Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В.М. Журавльов

Методична розробка

спеціального курсу ***Черепичні порядки***

для студентів механіко – математичного факультету

В.М. Журавльов. Методична розробка спеціального курсу "Черепичні порядки": Навчальний посібник для студентів механіко – математичного факультету. — 2010. – 94 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф., В.В. Кириченко
д-р фіз.-мат. наук, проф., А.П. Петравчук

Наведено основні відомості про напівдосконалі кільця та напівдистрибутивні кільця. Черепичні порядки розглядаються як нетерові первинні напівдосконалі напівдистрибутивні кільця з ненульовим радикалом Джекобсона. Розглядається техніка опису горенштейнових черепичних порядків та вивчаються властивості таких порядків.

Для студентів механіко-математичного факультету.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету
(протокол № 4 від 8 листопада 2010 року)

Зміст

1 Локальні та напівлокальні кільця

Означення 1.1. *Ненульове кільце A називається локальним, якщо воно має єдиний максимальний правий ідеал.*

Розглянемо основні властивості локальних кілець. Через R позначимо радикал Джекобсона кільця A.

Твердження 1.2. *Наступні умови еквівалентні для кільця A з радикалом R:*

(a) A — локальне;

(b) R — єдиний максимальний правий ідеал в A;

(c) всі необоротні елементи A утворюють власний ідеал;

(d) R є множиною всіх необоротних елементів A;

(e) фактор-кільце A/R є тілом.

Доведення. (a)$\Rightarrow$ (b) Це випливає з того факту, що радикал R є перетином всіх максимальних правих ідеалів A.

(b)$\Rightarrow$(c). Нехай S множина всіх необоротних елементів кільця A з радикалом R і нехай $x \in S$. Правий ідеал $xA \neq A$ міститься в деякому правому максимальному правому ідеалі і, отже, він міститься в R. Тому $S \subseteq R$. Якщо $x, y \in S$, то $x, y \in R$, звідки $x + y \in R$. Таким чином, $x + y$ є необоротним елементом, таким що $x + y \in S$. Якщо $x \in S$ і $a \in A$, то $xa \in R$ та $ax \in R$, і звідси випливає, що $xa,\ ax \in S$. Таким чином, S — двосторонній власний ідеал A.

(c) $\Rightarrow$ (d). Будь-який елемент R є необоротним, $R \subseteq S$. Приймаючи до уваги те, що $S \subseteq R$, ми отримаємо, що радикал R співпадає з множиною всіх необоротних елементів, що й треба довести.

(d) $\Rightarrow$ (e). Оскільки R є множиною всіх необоротних елементів кільця A, то кожен елемент A, який не міститься в R, є оборотним. Тому довільний елемент A/R є оборотним, і тоді A/R є тілом.

(e) $\Rightarrow$ (a). Це зрозуміло, позаяк A/R не має нетривіальних односторонніх ідеалів. □

З огляду на симетричність умови 1.2 (e) маємо наступний результат.

Наслідок 1.3. *Для будь-якого ненульового кільця A наступні умови є еквівалентними:*

1) A має єдиний максимальний правий ідеал.

2) A має єдиний максимальний лівий ідеал.

Наступний результат часто використовують для перевірки, чи є кільце локальним.

Твердження 1.4. *Для будь-якого ненульового кільця A наступні умови є еквівалентними:*

1) A — локальне кільце.

2) якщо $a \in A$, то або a або $1 - a$ є оборотним.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай A — локальне кільце з радикалом R і нехай a необоротний елемент A. За твердженням 1.2 (d) $a \in R$ і тоді елемент $1 - a$ є оборотним в A.

2) $\Rightarrow$ 1). Нехай A кільце з радикалом R і нехай a необоротний елемент A. Тоді елемент $xa \in A$ є необоротним для будь-якого $x \in A$. Згідно з припущенням елемент $1 - xa$ є оборотним для будь-якого $x \in A$. Тому $a \in R$. За твердженням 1.2 (d) кільце A є локальним. □

Наслідок 1.5. *Нехай A — кільце, всі необоротні елементи якого є нільпотентними. Тоді A — локальне кільце.*

Доведення. Нехай x необоротний елемент кільця A. Тоді він є нільпотентним, тобто існує ціле число $n > 0$, таке що $x^n = 0$. З рівності $1 = 1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$ випливає, що $1 - x$ є необоротним. За твердженням 1.4 кільце A — локальне кільце. □

Підсумовуючи даний результат з використанням леми Фітінга, ми отримуємо класичне твердження.

Твердження 1.6. *Кільце ендоморфізмів $\mathrm{End}_A(M)$ нерозкладного A- модуля M, який є артіновим і нетеровим, локальне.*

Доведення. Нехай φ — ендоморфізм нерозкладного A- модуля M, який є нетеровим і артіновим. Тоді за лемою Фітінга існує додатне ціле число n таке, що M розкладається в пряму суму $\mathrm{Im}(\varphi^n)$ та $\mathrm{Ker}(\varphi^n)$. Але тоді з нерозкладності M випливає, що $M = \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ або $M = \mathrm{Im}(\varphi^n)$. Отже, ендоморфізм M є або автоморфізмом або нільпотентним. За наслідком 1.5 кільце $End_A(M)$ локальне. □

Твердження 1.7. *Локальне кільце A не має нетривіальних ідемпотентів (тобто, будь-який ідемпотент в A або 0 або 1).*

Доведення. Нехай A — локальне кільце і $e = e^2$ — ідемпотент в A. Розглянемо елемент $f = 1 - e$, який є ідемпотентом в A також. З твердження 1.4 випливає, що або e або f є оборотним в A. З $ef = e(1 - e) = 0$ випливає, що e чи f дорівнює 0, що й вимагалося довести. □

Твердження 1.8. *Будь-яке локальне спадкове кільце є областю.*

Доведення. Гомоморфізм двох нерозкладних проективних модулів над спадковим кільцем є мономорфізмом. Зокрема, ендоморфізм регулярного модуля A_A над локальним спадковим кільцем A є мономорфізмом. Оскільки $End_A A \simeq A$, то A є областю. □

Теорема 1.9. *Якщо A — локальне кільце, то кожен скінченно породжений проективний A- модуль є вільним.*

Доведення. Нехай A — локальне кільце з радикалом R і нехай P — скінченно породжений проективний A - модуль. Тоді A/R є тілом і P/PR є скінченно породженим проективним модулем над A/R. Отже, P/PR є скінченно породженим вільним A/R- модулем. Більше того, $P/PR \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n}(A/R)$. Якщо F — вільний A-модуль, то $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n}(A)$, і тоді $P/PR \simeq F/FR$. Нехай $\psi\colon F/FR \to P/PR$ відповідний ізоморфізм A/R

модулів, і нехай $\pi\colon F \to F/FR$ та $\sigma\colon P\ toP/PR$ — натуральні проекції. Тоді $\alpha = \psi\pi$ є гомоморфізмом з F в P/PR. Оскільки F — вільний модуль, то він є проективним модулем. З проективності F випливає існування гомоморфізма $\varphi\colon F \to P$ такого, що наступна діаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FR \arrow[r] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"] & F/FR \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & PR \arrow[r] & P \arrow[r, "\sigma"] & P/PR \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

є комутативною, тобто $\sigma\varphi = \alpha = \psi\pi$.

Покажемо, що φ — ізоморфізм.

Для будь-якого $f \in F$ маємо $\psi\pi(f) = \psi(f+FR) = \varphi(f)+PR$. З того, що ψ сюр'єкція, маємо $Im\varphi+PR = P$. Оскільки P — скінченно породжений, то за лемою Накаями маємо $Im\varphi = P$, тобто φ також сюр'єкція.

Розглянемо точну послідовність

$$0 \to\ Ker\varphi \to F \xrightarrow{\varphi} P \to 0.$$

Оскільки P — проективний, то маємо $F = W \oplus X \simeq \mathrm{Ker}\ \varphi \oplus P$, де $W \simeq \mathrm{Ker}\ \varphi$ та $X \simeq P$. Тоді $FR = WR \oplus XR$. Оскільки $WR \subset W \subset FR$, маємо $W = WR \oplus (W \cap XR)$. Але $W \cap XR \subset W \cap X = 0$, звідки $W = WR$. Оскільки W є прямим доданком скінченно породженого модуля, він також є скінченно породженим і за лемою Накаями ми отримуємо, що $W = 0$, тобто φ — мономорфізм. Тоді φ — ізоморфізм, а, отже, P — вільний. $\square$

Розглянемо клас кілець, які є узагальненням класу локальних кілець та класу односторонніх артінових кілець. Ці кільця природно виникають в теорії кілець і відіграють в ній важливу роль.

Означення 1.10. *Кільце A називається напівлокальним, якщо $\overline{A} = A/R$ є артіновим справа кільцем.*

Артінове кільце $\overline{A}$ може бути розкладене в пряму суму скінченого числа простих модулів (мінімальних правих ідеалів), тобто воно є напівпростим кільцем.

Приклади

1. *Будь-яке тіло — локальне кільце.*

2. *Будь-яке артінове справа кільце напівлокальне.*

3. *Будь-яке локальне кільце — напівлокальне.*

4. *Нехай $K[[x]]$ — кільце формальних степеневих рядів над полем K і нехай $M = (x)$. Зрозуміло, що M — максимальний ідеал в $K[[x]]$. Більше того, фактор-кільце $K[[x]]/M$ є полем, ізоморфним полю K. Тому $K[[x]]$ — локальне кільце. Нагадаємо, що кільце називається ланцюговим, якщо всі його ідеали є лінійно впорядкованими по відношенню включення. Всі ідеали в $K[[x]]$ утворюють лінійний ланцюг*

$$K[[x]] \supset (x) \supset (x^2) \supset \left(x^3\right) \supset \ldots \supset (x^n) \supset \ldots.$$

Кільце $K[[x]]$ є локальним ланцюговим кільцем.

5. *Нехай p — просте ціле число і нехай $\mathbb{Z}_{(p)}$ — кільце p- цілих чисел. Кільце $\mathbb{Z}_{(p)}$ має единий максимальний ідеал (p) і всі ідеали в $\mathbb{Z}_{(p)}$ утворюють лінійний ланцюг. Тому $\mathbb{Z}_{(p)}$ локальне ланцюгове кільце.*

6. *Нехай q довільне натуральне число, $\mathbb{Z}_{(q)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \,|(n,q)=1 \right\}$ — кільце q- цілих чисел. Кільце $\mathbb{Z}_{(q)}$ — напівлокальне. Це випливає з того, що якщо $q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, де $p_1, \dots, p_s$ різні прості числа і $r = p_1 \cdots p_s$, то $rad(\mathbb{Z}_{(q)}) = r\mathbb{Z}_{(q)}$.*

7. *Скінчений прямий добуток локальних кілець є напівлокальним.*

8. *Нехай A — напівлокальне кільце. Тоді $B = M_n(A)$ є також напівлокальним кільцем. Дійсно, $\mathrm{rad}\, B = M_n(\mathrm{rad}\, A)$. Тоді $B/\mathrm{rad}\, B \simeq M_n(A/\mathrm{rad}\, A)$. Оскільки $A/\mathrm{rad}\, A$ є напівпростим, то $M_n(A/\mathrm{rad}\, A)$ є також напівпростим. Отже, B — напівлокальне кільце.*

2 Дискретно нормовані кільця.

Нехай G — лінійно впорядкована комутативна група, операція в якій записується адитивно. Отже, множина G є лінійно впорядкованою, та для будь-яких $a, b, c \in G$ справедлива імплікація $(a \leq b) \Rightarrow (a+c \leq b+c)$.

Розглянемо для такої групи множину G_∞, що отримується приєднанням до G деякого елемента, який позначається $+\infty$. Ця множина наділяється:

1) відношенням лінійного порядку, в якому $+\infty$ є найбільшим елементом, тобто таким елементом, що $a < +\infty$ для всякого $a \in G$;

2) стуктурою комутативного моноїда, закон композиції якого індукується на G законом композиції заданої групи G і який визначається умовами

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad a + (+\infty) = +\infty \text{ для будь-якого } a \in G.$$

Очевидно, що цей закон є комутативний та асоціативний і з відношення $a \leq b$ в G_∞ випливає $a+c \leq b+c$ для всякого $c \in G_\infty$.

Означення 2.1. *Нехай A — деяке не обов'язково комутативне кільце, G — лінійно впорядкована комутативна група, операція в якій записується адитивно. Нормуванням кільця A із значеннями в групі G називається будь-яке відображення $\nu : A \to G_\infty$, що задовольняє наступним умовам:*

$$\begin{array}{lll} 1)\, \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) & \textit{для} & x, y \in A; \\ 2)\, \nu(x+y) \geq \inf(\nu(x), \nu(y)) & \textit{для} & x, y \in A; \\ 3)\, \nu(1) = 0 & \textit{та} & \nu(0) = +\infty. \end{array} \tag{1}$$

Наприклад, якщо кільце A не має ненульових дільників нуля, то єдине відображення ν_0 кільця A в G_∞, при якому $\nu_0(x) = 0$ для $x \neq 0$ та $\nu_0(0) = +\infty$, є нормуванням, що називається *невласним* нормуванням кільця G.

Якщо $z \in A$ — такий елемент, що $z^n = 1$ для деякого цілого $n \geq 1$, то в силу умови 1) (1) має місце рівність $0 = \nu(z^n) = n\nu(z)$. Оскільки G — лінійно впорядкована група, то $\nu(z) = 0$ для будь-якого нормування ν кільця A. Зокрема, $\nu(-1) = 0$, звідки $\nu(-x) = \nu(x)$ для всякого $x \in A$. Крім того, з умови 1) (1) випливає, що $\nu(xy) = \nu(yx)$, якими б не були $x, y \in A$. Якщо x — оборотний елемент кільця A, то $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$.

Нехай $\nu : A \to G_\infty$ — будь-яке нормування кільця A та $u : B \to A$ — гомоморфізм деякого кільця B в A. Неважко бачити, що композиція відображень $B \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\nu} G_\infty$ є нормуванням кільця B із значеннями в групі G.

Нехай ν — нормування не обов'язково комутативного кільця A. За індукцією легко показати, що для будь-яких елементів $x_i \, (1 \leq i \leq n)$ має місце співвідношення $\nu\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \inf\limits_{1 \leq i \leq n} \nu(x_i)$. Крім того, якщо існує єдиний індекс k, для якого $\nu(x_k) = \inf\limits_{1 \leq i \leq n} \nu(x_i)$, то це співвідношення становиться рівністю. Зокрема, якщо $\nu(x) \neq \nu(y)$, то $\nu(x + y) = \inf(\nu(x), \nu(y))$.

З умов 1) та 2) (1) випливає, що множина $\nu^{-1}(+\infty)$ елементів кільця A, норма яких дорівнює $+\infty$, являє собою двобічний ідеал I кільця A, не рівний A в силу умови 3) (1). Крім того, якщо $x, y \in A$, такі що $\nu(xy) = +\infty$, то з умови 1) (1) випливає, що $\nu(x) = +\infty$ або $\nu(y) = +\infty$. Таким чином, факторкільце A/I не має дільників нуля, відмінних від нуля. Оскільки $\nu(x + i) = \nu(x)$, де $i \in I$, то відображення $\overline{\nu} : A/I \to G_\infty$, що отримується з ν при переході до факторкільця, є нормуванням кільця A/I, та прообраз елемента $+\infty$ при цьому нормуванні зводиться до $\overline{0}$.

Твердження 2.2. *Нехай D — деяке не обов'язково комутативне тіло, ν — нормування тіла D із значеннями в групі G. Тоді*
(i) множина A тих елементів $x \in D$, для яких $\nu(x) \geq 0$, являє собою підкільце в D;
(ii) для будь-якого $a \geq 0$ з групи G множина V_a (відповідно множина V'_a) тих елементів $x \in A$, для яких $\nu(x) > 0$ (відповідно $\nu(x) \geq 0$), являє собою двобічний ідеал в A, та всякий ненульовий ідеал кільця A (лівий або правий) містить один з ідеалів V'_a;
(iii) множина $M(A)$ тих елементів $x \in A$, для яких $\nu(x) > 0$, є найбільшим ідеалом в A, не рівним A; множина $U(A) = A - M(A)$ являє собою сукупність оборотних елементів кільця A та $K(A) = A/M(A)$ є тілом (не обов'язково комутативним);
(iv) для всякого $x \in D - A$ справедливе включення $x^{-1} \in M(A)$.

Якщо $x \neq 0$ — елемент з A, то для будь-якого $y \in A$, такого, що $\nu(y) \geq \nu(x)$, можна записати $y = zx$ або $y = xz'$, де $z = yx^{-1}$, $z' = x^{-1}y$. Отже, $\nu(z) = \nu(z') = \nu(y) - \nu(x) \geq 0$, і тому $z \in A$. Тобто ідеал Ax або ідеал xA містить ідеали V'_a, де $a \geq \nu(x)$.

Приклад 2.3. *Будь-яке нормування скінченного поля F є невласним, тому що кожний елемент з F^* являє собою корінь з одиниці.*

Означення 2.4. *Кільце A (відповідно $M(A)$, $K(A)$) називається кільцем (відповідно ідеалом, тілом лишків) нормування ν на тілі D.*

Зрозуміло, що $U(A)$ є ядром гомоморфізму $\nu : D^* \to G$ і що образ $Im\,\nu(D^*)$ при гомоморфізмі ν мультиплікативної групи D^* є підгрупою адитивної групи G.

Ця група називається *групою порядків* або *групою значень* нормування ν. Вона ізоморфна групі $D^*/U(A)$.

Означення 2.5. *Говорять, що два нормування тіла еквівалентні, якщо вони мають одне й те саме кільце.*

Твердження 2.6. *Для того щоб два нормування ν, ν_1 на тілі D (не обов'язково комутативному) були еквівалентними, необхідно та достатньо, щоб існував ізоморфізм λ впорядкованої групи $\nu(D^*)$ на впорядковану групу $\nu_1(D^*)$, такий, що $\nu_1 = \lambda \circ \nu$.*

Означення 2.7. *Нехай D — тіло (не обов'язково комутативне), ν — нормування тіла D та G — група порядків нормування ν. Говорять, що нормування ν дискретне, якщо існує єдиний ізоморфізм μ впорядкованої групи G на групу $\mathbb{Z}$.*

Нехай g — елемент з G, який відповідає одиниці при цьому ізоморфізмі; всякий елемент π з D, для якого $\nu(\pi) = g$, називається *уніформізуючою* нормування ν. Дискретне нормування називається *нормованим*, якщо група порядків дорівнює $\mathbb{Z}$.

З того, що $\mu \circ \nu = \nu_1$ є нормуванням на тілі D, еквівалентним нормуванню ν на тілі D, випливає, що дискретне нормування ν_1 є нормованим, тобто $\nu_1(\pi) = 1$. Оскільки для будь-якого $x \in D^*$ існує ціле число $n \in \mathbb{Z}$, для якого $\nu_1(x) = n = \nu_1(\pi^n)$, то можна записати $x = z\pi^n = \pi^n z'$, де z, z' — оборотні елементи в A. Звідси випливає наступне твердження.

