4}$. **13.5.** $(0,0,3/2)$.
13.6. 1) $\frac{\pi}{21}$; 2) $\frac{\operatorname{arctg}2-\operatorname{arcctg}2}{2}$; 3) 2π; 4) $\frac{4\pi e}{3}(e^7-1)$; 5) 0; 6) $\frac{3\pi}{8}$; 7) $\frac{1}{12}$; 8) $\left(\frac{1}{6}-\frac{\pi}{256}\right)\left(\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right)+\frac{9\pi}{128}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\pi}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}$; 9) $\frac{\pi}{16}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})+$ $+\ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}-1)$; 10) $\frac{\pi}{6}(\cos 1-\cos 8)$. **13.7.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{6\sqrt{3}\pi}{5}$; 3) $\frac{16}{9}(3\pi+$ $+20-16\sqrt{2})$; 4) $\frac{81\pi}{32}$; 5) $\frac{27\pi}{32}$; 6) $\frac{7\pi}{6}$; 7) 8; 8) $\frac{512}{75}$; 9) $\frac{5\pi}{24}$; 10) $\pi(\frac{8\pi}{3}-3\sqrt{3})$.

13.8. 1) 2π; 2) $\frac{\pi^2}{24}$; 3) $\frac{\pi^2}{24\sqrt{2}}$; 4) $\pi(6\sqrt{5}-14-\sqrt{2}(3-\sqrt{5})^{3/2})$; 5) $\frac{8\pi}{5}$; 6) $\frac{\pi}{3}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$; 7) $\frac{1}{15}$; 8) $\frac{1}{120}$; 9) $\frac{7}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 10) 2. **13.9.** 1) $\left(0,0,\frac{3}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{16}{15\pi},\frac{16}{15\pi},\frac{2}{3}\right)$; 3) $\left(0,\frac{32}{45\pi},\frac{8}{3}\right)$; 4) $\left(0,0,\frac{3}{8}\right)$; 5) $\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi},0\right)$; 6) $\left(0,0,-\frac{3}{8}\right)$; 7) $\left(\frac{8(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}{15\sqrt{10}(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4})},\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{15\sqrt{10}(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4})},\frac{2}{3}\right)$; 8) $(0,0,1)$; 9) $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi},\frac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi},0\right)$; 10) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{15(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arcctg}2)},\frac{2\sqrt{5}}{15(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arcctg}2)},1\right)$.

14.1. $\alpha>1$. **14.2.** $\alpha>1$, $\beta>1$. **14.3.** $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-1)}$, $\alpha>\beta>1$. **14.4.** $\frac{\pi}{2}$. **14.5.** $\alpha<1$. **14.6.** Збігається. **14.7.** 1) $\alpha>\frac{3}{2}$; 2) $\alpha<\frac{3}{2}$. **14.10.** $\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$, $\alpha<1$. **14.11.** 1) $\alpha>1$; 2) $\alpha+\beta<\alpha\beta$; 3) $\alpha>2$; 4) $\alpha>1$; 5) $\alpha>1$; 6) $\alpha>0$; 7) $\alpha>0$; 8) $\alpha<-1$; 9) $\alpha<-1$; 10) $\alpha>2$. **14.12.** 1) 1; 2) 2π; 3) π; 4) 2; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\Gamma(\alpha+1)$; 7) $\frac{\pi}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$; 8) $\frac{1}{\alpha+\beta+2}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$; 9) $\frac{1}{\alpha+\beta+2}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$; 10) $\frac{\pi}{4}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$. **14.13.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\pi\sqrt{e}$; 4) $\frac{1}{2}\pi\sqrt[4]{e}$; 5) 0; 6) $-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}e^{3/8}$; 7) $\pi\sqrt[4]{e}$; 8) π; 9) $\frac{1}{2}\pi^{3/2}$; 10) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}e^{37/40}$. **14.14.** 1) $\alpha+\beta>\alpha\beta$; 2) $\alpha>-1$; 3) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 4) $\alpha<1$, $\beta<1$, $\gamma<1$; 5) $\alpha\in\mathbb{R}$; 6) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 7) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 8) $\alpha>-3$; 9) $\alpha>-\frac{3}{4}$; 10) $\alpha\in(0,3-\sqrt{6})\cup(3+\sqrt{6},+\infty)$.

15.1. 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 2. **15.2.** 1) $-\frac{14}{15}$; 2) -2π; 3) $-\pi$; 4) -4. **15.3.** -14. **15.4.** $mg(x_3-y_3)$. **15.5.** 1) 0; 2) 0; 3) $-\frac{9}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 2π; 6) $\frac{4}{3}$; 7) 0; 8) -2π; 9) 0; 10) $\frac{3}{140}$. **15.6.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 13; 7) 0; 8) $3\sqrt{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $1-\cos 1$. **15.7.** 1) 0; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) 0; 4) 0; 5) 8; 6) 0; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) 0; 9) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pi$; 10) $-2\sqrt{2}\pi$. **15.8.** 1) $-F$; 2) -1; 3) -1; 4) π; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{17}{12}$; 8) 0; 9) 0; 10) $-\frac{3}{2}$.