Твердження 2.8. *Нехай D — тіло (не обов'язково комутативне), ν — дискретне нормування тіла D, A — кільце нормування ν та π — уніформізуюча нормування ν. Ненульові ідеали кільця A є двобічними та мають вигляд $A\pi^n$ $(n \geq 0)$.*

Означення 2.9. *Кільцем дискретного нормування або дискретно нормованим кільцем називається будь-яке не обов'язково комутативне кільце A, яке можна так вкласти в деяке тіло D, наділене дискретним нормуванням ν, щоб $A = \{x \in D \,|\, \nu(x) \geq 0\}$.*

В якості приклада дискретно нормованого кільця можна взяти кільце формальних степеневих рядів $K[[x]]$ над полем K. Кільце $K[[x]]$ є кільцем головних ідеалів, і всі його ідеали утворюють спадний ланцюг

$$K[[x]] \supset (x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \ldots \supset (x^n) \supset \ldots, \text{ причому } \bigcap_{n=0}^{\infty} (x^n) = 0.$$

Ще прикладом дискретно нормованого кільця є кільце p-цілих чисел $\mathbf{Z}_{(p)}$, що є областю цілісності головних ідеалів, та всі його ідеали утворюють такий спадний ланцюг

$$\mathbf{Z}_{(p)} \supset (p) \supset (p^2) \supset (p^3) \supset \ldots \supset (p^n) \supset \ldots, \text{ причому } \bigcap_{n=0}^{\infty} (p^n) = 0.$$

Наведемо інше,еквівалентне попередньому, означення нормування тіла та дискретно нормованого кільця.

Означення 2.10. *Нехай $\mathcal{D}$ — тіло. Дискретною нормою на D називається функція $\nu\colon D^* \to \mathbb{Z}$, яка задовольняє умовам:*

(i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ для всіх $x, y \in D*$;

(ii) ν — сюр'єктивне;

(iii) $\nu(x+y) \geqslant \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ для всіх $x, y \in D*$ таких, що $x + y \neq 0$.

Множина $\mathcal{O} = \{x \in D^* : \nu(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$, яка є підкільцем $\mathcal{D}$, називається кільцем нормування ν.

Розглянемо множину $M = \{x \in \vartheta : \nu(x) > 0\}$. Легко показати, що M — максимальний ідеал в $\mathcal{O}$.

Область (не обов'язково комутативна) $\mathcal{O}$ називається дискретно нормованим кільцем, якщо існує нормування ν на його тілі часток, таке що $\mathcal{O}$ є кільцем нормування ν.

Приклад 2.11. *Нехай K — поле, і $\sigma\colon K \to K$ нетривіальний автоморфізм поля K. Тоді кільце $K[[x,\sigma]]$ з добутком, визначеним за правилом $xa = \sigma(a)x$ та його наслідками:*

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_i x^i\right) = \left(\sum a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}\right)$$

є некомутативним дискретно нормованим кільцем. Це кільце називається кільцем косих формальних степеневих рядів.

Твердження 2.12. *Нехай $\mathcal{O}$ дискретно нормоване кільце з нормуванням ν і тілом часток $\mathcal{D}$. Нехай π будь-який елемент $\mathcal{O}$ з $\nu(\pi) = 1$. Тоді*

1. *Ненульовий елемент $u \in \mathcal{O}$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $\nu(u) = 0$.*
2. *Кожний ненульовий елемент $r \in \mathcal{O}$ може бути записаний у вигляді $r = u\pi^n = \pi^n \upsilon$ для деяких оборотних елементів $u, \upsilon \in \mathcal{O}^*$ і деякого $n \geqslant 0$. Кожен ненульовий елемент $x \in \mathcal{D}^*$ може бути записаний у вигляді $x = u\pi^n = \pi^n \upsilon$ для деяких оборотних елементів $u, \upsilon \in \mathcal{O}^*$ і деякого $n \in \mathbb{Z}$.*
3. *Кожен ненульовий правий (лівий) ідеал кільця $\mathcal{O}$ є правим (лівим) головним ідеалом вигляду $\pi^n\mathcal{O}$ $(\mathcal{O}\pi^n)$ для деякого $n \geqslant 0$.*
4. *Якщо $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$, тоді $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \pi^n\mathcal{O} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\pi^n = 0$.*

Доведення. 1. Нехай $u \in \mathcal{O}^*$. Тоді існує елемент $\upsilon \in \mathcal{O}$, такий що $u\upsilon = 1$, звідки $0 = \nu(u\upsilon) = \nu(u) + \nu(\upsilon)$. Оскільки $\nu(u), \nu(\upsilon) \geqslant 0$, маємо $\nu(u) = \nu(\upsilon) = 0$.

Навпаки, нехай $u \neq 0$ та $\nu(u) = 0$. Тоді для $u^{-1} \in \mathcal{D}$ маємо $\nu(u^{-1}) = \nu(\upsilon) = 0$. Тому $u^{-1} \in \mathcal{O}$, а, отже, u є оборотним в $\mathcal{O}$.

2. Припустимо $x \in \mathcal{O}$ і $\nu(x) = n$, тоді $\nu(x\pi^{-n}) = \nu(x) + \nu(\pi^{-n}) = 0$. З цього випливає, що $x\pi^{-n} = u$ є оборотним і $x = u\pi^n$. Аналогічно, $\pi^{-n}x = \upsilon \in \mathcal{O}^*$ і тоді $x = \pi^n\upsilon$. Якщо $x \in \mathcal{D}^*$, тоді $x = ab^{-1}$, де $a, b \in \mathcal{O}$. Нехай $a = u\pi^n = \pi^n u_1$ і $b = \upsilon\pi^m = \pi^m\upsilon_1$, де $u, \upsilon, u_1, \upsilon_1 \in \mathcal{O}*$. Тоді $x = \omega\pi^{n-m}$, де $\omega \in \mathcal{O}^*$ і $n - m \in \mathbb{Z}$.

3. Нехай I — правий ідеал в $\mathcal{O}$, і нехай $x \in \mathcal{O}$ – елемент з мінімальним значенням $\nu(x)$. Якщо $\nu(x) = n$, то $x = \pi^n\upsilon$, де υ є оборотним. З цього випливає, що $\pi^n \in I$ і також $\pi^n\mathcal{O} \subset I$. Нехай a — довільний елемент в I, тоді $\nu(a) \geqslant n$. З $\nu(a\pi^{-n}) \geqslant 0$ отримуємо $\nu(a\pi^{-n}) \in \mathcal{O}$ та $a \in \pi^n\mathcal{O}$. Тому $I = \pi^n\mathcal{O}$. Аналогічно,

будь-який лівий ідеал в $\mathcal{O}$ є головним і має вигляд $\mathcal{O}\pi^n$ для деякого $n \geqslant 0$. Зокрема, оскільки $\pi \in M$, маємо що $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ є двостороннім головним ідеалом в $\mathcal{O}$. З того, що будь-який ідеал $\mathcal{O}$ міститься в M і будь-який елемент, який не міститься в M є оборотним, ми отримуємо, що $\mathcal{O}$ є локальним кільцем з радикалом M.

4. Припустимо, що $I = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \pi^n\mathcal{O} \neq 0$. Тоді існує ненульовий елемент $a \in I$. Згідно властивості 3 існують $n \geqslant 0$ і $u \in \mathcal{O}^*$, такі що $a = \pi^n u$. З того, що $a \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \pi^n\mathcal{O}$, $a \in \pi^{n+1}\mathcal{O}$, тобто існує $v \in \mathcal{O}^*$ таке, що $a = \pi^{n+1}v$. Тоді $a = \pi^n u = \pi^{n+1}v$, звідки $\pi^n(u - \pi v) = 0$. З того, що $\mathcal{O}$ є областю, маємо $u - \pi v = 0$. Тому $u = \pi v \in M$. Отримуємо протиріччя. Отже, $a = 0$. Аналогічно, можна довести, що $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\pi^n = 0$. □

Елемент $\pi \in M$ з $\nu(t) = 1$ і $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ називається уніформізованим параметром чи простим елементом $\mathcal{O}$ і визначає однозначний добуток одиниці.

З цього твердження ми отримуємо багато властивостей дискретно нормованих кілець, які будуть сформульовані як наступні твердження:

Наслідок 2.13. *Нехай $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце. Тоді*

1. $\mathcal{O}$ є правою та лівою областю головних ідеалів.

2. $\mathcal{O}$ локальне кільце з радикалом $M = \{x \in \mathcal{O} \,|\, \nu(x) > 0\}$, який є двостороннім головним ідеалом вигляду $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ і будь-який ненульовий правий (лівий) ідеал $\mathcal{O}$ має вигляд $\pi^n\mathcal{O}$ $(\mathcal{O}\pi^n)$ для деякого цілого $n \geqslant 0$.

3. $\mathcal{O}$ є нетеровим кільцем.

4. $\mathcal{O}$ є спадковим кільцем.

Наступне твердження дає властивості, які можуть бути використаними як інші еквівалентні означення дискретно нормованого кільця без використання поняття нормування.

Теорема 2.14. *Наступні властивості кільця $\mathcal{O}$ є еквівалентними:*

1. $\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем.

2. $\mathcal{O}$ є правою та лівою областю головних ідеалів, яка є також локальним кільцем з радикалом $M \neq 0$.

3. $\mathcal{O}$ є локальною нетеровою областю з радикалом $M \neq 0$, яка є двостороннім головним ідеалом.

4. $\mathcal{O}$ є локальним нетеровим кільцем з радикалом вигляду $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ та $\pi \in \mathcal{O}$ не є нільпотентним.

Доведення. Імплікація 1⇒2 були доведена вище. Імплікації 2⇒3 та 3⇒4 є тривіальними.

4⇒1. Нехай $\mathcal{O}$ — локальне нетерове справа кільце з радикалом вигляду $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$. Доведемо, що $I = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\pi^n = 0$. Зауважимо, що $\mathcal{O}\pi^n \neq \mathcal{O}\pi^{n+1}$ для всіх $n \geqslant 0$, бо інакше за лемою Накаями ми отримуємо $M^n = \mathcal{O}\pi^n = 0$ і тоді $\pi^n = 0$. Припустимо, що $I \neq 0$. Тоді існує ненульовий елемент $a \in I$. Якщо $a = b\pi^n = c\pi^{n+1}$, тоді $(b - c\pi)\,\pi^n = 0$. Якщо b оборотний, то $(b - c\pi)$ також необоротний. Тому $\pi^n = 0$. З того що π не є нільпотентним, ми отримуємо протиріччя. Таким чином b є необоротним, і, оскільки $\mathcal{O}$ є локальним кільцем, то $b \in M$. Таким чином, існує послідовність ненульових елементів $a_1, a_2, \ldots$ таких що $a = a_1\pi = a_2\pi^2 = \ldots = a_n\pi^n = \ldots$ і $a_n = a_{n+1}\pi$ для всіх $n > 0$. Розглянемо зростаючу послідовність правих ідеалів

$$a_1\mathcal{O} \subset a_2\mathcal{O} \subset \cdots \subset a_n\mathcal{O} \subset a_{n+1}\mathcal{O} \subset \cdots.$$

Оскільки $\mathcal{O}$ — нетерове справа кільце, то ця послідовність стабілізується, тобто існує $n > 0$, таке що $a_n\mathcal{O} = a_{n+1}\mathcal{O}$. Тоді $a_{n+1} = a_n x = a_{n+1}\pi x$ або $a_{n+1}(1-\pi x) = 0$. Оскільки $(1-\pi x)$ є оборотним в $\mathcal{O}$, ми отримуємо $a_{n+1} = 0$ і $a = 0$.

Таким чином, $I = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}\pi^n = 0$. Оскільки $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ є максимальним ідеалом в $\mathcal{O}$, то для будь-якого $x \in \mathcal{O}$ існує ціле число $n \geqslant 0$ таке, що $x \in \pi^n\mathcal{O}$ і $x \notin \pi^{n+1}\mathcal{O}$. Покладемо $n = \nu(x)$. Тоді будь-який елемент $a \in \mathcal{O}$ може бути однозначно записаний у вигляді $x = \pi^{\nu(x)}\varepsilon = \varepsilon'\pi^{\nu(x)}$, де $\varepsilon, \varepsilon'$ є оборотними в $\mathcal{O}$. Якщо $x = \pi^n u$ і $y = \pi^m v$, де $u, v \in \mathcal{O}^*$, то $xy = \pi^{n+m}\omega$, де $\omega \in \mathcal{O}^*$. Тоді, зокрема, ми отримуємо, що $\mathcal{O}$ є областю. Тому вона має класичне кільце часток D, яке є тілом і ми можемо припустити, що $\mathcal{O}$ є вкладеним в D. Будь-який елемент D має вигляд ab^{-1}, де $a, b \in \mathcal{O}$ і b є регулярним елементом кільця $\mathcal{O}$. Тому можемо покласти $\nu(ab^{-1}) = \nu(a) - \nu(b)$. Визначена таким чином Функція ν є нормуванням на D і тоді $\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем. ☐

Лема 2.15. *Нехай M — скінчено породжений A-модуль. Якщо він має єдиний максимальний підмодуль, тоді M — циклічний модуль.*

Доведення. Нехай M — скінченно породжений A-модуль і N його єдиний максимальний підмодуль. Можемо вибрати елемент $x \in M$ та $x \notin N$. Тоді $xA \subset M$ і $xA \not\subset N$. Оскільки N — єдиний максимальний підмодуль в M, то отримуємо $xA = M$, тобто M є циклічним. ☐

Теорема 2.16. *Нехай $\mathcal{O}$ — локальне первинне нетерове справа кільце. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. *$\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем.*
2. *$\mathcal{O}$ є максимальний (за включенням) порядок в його класичному кільці часток Q, і цоколь правого $\mathcal{O}$- модуля $Q/\mathcal{O}$ не є рівним нулю.*

Доведення. 1⇒2 є тривіальним.

2⇒1. За теоремою Голді Q є простим кільцем. Зауважимо, що радикал кільця R $\mathcal{O}$ містить регулярний елемент, тому що інакше $\mathcal{O} = Q$, що суперечить умові теореми. Нехай M — мінімальний $\mathcal{O}$- підмодуль в Q. Припустимо, що M має максимальний підмодуль X в Q, який є відмінним від $\mathcal{O}$. Тоді $X \cap \mathcal{O} = R$ і $XR \subset R$. Тому $\mathcal{O} \subset S = \{x \in Q \,|xR \subset R\}$ і це включення є строгим. З цього випливає, що $S = Q$. Оскільки R містить регулярний елемент, то $Q = \mathcal{O}$. Отримуємо суперечність. Отже, M має єдиний максимальний підмодуль $\mathcal{O}$ і за лемою 2.15 модуль M є циклічним модулем, тобто $M = m\mathcal{O}$. Оскільки $\mathcal{O} \subset m\mathcal{O}$, m є регулярним елементом і $R = m^{-1}\mathcal{O}$. Позначимо $\pi = m^{-1}$. Оскільки $\mathcal{O}$ є максимальним порядком, то $R = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ є двостороннім головним ідеалом і π не є нільпотентним. Застосовуючи теорему 2.14 отримуємо, що $\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем. ☐

Наслідок 2.17. *Нехай $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ різні локальні нетерові справа порядки в тілі D, які задовольняють умові 2 теореми 2.16. Тоді $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = D$, де*

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = \left\{ \sum a_i b_i \,|a_i \in \mathcal{O}_1, b_i \in \mathcal{O}_2 \right\}.$$

Теорема 2.18. *Якщо A — локальне спадкове нетерове кільце, то A є або тілом або дискретно нормованим кільцем.*

Доведення. Нехай A — локальне спадкове нетерове кільце з радикалом R. За твердженням 1.8 A є областю. Звідси якщо $R = 0$, то A є тілом. Припустимо, що $R \neq 0$. Оскільки A є нетеровим спадковим кільцем, то R є скінченно породженим проективним A- модулем і за теоремою 1.9 R є скінченно породженим вільним A-модулем, тобто $R \simeq A^n$. Оскільки A є областю, ми отримуємо що $R \simeq A$, тобто R є головним правим і лівим ідеалом. За теоремою 2.14 A є дискретно нормованим кільцем. □

3 Підйом ідемпотентів. Напівдосконалі кільця.

Означення 3.1. *Ідемпотент $e \in A$ називається локальним, якщо кільце eAe локальне.*

Звичайно, локальний ідемпотент є завжди примітивним ідемпотентом.

Нехай A — напівлокальне кільце. Тоді фактор кільце $\bar{A} = A/R$ може бути розкладене в пряму суму мінімальних правих ідеалів: $\bar{A} = \bar{e}_1\bar{A} \oplus ... \oplus \bar{e}_n\bar{A}$. Оскільки всі кільця e_iAe_i є тілами, всі ідемпотенти $\bar{e}_i$ є локальними. Виникає природне запитання: чи можна за розкладом $\bar{A}$, побудувати розклад кільця $A = e_1A \oplus ... \oplus e_nA$ так, щоб $e_i + R = \bar{e}_i$.

Приклад кільця $Z_{(q)}$ показує, що це можна зробити не завжди. Проте існує багато важливих випадків, коли це можливо. Говорять, що ідемпотенти можна підняти за модулем ідеалу I кільця A, якщо з того, що $g^2 - g\ inI$, де $g \in A$, випливає існування ідемпотента $e^2 = e \in A$, такого що $e - g \in I$.

Твердження 3.2. *Ідемпотенти можна піднімати за модулем будь-якого ніль-ідеалу I кільця A.*

Доведення. Нехай $g^2 - g \in I$ і покладемо $r = g^2 - g$, $g_1 = g = r - 2gr$. Очевидно, що $gr = rg$. Обчислюючи $g_1^2 - g_1$, отримаємо: $g^2 + r^2 + 4g^2r^2 + 2gr - 4g^2r - 4gr^2 - g - r + 2gr = r^2 + 4g^2r^2 + 4gr - 4g^2r - 4gr^2 = r^2 - 4r^3 - 4r^2 = r^2(4r - 3)$.

Покладаючи $r_1 = r^2(4r - 3) \in I$ та $g_2 = g_1 + r_1 - 2g_1r_1$, отримаємо, що $r_2 = g_2^2 - g_2 = r_1^2(4r_1 - 3)$, тобто у виразі r_2 елемент r^4 входить у вигляді співмножника. Оскільки $r^k = 0$ для деякого цілого $k > 0$, продовжуючи цей процес ми отримаємо, що $r_n = 0$ для деякого n, тобто $g_n^2 = g_n$. Оскільки $g_1 - g \in I$ та $g_i - g_{i-1} \in I$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$, маємо, що $g_n = e$ — ідемпотент, причому $g - e \in I$. □

З цього твердження маємо наступний наслідок.

Наслідок 3.3. *Ідемпотенти можна піднімати за модулем радикалу артінового кільця.*

Якщо ми маємо пару ортогональних ідемпотентів g_1+I та g_2+I в A/I, які піднімаються до ідемпотентів $e_1, e_2 \in A$, то це не гарантує, що e_1, e_2 будуть ортогональними. В випадку ніль-ідеалів ортогональність ідемпотентів може бути збереженою.

Лема 3.4. *Нехай $I \subseteq R$ ідеал кільця A з радикалом R таким, що ідемпотенти в A/I можуть бути піднятими за модулем ідеалу I. Якщо $g^2 = g \in A$ та $u^2 - u \in I$, ug, $gu \in I$, тоді існує ідемпотент $e \in A$ такий що $e - u \in I$ та $eg = ge = 0$.*

Доведення. Нехай $u^2 - u \in I$, $g^2 = g \in I$ і $ug, gu \in I$. За твердженням 3.2 існує ідемпотент $f^2 = f \in A$ такий, що $f - u \in I$. Оскільки ug, $gu \in I$, то маємо $fg, gf \in I$. З $I \subseteq R$ випливає, зокрема, що $1 - fg$ є оборотним елементом кільця A. Розглянемо елемент $h = (1 - fg)^{-1} f (1 - fg)$. Зрозуміло, що h є ідемпотентом кільця A і $hg = 0$. Помноживши h зліва на $1 - fg$, отримуємо $h - f = fg - fgh \in I$.