16.1. 1) 4π; 2) 0; 3) 0; 4) 4π; 5) $\frac{15}{2}\pi$. **16.2.** 0. **16.3.** 1) 0; 2) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\times$ $\times dx_1\wedge dx_2$; 3) $\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\times$ $\times dx_1\wedge dx_2$; 4) $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$. **16.4.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{107}{120}-$ $-2\cos 1$; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{32768}{105}\pi$; 7) 8π; 8) $\frac{4}{15}$; 9) $-\frac{\pi}{2}$; 10) 0; 11) $\frac{7}{6}$; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $\frac{1}{2}$; 14) $\frac{5}{4}$; 15) 0; 16) 12; 17) $4(e^3+e^2+e-3)$; 18) $\frac{9\pi}{2}$; 19) $\frac{\pi}{24}$; 20) $\frac{4}{3}$; 21) $\frac{\pi}{2}$; 22) 0; 23) $\frac{1}{12}$; 24) $-\frac{7\pi}{3}$; 25) 0; 26) 0; 27) $\frac{56\pi}{3}$; 28) $\frac{\pi}{6}$; 29) $-\frac{\pi}{36}$; 30) $\frac{8\sqrt{2}-4\sqrt{2}\pi}{3}$.

17.1. 1) $-\frac{3}{2}$; 2) 62; 3) $e^2\cos 3-1$; 4) 0. **17.2.** 1) $z=\frac{x_1^3}{3}+x_1^2x_2-x_2^2x_1-\frac{x_2^3}{3}$; 2) $z=\frac{x_2}{x_1^2}$; 3) $z=x_1\cos x_2$; 4) $z=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}-2x_1x_2x_3$. **17.3.** $mg(x_2^0-y_2^0)$. **17.4.** 1) 0; 2) $(1+x_2)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 3) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2$; 4) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1+\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3$;

5) $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$. **17.7.** 1) 0; 2) $-\frac{20}{3}$; 3) $-\frac{9}{2}$; 4) -8; 5) -1; 6) 0; 7) $2e-1$; 8) $\ln\frac{2}{5}$; 9) -3; 10) $\int\limits_0^7 f(t)dt$; 11) $\frac{79}{12}$; 12) 8; 13) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 14) -2; 15) 0; 16) 0; 17) $1-e^2$; 18) 24; 19) 0; 20) $e+e^{-1}-2$.
17.8. 1) $z=x_1^{x_2}$; 2) $z=-\frac{x_2}{x_1+x_2}$; 3) $z=2\sqrt{x_1x_2}$; 4) $z=x_1^3+x_1^2x_2$; 5) $z==\operatorname{tg}(x_1+x_2)$; 6) $z=x_1\ln(x_1+x_2)$; 7) $z=x_1^4+\frac{x_1^2}{2}-x_1x_2+\frac{x_2^2}{2}$; 8) $z=x_1^2x_2++3x_2^3$; 9) $z=\sin(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)$; 10) $z=\operatorname{ch}(x_1+x_2)+\operatorname{sh}(x_1-x_2)$.
17.9. 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{4m}{5}$; 3) $-\frac{31m}{8}$; 4) $\frac{\pi^2+1}{2}$; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 0; 9) $-4m$; 10) $-7m$. **17.10.** 1) $(x_2\cos(x_1x_2)-x_1)\,dx_1\wedge dx_2$; 2) $\operatorname{ch}(x_1+x_2)\,dx_1\wedge dx_2$; 3) $(x_3-x_1)\,dx_1\wedge dx_3-x_2\,dx_2\wedge dx_3$; 4) $-\frac{x_3}{1+x_1^2x_3^2}\,dx_3\wedge dx_1-e^{x_1+x_2}\,dx_1\wedge dx_2$; 5) $3\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 6) $x_1\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 7) $-x_1\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 8) 0; 9) $\sum\limits_{k=1}^{m}\cos x_k(-1)^{(k-1)(m-1)}\,dx_1\wedge\,dx_2\wedge\ldots\wedge\,dx_m$.