Покладемо $e = h - gh = (1 - g)\, h$. Очевидно, що $ge = 0 = eg$. Оскільки $e - f = h - gh - f \in I$ і $f - u \in I$, то маємо $e - u\ inI$. З іншого боку $e^2 = (1 - g)\, h\, (1 - g)\, h = (1 - g)h = e$, тобто e є ідемпотентом кільця A і $e - u \in I$, що й треба було довести. □

Твердження 3.5. *Нехай $I \subseteq R$ — ідеал кільця A з радикалом R таким, що ідемпотенти в A/I можуть бути підняті за модулем ідеалу I. Тоді для будь-якої скінченої чи зліченої множини попарно ортогональних ідемпотентів $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ в A таких що $u_i u_j - \delta_{ij} u_i \in I$, існує множина попарно ортогональних ідемпотентів $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ в A таких, що $e_i - u_i \in I$ і $e_i e_j - \delta_{ij} e_i$ для всіх i, j.*

Доведення. Припустимо, що ми вже знайшли елементи $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$, які задовольняють умовам твердження. Досить показати, як знайти елемент e_k. Покладемо $g = e_1 + e_2 + ... + e_{k-1}$.

Очевидно, $g^2 = g$ та $gu_k, u_k g \in I$. Тоді за лемою 3.4 існує ідемпотент $e_k^2 = e_k \in A$ такий, що $e_k - u_k \in I$ та $ge_k = e_k g = 0$.

Тоді $e_k e_i = e_i e_k = 0$ для всіх $i < k$. Оскільки $u_k \notin I$, то маємо $e_k \neq 0$. □

Означення 3.6. *Напівлокальне кільце A називається напівдосконалим, якщо ідемпотенти можна піднімати за модулем радикалу R кільця A.*

Напівдосконалі кільця були введені Бассом в 1960 році. За наслідком 3.3 ми отримуємо наступну теорему.

Теорема 3.7. *Артінове кільце є напівдосконалим.*

Наведемо два критерії для напівдосконалих кілець. Для цього нам потрібна наступна лема.

Лема 3.8. *Нехай кільце A має два різні розклади в пряму суму правих ідеалів: $A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A = f_1 A \oplus \cdots \oplus f_n A$ (де $1 = e_1 + ... + e_n = f_1 + ... + f_n$ — два розклади $1 \in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів), і нехай при відповідній нумерації $e_i A \simeq f_i A \quad (i = 1, ..., n)$. Тоді існує оборотний елемент $a \in A$ такий, що $f_i = a e_i a^{-1}$.*

Доведення. Ізоморфізм $e_i A \simeq f_i A$ задається множенням зліва на деякий елемент $a_i \in f_i A e_i$. Тоді $f_i a_i = a_i e_i = a_i$. Покладемо $a = a_1 + ... + a_n$. Очевидно, що $ae_i = a_i$ та $f_i a = a_i$. Розглянемо елементи $b_i \in e_i A f_i$, які здійснюють зворотні ізоморфізми. Покладемо $b = b_1 + ... + b_n$. Тоді $e_i b = b_i = b f_i$ та $a_i b_i = f_i$, $b_i a_i = e_i$. Зрозуміло, що $ab = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 1$ та $ba = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$, тобто $b = a^{-1}$. Оскільки $ae_i = f_i a$, то маємо $f_i = a e_i a^{-1}$. □

Теорема 3.9. *Кільце A є напівдосконалим тоді і тільки тоді, коли його можна розкласти в пряму суму правих ідеалів, кожен із яких має тільки один максимальний підмодуль.*

Доведення. Нехай $\bar{A} = A/R = \bar{e}_1\bar{A} \oplus \cdots \oplus \bar{e}_n\bar{A}$ — розклад $\bar{A}$ в пряму суму мінімальних правих ідеалів. Оскільки кільце A напівдосконале, то для кожного ідемпотента $\bar{e}_i$ існує ідемпотент e_i такий що $e_i + R = \bar{e}_i$. Позначимо $\bar{e}_i\bar{A} = U_i$ та $P_i = e_iA$. Оскільки R — двосторонній ідеал, то $P_i \cap R = P_iR$ і тоді за першою теоремою про ізоморфізм $(P_i + R)/R \simeq P_i/P_iR \simeq U_i$. Тому кожен модуль P_i має тільки один максимальний підмодуль. Нехай $P = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i$. Очевидно, існує епіморфізм $\varphi\colon P \to \bar{A}$. Позначимо через π натуральну проекцію A на $\bar{A}$. Оскільки модуль P проективний, існує гомоморфізм $\psi\colon P \to A$ такий що $\pi\psi = \varphi$. Легко бачити, що $\mathrm{Im}\ \psi + R = A$. За лемою Накаями $\mathrm{Im}\ \psi = A$. Покажемо, що $X = \mathrm{Ker}\ \psi = 0$. Позаяк модуль A проективний, то маємо $P \simeq \mathrm{Im}\ \psi \oplus \mathrm{Ker}\ \psi = A \oplus \mathrm{Ker}\ \psi$. Очевидно, що $P/PR \simeq \bar{A}$. З іншого боку, $P/PR \simeq \bar{A} \oplus X/XR$. За теоремою Крулля –Шмідта для напівпростих модулів модуль X/XR є рівним нулю. Оскільки модуль X скінченно породжений як образ P, то за лемою Накаями $X = 0$, тобто ψ є ізоморфізмом. Тому A розкладається в пряму суму правих ідеалів $\psi(e_iA)$, кожен з яких має тільки один максимальний підмодуль.

Навпаки, нехай $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ — розклад кільця A в пряму суму правих ідеалів, кожен з яких має рівно один максимальний підмодуль. Тоді $R = radP_1 \oplus ... \oplus radP_n$, звідки випливає, що $\bar{A} = A/R$ напівпросте справа кільце. Нехай $1 = f_1 + ... + f_n$ — розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, таких що $P_i = f_iA$ $(i = 1, ..., n)$. Покажемо, що для будь-якого ідемпотента $\bar{e}^2 = e \in \bar{A}$ існує ідемпотент $e \in A$ такий, що $e + R = \bar{e}$. Правий ідеал $\bar{e}\bar{A}$ є напівпростим як правий модуль над напівпростим кільцем $\bar{A}$. Тому існує розклад $\bar{1} \in \bar{A}$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів $\bar{1} = \bar{e}_1 + ... + \bar{e}_n$ такий, що $\bar{e} = \bar{e}_1 + ... + \bar{e}_s$ та всі модулі $\bar{e}_i\bar{A}$ є простими. З іншого боку, нехай $\bar{1} = \bar{f}_1 + ... + \bar{f}_n$ — розклад $\bar{1} \in \bar{A}$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів, таких що модулі $\bar{f}_i\bar{A}$ є простими. За теоремою Крулля – Шмідта для напівпростих модулів для відповідної нумерації маємо $\bar{e}_i\bar{A} \simeq \bar{f}_iA\,(i = 1, ..., n)$. За лемою 3.8 існує елемент $\bar{a} \in \bar{A}$ такий що $\bar{e}_i = \bar{a}^{-1}\bar{f}_i\bar{a}$ $(i = 1, ..., n)$. Нехай $\bar{a}$ — образ елемента a і $\bar{a}^{-1}$ — образ $b = a^{-1}$. Очевидно, що $ab = 1 + r$, де $r \in R$. Оскільки $(1 + r)x = 1$, то маємо $x = 1 - rx = 1 - r_1$, де $r_1 \in R$. Тому $b(1 - r_1) = a^{-1}$ і, більше того, образ елемента a^{-1} при епіморфізмі π співпадає з $\bar{a}^{-1}$. Тому $\pi(e) = \sum \pi\left(a^{-1}f_ia\right) = \sum \bar{a}^{-1}\bar{f}_i\bar{a} = \bar{e}$. Теорема доведена. ☐

Теорема 3.10. *(Мюллера) Кільце A є напівдосконалим тоді і тільки тоді, коли $1 \in A$ розкладається в суму скінченого числа попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Доведення. Нехай кільце A напівдосконале. За теоремою 3.9 $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$, де $e_1, ..., e_n$ — ідемпотенти і кожен правий ідеал $P_i = e_iA\,(i = 1, ..., n)$ має тільки один максимальний підмодуль. Тоді $\mathrm{Hom}(P_i, P_i) \simeq e_iAe_i$ і для будь-якого гомоморфізму $\psi\colon P_i \to P_i$ або $\mathrm{Im}\ \psi = P_i$ або $\mathrm{Im}\ \psi \subseteq P_iR$. В першому випадку, оскільки P_i проективний, маємо $P_i = \mathrm{Im}\ \psi \oplus \mathrm{Ker}\ \psi$, звідки випливає $\mathrm{Ker}\ \psi = 0$ і тоді ψ є автоморфізмом. У другому випадку ψ є необоротним елементом і, очевидно, всі необоротні елементи утворюють ідеал. За твердженням 1.2 кільце e_iAe_i є локальним.

Навпаки, нехай $\pi\colon A \to \bar{A}$ натуральна проекція кільця A на кільце $\bar{A} = A/R$ (R — радикал кільця A). Позначимо $\pi(a) = \bar{a}$. Нехай e — локальний ідемпотент кільця A. Покажемо, що модуль $\pi(eA) = \bar{e}\bar{A}$

є простим. Припустимо, що кільце A не є локальним (локальне кільце є, очевидно, напівдосконалим). Розглянемо модуль $(\bar{1}-\bar{e})\,\bar{A}$. Оскільки він є власним правим ідеалом в кільці $\bar{A}$, то він міститься в максимальному правому ідеалі $\bar{I}$ кільця $\bar{A}$. Покажемо, що $\bar{e}\bar{A}\cap\bar{I}=0$. Якщо це не так, тоді $\left(\bar{e}\bar{A}\cap\bar{I}\right)^2\neq 0$, оскільки $\bar{A}$ є напівпримітивним кільцем і тому в ньому немає нільпотентних правих ідеалів. Тоді існує елемент $\bar{e}\bar{a}\in\bar{I}$ і $\bar{e}\bar{a}\bar{e}\neq 0$. Оскільки кільце eAe є локальним і $\mathrm{rad}(eAe)=eR\,e$, отримуємо, що кільце $\bar{e}\bar{A}\bar{e}$ є тілом. Тоді існує елемент $\bar{e}\bar{x}\bar{e}\in\bar{e}\bar{A}\bar{e}$ такий, що $\bar{e}\bar{a}\bar{e}\bar{x}\bar{e}=\bar{e}$. Тому $\bar{e}\in\bar{I}$, а, отже, $\bar{1}\in\bar{I}$. Отримали протиріччя. Таким чином, $\bar{e}\bar{A}\cap\bar{I}=0$ і $\bar{A}=\bar{e}\bar{A}\oplus\bar{I}$. Оскільки $\bar{I}$ є максимальним ідеалом в кільці $\bar{A}$, то модуль $\bar{e}\bar{A}$ є простим. Теорема доведена. ☐

Наслідок 3.11. *Напівдосконале кільце A є FD-кільцем.*

Доведення. Доведення випливає з теореми Мюллера. ☐

Як наслідок з цього твердження маємо наступну теорему.

Теорема 3.12. *Будь-яке напівдосконале кільце A однозначно розкладається в скінченний прямий добуток нерозкладних кілець, тобто, якщо $A=B_1\times B_2\times\cdots\times B_s=C_1\times C_2\times\cdots\times C_t$ два різних розклади, тоді $s=t$ і існує перестановка σ чисел $\{1,2,...,n\}$ така, що $B_i=C_{\sigma(i)}$ для $i=1,2,...,t$.*

Наслідок 3.13. *Нехай A — напівдосконале кільце, $e^2=e\in A$. Тоді кільце eAe є напівдосконалим.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 3.10. ☐

Приклади.

1. Нехай $p_1,p_2,...,p_n$ — прості числа (не обов'язково різні), $\mathbb{Z}_{(p_i)}$ — кільце p_i-цілих чисел, і нехай $\mathbb{Q}$ — кільце раціональних чисел. Тоді кільце вигляду
$$A=\begin{pmatrix}\mathbb{Z}_{(p_1)} & \mathbb{Q} & \dots & \mathbb{Q}\\ 0 & \mathbb{Z}_{(p_2)} & \dots & \mathbb{Q}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{Z}_{(p_n)}\end{pmatrix}$$
є напівдосконалим кільцем.
2. Будь-який скінчений прямий добуток локальних кілець є напівдосконалим.
3. Комутативне кільце є напівдосконалим тоді і тільки тоді, коли воно є скінченим прямим добутком комутативних локальних кілець.
4. Нехай $\mathcal{O}$ — локальне кільце. Тоді $A=M_n(\mathcal{O})$ є напівдосконалим кільцем.
5. Якщо $\mathcal{O}$ — напівдосконале кільце, тоді таким є кільце $A=M_n(\mathcal{O})$.
6. Кільце цілих чисел $\mathbb{Z}$ не є напівдосконалим.

7. Кільце поліномів $k[x]$ також не є напівдосконалим.

Нехай A — напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R.

Оскільки кільце $\bar{A} = A/R$ є напівпростим артіновим, то за теоремою Веддерберна-Артіна маємо $\bar{A} = A/R = M_{n_1}(\mathcal{D}_1) \times \ldots \times M_{n_s}(\mathcal{D}_s)$, де $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \ldots, s$, є деякими тілами. В цьому випадку кожний простий A-модуль є простим як $\bar{A}$-модуль.

Нехай $\bar{1} = \bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_s$ — розклад одиниці $\bar{1} \in \bar{A}$ у суму центральних ідемпотентів, таких, що $\bar{f}_i\bar{A} = \bar{A}\bar{f}_i = M_{n_i}(\mathcal{D}_i)$. Тоді існує розклад $1 = f_1 + \ldots + f_s$, де $\bar{f}_i = f_i + R$ та $f_i f_j = \delta_{ij} f_i$, $i, j = 1, \ldots, s$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Позначимо через M^n пряму суму n екземплярів A-модуля M і покладемо $M^0 = 0$.

Розглянемо правий регулярний модуль $A_A = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} f_i A$.
Зрозуміло, що $f_i A = P_i^{n_i}$, де P_i є нерозкладним проективним правим A-модулем (головним правим A-модулем). Тобто $A_A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$, де $P_1, \ldots, P_s$ попарно неізоморфні.

Аналогічно, ${}_AA = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} Af_i$, де $Af_i = Q_i^{n_i}$ та Q_i є нерозкладним проективним лівим A-модулем (головним лівим A-модулем). Маємо ${}_AA = Q_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus Q_s^{n_s}$ та $Q_1, \ldots, Q_s$ є попарно неізоморфними.

Кожний головний правий (відповідно лівий) A-модуль має вигляд eA (відповідно Ae), де e — локальний ідемпотент.

Означення 3.14. *Напівдосконале кільце A називається зведеним, якщо A/R є прямим добутком тіл.*

Це еквівалентне тому, що в розкладі кільця A в пряму суму головних правих A-модулів нема ізоморфних модулів.

Кожне напівдосконале кільце $A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ еквівалентне у розумінні Моріти зведеному кільцю $B = End_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s)$.

Означення 3.15. *Елемент $a \in A$ називається центральним за модулем R, якщо $a + R$ належить центру кільця A/R.*

Означення 3.16. *Ідемпотент $f \in A$ називають канонічним, якщо*
$\bar{f}\bar{A} = \bar{A}\bar{f} = M_{n_k}(\mathcal{D}_k)$ при деякому $k = 1, \ldots, s$; $\bar{f} = f + R$.

Тобто f є мінімальним центральним за модулем R ідемпотентом.

Означення 3.17. *Розклад $1 = f_1 + \ldots + f_s$ у суму попарно ортогональних канонічних ідемпотентів називають канонічним розкладом одиниці кільця A.*

Нехай I — (двобічний) ідеал кільця A та $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — канонічний розклад одиниці $1 \in A$. Тоді $I = \bigoplus\limits_{i,j=1}^{s} I_{ij}$, де $I_{ij} = f_i I f_j$, $i, j = 1, \ldots, s$. Один канонічний пірсовський розклад ідеалу I може бути отриманий з іншого розкладу одночасною перестановкою рядків і стовпчиків та заміною кожної пірсовської компоненти I_{ij} на компоненту $aI_{ij}a^{-1}$, де a — деякий оборотний елемент кільця A. Зокрема, для A та R маємо такі канонічні пірсовські розклади:

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{s} A_{ij}, \; R = \bigoplus_{i,j=1}^{s} R_{ij},$$

де $R_{ij} = A_{ij}$ для $i \neq j$ та R_{ii} є радикалом Джекобсона кільця A_{ii}, $i = 1, \ldots, s$.

Нехай M є правим A-модулем, а N — лівим A-модулем. Покладемо $top\, M = M/MR$ та $top\, N = N/RN$. Позначимо $U_i = top\, P_i$, $V_i = top\, Q_i$, $i = 1, \ldots, s$, де $P_1, \ldots, P_s$ $(Q_1, \ldots, Q_s)$ — це з точністю до ізоморфізму всі нерозкладні праві (ліві) проективні A-модулі, а $U_1, \ldots, U_s$ $(V_1, \ldots, V_s)$ складають множину представників класів ізоморфізму всіх простих правих (лівих) A-модулів. Тоді $P_i = P(U_i)$ $(Q_i = P(V_i))$ є проективним накриттям модуля $U_i\,(V_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Проективне накриття скінченнопородженого модуля M над напівдосконалим кільцем A будується наступним чином. Оскільки M/MR є модулем над напівпростим артіновим кільцем $\bar{A} = A/R$, то $\bar{M} = M/MR$ ізоморфний скінченній прямій сумі простих A-модулів: $\bar{M} = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} U_j^{m_j}$. Отже, $P(M) = P(\bar{M}) = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} P(U_j)^{m_j} = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} P_j^{m_j}$.

Лема 3.18. *Нехай $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — канонічний розклад одиниці $1 \in A$. Тоді для кожного простого правого A-модуля U_i та для кожного f_j виконуються рівності $U_i f_j = \delta_{ij} U_i$, $i, j = 1, \ldots, s$. Аналогічно, для кожного лівого A-модуля V_i та для кожного f_j, $f_j V_i = \delta_{ij} V_i$, $i, j = 1, \ldots, s$.*

Лема 3.19. *Нехай A — напівдосконале кільце, e та f — ненульові ідемпотенти кільця A, такі, що $\bar{e} = \bar{f} \in \bar{A}$. Тоді існує оборотний елемент $a \in A$, такий, що $f = aea^{-1}$.*

Доведення. Позначимо $W_1 = \bar{e}\bar{A} = \bar{f}\bar{A}$. Очевидно, eA та fA є проективними накриттями напівпростого A-модуля W_1. Тому вони ізоморфні. Модулі $(1-e)A$ та $(1-f)A$ є проективними накриттями напівпростого A-модуля $W_2 = (\bar{1} - \bar{f})\bar{A} = (\bar{1} - \bar{e})\bar{A}$. Отже, вони також є ізоморфними. Позначимо $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e$ та $f_1 = f$, $f_2 = 1 - f$.

Ізоморфізм $e_i A \simeq f_i A$ задається множенням модуля $e_i A$ зліва на деякий елемент $a_i \in f_i A e_i$. Тоді $f_i a_i = a_i e_i$ $(i = 1, 2)$. Покладемо $a = a_1 + a_2$. Маємо $ae_i = a_i e_i = a_i$ та $f_i a = f_i a_i = a_i$ при $i = 1, 2$. Покажемо, що a є оборотним. Дійсно, існує елемент $b_i \in e_i A f_i$, що визначає обернений ізоморфізм $f_i A \simeq e_i A$, такий, що $a_i b_j = \delta_{ij} f_j$ $b_i a_j = \delta_{ij} e_i$ для $i = 1, 2$. Покладемо $b = b_1 + b_2$. Маємо $ab = \sum\limits_{i=1}^{2} a_i b_i = f_1 + f_2 = 1$ та $ba = \sum\limits_{i=1}^{2} b_i a_i = e_1 + e_2 = 1$, тобто $b = a^{-1}$. Таким чином, $f_i = ae_i a^{-1}$ та $f = aea^{-1}$. Лема доведена. □

Лема 3.20. *Нехай $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — канонічний розклад одиниці $1 \in A$, та g — центральний за модулем R ідемпотент. Тоді існує оборотний елемент $a \in A$, такий, що $f_{i_1} + \ldots + f_{i_k} = aga^{-1}$.*

Доведення. Нехай $\bar{g}\bar{A} = \bar{A}\bar{g} = M_{n_{i_1}}(\mathcal{D}_{i_1}) \times \ldots \times M_{n_{i_k}}(\mathcal{D}_{i_k})$.
Тоді $f = f_{i_1} + \ldots + f_{i_k}$ є центральним за модулем R ідемпотентом та $\bar{f}\bar{A} = \bar{g}\bar{A}$. За попередньою лемою $f = aga^{-1}$. Лема доведена. □

Наслідок 3.21. *Кожний центральний за модулем R ідемпотент g є сумою канонічних ідемпотентів, та існує канонічний розклад одиниці $1 \in A$, такий, що $1 = g_1 + \ldots + g_k + g_{k+1} + \ldots + g_s$, де $g = g_1 + \ldots + g_k$ та $f = f_{i_1} + \ldots + f_{i_k} = ag_1 a^{-1} + \ldots + ag_k a^{-1}$.*

Теорема 3.22. *Нехай $1 = f_1 + \ldots + f_s = g_1 + \ldots + g_t$ — два канонічних розклади одиниці $1 \in A$. Тоді $s = t$ та існує оборотний елемент $\in A$ і перестановка $i \to \tau(i)$ індексів $\{1, \ldots, s\}$, такі, що $f_i = ag_{\tau(i)} a^{-1}$ для кожного $i = 1, \ldots, s$.*

Означення 3.23. *Кільце називається нерозкладним, якщо воно не може бути розкладене у прямий добуток двох кілець.*

Означення 3.24. *Кільце називається скінченно розкладним, якщо воно розкладається у прямий добуток скінченного числа нерозкладних кілець.*

Важливим класом скінченно розкладних кілець є нетерові справа кільця, зокрема, всі артінові справа кільця. Напівдосконалі кільця, що можуть бути і не нетеровими, і не артіновими, є також прикладами скінченно розкладних кілець.

Кільце f_iAf_i ізоморфне кільцю $End_AP_i^{n_i} \simeq M_{n_i}(End_AP_i)$. За теоремою 2.1 кільце $\mathcal{O}_i = End_AP_i$ локальне з єдиним максимальним ідеалом M_i і радикал Джекобсона $M_{n_i}(\mathcal{O}_i)$ співпадає з $M_{n_i}(\mathcal{M}_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$. Підмодуль N модуля M називається малим, якщо з рівності $N + X = M$ слідує, що $X = M$ для будь-якого підмодуля X модуля M. Проективний модуль $P = P(M)$ називається проективним накриттям модуля M, якщо існує епіморфізм $\phi : P \longrightarrow M$ такий, що $Ker\phi$ - малий підмодуль модуля P.

Теорема 3.25. *Наступні умови рівносильні для кільця A:*

(а) кільце A напівдосконале;

(б) будь-який циклічний A-модуль має проективне накриття.

Проективне накриття $P(M)$ скінченнопородженого A-модуля M будується наступним чином. Модуль M/MR є скінченнопородженим модулем над напівпростим артіновим кільцем $\bar{A} = A/R$. Тому модуль M/MR ізоморфний скінченній прямій сумі A-модулів:

$$M/MR = \bigoplus_{j=1}^{s} U_j^{m_j}.$$

Тоді

$$P(M) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{m_j}.$$

З побудови проективного покриття слідує, що

$$P(M \oplus N) = P(N) \oplus P(N).$$

Означення 3.26. *Нехай A - нетерове справа напівдосконале кільце, R - його радикал Джекобсона, $P_1, \ldots, P_s$ - попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Нехай проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд:*

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}} (i = 1, \ldots, s).$$

Співставимо у відповідність модулям $P_1, \ldots, P_s$ вершини (точки) $i = 1, \ldots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається сагайдаком нетеревого справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Аналогічно визначається лівий сагайдак $Q^{'}(A)$ нетеревого зліва напівдосконалого кільця A. Очевидно, що $Q(A) = Q(A/R^2)$.

Означення 3.27. *Нехай A — напівдосконале кільце таке, що A/R^2 є артіновим справа кільцем. Сагайдаком $Q(A)$ кільця A називається сагайдак кільця A/R^2.*

У випадку, якщо факторкільце A/R^2 артінове зліва, лівий сагайдак $Q^{'}(A)$ визначається за формулою $Q^{'}(A) = Q^{'}(A/R^2)$.

Зауважимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кілець, еквівалентним в сенсі Моріти.

Лема 3.28. *Нехай A — напівдосконале кільце таке, що факторкільце A/R^2 артінове з обох сторін. Тоді справедливе наступне твердження:*

(1) якщо в $Q(A)$ є стрілка σ_{ij} з вершини i у вершину j, тоді у лівого сагайдака $Q^{'}(A)$ є стрілка з вершини j у вершину i ;

(2) якщо в $Q^{'}(A)$ є стрілка $\sigma_{ij}(i \neq j)$, тоді існують ненульові гомоморфізми модуля P_j в модуль P_i і лівого Q_i в лівий модуль Q_j.

Доведення. Лема випливає з означення сагайдака напівдосконалого кільця. □

Нехай Q – скінчено орієнтований граф (сагайдак). Позначимо через Q_u сагайдак, отриманий з сагайдака Q, які ведуть з однієї в іншу (можуть співпадати з початковою), однією стрілкою.

Через $Q^{'}$ позначимо неорієнтований граф, отриманий з сагайдака Q зняттям орієнтації. З леми 2.1 отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 3.29. *Нехай A - напівдосконале кільце таке, що факторкільце A/R^2 артінове з обох сторін. Тоді $\overline{Q_u(A)} = \overline{Q^{'}_u(A)}$.*

Сагайдак Q називається зв'язним, якщо множину вершин не можна представити у вигляді двох неперетинаючих підмножин між якими немає стрілок.

Теорема 3.30. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого нетеревого справа і зліва кільця A:*

(а) кільце A нерозкладне;

(б) факторкільце A/R^2 нерозкладне;

(в) сагайдак кільця A зв'язний.

4 Нетерові напівдосконалі напівдистрибутивні кільця

Означення 4.1. *Модуль M називається дистрибутивним, якщо гратка його підмодулів є дистрибутивною, тобто для будь-яких його підмодулів K, L, N справджується рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.*

Очевидно, що будь-який підмодуль та будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним модулем.

Означення 4.2. *Пряма сума дистрибутивних модулів називається напівдистрибутивним модулем.*

Означення 4.3. *Кільце називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо воно є напівдистрибутивним правим (лівим) регулярним модулем.*

Напівдосконале напівдистрибутивне кільце називається *SPSD* - кільцем.

Означення 4.4. *Кільце є напівдистрибутивним, якщо воно напівдистрибутивне як справа, так і зліва.*

Теорема 4.5. */[?]/ Модуль є дистрибутивним тоді й тільки тоді, коли цоколь кожного його фактормодуля містить не більше однієї копії кожного простого модуля.*

Теорема 4.6. */[?], [?]/ Напівдосконале кільце A є напівдистрибутивним справа (зліва) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких локальних ідемпотентів e та f кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf-модулем (ланцюговим лівим eAe-модулем).*

Теорема 4.7. */[?]/ Нехай A — напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — розклад одиниці $1 \in A$ у суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів. Кільце A є напівдистрибутивним справа (зліва) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких ідемпотентів e_i та e_j $(i \neq j)$ з цього розкладу кільце $(e_i+e_j)A(e_i+e_j)$ напівдистрибутивне справа (зліва).*

Наслідок 4.8. *Нехай A - нетереве SPSD - кільце, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ - розклад $1 \in A \in$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_iAe_j$ і R_i - радикал Джекобсона кільця A_{ii}. Тоді $R_iA_{ij} = A_{ij}R_j$ для $i, j = 1, \ldots, n$.*

Теорема 4.9. *Напівдосконале напівдистрибутивне справа кільце з нільпотентним радикалом Джекобсона артінове справа.*

Теорема 4.10. *Наступні умови рівносильні для артінового кільця A, квадрат радикала якого дорівнює нулю:*

(a) кільце A напівдистрибутивне;

(б) в кожній вершині $Q(A)$ не більше однієї петлі, із однієї вершини $Q(A)$ в іншу йде не більше однієї стрілки і лівий сагайдак $Q^{'}(A)$ отримується із сагайдака $Q(A)$ переворотом всіх стрілок

Означення 4.11. *Кільце A не (обов'язково напівдосконале) називається слабопервинним, якщо добуток двох будь - яких його двосторонніх ідеалів, які не лежать в радикалі Джекобсона R кільця A, відмінний від нуля.*

Теорема 4.12. *Нехай $1 = e_1 + \ldots + e_n$ - розклад одиниці напівдосконаленого кільця A в пряму суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $A_{ij} = e_iAe_j$ $i, j = 1, \ldots, n$. Кільце A слабопервинне тоді й лише тоді, коли $A_{ij} \neq 0$ для всіх i, j.*

Означення 4.13. *Кільце ендоморфізмів нерозкладного проективного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.*

Твердження 4.14. *Артінове головне кільце ендоморфізму напівпервинного напівдосконалого кільця є тілом.*

Доведення. Кільце є артіновим головним локальним кільцем, а отже є тілом. ☐

Теорема 4.15. *Для напівпервинного напівдосконалого кільця наступні умови еквівалентні:*

(1) A є скіченною прямою сумою первинних кілець;

(2) всі головні кільця ендоморфізмів A є первинними

Доведення. Припустимо, що кільце A є нерозкладне і зведене. Нехай $1 = e_1 + \ldots + \ldots e_n$ – розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. Доведемо теорему методом математичної індукції за n. Коли $n = 1$ твердження теореми очевидно. Нехай A не є первинним. Тоді існують двосторонні ненульові ідеали M і N такі, що $MN = 0$. Нехай $h_1 = e_1 + \ldots + e_{n-1}$ і $h_2 = e_n$. Маємо рівність $h_1Mh_1Nh_1 = 0$. За припущенням індукції $h_1Mh_1 = 0$ або $h_1Nh_1 = 0$. Нехай $h_1Mh_1 = 0$, тоді $h_1Mh_2 = 0$ і $h_2Mh_1 = 0$. Якщо $h_2Mh_2 = 0$, тоді теорема доведена, бо $h_2Mh_2 \neq 0$ і $h_2Nh_2 = 0$. Ми знову отримуємо, що $h_2Mh_1 = 0$ і $h_1Nh_2 = 0$. Припустимо, що $e_iNe_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, t$ і $e_jNe_j = 0$ для $j = t + 1, \ldots, n$. Оскільки, $N_{ii}A_{ij} = 0$ для $i = 1, \ldots, t$ і $j = t+1, \ldots, n$. Тоді $N_{ii}A_{ij}A_{ji} = 0$ для деяких i та j. Оскільки A є первинним, то $A_{ij}A_{ji} = 0$. Звідси $A_{ij} = 0$ і $A_{ji} = 0$ для $i = 1, \ldots, t$ і $t + 1, \ldots, n$. Оскільки кільце A є розкладним, то отримуємо протиріччя, що і доводить теорему. ☐

Твердження 4.16. *Будь-який мінор SPSD-кільця є SPSD-кільцем.*

Означення 4.17. *Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно напівдосконале напівпервинне нетерове справа кільце таке, що для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованним кільцем (не обов'язково комутативним), тобто всі головні кільця ендоморфізмів є дискретно нормованими кільцями.*

Твердження 4.18. *Напівмаксимальне кільце є скінченним прямим добутком первинних напівмаксимальних кілець.*

Доведення. Доведення випливає з попередньої теореми. ☐

Отже, напівмаксимальне кільце A є розкладним тоді й лише тоді, коли A є первинним.

5 Нетерові справа напівпервинні SPSD - кільця

Нижче наводиться теорема розкладу для напівпервинного правого нетерового $SPSD$ - кільця.

Теорема 5.1. *Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа A кільця еквівалентні:*

а) кільце A є напівдистрибутивним;

б) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Доведення. $(a) \Longrightarrow (b)$. За теоремою 5.5 маємо, що є скінченним прямим добутком нерозкладних напівпервинних кілець. Кожне нерозкладне кільце є первинним артіновим кільцем або напівпервинним напівдосконалим кільцем, у якого всі головні кільця ендоморфізмів не є артіновими. У другому випадку маємо, що кільце є напівмаксимальним.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Очевидно, напівпервинне артінове кільце є напівдосконалим $SPSD$ - кільцем. Напівмаксимальне кільце також є $SPSD$ - кільцем. □

Теорема 5.2. *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець вигляду:*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

, де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ є дискретно нормованним кільцем з простим елементом π і α_{ij} — цілі числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для кожного i).

Доведення. Напівмаксимальне кільце є скінченним прямим добутком первинних напівмаксимальних кілець. Покажемо, що первинне напівмаксимальне кільце є ізоморфним кільцю вказаного в теоремі вигляду. Нехай $1 = e_1 + \ldots + e_m$ – розкладом $1 \in A$ у пряму суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$ для $i, j = 1, \ldots, m$. Позначимо через B_{ij} $i \neq j$ - мінор другого порядку: $B_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{pmatrix}$. Якщо B_{ij} не є тілом, тоді $B_{ij} \simeq M_2(A_{ii})$ і B_{ij} є нетеровим зліва. Якщо B_{ij} є тілом, тоді $A_{ij}a_{ji} \subset A_{ij}$, $\varphi_{ji} : A_{ij} \longrightarrow A_{ii}$ буде морфізмом лівих A_{ii} - модулів (для будь - якого ненульового a_{ji}) такого, що $\varphi_{ji}(a_{ij}) = a_{ij}a_{ji}$. Якщо A_{ij} не є скінченнопородженим, тоді A_{ii} містить нескінченно породжений лівий A_{ii} - підмодуль $A_{ij}a_{ji}$, де $a_{ji} \neq 0$. Отримали протиріччя. Тоді $A_{ij} \simeq A_{ii}$ і B_{ij} є нетеровим зліва. Індукцією за m отримаємо, що є нетеровим зліва. Отже, A первинним нетеровим $SPSD$ - кільцем. Тоді A є правим порядком у первинному артіновому кільцю $Q = M_n(D)$. Припустимо, що кожен локальний ідемпотент e_i з наведеного вище розкладу $1 = e_1 + \ldots + e_m$ є локальним в $M(\mathcal{D})$. Тоді два розклади $1 = e_1 + \ldots + e_m$ і $1 = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ є спряженими. Отже, $m = n$, тоді можна вважати матричні ідемпотенти локальними ідемпотентами кільця A.

Позначимо A_{ii} через A_i. Маємо $Q = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ є тілом кільця, e_{ij} є одиничними матрицями, які комутують з елементами із $\mathcal{D}$) і $A = e_{ij}A_{ij}$, де $A_{ij} \subset D$. Всі A_i є дискретно нормованими кільцями, $A_{ij}A_{jk} \subset A_{ik}$ $A_{ij} \neq 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$ (A є первинним і $e_{ii}Ae_{jj} = A_{ij} \neq 0$. Доведемо, що $A_{ij} = d_{ij}A_j = A_i d_{ij}$, де $d_{ij} \in A_{ij} \subset D$. Нехай R_i є радикалом Джекобсона A_i і $\pi_i A_i = A_i \pi_i = R_i$. Тоді $R_i A_{ij} = A_{ij} R_j$. Візьмемо елемент $0 \neq d_{ij} \in A_{ij}$ такий, що $A_i d_{ij} + R_i A_{ij} = A_{ij}$. За лемою Накаями $A_{ij} = d_{ij}A_j = A_i d_{ij}$. Нехай $T = diag(d_{12}^{-1}, d_{23}^{-1}, \ldots, d_{n-1n}^{-1}, 1)$. Розглянемо TAT^{-1}. Можна вважати, що виконується наступна рівність $d_{12} = \ldots = d_{n-1n}$ в A, де $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$. Тоді $A_1 = \mathcal{O}$, де $\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем(не обов'язково комутативним). Отже, $A_{ij} \sup \mathcal{O}$ для $i \geq j$. З того що $A_{ij}A_{ji} \subset \mathcal{O}$ маємо $A_{ij}A_{ji} \supset A_{ij}$ і $A_{ji} \subset O$ для $j \geq i$. Можна вважати, що $d_{ji} = \pi^{\alpha_{ji}}$, де $M = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ – єдиний максимальний ідеал $\mathcal{O}$, $\alpha_{ji} \geq 0$ для $j \geq i$. Тоді $d_{ij} = \pi^{\alpha_{ij}}$, де $\alpha_{ij} \geq -\alpha_{ji}$. Отже, отримали кільце потрібного вигляду. Обернене твердження випливає з означення напівмаксимального кільця. $\square$

Означення 5.3. *Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.*

Черепичний порядок — це первинне нетерове SPSD - кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

6 Гратки та черепичні порядки

Нехай R — комутативна область цілісності з полем часток K, та нехай A — скінченновимірна K-алгебра. Під повною R-браткою в A розуміють скінченнопороджений R-підмодуль $\Lambda \subseteq A$, такий, що $K\Lambda = A$. Якщо такий підмодуль Λ є підкільцем алгебри A, то говорять, що Λ є R-порядком. Якщо, більш того, Λ не власне міститься в будь-якому R-порядку з A , кажуть, що він є максимальним R-порядком. Наприклад, якщо $M \subseteq A$ є будь-якою повною R-браткою, тоді $O_l(M) = \{a \in A \,|\, aM \subseteq M\}$ є R-порядком, який називається лівим порядком гратки M (правий порядок $O_r(M)$ визначається аналогічно). Якщо $a_1, \ldots, a_n \in K$ є цілими над , тоді $R[a_1, \ldots, a_n]$ є R-порядком в $K/$.

Слово "порядок"є прямим перекладом німецького слова "Ordnung яке звичайно використовувалося в 19-ому сторіччі у літературі з теорії чисел, яка стосувалася кілець алгебраїчних цілих. Розширення поняття "Ordnung"до некомутативних випадків стало усталеним з роботи Еммі Нетер.

Приклади порядків.
Нехай τ — золотий переріз $(1+\sqrt{5})/2$. Для будь-якого додатного цілого n $\Lambda_n = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}n\sqrt{5}$ є $\mathbf{Z}$-порядок в $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, та $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ — єдиний максимальний $\mathbf{Z}$-порядок, де $\mathbf{Z}$ — кільце цілих чисел, $\mathbf{Q}$ — поле раціональних чисел.