18.1. 1) $-\frac{10}{3}$; 2) $-2\pi ab$; 3) $\frac{1-e^{\pi}}{5}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 1)0; 2)2π; **18.2.** 1) πab; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. **18.3.** 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $-\frac{11}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$; 5) $-\frac{64}{3}$; 6) $\frac{22}{3}$; 7) 0; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{41}{12}$; 10) 0. **18.4.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{3\pi}{8}$; 7) 6; 8) $-e^2+1+e-e^{-1}$; 9) $-\frac{5}{6}$; 10) $\frac{1}{2}$. **18.5.** 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{35}$; 4) $\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$; 5) 6π; 6) $\frac{1}{6}$; 7) 2π; 8) $\frac{3}{2}$; 9) 1; 10) $\ln(x_1^0+\frac{x_2^0}{2})$.

19.1. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{384}{5}\pi$. **19.2.** $2\pi^2a^2b$; **19.3.** $-\sqrt{3}\pi$. **19.4.** -3π. **19.5.** 1) 2π; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 4π; 4) $\frac{288}{35}$; 5) $\frac{12\pi}{5}$; 6) 16; 7) $-\frac{\pi}{2}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) -2; 10) $\frac{1}{7}+\frac{\pi}{24}$. **19.6.** 1) $\frac{4}{3}\pi r^3$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{9}$; 5) $\frac{1}{3}\pi h^3$; 6) $h\pi r^2$; 7) $\frac{1}{2}\pi h^2$; 8) $\frac{\pi}{3}(r-h)^3(2r+h)$; 9) $\frac{4}{3}\pi abc$; 10) $\frac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})$. **19.7.** 1) -6π; 2) $2\pi rR^2$; 3) $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) π; 6) 0; 7) 0; 8) 3π; 9) π; 10) $-\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$; 11) 0; 12) 0; 13) 0; 14) $\frac{8\pi^3}{3}$.

20.1. 1) 5; 2) $\frac{\pi\sqrt{2+\pi^2}}{2}+\ln\frac{\sqrt{\pi^2+2}+\pi}{\sqrt{2}}$. **20.2.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}(2\pi a^2+\frac{8\pi^3b^2}{3})$; 2) $\frac{25\sqrt{19}}{64}-\frac{9\sqrt{2}}{64}-\frac{17}{256\sqrt{2}}\ln\frac{4\sqrt{38}+25}{17}$. **20.3.** $\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$. **20.4.** 1) $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$; 2) $((5--5e^{-1})^{-1}(2-2e^{-2}\cos 1+e^{-2}\sin 1)\,,(5-5e^{-1})^{-1}(-1+e^{-2}\cos 1+2e^{-2}\sin 1),\frac{1+e}{2e})$; 3) $(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{2})$. **20.5.** 1) $\sqrt{3}(1-e^{-1})$; 2) $x_1^0+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x_1^0}{1-x_1^0}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{76}{3}$; 5) $\frac{1525}{6}$; 6) $\frac{5}{3}$; 7) $\frac{19}{4}$; 8) $2+\operatorname{ch}2$; 9) $\frac{20}{3}$; 10) $1+\ln\frac{3}{2}$. **20.6.** 1) $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{19\sqrt{5}+23\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 6) $16\pi^2-\frac{2048}{45}$; 7) $2\pi^2+4\pi^4$; 8) $\frac{1}{6}(\operatorname{ch}^2t_0+\operatorname{sh}^2t_0)^{3/2}-\frac{1}{6}$; 9) 1; 10) $2e-2+\frac{\pi e}{4}$; 11) $\frac{13\sqrt{2}}{6}$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{20}$; 13) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{3}$; 14) $2\sqrt{2}$; 15) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 16) $\frac{2\pi}{3}$; 17) $\frac{(2+t_0^2)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$; 18) $\sqrt{2}$;

19) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 20) 0. **20.7.** 1) $\frac{(e^2+1)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{b^2}{2}+\frac{ba^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}-1}{8}+\frac{3}{16}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; 5) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln 2}{2}$. **20.8.** 1) $x_1=x_2=$ $=(\frac{7}{16}-\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln(\sqrt{2}-1))\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1))^{-1}$; 2) $l=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1), x_1=$ $=(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}-1))/l, x_2=(\frac{\sqrt{2}}{32}-\frac{5}{32}\ln(\sqrt{2}-1))/l$; 3) $(0,\frac{1}{2}(\operatorname{ch}1+\frac{1}{\operatorname{sh}1}))$; 4) $(\frac{r\sin\varphi}{\varphi},0)$; 5) $(0,\frac{2}{5})$.