Більш загально, для будь-якого числового поля A повне кільце алгебраїчних цілих Λ є єдиний максимальний $\mathbf{Z}$-порядок.

Для деяких прикладів некомутативних порядків візьмемо поле $A = \mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$. Для будь-якого цілого $n > 0$ $\{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}) \,|\, n \text{ ділить } a_{21}\}$ є $\mathbf{Z}$-порядком в $\mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$, і він міститься в максимальному $\mathbf{Z}$-порядку $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.

Для будь-якої скінченної групи G групове кільце $\Lambda = \mathbf{Z}G$ є $\mathbf{Z}$-порядком в $\mathbf{Q}G$.

У випадку, коли G — абелева група, за теоремою Машке $\mathbf{Q}G = A_1 \times \ldots \times A_r$, де A_i, $i = \overline{1,r}$, є відповідні числові поля. В цьому випадку Λ міститься в єдиному максимальному порядку $\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_r$, де для будь-якого $i = \overline{1,r}$ Λ_i є повне кільце алгебраїчних цілих в A_i.

В $\mathbf{Q}$-алгебрі кватерніонів $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}i + \mathbf{Q}j + \mathbf{Q}k$ $\mathbf{Z}$- оболонка $\{1, i, j, k\}$ є $\mathbf{Z}$-порядок, і $\mathbf{Z}$-порядком є $\mathbf{Z}$-оболонка $\{1, 2i, 2j, k\}$, тоді як $\mathbf{Z}$-оболонка $\{i, j, k, (1+i+j+k)/2\}$ (кільце Гурвіца цілих кватерніонів) є максимальним $\mathbf{Z}$-порядком.

Позначимо через $M_n(B), i, j = 1, \ldots, n$ – кільце всіх квадратних матриць порядка n з елементами із B, e_{ij} – матричні одиниці кільця $M_n(B)$. Через $\mathbb{Z}$ позначимо кільце цілих чисел.

Означення 6.1. *Цілочисельна матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається:*

- *матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ і $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i, j, k;*
- *зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх i, j, $i \neq j$.*

Нехай $\Lambda = \mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ - черепичний порядок, $\mathcal{O}$ - дискретно нормоване кільце з єдиним максимальним ідеалом $\pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ і класичним тілом часток $\mathcal{O}$, $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ - матриця показників черепичного порядка Λ. Припустимо, що черепичний порядок Λ - зведений. Для того, щоб Λ був зведеним необхідно і достатньо, щоб матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ була зведеною.

Ми будемо використовувати таке позначення:

$\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників порядку Λ. Якщо черепичний порядок є зведеним, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$.

Черепичний порядок Λ лежить в $M_n(D)$ і має вигляд: $\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$. Його класичним кільцем часток є кільце $Q = M_n(D)$.

Означення 6.2. *Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A-граткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$-модулем.*

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Будь-яка права (відп. ліва) незвідна A-гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases} \tag{2}$$

де буква T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок A. В цьому випадку елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з чілочисельними рядками векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\vec{a}^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$), де $\vec{a}$ і $\vec{a}^T$ задовольняють умовам 2. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Позначимо через $Lat_r(A)$ (відп. $Lat_l(A)$) категорію правих (відп. лівих) A-граток.

Встановимо дуальність між категоріями $Lat_r(A)$ та $Lat_l(A)$. Нехай $M \in Lat_r(A)$. Позначимо $M^\star = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$. Для довільного $f \in M^\star$ і $a \in A$ визначимо af за формулою $(af)(m) = f(ma)$, де $m \in M$. Тоді легко перевірити, що $M^\star$ є лівим A-модулем.

Нехай $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфізм модулів $M, N \in Lat_r(A)$, тобто $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Тоді $\varphi^\star\colon N^\star \to M^\star$ можна визначити за формулою $(\varphi^\star f)(m) = f\varphi(m)$, де $f \in N^\star$. Це гомоморфізм з $N^\star$ у $M^\star$, тобто $\varphi^\star \in$

$\mathrm{Hom}_A(N^\star, M^\star)$. Очевидно, що, якщо ми маємо гомоморфізми $\psi\colon L \to M$ та $\varphi\colon M \to N$, то $(\varphi\psi)^\star = \psi^\star\varphi^\star$ і $1_M^\star = 1_{M^\star}$. Крім цього, для будь-якого $M \in Lat_r(A)$ маємо $M^{\star\star} = M$ і для будь-якого $N \in Lat_l(A)$ справедливо $N^{\star\star} = N$. З іншої сторони, для довільного $\varphi\colon M \to N$ ми маємо $\varphi^{\star\star} = \varphi$. Є також очевидним, що $(M \oplus N)^\star = M^\star \oplus N^\star$.

Твердження 6.3. *Нехай*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

точна послідовність, де $L, M, N \in Lat_r(A)$. Тоді послідовність

$$0 \longrightarrow N^\star \xrightarrow{p^\star} M^\star \longrightarrow L^\star \longrightarrow 0$$

є точною.

Просто встановити дуальність незвідних та цілком розкладних A-граток.

Нехай $M \in S_r(A)$ та $M = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i\pi^{\alpha_i}\mathcal{O}$. Якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис для $e_1, \dots, e_n$, то $\pi^{-\alpha_1}\varphi_1, \dots, \pi^{-\alpha_n}\varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис для $\mathcal{O}$-базису $e_1\pi^{\alpha_1}, \dots, e_n\pi^{\alpha_n}$. Отже, якщо $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то $M^\star = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T$. Використовуючи запис $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, маємо $N^\star = (-\beta_1, \dots, -\beta_n)$.

Твердження 6.4. *Частково впорядковані множини $S_r(\Lambda)$ і $S_l(\Lambda)$ є антиізоморфними дистрибутивними гратками.*

Доведення. Оскільки Λ є напівдистрибутивним кільцем, то $S_r(\Lambda)$ (відповідно $S_l(\Lambda)$) є дистрибутивною граткою відносно суми та перетину підмодулів.

Нехай $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(\Lambda)$. Тоді $M^* = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T \in S_l(\Lambda)$. Якщо $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in S_l(\Lambda)$, то $N^* = (-\beta_1, \dots, -\beta_n) \in S_r(\Lambda)$. Очевидно, M^* та N^* є незвідними Λ-гратками.

Неважко перевірити, що $M^{**} = M$ $(N^{**} = N)$. Крім того, для будь-яких $M_1, M_2 \in S_r(\Lambda)$ справедливі рівності $(M_1 + M_2)^* = M_1^* \cap M_2^*$ і $(M_1 \cap M_2)^* = M_1^* + M_2^*$ у випадку правих Λ-граток і аналогічні рівності у випадку лівих Λ-граток.

Таким чином, відображення $* : S_r(\Lambda) \longrightarrow S_l(\Lambda)$ є антиізоморфізмом. Твердження доведено. □

Означення 6.5. *Пряма сума незвідних Λ-граток називається цілком розкладною Λ-граткою.*

Нехай зовнішня пряма сума $L = M_1 \oplus \ldots \oplus M_p$ є правою цілком розкладною Λ-граткою і $K = N_1 \oplus \ldots \oplus N_q$ — лівою цілком розкладною Λ-граткою. Тоді $L^* = M_1^* \oplus \ldots \oplus M_t^*$ є лівою цілком розкладною Λ-граткою, а $K^* = N_1^* \oplus \ldots \oplus N_q^*$ — правою цілком розкладною Λ-граткою.

Черепичний порядок $\Lambda = \sum\limits_{i,j,=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$ є цілком розкладною як правою, так і лівою Λ-граткою, що лежить у $\tilde{\Lambda} = \mathcal{M}_n(\mathcal{D})$.

Проективна Λ-гратка, тобто скінченнопороджений проективний Λ-модуль, є цілком розкладною Λ-граткою.

Означення 6.6. *Цілком розкладна Λ-гратка M називається відносно інєктивною, якщо $M = P^*$, де P є проективною Λ-граткою.*

Нехай I — двобічний ідеал черепичного порядку Λ. Очевидно,

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\beta_{ij}}\mathcal{O},$$

де e_{ij} — матричні одиниці.

Позначимо через $\mathcal{E}(I) = (\xi_{ij})$ — матрицю показників ідеалу I.

Нехай I та J — двобічні ідеали кільця Λ, $\mathcal{E}(I) = (\xi_{ij})$ та $\mathcal{E}(J) = (\zeta_{ij})$. Тоді $\mathcal{E}(IJ) = (\delta_{ij})$, де $\delta_{ij} = \min\limits_{k}(\xi_{ik} + \zeta_{kj})$.

Зрозуміло, незвідні Λ-гратки $M_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $M_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності $\alpha_i = \beta_i + z$ $(i = 1, \dots, n)$, де $z \in \mathbf{Z}$.

Означення 6.7. *Напівмаксимальний порядок Λ будемо називати горенштейновим напівмаксимальним порядком, якщо Λ є бієктивною Λ-граткою, тобто Λ^* є проективною лівою Λ-граткою.*

Зрозуміло, Λ^*_Λ є проективною лівою Λ-граткою тоді й тільки тоді, коли ${}_\Lambda\Lambda^*$ є проективною правою Λ-граткою.

Надалі горенштейновий напівмаксимальни порядок ми будемо часто називати просто горенштейновим порядком.

Приклад 6.8. *Нехай* $\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,0,1)$, $P_3 = (1,1,0)$ *є проективні Λ-модулі та* $P_1^* = (0,0,0)^T$, $P_2^* = (-1,0,-1)^T \simeq (0,1,0)^T$, $P_3^* = (-1,-1,0)^T \simeq (0,0,1)^T$.

Бачимо, що модулі P_2 і P_3 є бієктивні, але Λ не є горенштейновим. Добре відомо що $gl.dim\Lambda = 2$.

Позначимо через $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ (відповідно $\mathcal{M}_l(\Lambda)$) частково впорядковану підмножину граток $S_r(\Lambda)$ (відповідно $S_l(\Lambda)$), утворену всіма проективними Λ-модулями, що містяться в $S_r(\Lambda)$ (відповідно $S_l(\Lambda)$). Тобто елементами частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ є нерозкладні проективні Λ-модулі $P_1, \dots, P_n$, причому $P_i \leq P_j$ тоді та тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$.

Твердження 6.9. *Незвідна Λ-гратка $M \in S_r(\Lambda)$ (відповідно $N \in S_l(\Lambda)$) є проективною тоді й тільки тоді, коли вона містить тільки один максимальний підмодуль.*

Твердження 6.10. *Черепичний порядок є горенштейновим тоді й тільки тоді, коли звуження відображення $* : S_r(\Lambda) \longrightarrow S_l(\Lambda)$ на $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ є антиізоморфізмом між частково впорядкованими множинами $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ та $\mathcal{M}_l(\Lambda)$.*

В загальному випадку частково впорядковані множини $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ і $\mathcal{M}_l(\Lambda)$ є антиізоморфними, але цей антиізоморфізм не може бути розширений до антиізоморфізму граток $S_r(\Lambda)$ і $S_l(\Lambda)$.

Нехай $P_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ — незвідна проективна Λ -гратка, $P_i^\star = Q_i = (-\alpha_{i1}, \ldots, -\alpha_{in})^T$ — відносно ін'єктивна гратка. Тоді $X_i = (-\alpha_{i1}, \ldots, -\alpha_{ii-1} - 1, -\alpha_{ii+1}, \ldots - \alpha_{in})^T$ — єдиний мінімальний надмодуль модуля Q_i

Як наслідок отримуємо таке твердження.

Лема 6.11. *Нехай Q_1 та Q_2 — нерозкладні відносно ін'єктивні Λ-гратки, $X_1 \subset Q_1$ та $X_2 \subset Q_2$ — єдині мінімальні надмодулі Q_1 та Q_2. Тоді прості Λ-модулі X_1/Q_1 та X_2/Q_2 ізоморфні тоді та тільки тоді, коли $Q_1 \simeq Q_2$.*

7 Горенштейнові порядки та квазіфробеніусові кільця

Нагадаємо, що Λ-гратка L називається біективною, якщо L^* є проективною лівою Λ-граткою.

Лема 7.1. *Наступні умови для черепичного порядка $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{pq})\}$ є еквівалентними:*

а) існує біективна Λ-гратка;

б) існують індекси i, j, такі, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$ для $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 7.2. *Для зведеного черепичного порядку $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{pq})\}$ такі умови є еквівалентними:*

(а) Λ є горенштейновим порядком;

(б) існує підстановка $\sigma = \{i \to \sigma(i)\}$, така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i,\ k = 1, \ldots, n$.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з леми 7.1.

Підстановку σ будемо називати підстановкою Кириченка та позначати $\sigma(\Lambda)$. Зрозуміло, що підстановка $\sigma(\Lambda)$ не має циклів довжини 1.

Означення 7.3. *Горенштейновий черепичний порядок Λ називається циклічним горенштейновим порядком, якщо підстановка Кириченка цього порядку є циклом.*

Теорема 7.4. *Нехай A_A є нетеровим.*

(а) Наступні умови є еквівалентними:

(1) A_A є ін'єктивним;

(2) A_A є котвірним;

(3) ${}_AA$ є ін'єктивним;

(4) ${}_AA$ є котвірним;

(5) $\forall M \subset A_A\ [rl(M) = M] \wedge \forall N \subset {}_AA\ [lr(N) = N]$.

(б) Якщо виконуються умови з (а), тоді кільце A є артіновим з обох боків.

Через $l(M)$ та $r(N)$ позначено анулятори модулів M та N, тобто $l(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$, $r(N) = \{b \in A \mid Nb = 0\}$.

Означення 7.5. *Кільце називається квазіфробеніусовим (QF-кільцем), якщо воно задовольняє умовам попередньої теореми.*

В наступній теоремі в якості однієї з еквівалентних умов фігурує початкове означення квазіфробеніусових кілець, дане Накаямою (1939 р.).

Нехай $rad(A)$ — радикал Джекобсона артінового з обох боків кільця A, $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ — розклад $1 \in A$ в суму примітивних взаємно ортогональних ідемпотентів і $\overline{A} = A/rad(A)$, $\overline{e}_i = e_i + rad(A)$.

Теорема 7.6. *Для артінового з двох сторін кільця A наведені нижче умови еквівалентні:*

(a) A — квазіфробеніусове;

(b) для кажного примітивного ідемпотенту e цоколі $soc(eA)$ і $soc(Ae)$ прості та в $soc(A_A)$, відпов. в $soc(_A A)$, містяться з точністю до ізоморфізму всі прості праві, відпов. ліві, A-модулі;

(c) для кажного примітивного ідемпотента e цоколі $soc(eA)$ і $soc(Ae)$ прості і $soc(A_A) = soc(_A A)$;

(d) (означення Накаями) існує перестановка π множини $\{1, \ldots, k\}$, така, що для кажного $i = 1, \ldots, k$

$$soc(e_i A)_A \simeq (\overline{e}_{\pi(i)} \overline{A})_A, \quad {}_A soc(A e_{\pi(i)}) \simeq_A (\overline{A} \overline{e}_i).$$

(під $\overline{A}$ розуміється $\overline{A} = A/R, \overline{e} = e + R \in \overline{A}$.)

Лема 7.7. *Нехай e і f ненульові ідемпотенти кільця Λ, такі що модулі $e\Lambda$ і $f\Lambda$ нерозкладні. В цьому випадку $e\Lambda$ і $f\Lambda$ ізоморфні тоді та тільки тоді, коли має місце наступна рівность:*

$$f = f\lambda_0 e\lambda_1,$$

де $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$.

Доведення. Припустимо що модулі $e\Lambda$ і $f\Lambda$ ізоморфні, і $\varphi : e\Lambda \to f\Lambda$ — цей ізоморфізм. Тоді $\varphi(e\lambda) = \varphi(e \cdot e\lambda) = \varphi(e)e\lambda = f\lambda_0 e \cdot e\lambda$, тобто φ діє на $e\lambda$ як множення зліва на $f\lambda_0$e. Тому $f = \varphi(e\lambda_1) = f\lambda_0 e\lambda_1$.

Навпаки, нехай $f = f\lambda_0 e\lambda_1$. Тоді $\varphi : e\Lambda \to f\Lambda$, де $\varphi(e\lambda) = f\lambda_0 e \cdot e\lambda$ є епіморфізмом. Оскільки модуль $f\Lambda$ проективний, ми маємо

$$e\Lambda \simeq f\Lambda \oplus X.$$

Приймаючи до уваги, що $f\Lambda \neq 0$, і модуль $e\Lambda$ нерозкладний, отримаємо, що $e\Lambda \simeq f\Lambda$. Лема доведена. □

Наведемо означення фробеніусових кілець, що дав Т. Накаяма у 1941 р.

Означення 7.8. *Кільце називається фробеніусовим, якщо воно є квазіфробеніусовим і $soc(A_A) \simeq \overline{A}_A$, $soc(_A A) \simeq_A \overline{A}$.*

За наступною теоремою, автором якої є Кириченко В.В., з горенштейнового черепичного порядку можна отримувати квазіфробеніусові кільця.

Теорема 7.9. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з радикалом Джекобсона R і J — двобічний ідеал, такий, що $R^2 \supset J \supset R^n \quad (n \geq 2)$. Факторкільце Λ/J квазіфробеніусове тоді та тільки тоді, коли існує $p \in R^2$, таке, що $J = p\Lambda = \Lambda p$.*

Доведення. Нехай $\Lambda = \sum\limits_{i,j=1}^{s} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, $M_s(\mathcal{D}) = \sum\limits_{i,j=1}^{s} e_{ij}\mathcal{D}$ — кільце часток порядку Λ, де $\mathcal{D}$ — тіло часток кільця $\mathcal{O}$, e_{ij} — матричні одиниці $(i, j = 1, \dots, s)$.

Далі, нехай $J = p\Lambda = \Lambda p$ — двобічний ідеал порядку Λ та $R^2 \supset J \supset R^n$.

Очевидно, $M_s(\mathcal{D})JM_s(\mathcal{D}) = M_s(\mathcal{D})p\Lambda M_s(\mathcal{D}) = M_s(\mathcal{D})pM_s(\mathcal{D})$ є ненульовим двобічним ідеалом кільця $M_s(\mathcal{D})$. Тому $p \in M_s(\mathcal{D})$ має обернений до нього елемент p^{-1} в $M_s(\mathcal{D})$.

Оскільки факторкільце Λ/R^n є артіновим, то й факторкільце $\overline{\Lambda} = \Lambda/J$ теж артінове.

Покажемо, що факторкільце $\overline{\Lambda}$ є QF-кільцем.

Нехай $1 = e_{11} + \ldots + e_{ss}$ — розклад $1 \in \Lambda$ у суму матричних ідемпотентів, $\Lambda = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} P_i$, де $P_i = e_{ii}\Lambda$.

Очевидно,кожний нерозкладний проективний $\overline{\Lambda}$-модуль має вигляд $\overline{P_i} \simeq e_{ii}\Lambda/e_{ii}p\Lambda$, $i = 1, \dots, s$.

Праві модулі Λ та $p\Lambda$ ізоморфні, тому що p — оборотний елемент в $M_s(\mathcal{D})$.

Оскільки $J = p\Lambda = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} e_{ii}p\Lambda$, ми маємо $e_{ii}\Lambda \supset e_{ii}R^2 \supset e_{ii}p\Lambda \supset e_{ii}R^n$. Тому для кожного модуля $e_{ii}p\Lambda$ існує єдиний мінімальний надмодуль. З цього випливає, що $soc\overline{P_i}$ є простим модулем при $i = 1, \dots, s$.

Припустимо, що $soc\overline{P_i} \simeq soc\overline{P_k}$ для $i \neq k$. Тоді, $e_{ii}p\Lambda \simeq e_{kk}p\Lambda$. Звідки $p^{-1}e_{ii}p\Lambda \simeq p^{-1}e_{kk}p\Lambda$. Оскільки $p\Lambda = \Lambda p$, то $p^{-1}\Lambda p = \Lambda$. Тому $p^{-1}e_{ii}p \in \Lambda$, $i = \overline{1, s}$. За лемою 7.7 виконуються рівності $p^{-1}e_{kk}p = p^{-1}e_{kk}\lambda_0 e_{ii}\lambda_1 p = p^{-1}e_{kk}\lambda_0 e_{ii}p\lambda_1$. Отже, $e_{kk}p\lambda_0 p^{-1}e_{ii}p\lambda_1 p^{-1} = e_{kk}$.

З того, що $p\lambda_0 p^{-1}$ та $p\lambda_1 p^{-1}$ — елементи з Λ, випливає, що $e_{ii}\Lambda \simeq e_{kk}\Lambda$.

Це протиріччя показує, що при $i = k \quad soc\overline{P_i} \neq soc\overline{P_k}$.

Аналогічно все вище сказане для правих модулів має силу й для лівих модулів.

Навпаки, нехай $R^2 \supset J \supset R^n$ та $\overline{\Lambda} = \Lambda/J$ є QF-кільцем. Оскільки $e_{ii}\Lambda \supset e_{ii}R^2 \supset e_{ii}p\Lambda \supset e_{ii}R^n$, неважко бачити, що для кожного модуля $e_{ii}J$ існує єдиний мінімальний надмодуль X_i, такий, що $X_i/e_{ii}J \neq X_j/e_{jj}J$ при $i \neq j$. Оскільки порядок Λ є горенштейновим, то за лемою 6.11 модулі $e_{ii}J$, $i = \overline{1, s}$ є всі попарно неізоморфні нерозкладні проективні Λ-модулі. Отже, праві Λ-модулі $J = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} e_{ii}J$ ізоморфні Λ_Λ. Оскільки $End_\Lambda\Lambda \simeq \Lambda$, то існує єдиний мономорфізм $\varphi : \Lambda \to \Lambda$, який визначається за формулою $\varphi(\lambda) = q\lambda$ та $Im\varphi = J$. Тому $J = q\Lambda$, де q — регулярний елемент. Аналогічно $J = \Lambda p$, де p — регулярний елемент. Тоді $q = a_0 p$ та $p = qa_1, q = a_0 q a_1$. Очевидно, елементи a_0 та a_1 регулярні. Покажемо, що, якщо $b_1\Lambda \subset b_2\Lambda$ та $b_1\Lambda \neq b_2\Lambda$ для деяких елементів $b_1, b_2 \in \Lambda$, тоді $xb_1\Lambda \subset xb_2\Lambda$ та $xb_1\Lambda \neq xb_2\Lambda$ для будь-якого регулярного елемента $x \in \Lambda$. Припустимо, що $xb_1\Lambda = xb_2\Lambda$. Тоді, $xb_1 y = xb_2$, тобто $b_2 = b_1 y$ та $b_2\Lambda = b_1 y\Lambda \subset b_1\Lambda$. Отже, ми отримали протиріччя з нашим припущенням. Таким чином, якщо $a_1\Lambda \subset \Lambda$ та $a_1\Lambda \neq \Lambda$, то $qa_1\Lambda \not\subset q\Lambda$. Тому $a_0 q a_1\Lambda$ є власним підмодулем модуля $a_0 q\Lambda$. Звідки $q\Lambda$ є власним підмодулем модуля $a_0 q\Lambda \subset J$. Це протиріччя показує, що $a_1\Lambda = \Lambda$ та a_1 є оборотним елементом кільця Λ. Остаточно, бачимо, що $p\Lambda = qa_1\Lambda = q\Lambda = \Lambda p$, тобто $J = p\Lambda = \Lambda p$, де $p \in R^2$. Теорема доведена. □

Нехай A — нетерове з двох сторін напівдосконале кільце, R — його радикал Джекобсона.

Означення 7.10. *Нехай M — правий (лівий) A - модуль. Через $topM$ позначається напівпростий модуль M/MR (M/RM).*

Означення 7.11. *Цоколем правого (лівого) модуля M називається сума всіх простих правих (лівих) підмодулів модуля M. Ця сума позначається через $socM$.*

Нехай $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_k^{n_k}$ ($A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_k^{n_k}$) — розклад кільця A в пряму суму нерозкладних проективних правих (відп. лівих) A-модулів, причому модулі $P_1, \dots, P_k$ ($Q_1, \dots, Q_k$) — всі попарно неізоморфні.

Наступне означення було дано Т. Накаямой .

Означення 7.12. *Артінове з двох сторін кільце A називається квазіфробеніусовим (QF-кільцем), якщо існує перестановка ν множини $\{1, \dots, k\}$, така, що для кожного $i = 1, \dots, k$*

$$\mathrm{soc}P_i \simeq \mathrm{top}P_{\nu(i)}, \quad \mathrm{soc}Q_{\nu(i)} \simeq \mathrm{top}Q_i.$$

Означення 7.13. *Квазіфробеніусове кільце A називається фробеніусовим, якщо $n_{\nu(i)} = n_i$.*

Теорема 7.14. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — зведений черепичний порядок, π — простий елемент дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$. Порядок Λ горенштейновий тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце $\Lambda/\pi\Lambda$ фробеніусове.*

Доведення. Нехай зведений черепичний порядок Λ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ є горенштейновим з підстановкою σ. Оскільки нерозкладний проективний Λ-модуль P_i є відносно ін'єктивним, то модуль $P_i^* \simeq Q_{\sigma(i)}$ має єдиний максимальний підмодуль $\mathrm{rad}Q_{\sigma(i)} = (\alpha_{1\sigma(i)}, \dots, \alpha_{\sigma(i)-1,\sigma(i)}, 1, \alpha_{\sigma(i)+1,\sigma(i)}, \dots, \alpha_{n\sigma(i)})^T$. Тоді дуальний модуль P_i має єдиний мінімальний надмодуль $X_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,\sigma(i)-1}, \alpha_{i\sigma(i)}-1, \alpha_{i\sigma(i)+1}, \dots, \alpha_{in})$. Отже, модуль πP_i має єдиний мінімальний надмодуль πX_i, а цоколь фактор-модуля $P_i/(\pi P_i)$ є простим: $\mathrm{soc}\,(P_i/(\pi P_i)) = \pi X_i/(\pi P_i) \simeq U_{\sigma(i)} \simeq P_{\sigma(i)}/(\mathrm{rad}P_{\sigma(i)})$. За лемою 6.11 прості Λ-модулі $\pi X_i/(\pi P_i)$ та $\pi X_j/(\pi P_j)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $P_i \simeq P_j$, тобто цоколі фактор-модулів $\pi X_i/(\pi P_i)$ та $\pi X_j/(\pi P_j)$ неізоморфні при $i \neq j$.

Враховуючи, що $\Lambda/(\pi\Lambda) \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \pi X_i/(\pi P_i) \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_{\sigma(i)}$, отримуємо, що фактор-кільце $\Lambda/\pi\Lambda$ фробеніусове з підстановкою Накаями $\nu = \sigma$.

Навпаки, нехай Λ — зведений черепичний порядок і фактор-кільце $\Lambda/\pi\Lambda$ фробеніусове. Тоді існує підстановка $\nu \in S_n$ така, що для кожного i нерозкладний проективний Λ-модуль P_i має єдиний мінімальний надмодуль $X_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,\nu(i)-1}, \alpha_{i\nu(i)} - 1, \alpha_{i,\nu(i)+1}, \dots, \alpha_{in})$.

Умова X_i є Λ-модулем дає наступну систему нерівностей:

$$\begin{gathered}
\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik} \text{ при } j, k \neq \nu(i);\\
(\alpha_{i\nu(i)} - 1) + \alpha_{\nu(i)k} \geq \alpha_{ik} \text{ при } k \neq \nu(i);\\
\alpha_{ij} + \alpha_{j\nu(i)} \geq \alpha_{i\nu(i)} - 1 \text{ при } j \neq \nu(i);\\
(\alpha_{i\nu(i)} - 1) + 0 \geq (\alpha_{i\nu(i)} - 1) \text{ при } j = k = \nu(i).
\end{gathered}$$

Додатково до кільцевих нерівностей додалися тут лише нерівності $(\alpha_{i\nu(i)}-1)+\alpha_{\nu(i)k} \geq \alpha_{ik}$ при $k \neq \nu(i)$. Зазначимо, що звідси слідує, що $\nu(i) \neq i$.

Оскільки модуль P_i не має інших мінімальних надмодулів, то для довільного $j \neq i, \nu(i)$ існує $k = k(j) \neq i, j$ таке що $(\alpha_{ij} - 1) + \alpha_{jk} < \alpha_{ik}$. Враховуючи, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$, маємо рівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$.

Нехай $k \neq \sigma(i)$. Розглянемо послідовність рівностей:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk_1} = \alpha_{ik_1},\ k_1 \neq j, \nu(i);$$
$$\alpha_{ik_1} + \alpha_{k_1k_2} = \alpha_{ik_2},\ k_2 \neq k_1, \nu(i);$$
$$\alpha_{ik_2} + \alpha_{k_2k_3} = \alpha_{ik_3},\ k_3 \neq k_2, \nu(i);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

Припустимо, що $k_l \neq \sigma(i)$ для довільного натурального l. Тоді в послідовності чисел $k_1, k_2, \dots$ числа почнуть повторюватися. Нехай $k_u = k_v$, $v > u$. Маємо $v - u$ рівностей

$$\alpha_{ik_u} + \alpha_{k_uk_{u+1}} = \alpha_{ik_{u+1}};$$
$$\alpha_{ik_{u+1}} + \alpha_{k_{u+1}k_{u+2}} = \alpha_{ik_{u+2}};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{ik_{v-1}} + \alpha_{k_{v-1}k_v} = \alpha_{ik_v}.$$

Додаючи всі ці рівності, отримаємо

$$\alpha_{ik_u} + \alpha_{k_uk_{u+1}} + \alpha_{k_{u+1}k_{u+2}} + \dots + \alpha_{k_{v-1}k_v} = \alpha_{ik_v}.$$

Звідси

$$\alpha_{k_uk_{u+1}} + \alpha_{k_{u+1}k_{u+2}} + \dots + \alpha_{k_{v-1}k_u} = 0.$$

Остання рівність суперечить зведеності порядку Λ. Отже, існує натуральне число s таке, що $k_s = m \neq i, \nu(i)$ і $\alpha_{im} + \alpha_{m\nu(i)} = \alpha_{i\nu(i)}$. Тоді маємо

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk_1} = \alpha_{ik_1}, \quad k_1 \neq j, \nu(i);$$
$$\alpha_{ik_1} + \alpha_{k_1k_2} = \alpha_{ik_2}, \quad k_2 \neq k_1, \nu(i);$$
$$\alpha_{ik_2} + \alpha_{k_2k_3} = \alpha_{ik_3}, \quad k_3 \neq k_2, \nu(i);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{ik_{s-1}} + \alpha_{k_{s-1}k_s} = \alpha_{ik_s}, \quad k_s = m;$$
$$\alpha_{ik_s} + \alpha_{k_s\nu(i)} = \alpha_{i\nu(i)}.$$

Додаючи всі ці рівності, отримаємо

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk_1} + \alpha_{k_1k_2} + \alpha_{k_2k_3} + \dots + \alpha_{k_{s-1}k_s} + \alpha_{k_s\nu(i)} = \alpha_{i\nu(i)}.$$

Остання рівність можлива лише при

$$\alpha_{jk_1} + \alpha_{k_1k_2} + \alpha_{k_2k_3} + \dots + \alpha_{k_{s-1}k_s} + \alpha_{k_s\nu(i)} = \alpha_{j\nu(i)}.$$

Таким чином, $\alpha_{ij} + \alpha_{j\nu(i)} = \alpha_{i\nu(i)}$. За теоремою 7.2 порядок Λ горенштейновий з підстановкою $\sigma = \nu$. $\square$

8 Сагайдаки черепичних порядків

Означення 8.1. *За Габріелем скінченний орієнтований граф називається сагайдаком.*

Означення 8.2. *Нехай A — напівдосконале нетерове справа кільце з радикалом Джекобсона R, $P_1, \ldots, P_s$ — попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Нехай проективним накриттям $P(P_iR)$ модуля P_iR є:*

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Співставимо модулям $P_1, \ldots, P_s$ точки з номерами (вершини графа) $1, \ldots, s$ та з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий орієнтований граф називається сагайдаком кільця A та позначається $Q(A)$.
Аналогічно визначається лівий сагайдак $Q'(A)$ нетерового зліва кільця A.

З означення проективного накриття випливає, що $Q(A) = Q(A/R^2)$. Якщо кільце A є напівдосконалим і таким, що A/R^2 є артіновим справа кільцем, тоді $Q(A)$ визначається за формулою $Q(A) = Q(A/R^2)$. Якщо A/R^2 є артіновим зліва кільцем, то $Q'(A) = Q'(A/R^2)$.

Зазначимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кільця, еквівалентного у розумінні Моріти даному кільцю.

Якщо R — радикал Джекобсона зведеного черепичного порядку Λ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, то $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ при $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_{1 \leq k \leq n}\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Теорема 8.3. *Сагайдак $Q(\Lambda)$ черепичного порядку Λ над дискретно нормованим кільцем O є сильно зв'язним. Якщо Λ є зведеним порядком, тоді $[Q(\Lambda)]$ є $(0,1)$-матрицею та $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$.*

Доведення. Оскільки Λ є первинним нетеровим напівдосконалим кільцем, то за /[**?**], теорема 4.1/ маємо, що $Q(\Lambda)$ є сильно зв'язним сагайдаком.

Нехай Λ — зведений порядок, тоді $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для $i, j = 1, \ldots, n$. Тоді $\gamma_{ii} = \min\limits_{1 \leq k \leq n}\{\beta_{ik} + \beta_{ki}\} = \min\{\min\limits_{1 \leq k \leq n,\, k \neq i}\{\beta_{ik} + \beta_{ki}\}, 2\}$. Тобто γ дорівнює або 1, або 2. Якщо $i \neq j$, тоді $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ та $\gamma_{ij} = \min\{\min\limits_{1 \leq k \leq n,\, k \neq i,j}\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj}\}, \alpha_{ij} + 1\}$. Отже, γ дорівнює або α_{ij}, або $\alpha_{ij} + 1$.
Із будь-якою незвідною Λ-граткою M з $\mathcal{O}$-базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n)$ зв'яжемо впорядковану множину із n чисел $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тоді

$$[P_i] = (\alpha_{i1}, \ldots, 0, \ldots, \alpha_{in}), [P_iR] = (\alpha_{i1}, \ldots, 1, \ldots, \alpha_{in}) = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}),$$

$$[P_iR^2] = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in}).$$

Отже, $\vec{q_i} = [P_iR^2] - [P_iR]$ є $(0,1)$-вектор. Припустимо, що одиничні координати вектора мають номери $j_1, \ldots, j_m$. Тоді маємо $P_iR/P_iR^2 = U_{j_1} \oplus \ldots \oplus U_{j_m}$. Таким чином, враховуючи означення сагайдака $Q(\Lambda)$, вершина i з'єднується з кожною із вершин $j_1, \ldots, j_m$ тільки однією стрілкою. Отже, матриця суміжності сагайдака $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$. Теорема доведена. $\square$

Приклади.

1. Для циклічного горенштейнового черепичного порядку $H_s = H_s(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(H_s)\}$ обчислимо матрицю суміжності $[Q(H_s)]$ його сагайдака $Q(H_s)$.

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

і

$$[Q(H_s)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $Q(H_s)$ є простим циклом C_s.

2. $T_{k,s} = T_{k,s}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(T_{k,s})\}$, де

$$\mathcal{E}(T_{k,s}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & k & \dots & 0 & 0 \\ k & k & k & \dots & k & 0 \end{pmatrix},.$$

є циклічний горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & s-1 & s \\ s & 1 & 2 & \dots & s-2 & s-1 \end{pmatrix},$$

$k \geq 1$. Якщо $k = 1$, то $T_{1,s} = H_s$. Для $k \geq 2$ маємо

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & k & \dots & 1 & 0 \\ k & k & k & \dots & k & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & k & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & k & \dots & 2 & 0 \\ k+1 & k & k & \dots & k & 2 \end{pmatrix}$$

і $[Q(T_{k,s})] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R) = E + [C_s]$. Для такого сагайдака $Q(T_{k,s})$ ми використовуємо позначення $\mathcal{L}C_s$.

Покажемо, що сагайдаки горенштейнових черепичних порядків є сильно зв'язними. Добре відомо, що сагайдаки квазіфробеніусових кілець є сильно зв'язними. Для будь-якого горенштейнового черепичного порядку Λ скінченновимірна алгебра $\Lambda/\pi^m\Lambda$ є квазіфробеніусовою, де m — довільне ціле число. Тому сагайдак такої алгебри є сильно зв'язним. Оскільки $\pi^2 \in R^2$, то $\Lambda \supset R^2 \supset \pi^2\Lambda \supset \pi^t\Lambda$ для $t \geq 2$, і $R/R^2 \simeq (R/\pi^t\Lambda) \; / \; \big(R^2/\pi^t\Lambda\big)$. Отже, $Q(\Lambda) = Q(\Lambda/\pi^t\Lambda)$. Звідки $Q(\Lambda)$ є сильно зв'язним.

Оскільки черепичний порядок Λ є $SPSD$ - кільцем, то сагайдак $Q(\Lambda)$ є простим, тобто не містить кратних стрілок і петель.

9 $(0,1)$-порядки та частково впорядковані множини

Зведений $(0,1)$-порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ задає частковий порядок на множині $P_\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ за правилом: $i \leq j$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$. Дійсно, $(P_\Lambda, \leq)$ є частково впорядкованою множиною, оскільки $\alpha_{ii} = 0$ має наслідком $i \leq i$ (рефлексивність). Далі, $\alpha_{ij} = 0$ та $\alpha_{ji} = 0$ разом не можуть дорівнювати нулю для зведеного черепичного порядку, тоді $(i \leq j \bigwedge j \leq i) \Rightarrow i = j$ (антисиметричність). Якщо $\alpha_{ij} = 0$, $\alpha_{jk} = 0$, тоді з кільцевих нерівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ випливає, що й $\alpha_{ik} = 0$, тобто $(i \leq j \bigwedge j \leq k) \Rightarrow i \leq k$ (транзитивність).

Навпаки, за кожною скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ можна побудувати зведений черепичний $(0,1)$-порядок $\Lambda(P)$ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda(P)) = (\alpha_{ij})$, де $\alpha_{ij} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $p_i \leq p_j$, та $\alpha_{ij} = 1$ в інших випадках. Зрозуміло, що $\Lambda(P) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda(P))\}$ є зведеним $(0,1)$-порядком.

Нехай P_{max} — множина всіх максимальних елементів P, P_{min} — множина всіх мінімальних елементів P, $P_{max} \times P_{min}$ — їх декартовий добуток.