21.1. 1) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$; 2) $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **21.2.** 1) $a(\varphi_2-\varphi_1)(b(\theta_2-\theta_1)+a(\sin\theta_2-$ $-\theta_1)), 4\pi^2ab$; 2) $\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **21.3.** 1) πa^3; 2) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; 3) $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$. **21.4.** $\frac{4}{5}\sqrt{3}\pi+\frac{2}{15}\pi$. **21.5.** 1) 4; 2) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$; 3) $\pi\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) 2; 6) $\frac{\pi}{6}(\ln(12+\sqrt{145})+12\sqrt{145})$; 7) $\frac{\sqrt{21}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{20}\ln(2\sqrt{5}+\sqrt{21})$; 8) $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; 9) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 10) $\frac{3\pi\sqrt{2}-\pi\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\ln\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$. **21.6.** 1) $4\pi R^2$; 2) $R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 8; 5) 8; 6) $\frac{10}{9}-\frac{\pi}{6}$; 7) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-2)$; 8) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-2)$; 9) $\sqrt{2}\pi$; 10) $(16\sqrt{2}-8)(\arcsin\frac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{8})$. **21.7.** 1) 60π; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}$; 4) 2π; 5) $\frac{10\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{15}$; 6) 0; 7) $6\sqrt{2}$; 8) $\frac{29}{3}+3\sqrt{2}$; 9) $\frac{3}{4}$. **21.9.** 1) π; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **21.10.** 1) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; 2) $(0,0,\frac{1+a}{2})$; 3) $(0,\frac{4}{3}\frac{2\sqrt{2}-1}{\pi(\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1))},\frac{\pi}{2})$; 4) $x_1=x_2=\frac{11\sqrt{2}-4}{14+14\sqrt{2}}, x_3=(384(1+\sqrt{2}))^{-1}\times$ $\times(244\sqrt{2}-15\ln(3+2\sqrt{2})-30\ln(1+\sqrt{2}))$; 5) $x_1=\frac{3}{8}\frac{5\sqrt{6}+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3\sqrt{3}-1}, x_2=$ $=\frac{x_1}{2}, x_3=\frac{3(3\sqrt{3}-2)}{5(3\sqrt{3}-1)}$; 6) $(\frac{2}{3(\pi-2)},0,\frac{\pi}{4(\pi-2)})$; 7) $(\frac{1}{2},0,\frac{16}{9\pi})$; 8) $(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}+1}{\pi})$.

22.1. $(7,0,0),(-2,1,1)$. **22.3.** $(-\frac{5}{4},-1,-\frac{5}{2})$. **22.4.** 1) 0; 2) π. **22.5.** $2\pi^2b^2$. **22.6.** $-3e^{-2}+\frac{3}{4}e^4+\frac{9}{4}$. **22.7.** $g=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$. **22.8.** $g=\frac{m}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$. **22.9.** $-4\pi m$. **22.10.** $\sum\limits_{k=1}^{n}e_k$. **22.11.** 1) $(4,6,1)$; 2) $(0,6,0)$; 3) $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$; 4) $(-\frac{1}{9},\frac{1}{9},-\frac{1}{18})$; 5) $(-\frac{2}{27},\frac{5}{27},-\frac{4}{27})$; 6) $(-e^{-2},0,0)$; 7) $(\frac{\sqrt{15}}{20},-\frac{\sqrt{15}}{60},-\frac{\sqrt{15}}{60})$; 8) $(-\frac{1}{4},\frac{\ln 2}{2},-\frac{\ln 2}{2})$; 9) $(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{3}{4})$; 10) $(-\frac{\sqrt{2\pi}}{4},-\frac{\sqrt{2\pi}}{4},0)$. **22.12.** 1) 3; 2) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$; 3) $\frac{32}{125}$; 4) $\pi-2$; 5) $2e$; 6) 15; 7) $\frac{4}{5}+\frac{3}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) 0. **22.13.** 1) $(0,0,0)$; 2) $(0,0,0)$; 3) $(-1,1,-1)$; 4) $(0,-\frac{6\sqrt{38}}{19},\frac{4\sqrt{38}}{19})$; 5) $(-2,-1,-1)$; 6) $(5,-2,-4)$; 7) $(0,0,-1)$; 8) $(0,0,-2)$; 9) $(0,4,0)$; 10) $(-1,1,-1)$. **22.14.** 1) 0; 2) 0; 3) π; 4) 0; 5) $-\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{2\pi}{3}$; 7) 5π; 8) 3; 9) 4; 10) 4. **22.15.** 1) 2π; 2) 2π; 3) 0; 4) -2π; 5) $\frac{188}{21}\ln 2$; 6) $5\pi-20$; 7) $\frac{7\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{2}$; 8) $\frac{2m}{3}$; 9) 240. **22.16.** $\frac{1}{3}$.

23.1. $\int\limits_0^1 tf(t)\,dt\neq 0$, або $\int\limits_0^1 tf(t)\,dt=\int\limits_0^1 f(t)\,dt=0$. **23.2.** $6+3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta=0$.