Означення 9.1. *Нехай $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина (ч.в.м.). Діаграмою ч.в.м. P є сагайдак $Q(P)$ з множиною вершин $VQ = \{1, \ldots, n\}$, та в $Q(P)$ існує стрілка $\sigma : k \to l$ тоді й тільки тоді, коли $p_k < p_l$ та не існує елемента p_j, такого, що $p_k \leq p_j \leq p_l$, де $p_j \neq p_k$, $p_j \neq p_l$.*

Зокрема, якщо $P = P_{min} = P_{max}$, то отримуємо повний простий сагайдак, що має по одній петлі в кожній вершині. Матриця показників такого $(0,1)$-порядку Λ_n має нулі тільки на головній діагоналі.

Теорема 9.2. *Сагайдак $Q(\Lambda(P))$ збігається з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$, що отримується з діаграми $Q(P)$ доданням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{max} \times P_{min}$.*

Доведення. Припустимо, що в $Q(P)$ існує стрілка з вершини s у вершину t. Це означає, що $\alpha_{st} = 0$ та не має такого індексу k $(k \neq s, t)$, що $\alpha_{sk} = 0$ та $\alpha_{kt} = 0$. Елементи β_{ss} та β_{tt} матриці $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$ дорівнюють 1. Тоді $\gamma_{sk} = \min\limits_{1 \leq k \leq n} (\beta_{sk} + \beta_{kt}) = 1$, де $\gamma_{sk} \in \mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$. З цього випливає, що $\gamma_{st} - \beta_{st} = 1 - \alpha_{st} = 1 - 0 = 1$. Таким чином, в сагайдаку $Q(\Lambda(P))$ є стрілка, що з'єднує вершину s з вершиною t.

Припустимо, що $p \in P_{max}$, тобто $\alpha_{pk} = 1$ для $k \neq p$. Тоді всі елементи p-го рядка матриці $\mathcal{E}(R)$ є одиницями : $(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pn}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$.

Аналогічно, якщо $q \in P_{min}$, тоді q-ий рядок $(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T$ матриці $\mathcal{E}(R)$ є $(1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T$. Отже, $\gamma_{pq} = 2$, $\beta_{pq} = 1$ та в $Q(\Lambda(P))$ є стрілка з вершини p в вершину q.

Таким чином доведено, що $\tilde{Q}(P)$ є підсагайдаком сагайдака $Q(\Lambda(P))$.

Доведемо обернене включення. Припустимо, що $\gamma_{pq} = 2$. Тоді зрозуміло, що

$$(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pq}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$$

та

$$(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T.$$

Тоді $p \in P_{max}$, $q \in P_{min}$ та в $\tilde{Q}(P)$ існує стрілка між p та q.

Припустимо, що $\gamma_{pq} = 1$ та $\beta_{pq} = 0$. Отже $p \neq q$. Тоді $\beta_{pq} = \alpha_{pq} = 0$ та $p < q$. Оскільки $\gamma_{pq} = \min\limits_{1 \leq k \leq n} (\beta_{pk} + \beta_{kp})$, то $\beta_{pk} + \beta_{kq} \geq 1$ для $k = 1, \ldots, n$. Звідки при $k \neq p, q$ маємо $\alpha_{pk} + \alpha_{kp} \geq 1$. З цього випливає, що нема такого номера k, $k \neq p, q$, що $\alpha_{pk} = \alpha_{kq} = 0$. Тобто в $\tilde{Q}(P)$ існує стрілка з p в q. Таким чином, $Q(\Lambda(P)) \subseteq \tilde{Q}(P)$. Теорема доведена. $\square$

Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ називається *сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною* P.

Очевидно, що $\tilde{Q}(P)$ є сильно зв'язним просто влаштованим сагайдаком.

10 Ізоморфізм горенштейнових порядків

Два зведених напівмаксимальних кільця в $M_n(D)$ ізоморфні тоді та тільки тоді, коли їх матриці показників отримуються одна з одної перетвореннями наступних двох типів:

(1) віднімання від i-го рядка цілого раціонального числа з одночасним додаванням до i-го стовпчика цього ж числа;

(2) одночасна перестановка двох рядків та відповідних їм стовпчиків.

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — первинне напівмаксимальне кільце, $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$. Припустимо, що A — напівмаксимальне кільце з матрицею показників (a_{ij}), отриманою з матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ в результаті перетворення типу (1), тобто

Твердження 10.1. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — зведений черепичний порядок, $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$. Припустимо, що A — зведений черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(A)\} = (\theta_{ij})$, отриманою з матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ перетвореннями типу (1). Тоді $[Q(\Lambda)] = [Q(A)]$. Якщо Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma(\Lambda)$, тоді A — також зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma(A) = \sigma(\Lambda)$.*

Доведення. Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — первинне напівмаксимальне кільце, $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$. Припустимо, що A — напівмаксимальне кільце з матрицею показників (a_{ij}), отриманою з матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ в результаті перетворення типу (1), тобто

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq l, j \neq l, \\ 0, & \text{якщо } i = l, j = l, \\ \alpha_{lj} - t, & \text{якщо } i = l, j \neq l, \\ \alpha_{il} + t, & \text{якщо } i \neq l, j = l, \end{cases}$$

де t — ціле раціональне число. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ для деяких i, j, k, то й $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$. А оскільки перетворення оборотне, то і обернене перетворення має такий же самий вигляд. Отже, з рівності $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$ випливає рівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Тому $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$ в тому та лише в тому випадку, коли $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$.

Більше того, рівності $\gamma_{ij} = \beta_{ij}$, $\nu_{ij} = \mu_{ij}$ або нерівності $\gamma_{ij} > \beta_{ij}$, $\nu_{ij} > \mu_{ij}$ виконуються одночасно для елементів матриць $(\beta_{ij}) = \mathcal{E}(rad\Lambda)$, $(\mu_{ij}) = \mathcal{E}(radA)$, $(\gamma_{ij}) = \mathcal{E}((rad\Lambda)^2)$, $(\nu_{ij}) = ((radA)^2)$. Тому $\mathcal{E}((rad\Lambda)^2) - \mathcal{E}(rad\Lambda) = \mathcal{E}((radA)^2) - \mathcal{E}(radA)$, тобто $[Q(\Lambda)] = [Q(A)]$.

Нехай тепер зведений черепичний порядок Λ є горенштейновим з підстановкою Кириченка σ, тобто $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$. Тоді $\theta_{ij} + \theta_{j\sigma(i)} = \theta_{i\sigma(i)}$. Це означає, що кільце A також горенштейнове з тією ж самою підстановкою Кириченка $\sigma(\Lambda)$. Твердження доведено.

Таким чином, при перетвореннях першого типу підстановка Кириченка та сагайдак зведеного горенштейнового черепичного порядку не змінюються. $\square$

Нехай τ — підстановка, що задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ при перетвореннях другого типу. Тобто рядок і стовпчик з номером i стає $\tau(i)$-им.

Твердження 10.2. *При перетвореннях другого типу матриця суміжності $[\tilde{Q}]$ сагайдака $Q(A)$ змінюється за формулою: $[\tilde{Q}] = P_\tau^T[Q]P_\tau$, де $[Q] = [Q(\Lambda)]$. Якщо Λ— зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma(\Lambda)$, тоді A — також зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma(A) = \tau^{-1}\sigma(\Lambda)\tau$.*

Доведення. Нехай τ— підстановка, що задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ при перетвореннях другого типу. Тоді $\theta_{ij} = \alpha_{\tau(i)\tau(j)}$ і $\mathcal{E}(A) = P_\tau^T \mathcal{E}(\Lambda) P_\tau$, де $P_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{i\tau(i)}$ — матриця перестановки, e_{ij} — матричні одиниці, P_τ^T — транспонована матриця P_τ. Оскільки $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ та $\alpha_{ij} = \theta_{\tau^{-1}(i)\tau^{-1}(j)}$, то $\theta_{\tau^{-1}(i)k} + \theta_{k\tau^{-1}(\sigma(i))} = \theta_{\tau^{-1}(i)\tau^{-1}(\sigma(i))}$. Отже, підстановка Кириченка $\sigma(A) = \pi$ кільця A задовольняє умову $\pi(\tau^{-1}(i)) = \tau^{-1}(\sigma(i))$ для всіх i. Звідси знаходимо $\pi = \tau^{-1}\sigma\tau$. Оскільки

$$\mu_{ij} = \beta_{\tau(i)\tau(j)}, \quad \nu_{ij} = \min_k(\mu_{ik} + \mu_{kj}) = \min_l(\beta_{\tau(i)l} + \beta_{l\tau(j)}) = \gamma_{\tau(i)\tau(j)},$$

то

$$\tilde{q}_{ij} = \nu_{ij} - \mu_{ij} = \gamma_{\tau(i)\tau(j)} - \beta_{\tau(i)\tau(j)} = q_{\tau(i)\tau(j)},$$

де $[\tilde{Q}] = (\tilde{q}_{ij})$ — матриця суміжності сагайдака $Q(A)$ кільця A. Твердження доведено. $\square$

Відзначимо, що при перетвореннях другого типу не змінюється тип підстановки. Тому для опису горенштейнових напівмаксимальних кілець досить описати кільця з різними типами підстановок. Крім цього, для спрощення викладок можна вважати, що перший рядок матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ нульовий. Цього завжди можна досягти перетвореннями першого типу. При цьому елементи матриці показників кільця залишаться невід'ємними.

Дійсно, нехай $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ —матриця показників та $\alpha_{ij} \geq 0$. Віднімемо від елементів j-го стовпчика число α_{1j}, а до елементів j-го рядка додамо це число. Тоді отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21}+\alpha_{12} & 0 & \alpha_{12}+\alpha_{23}-\alpha_{13} & \cdots & \alpha_{12}+\alpha_{2s}-\alpha_{1s} \\ \alpha_{31}+\alpha_{13} & \alpha_{13}+\alpha_{32}-\alpha_{12} & 0 & \cdots & \alpha_{13}+\alpha_{3s}-\alpha_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{s1}+\alpha_{1s} & \alpha_{1s}+\alpha_{s2}-\alpha_{12} & \alpha_{1s}+\alpha_{s3}-\alpha_{13} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки для елементів матриці $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ виконуються кільцеві нерівності, то $\alpha_{1i}+\alpha_{ij}-\alpha_{1j} \geq 0$, тобто після таких перетворень отримали матрицю з невід'ємними елементами.

Зауваження. Підстановка Кириченка не містить циклів довжини один.

Наведемо приклад опису всіх горенштейнових порядків з даною підстановкою Кириченка.

Нехай $n = 7$, $\sigma = (1234)(567)$. Умова горенштейновості дає систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{23} = \alpha_{21} = \alpha_{24}+\alpha_{43} = \alpha_{25}+\alpha_{53} = \alpha_{26}+\alpha_{63} = \alpha_{27}+\alpha_{73}, \\ \alpha_{34} = \alpha_{31} = \alpha_{24} = \alpha_{35}+\alpha_{54} = \alpha_{36}+\alpha_{64} = \alpha_{37}+\alpha_{74}, \\ \alpha_{41} = \alpha_{21} = \alpha_{43}+\alpha_{31} = \alpha_{45}+\alpha_{51} = \alpha_{46}+\alpha_{61} = \alpha_{47}+\alpha_{71}, \\ \alpha_{56} = \alpha_{51} = \alpha_{26} = \alpha_{53}+\alpha_{36} = \alpha_{54}+\alpha_{46} = \alpha_{57}+\alpha_{76}, \\ \alpha_{67} = \alpha_{61} = \alpha_{27} = \alpha_{63}+\alpha_{37} = \alpha_{64}+\alpha_{47} = \alpha_{65}+\alpha_{57}, \\ \alpha_{75} = \alpha_{71} = \alpha_{25} = \alpha_{73}+\alpha_{35} = \alpha_{74}+\alpha_{45} = \alpha_{76}+\alpha_{65}. \end{cases}$$

Звідси видно, що $\alpha_{45} = \alpha_{63}$, $\alpha_{46} = \alpha_{73}$, $\alpha_{47} = \alpha_{53}$. Підставимо у рівність $\alpha_{45}+\alpha_{51} = \alpha_{46}+\alpha_{61}$ замість α_{51} та α_{61} вирази, що їм дорівнюють — $\alpha_{54}+\alpha_{46}$ та $\alpha_{63}+\alpha_{37}$. Отримаємо $\alpha_{45}+(\alpha_{54}+\alpha_{46}) = \alpha_{46}+(\alpha_{63}+\alpha_{37})$, тобто $\alpha_{54} = \alpha_{37}$. Тоді з рівностей $\alpha_{35}+\alpha_{54} = \alpha_{37}+\alpha_{74}$ та $\alpha_{73}+\alpha_{35} = \alpha_{74}+\alpha_{45}$ відразу випливає, що $\alpha_{35} = \alpha_{74}$ та $\alpha_{73} = \alpha_{45}$. Тому $\alpha_{73} = \alpha_{45} = \alpha_{63} = \alpha_{46}$. Оскільки $\alpha_{45}+\alpha_{51} = \alpha_{46}+\alpha_{61}$, то $\alpha_{51} = \alpha_{61}$. Тоді з рівностей $\alpha_{57}+\alpha_{76} = \alpha_{65}+\alpha_{57}$ та $\alpha_{53}+\alpha_{36} = \alpha_{64}+\alpha_{47}$ слідує, що $\alpha_{76} = \alpha_{65}$ а $\alpha_{36} = \alpha_{64}$. У рівності $\alpha_{25}+\alpha_{53} = \alpha_{27}+\alpha_{73}$ підставимо замість α_{25} та α_{27} суми $\alpha_{73}+\alpha_{35}$ та $\alpha_{64}+\alpha_{47}$. Отримаємо $(\alpha_{73}+\alpha_{35})+\alpha_{53} = (\alpha_{64}+\alpha_{47})+\alpha_{73}$, звідки $\alpha_{35} = \alpha_{64}$. Тому рівність $\alpha_{35}+\alpha_{54} = \alpha_{36}+\alpha_{64}$ дає $\alpha_{54} = \alpha_{36}$, а тоді з $\alpha_{53}+\alpha_{36} = \alpha_{54}+\alpha_{46}$ випливає, що $\alpha_{53} = \alpha_{46}$. Отже, маємо такі рівності: $\alpha_{35} = \alpha_{36} = \alpha_{37} = \alpha_{54} = \alpha_{64} = \alpha_{74}$, $\alpha_{53} = \alpha_{63} = \alpha_{73} = \alpha_{45} = \alpha_{46} = \alpha_{47}$. Так як $\alpha_{61} = \alpha_{63}+\alpha_{37} = \alpha_{73}+\alpha_{35} = \alpha_{71}$, то $\alpha_{51} = \alpha_{61} = \alpha_{71} = \alpha_{25} = \alpha_{26} = \alpha_{27} = \alpha_{56} = \alpha_{67} = \alpha_{75}$. Тому з рівності $\alpha_{65}+\alpha_{57} = \alpha_{76}+\alpha_{65}$ отримуємо, що $\alpha_{57} = \alpha_{76}$ і тоді $\alpha_{57} = \alpha_{76} = \alpha_{65}$. Покладемо $\alpha_{35} = \alpha$, $\alpha_{57} = \gamma$. Виразимо інші елементи матриці через α та γ. $\alpha_{25} = \alpha_{76}+\alpha_{65} = 2\gamma$, $\alpha_{53} = 2\gamma-\alpha_{36} = 2\gamma-\alpha$, $\alpha_{24} = 2\alpha$, $\alpha_{21} = \alpha_{25}+\alpha_{53} = 2\gamma+(2\gamma-\alpha) = 4\gamma-\alpha$, $\alpha_{43} = \alpha_{21}-\alpha_{31} = 4\gamma-\alpha-2\alpha = 4\gamma-3\alpha$. Матриця показників набуде вигляду

$$
\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4\gamma-\alpha & 0 & 4\gamma-\alpha & 2\alpha & 2\gamma & 2\gamma & 2\gamma \\
2\alpha & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\
4\gamma-\alpha & 0 & 4\gamma-3\alpha & 0 & 2\gamma-\alpha & 2\gamma-\alpha & 2\gamma-\alpha \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & 0 & 2\gamma & \gamma \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & \gamma & 0 & 2\gamma \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & 2\gamma & \gamma & 0
\end{pmatrix},
$$

де $\alpha \geq 1$, $\gamma \geq 1$, $4\gamma - 3\alpha \geq 0$. Обчислимо матрицю суміжності сагайдака $Q(\Lambda)$.

$$
\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4\gamma-\alpha & 1 & 4\gamma-\alpha & 2\alpha & 2\gamma & 2\gamma & 2\gamma \\
2\alpha & 0 & 1 & 2\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\
4\gamma-\alpha & 0 & 4\gamma-3\alpha & 1 & 2\gamma-\alpha & 2\gamma-\alpha & 2\gamma-\alpha \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & 1 & 2\gamma & \gamma \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & \gamma & 1 & 2\gamma \\
2\gamma & 0 & 2\gamma-\alpha & \alpha & 2\gamma & \gamma & 1
\end{pmatrix},
$$

$\mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$, де

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & 0 & (1, 4\gamma-3\alpha) & 1 \\
4\gamma-\alpha+1 & 2 & 4\gamma-\alpha & (2\alpha+1, 4\gamma-\alpha) \\
(2\alpha+1, 4\gamma-\alpha) & 1 & 2 & 2\alpha \\
4\gamma-\alpha & (1, 4\gamma-3\alpha) & 4\gamma-3\alpha+1 & 2 \\
2\gamma+1 & 1 & 2\gamma-\alpha+1 & \alpha+1 \\
2\gamma+1 & 1 & 2\gamma-\alpha+1 & \alpha+1 \\
2\gamma+1 & 1 & 2\gamma-\alpha+1 & \alpha+1
\end{pmatrix},
$$

$$
B = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
2\gamma+1 & 2\gamma+1 & 2\gamma+1 \\
\alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\
2\gamma-\alpha+1 & 2\gamma-\alpha+1 & 2\gamma-\alpha+1 \\
2 & 2\gamma & \gamma+1 \\
\gamma+1 & 2 & 2\gamma \\
2\gamma & \gamma+1 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Тоді

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1, 4\gamma - 3\alpha) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & (1, 4\gamma - 3\alpha) & 1 & 1 & 1 \\ (1, 4\gamma - 3\alpha) & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1, 4\gamma - 3\alpha) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11 Сагайдаки горенштейнових напівмаксимальних порядків.

Напівмаксимальний порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ називається трикутним, якщо матриця $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ є трикутною, тобто, $\alpha_{ij} = 0$ для $i \leq j$.

Твердження 11.1. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ — зведений трикутний напівмаксимальний порядок такий, що $Q(\Lambda)$ є простим циклом C_s або сагайдаком $\mathcal{L}C_s$. Тоді Λ — горенштейновий напівмаксимальний порядок.*

Доведення. Нехай $s = 3$.

Тоді $\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{E}(R^2) = \begin{bmatrix} (2, \alpha_{21}, \alpha_{31}) & (1, \alpha_{32}) & 0 \\ (\alpha_{31}, \alpha_{21} + 1) & (2, \alpha_{21}, \alpha_{32}) & (1, \alpha_{21}) \\ (\alpha_{32} + \alpha_{21}, \alpha_{31} + 1) & (\alpha_{31}, \alpha_{32} + 1) & (2, \alpha_{31}, \alpha_{32}) \end{bmatrix},$$

де $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = min(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$.

Оскільки $Q(\Lambda)$ не має стрілки з 2 в 1 і з 3 в 2, то $\alpha_{21} = (\alpha_{31}, \alpha_{21} + 1)$ і $\alpha_{32} = (\alpha_{31}, \alpha_{32} + 1)$. Тому $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = k$ і $\Lambda = T_{k,3}$.