23.3. $m \neq n$. **23.8.** $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \frac{3}{4}t^2 - \frac{\sqrt{10}}{4})$. **23.10.** а), б) Так. **23.12.** 1) $m-n$ – парне, $m \neq n$; 2) $m-n$ – парне, $m \neq n$; 3) $m-n, m+n$ діляться на 4; 4) $m \neq n$; 5) $m \neq n$; 6) $m-n$– парне. **23.13.** 1) $\beta = 0$ або $\alpha = -\frac{4}{3}$; 2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; 3) $\alpha = 0$ або $\beta = \frac{5}{2}$; 4) $\beta = 0$ або $\alpha = -\frac{3}{2}$. **23.16.** $P(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$. **23.17.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos t,\ \sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}}(\sin t - \frac{2}{3\pi})$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}}(\sin t - \frac{2}{3\pi}),\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\sin 2t$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos t,\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 2t$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\sin 2t,\ \sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}}(\sin 3t - \frac{2}{9\pi})$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 2t,\ \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 3t$; 6) $1,\ \sqrt{3}(2t-1),\ 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}(t-1),\ \frac{3\sqrt{10}}{4}t^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}t + $ $+ \frac{\sqrt{10}}{2}$; 8) $\sqrt{3}t,\ 4\sqrt{5}t^2 - 3\sqrt{5}t,\ 15\sqrt{7}t^3 + 6\sqrt{7}t - 20\sqrt{7}t^2$; 9) $\frac{\sqrt{6}}{4}t,\ \frac{\sqrt{10}}{2}t^2 - $ $- \frac{3\sqrt{10}}{4}t,\ \frac{15\sqrt{14}}{16}t^3 - \frac{5\sqrt{14}}{2}t^2 + \frac{3\sqrt{14}}{2}t$; 10) $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3\sqrt{10}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{10}}{4},\ \frac{\sqrt{14}}{2}t^3$.

24.1. $\alpha = \operatorname{sh} 1, \beta = 3e^{-1}$. **24.2.** $T_m = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}, p = [\frac{m+1}{2}]$. **24.7.** 1) $T(t) = \pi - \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{2}{n}\sin nt$; 2) $T(t) = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{\sin nt}{n}$; 3) $T(t) = \frac{\pi}{2} + $ $+ \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\cos nt$; 4) $T(t) = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$; 5) $T(t) = -2\sin t + $ $+ \frac{4\pi}{3}\sin^2 t$; 6) $T(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3\pi}\cos t$; 7) $T(t) = 2\sin t - \sin 2t$; 8) $T(t) = $ $= -\frac{4}{3\pi}\cos t - \frac{4}{27\pi}\cos 3t$. **24.11.** 1) $\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^4}$; 2) $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} + $ $+ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)^2}$; 3) $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{32}{\pi((2n-1)^2-4)^2}$. **24.12.** 1) $\frac{\pi^3}{3} = 2\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 2) $\pi = \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; 3) $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{32n^2}{\pi(4n^2-1)^2}$; 4) $\frac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8(2n-1)^2}{\pi((2n-1)^2-4)^2}$. **24.13.** 1) $\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{32} + \frac{\pi}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$; 2) $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} + \right.$ $\left. + \frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)^2} \right)$; 3) $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} + \frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)^2} \right)$.

25.1. 1) $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}, t \in \mathbb{R}$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; 2) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(2n-1)t}{\pi(2n-1)}, t \in \mathbb{R}$; $2\pi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi(2n-1)^2}$ 3) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt, t \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi^3}{3} = $ $= 4\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 4) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n},\ t \in \mathbb{R}$; $\frac{\pi^3}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$; 5) $f(t) = \frac{2\pi^3}{3} + $ $+ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt, t \in \mathbb{R}$; $\frac{16\pi^5}{15} = \frac{8\pi^5}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 16\pi n^4$. **25.2.** 1) $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + $

$+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt, t\in[0,\pi]$; $\frac{2\pi^5}{5}=\frac{2\pi^5}{9}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16\pi}{n^4}$; 2) $t^2=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}(2+$ $+2(-1)^{n+1}+\pi^2n^2(-1)^n)\sin nt,\ t\in[0,\pi)$; $\frac{2\pi^5}{5}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^6\pi}(\pi^2n^2(-1)^n+$ $+2+2(-1)^{n+1})^2$; 3) $\frac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nt-\frac{4\pi}{n}\sin nt),\ t\in(0,\pi)$; $\frac{32\pi^5}{5}=$ $=\frac{32\pi^5}{9}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{16\pi}{n^4}+\frac{16\pi^3}{n^2})$. **25.3.** 1) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)t,\ t\in\mathbb{R}$; 2) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t, t\in\mathbb{R}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)t, t\in\mathbb{R}$; 4) $\frac{2}{\pi}-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nt,\ t\in\mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{\pi}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(4n^2-1)\pi}\cos 2nt,\ t\in\mathbb{R}$; 6) $\frac{\sin(2\sqrt{2}\pi)}{2\sqrt{2}\pi}-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\sin(2\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi}\cos nt-\frac{2n\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi}\sin nt\right), t\neq 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{\sqrt{2}\pi}-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{2}\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi}\cos nt+\frac{n\sin^2(2\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi}\sin nt\right), t\neq 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times(2n-1)^{-2}\sin(2n-1)t,\ t\in\mathbb{R}$; 9) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2\pi}, t\in\mathbb{R}$; 10) $2+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin(2n-1)t}{(2n-1)\pi}, t\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)t-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\times$ $\times\sin nt,\ t\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)t-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\times$ $\times\sin nt,\ t\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 13) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)t-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(\pi-1)(-1)^n}{n\pi}\sin nt,\ t\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **25.4.** 1) $f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$, $t\in[0,\pi]$; 2) $f(t)=\frac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(4n-2), t\in[0,\pi]$; 3) $f(t)=$ $=\frac{\pi}{8}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos\frac{\pi n}{2}-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos nt,\ t\in[0,\pi]$. **25.5.** 1) $f(t)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nt$, $t\in(0,\pi)$; 2) $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)^2}\sin(2n-1)t,\ t\in[0,\pi]$; 3) $f(t)=$ $=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi n+2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2}\sin nt,\ t\in[0,\pi)$. **25.6.** $f(0)=f(2\pi)=-\frac{1}{2},\ f(\pi)=$ $=f(3\pi)=0$. **25.7.** 1) $\frac{2\sin t}{5-4\cos t}$; 2) $\frac{1-2\cos t}{4\cos t-5}$; 3) $(6\sin\alpha\sin t)^{-1}\ (9\cos^2 t-$ $-3\cos\alpha\cos t+9\cos^2\alpha+16)$; 4) $\frac{5\cos^2 t-6}{8\cos^2 t-9}$; 5) $\frac{e(1+e^2)\sin t}{(e^2+1-2e\cos t)(e^2+1+2e\cos t)}$; 6) $e^{\cos t}\cos(\sin t)$; 7) $e^{\cos t}\sin(\sin t)$.

26.1. 1) $f(t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{l}, t\neq kl, k\in\mathbb{Z}; l=\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+$

$+\frac{l}{2}$; 2) $f(t)=\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nt}{\pi n}$, $t\neq k$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}12\pi^2n^2$. **26.2.** 1) $f(t)=$ $=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}$; 2) $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{24}{n^3}-\frac{\pi^2}{4n})\sin nt$. **26.3.** $\frac{\alpha\pi-\alpha^2}{2}$, $\frac{\pi^2}{6}-\frac{\alpha\pi-\alpha^2}{2}$. **26.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin nt$. **26.5.** $f(t)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(2n-1)t}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n-3)}-$ $-\frac{1}{8}\cos 2t$, $f'(t)=\frac{1}{4}\sin 2t-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)(2n-3)}\cos(2n-1)t$. **26.7.** 1) $f(t)=$ $=\frac{3}{4}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)t-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi nt}{\pi n}$, $t\neq 2k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{4}{3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4(2n-1)^2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}+\frac{9}{8}$; 2) $f(t)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{\pi t}{2}(2n-1)$, $t\neq 2k$, $k\in\mathbb{Z}$; $8=4+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^2(2n-1)^2}$; 3) $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4l(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\frac{\pi t(2n-1)}{l}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{l^3}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16l^3}{\pi^4(2n-1)^4}$; 4) $f(t)=\frac{l}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nl}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi t(2n-1)}{l}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l(2(-1)^{n+1}\pi n-2\sin\frac{\pi n}{2}+\pi n\cos\frac{\pi n}{2})}{\pi^2n^2}\times$ $\times\sin\frac{\pi nt}{l}$, $t\neq l+2kl$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{5l^3}{6}=\frac{l^3}{8}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^2(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^4n^4}(2(-1)^{n+1}\pi n-$ $-2\sin\frac{\pi n}{2}+\pi n\cos\frac{\pi n}{2})^2$; 5) $f(t)=\frac{l}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi t(2n-1)}{l}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi^2n^2}\times$ $\times(\pi n\cos\frac{\pi n}{2}-2\sin\frac{\pi n}{2})\sin\frac{\pi(2n-1)t}{l}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{l^3}{3}=\frac{l^3}{8}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^2n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^4n^4}\times$ $\times(\pi n\cos\frac{\pi n}{2}-2\sin\frac{\pi n}{2})^2$; 6) $\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{\pi t}{2}(2n-1)$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{4}{3}=1+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^4(2n-1)^4}$. **26.8.** $f(t)=\frac{t^3}{12}-\frac{\pi t^2}{4}+\frac{\pi^2t}{6}$, $t\in(0,2\pi)$. **26.9.** $1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nt$.

27.1. 1) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2-2\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$, $|x|\neq 1$; 2) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\times$ $\times\sin\lambda x\,d\lambda$, $x\in\mathbb{R}$. **27.2.** 1) $\widehat{f}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\sigma e^{i\lambda a-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}$; 2) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{2\sin a\lambda}{\lambda}$; 3) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{1-i\lambda}$; 4) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$; 5) $\widehat{f}(\lambda)=\pi e^{-|\lambda|}$. **27.3.** $\widehat{t^2f(t)}\,(\lambda)=$ $=-\widehat{f}''(\lambda)$. **27.4.** $\widehat{f'}\,(\lambda)=-\lambda i\widehat{f}(\lambda)$.

Програма курсу

Невласні інтеграли, що залежать від параметра

Означення рівномірно збіжного невласного інтеграла по необмеженому проміжку. Приклади: інтеграл від степеневої функції, інтеграл Діріхле. Критерій Коші рівномірної збіжності. Означення рівномірно збіжного невласного інтеграла від необмеженої функції. Приклад: інтеграл від степеневої функції. Ознаки Вейєрштрасса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності невласних інтегралів. Приклади застосування. Теореми про неперервність і про граничний перехід під знаком невласного інтеграла. Теорема про інтегрування за параметром по відрізку. Приклад: обчислення інтеграла Фруллані. Теорема про диференціювання за параметром. Приклад: обчислення інтеграла Діріхле. Теорема про інтегрування по необмеженому проміжку. Приклад: обчислення інтеграла Ойлера – Пуассона. Означення Γ-функції, її елементарні властивості, графік. Означення логарифмічно опуклої функції. Логарифмічна опуклість Г-функції. Основна теорема про Γ-функцію. Основні формули для Γ-функції: формула Ойлера, зображення Вейєрштрасса, формула подвоєння Лежандра, формула доповнення (функціональне рівняння Ойлера); розклад синуса в нескінченний добуток. Теорема про формулу Стірлінга. Означення B-функції Ойлера, її елементарні властивості, зв'язок із Γ-функцією.

Кратні інтеграли

Означення бруса, його діаметра, міри. Розбиття бруса, діаметр розбиття. Суми Дарбу, інтегральні суми та їх властивості. Верхній та нижній інтеграли, означення інтегровної функції та інтеграла по брусу. Інтеграл від неперервної функції по брусу: інтегровність неперервної функції по брусу, інтеграл як границя інтегральних сум. Властивості інтеграла від неперервної функції по брусу: інтеграл від константи, лінійність, адитивність, теорема про середнє значення, інтегрування нерівностей. Обчислення інтеграла від неперервної функції по брусу повторним інтегруванням. Наслідки. Розбиття простору $\mathbb{R}^m$, його елементарні властивості. Означення вимірної за Жорданом множини та її міри Жордана. Критерій вимірності. Властивості вимірних за Жорданом множин та міри Жордана. Означення кратного інтеграла по вимірній множині. Властивості: інтеграл від константи, лінійність, адитивність, інтегрування нерівностей. Означення циліндричної множини. Теорема про вимірність циліндричних множин. Обчислення кратного інтеграла по циліндричній множині: лема про неперервність функції g, теорема про обчислення, наслідок. Означення відображення спеціального вигляду. Теорема про вимірність образу при відображенні спеціального вигляду. Формула заміни змінних при відображенні спеціального вигляду. Локальне зведення загального відображення до суперпозиції відображень спеціального вигляду. Лема про образи множин без спільних внутрішніх точок. Загальна формула заміни змінних у кратному інтегралі. Наслідки. Формула переходу до полярних координат при порушенні умов загальної теореми на деякій множині нульової міри. Означення невласного кратного інтеграла від необмеженої функції. Приклад: інтеграл від степеневої функції. Головне значення розбіжного невласного інтеграла. Критерій збіжності невласного кратного інтеграла від невід'ємної функції. Означення невласного кратного інтеграла по необмеженій множині. Приклад: інтеграл від степеневої функції. Обчислення інтеграла Ойлера – Пуассона.

Інтеграли по многовидах. Теорема Стокса

Означення регулярного відображення, припустимого координатного простору для множини. Орієнтація простору, множини. Приклади. Означення диференціальної форми степеня m у просторі $\mathbb{R}^m$, інша форма запису формули заміни змінних у кратному інтегралі. Формальні властивості диференціальних форм. Означення многовиду, параметричне зображення, орієнтація многовиду. Приклади: орієнтовані крива та поверхня. Означення диференціальної форми степеня p у просторі $\mathbb{R}^m$, канонічний запис диференціальної форми, дії з диференціальними формами. Означення інтеграла від диференціальної форми степеня p по орієнтованому многовиду вимірності p у просторі $\mathbb{R}^m$, часткові випадки. Означення криволінійного інтеграла другого роду. Криволінійний інтеграл другого роду як границя інтегральних сум. Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду. Означення поверхневого інтеграла другого роду. Означення зовнішнього диференціала диференціальної форми, приклади. Теорема Пуанкаре. Орієнтація границі множини, що складається зі скінченного набору брусів. Формула Стокса для множини, що складається зі скінченного набору брусів. Загальна формула Стокса. Часткові випадки загальної формули Стокса: формула Ньютона – Лейбніца, формула Гріна, формула Остроградського – Гаусса, класична формула Стокса. Означення точної та замкненої диференціальних форм. Приклади замкнених диференціальних форм. Властивості інтеграла другого роду від точної форми. Означення однозв'язної множини в $\mathbb{R}^m$. Властивості інтеграла від замкненої форми по замкненій кривій в однозв'язній множині. Наслідки. Необхідні й достатні умови того, щоб диференціальна форма була точною.

Означення міри на підмножинах гіперплощини в $\mathbb{R}^m$. Означення міри на многовиді, інтеграла першого роду по многовиду. Означення довжини дуги, криволінійного інтеграла першого роду. Криволінійний інтеграл першого роду як границя інтегральних сум, фізична інтерпретація цього інтеграла. Означення площі поверхні, поверхневого інтеграла першого роду.

Поверхневий інтеграл першого роду як границя інтегральних сум, фізична інтерпретація цього інтеграла. Зв'язок між інтегралами першого та другого роду; зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду, між поверхневими інтегралами першого та другого роду. Поняття градієнта, дивергенції, ротора, потоку, циркуляції. Формули Остроградського – Гаусса та Стокса у векторній формі. Безкоординатні означення дивергенції та ротора.

Ряди та інтеграл Фур'є

Простір $R([a,b])$ зі скалярним добутком. Означення норми; поняття ортогональності, нормованості, лінійної незалежності. Ортогональність тригонометричної послідовності. Лінійна незалежність степеневої послідовності. Задача про найкраще середньоквадратичне наближення. Означення коефіцієнтів Фур'є та ряду Фур'є за ортонормованою системою. Властивості коефіцієнтів Фур'є. Означення замкненої системи. Замкненість степеневої та тригонометричної послідовностей. Середньоквадратична збіжність ряду Фур'є за замкненою системою, рівність Парсеваля. Означення повної системи. Повнота замкненої системи. Ряд Фур'є за тригонометричною системою. Властивості коефіцієнтів Фур'є. Лема Рімана. Інтегральне зображення часткових сум ряду Фур'є за тригонометричною системою. Ядро Діріхле та його властивості. Необхідні й достатні умови збіжності в точці ряду Фур'є за тригонометричною системою. Принцип локалізації Рімана. Ознаки Діні, Ліпшиця збіжності в точці ряду Фур'є за тригонометричною системою. Наслідки з них. Ядро Фейєра та його властивості. Інтегральне зображення середніх за Чезаро часткових сум ряду Фур'є. Теорема Фейєра та теореми Вейєрштрасса як наслідки з неї. Рівномірно збіжні тригонометричні ряди. Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є функції та її похідних. Рівномірна збіжність та почленна диференційовність ряду Фур'є. Почленне інтегрування ряду Фур'є. Ряд Фур'є для функції з довільним періодом за модифікованою тригонометричною системою. Інтеграл Фур'є та інтегральна формула Фур'є. Ознаки Діні та Ліпшиця збіжності інтеграла Фур'є в точці. Наслідок. Означення перетворення Фур'є; формула обернення. Властивості перетворення Фур'є. Приклад застосування перетворення Фур'є (розв'язання рівняння теплопровідності).

Література

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М., 1967.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1972.
3. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. -- К., 1987.
4. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. – К., 1994. – Ч. 2.
5. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – К., 2004.
6. Зорич В.А. Математический анализ: Учебник. – М., 1984. – Ч. II.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М., 1979.
8. Рудин У. Основы математического анализа. – М., 1966.

Навчальне видання
Навчальні завдання
до практичних занять з математичного аналізу
для студентів механіко-математичного факультету
(2 семестр другого курсу)

Упорядники ДОРОГОВЦЕВ Анатолій Якович
КУКУШ Олександр Георгійович
ДЕНИСЬЄВСЬКИЙ Микола Олексійович
ЧАЙКОВСЬКИЙ Андрій Володимирович