З трикутності порядку Λ та кільцевих нерівностей $\alpha_{im} + \alpha_{mj} \geq \alpha_{ij}$ отримуємо: $\alpha_{ij} \leq \alpha_{mj}$ для $i \leq m$ і $\alpha_{ij} \leq \alpha_{im}$ для $j \leq m$. Нехай $s \geq 4$. Тоді $\alpha_{21} = (\alpha_{21} + 1, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{s1}) = (\alpha_{31}, \ldots, \alpha_{s1})$. Ми отримуємо, що $\alpha_{q1} = \alpha_{21}$ для деякого $q \geq 3$.

Нехай p є найбільше число таке, що $\alpha_{p1} = \alpha_{21} = k$ і $p \neq s$. Тоді $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \ldots = \alpha_{p1} = k$ і $\alpha_{i1} > k$ для $i > p$. Але $\alpha_{p1} = k = (k+1, k+\alpha_{p2}, \ldots, k+\alpha_{pp-1}, \alpha_{p+11}, \ldots, \alpha_{s1}) = (\alpha_{p+11}, \ldots, \alpha_{s1})$. Отримали протиріччя. Звідси слідує, що $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \ldots = \alpha_{s1} = k$.

Припустимо що $\alpha_{32} = \alpha < k$. Тоді $\alpha = (k, \alpha+1, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{s2}) = (\alpha_{42}, \ldots, \alpha_{s2})$. Нехай $\alpha_{p2} = \alpha$ і $\alpha_{p+12} > \alpha$. Тоді, як і вище, $\alpha = (\alpha_{p+12}, \ldots, \alpha_{s2})$. Знову отримали протиріччя, яке доводить, що $\alpha_{32} = \ldots = \alpha_{s2} = \alpha$. Тоді $\alpha_{s2} = \alpha = (k, \alpha+1, \alpha+\alpha_{s3}, \ldots, \alpha+\alpha_{ss-1})$. Оскільки Λ — зведений трикутний напівмаксимальний порядок, то $\alpha = k$. Так само ми отримаємо, що $\alpha_{ij} = k$ для $i > j$. Отже, порядок Λ має таку матрицю показників

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ k & k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k & k & k & \ldots & 0 & 0 \\ k & k & k & \ldots & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Напівмаксимальний горенштейновий циклічний порядок з такою матрицею показників і з підстановкою Кириченка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & s-1 & s \\ s & 1 & 2 & \ldots & s-2 & s-1 \end{pmatrix}$$

ми позначили через $T_{k,s} = T_{k,s}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(T_{k,s})\}$. Твердження доведено. □

Теорема 11.2. *Зведений напівмаксимальний порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ ізоморфний горенштейновому трикутному напівмаксимальному порядку тоді та тільки тоді, коли $Q(\Lambda)$ є простим циклом C_s або сагайдаком $\mathcal{L}C_s$. В цьому випадку Λ є ізоморфним порядку $T_{k,s}$.*

Доведення. Нехай Λ — зведений горенштейновий напівмаксимальний порядок, який ізоморфний трикутному порядку. Тоді Λ — також горенштейновий порядок. Сагайдаки ізоморфних кілець теж ізоморфні. Тому можна вважати, що Λ — трикутний порядок. Оскільки $P_1 = e_{11}\Lambda = (0, \ldots, 0)$, то ми маємо $\alpha_{1k} + \alpha_{k\sigma(1)} = \alpha_{1\sigma(1)} = 0$. Тому $\alpha_{k\sigma(1)} = 0$ для $k = 1, \ldots, s$. Якщо $\sigma(1) < s$, то $\alpha_{s\sigma(1)} = 0$ і $\alpha_{\sigma(1)s} = 0$. Так як Λ — зведений напівмаксимальний порядок, то $\alpha_{s\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)s} > 0$. Отже $\sigma(1) = s$.

Нехай $\alpha_{21} = k$. Очевидно, $\sigma(2) = 1$. Тому з рівності $\alpha_{2k} + \alpha_{k1} = \alpha_{21} = k$ маємо $\alpha_{31} = \alpha_{41} = \ldots = \alpha_{s1} = k$. Аналогічно $\sigma(3) = 2$ і $\alpha_{3k} + \alpha_{k2} = \alpha_{32}$. Звідси знаходимо $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{42} = \ldots = \alpha_{s2} = k$. Продовжуючи таким чином отримаємо, що $\Lambda = T_{k,s} = T_{k,s}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(T_{k,s})\}$. Матриці суміжності сагайдаків порядків $T_{k,s}$ при $k = 1$ та при $k > 1$ обчислено раніше. В першому випадку сагайдак є простим циклом C_s, а в другому — сагайдаком $\mathcal{L}C_s$.

Навпаки, нехай Λ — зведений напівмаксимальний порядок такий, що $Q(\Lambda) = C_s$ чи $Q(\Lambda) = \mathcal{L}C_s$. Припустимо, що простий цикл C_s в $Q(\Lambda)$ має вигляд

$$C_s = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & s-1 & & s & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \ldots & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \right\}.$$

В випадку, коли $Q(\Lambda) = C_s$ можна розглядати елементи $\pi^{\alpha_{12}} e_{12}, \ldots, \pi^{\alpha_{s-1s}} e_{s-1s}, \pi^{\alpha_{s1}} e_{s1} \in R$ як мінімальну систему твірних радикала R. Якщо ж $Q(\Lambda) = \mathcal{L}C_s$, то до наведеної вище множини твірних треба ще додати елементи $\pi^{r_{ii}} e_{ii} = \pi e_{ii}, \ i = 1, \ldots, s$.

Кожному елементу з $e_{ii}Re_{jj}$ відповідає шлях у сагайдаку $Q(\Lambda)$, який починається в точці i та закінчується в точці j. Елементу $\pi^{r_{ij}} e_{ij}$ $((r_{ij}) = \mathcal{E}(R))$ відповідає найкоротший шлях — шлях без циклів та петель. Тому

$$\pi^{r_{ij}} e_{ij} = \begin{cases} \pi^{\alpha_{ii+1}} e_{ii+1} \pi^{\alpha_{i+1i+2}} e_{i+1i+2} \cdots \pi^{\alpha_{j-1j}} e_{j-1j}, & \text{якщо } i < j \\ \pi^{\alpha_{ii+1}} e_{ii+1} \cdots \pi^{\alpha_{s-1s}} e_{s-1s} \pi^{\alpha_{s1}} e_{s1} \pi^{\alpha_{12}} e_{12} \cdots \pi^{\alpha_{j-1j}} e_{j-1j}, & \text{якщо } i > j \end{cases}.$$

Звідси маємо при $i \neq j$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ii+1} + \alpha_{i+1i+2} + \cdots + \alpha_{j-1j}, & \text{якщо } i < j \\ \alpha_{ii+1} + \alpha_{i+1i+2} + \cdots + \alpha_{s-1s} + \alpha_{s1} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{j-1j}, & \text{якщо } i > j \end{cases}.$$

Будь-який напівмаксимальний порядок ізоморфний порядку, матриця показників якого має нульовий перший рядок. Причому сагайдак $Q(\Lambda)$ та підстановка Кириченка σ при перетвореннях першого типу не змінюються. Тому можна вважати, що $\alpha_{1s} = 0$. Оскільки

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{s-1s} = \alpha_{1s} = 0,$$

то

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \cdots = \alpha_{s-1s} = 0.$$

Але тоді при $i < j$ маємо

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ii+1} + \cdots + \alpha_{j-1j} = 0.$$

Отже, порядок Λ — трикутний.

Нехай $Q(\Lambda) = C_s$. Тоді $r_{11} = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{s-1s} + \alpha_{s1}$. Оскільки $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \cdots = \alpha_{s-1s} = 0$, то $\alpha_{s1} = 1$. Тому при $i > j$ маємо

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ii+1} + \cdots + \alpha_{s-1s} + \alpha_{s1} + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{j-1j} = \alpha_{s1} = 1.$$

Таким чином

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(H_s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $Q(\Lambda) = \mathcal{L}C_s$. Тоді елементи πe_{ii} будуть входити в мінімальну систему твірних радикала R і відповідатимуть петлям у вершинах сагайдака. Так як петля — найкоротший шлях від вершини до тієї ж вершини, то

$$\pi^{r_{ii}} e_{ii} = \pi e_{ii} \neq \pi^{\alpha_{ii+1}} e_{ii+1} \pi^{\alpha_{i+1i+2}} e_{i+1i+2} \cdots \pi^{\alpha_{s-1s}} e_{s-1s} \pi^{\alpha_{s1}} e_{s1} \pi^{\alpha_{12}} e_{12} \cdots \pi^{\alpha_{i-1i}} e_{i-1i}.$$

Тому $\alpha_{s1} = k > 1$. α_{ij} при $i > j$ обчислюються як і раніше.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ii+1} + \cdots + \alpha_{s-1s} + \alpha_{s1} + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{j-1j} = \alpha_{s1} = k.$$

Отже

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(T_{k,s}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & k & \dots & 0 & 0 \\ k & k & k & \dots & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена. □

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ — первинний зведений напівмаксимальний горенштейновий порядок з підстановкою Кириченка σ.

Лема 11.3. *Якщо* $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ *для деяких* i, j, k, *то*

$$\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}.$$

Доведення. Якщо $i = k$, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$, але Λ є зведеним, тому ми маємо протиріччя. Отже, $i \neq k$. Для $i = j$ або $j = k$ наше твердження є тривіальним. Тому можна вважати, що всі i, j, k попарно не рівні між собою. Припустимо, що

$$\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} > \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}.$$

Додамо суму $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(j)}$ до обох частин нерівності. Тоді $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} > \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} + \alpha_{k\sigma(j)}$. Оскільки $\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} = \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{k\sigma(k)}$, то будемо мати $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} > \alpha_{k\sigma(j)}$. Додамо рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{j\sigma(i)}$ до обох частин утвореної нерівності. Ми отримаємо $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} > \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{j\sigma(i)}$. Отримали протиріччя, так як $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$, і $\alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)}$. Лема доведена. □

Лема 11.4. *Для* $i, j = 1, \dots, s$ *має місце наступна рівність:*

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

Доведення. Додамо такі рівності:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)},$$

$$\alpha_{ji} + \alpha_{i\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)}.$$

Отримаємо

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{i\sigma(j)} = \alpha_{i\sigma(j)} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)},$$

тобто

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

Лема доведена. □

Наслідок 11.5. *Якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ для деяких i, j, k, то $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$ для довільного натурального m.*

Для $i, j = 1, \ldots, s$ $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(i)}$ для довільного натурального m.

Наслідок 11.6. *Якщо для довільного $j \neq i$, $j \neq k$ $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} > \alpha_{ik}$ для деяких $i, k\, (i \neq k)$, то $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} > \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$.*

Доведення. Припустимо, що $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$. Нехай σ^n є тотожньою. За наслідком 11.5 ми маємо

$$\alpha_{\sigma^(n-m)(\sigma^m(i))\sigma^{n-m}(\sigma^m(j))} + \alpha_{\sigma^(n-m)(\sigma^m(j))\sigma^{n-m}(\sigma^m(k))} = \alpha_{\sigma^(n-m)(\sigma^m(i))\sigma^{n-m}(\sigma^m(k))}.$$

Отже, $\alpha_{\sigma^n(i)\sigma^n(j)} + \alpha_{\sigma^n(j)\sigma^n(k)} = \alpha_{\sigma^n(i)\sigma^n(k)}$, тобто $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Наслідок доведено. □

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ є зведений горенштейновий напівмаксимальний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $(i, j = 1, \ldots, s)$;
$\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, де $(\gamma_{ij}) = \min\limits_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$ і $[Q(\Lambda)] = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij}$.

Лема 11.7. *Для довільних $i, k = 1, \ldots, s$ і для кожного натурального числа m має місце рівність $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} = q_{ik}$.*

Доведення. Нехай $q_{ij} = 0$ для $i \neq j$. Тоді $\gamma_{ij} = \min\limits_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) = \beta_{ij}$. Якщо $k = i$ або $k = j$, то $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ ($\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, s$). Отже, існує k таке що $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$, де i, j, k попарно нерівні. В цьому випадку $\beta_{ik} = \alpha_{ik}, \beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$. За наслідком 11.5 ми маємо

$$\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} = \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}.$$

Але тоді $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ і $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = 0$.

Якщо $q_{ij} = 1$ для $i \neq j$, то $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ для всіх k. Нам треба довести що

$$\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} > \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$$

для $k = 1, \ldots, s$. Це очевидно для $i = k$ чи $j = k$. Отже, ми можемо вважати, що i, j, k попарно нерівні між собою. Нерівність $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ тоді перетворюється у нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$. За наслідком 11.6 ми маємо

$$\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \alpha_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} > \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$$

і $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} > \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$. Тому $q_{ij} = q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ для $i \neq j$.

Нехай $q_{ii} = 0$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 1$ для деякого $k \neq i$. За наслідком 11.5

$$\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \alpha_{\sigma^m(k)\sigma^m(i)} = 1.$$

Таким чином, $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 1$, і $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 0$.

Якщо $q_{ii} = 1$, то $\gamma_{ii} = 2$. Оскільки $\beta_{ii} + \beta_{ii} = 1 + 1 = 2$ для $i = 1, \ldots, s$, то $\beta_{ij} + \beta_{ji} \geq 2$ для $i \neq j$. Але $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ і за наслідком 11.5 ми маємо нерівність $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \beta_{\sigma^m(j)\sigma^m(i)} = \beta_{ij} + \beta_{ji} \geq 2$. Тому $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} \geq 2$ та $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 1$. Лема доведена. $\square$

Відзначимо, що сагайдак $Q(\Lambda)$ зведеного циклічного горенштейнового напівмаксимального порядку Λ з підстановкою Кириченка σ такою, що
$| < \sigma > | = n$ не завжди містить простий цикл довжини n.

Як приклад розглянемо зведений циклічний горенштейновий напівмаксимальний порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ з підстановкою Кириченка σ, де

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $[Q(\Lambda)]$.

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сагайдак $Q(\Lambda)$ має прості цикли, які проходять через вершину 1:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 3 & & 5 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 4 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 3 & & 6 & & 2 & & 4 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 3 & & 6 & & 2 & & 5 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 4 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & & 4 & & 6 & & 3 & & 5 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 6 & & 2 & & 5 & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\}.$$

Циклу довжини 6 сагайдак $Q(\Lambda)$ не має.

Твердження 11.8. *Сагайдак $Q(\Lambda)$ зведеного циклічного горенштейнового напівмаксимального порядку Λ з підстановкою Кириченка σ такою, що $| < \sigma > | = p$ — просте число, містить простий цикл довжини p.*

Доведення. Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ — зведений циклічний горенштейновий напівмаксимальний порядок з підстановкою Кириченка σ. Можна вважати, що

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

З кожної вершини сагайдака $Q(\Lambda)$ виходить хоча б одна стрілка. Припустимо, що в $Q(\Lambda)$ є стрілка, яка веде з вершини 1 у вершину a, тобто $q_{1a} = 1$. Оскільки

$$\sigma^{(a-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a & a+1 & \cdots & a-1 \end{pmatrix},$$

то $a = \sigma^{(a-1)}(1)$. Тоді за лемою **??** маємо

$$q_{\sigma^{(a-1)}(1)\sigma^{(a-1)}(a)} = q_{\sigma^{(a-1)}(1)\sigma^{2(a-1)}(1)} = 1.$$

Отже, з вершини a виходить стрілка у вершину $\sigma^{2(a-1)}(1)$. Аналогічно

$$q_{\sigma^{2(a-1)}(1)\sigma^{3(a-1)}(1)} = 1, \ldots, q_{\sigma^{k(a-1)}(1)\sigma^{(k+1)(a-1)}(1)} = 1,$$

де k — довільне натуральне число.

Підстановка $\sigma^{(a-1)}$ утворює циклічну групу $< \sigma^{(a-1)} >$ порядку $b = n\,/(a-1,\ n)$. Тому $\sigma^{b(a-1)}(1) = 1$ і сагайдак $Q(\Lambda)$ має простий цикл

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 1 & & \sigma^{(a-1)}(1) & & \sigma^{2(a-1)}(1) & & & & \sigma^{(b-1)(a-1)}(1) & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \right\}.$$

Якщо $n = p$ — просте число, то $b = p$ і сагайдак $Q(\Lambda)$ має простий цикл довжини p. Твердження доведено. $\square$

Припустимо, що підстановка Кириченка σ розкладається в добуток двох підстановок σ_1 і σ_2, які діють на множинах, що не перетинаються. Будемо вважати, що σ_1 діє на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$, а σ_2 — на множині $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Нехай $1 = e_1 + \cdots + e_{m+n}$ — розклад $1 \in \Lambda$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів. Позначимо $e = e_1 + \cdots + e_n$, $f = 1 - e$, $Q = Q(\Lambda)$ — сагайдак кільця Λ, $Q_1 = Q(e\Lambda e)$ — сагайдак кільця $e\Lambda e$, $Q_2 = Q(f\Lambda f)$ — сагайдак кільця $f\Lambda f$. Зрозуміло, що $e\Lambda e$ та $f\Lambda f$ — теж горенштейнові напівмаксимальні кільця з підстановками Кириченка σ_1 та σ_2. В загальному випадку можна стверджувати, що

a) якщо існує стрілка з вершини i у вершину j в сагайдаку $Q(\Lambda)$, то існує стрілка з вершини i у вершину j в сагайдаку $Q(e\Lambda e)$;

b) якщо в сагайдаку $Q(e\Lambda e)$ немає стрілки з вершини i у вершину j, то немає стрілки з вершини i у вершину j і в сагайдаку $Q(\Lambda)$.

Лема 11.9. *Нехай σ_1 та σ_2 — цикли, що не перетинаються, і довжини яких $| < \sigma_1 > | = n > 2$ та $| < \sigma_2 > | = m > 2$ взаємно прості. Тоді*

$$[Q] = \begin{pmatrix} [Q_1] & U_{n\times m} \\ U_{m\times n} & [Q_2] \end{pmatrix},$$

де $U_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ — $m \times n$*-матриця.*

Доведення. Порядки підстановок σ_1 та σ_2 взаємно прості, тому порядок підстановки $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ дорівнює mn. За основною лемою $q_{1n+1} = q_{\sigma^t(1)\sigma^t(n+1)} = q_{\sigma_1^t(1)\sigma_2^t(n+1)}$ для будь-якого натурального t. Якщо t змінюється від 1 до nm, то $\sigma_1^t(1)$ m разів пробігає від 1 до n, $\sigma_2^t(n+1)$ n разів пробігає від $n+1$ до $n+m$, але серед пар $(\sigma^t(1), \sigma^t(n+1))$ немає однакових. Тому $q_{ij} = q_{1n+1}$ при $i \leq n$, $j > n$. Аналогічно $q_{ij} = q_{n+11}$ при $i > n$, $j \leq n$. Оскільки сагайдак $Q(\Lambda)$ зведеного горенштейнового напівмаксимального кільця Λ є сильно зв'язним, то $q_{ij} = 1$ при $i \leq n$, $j > n$ та при $i > n$, $j \leq n$.

Припустимо, що існує стрілка з вершини i $(i \leq n)$ у вершину l $(l \leq n)$ в сагайдаку $Q(\Lambda)$. Тоді $\beta_{ij} + \beta_{jl} > \beta_{il}$ для будь-якого $j = 1, \ldots, n+m$. Ця нерівність буде виконуватись і при $j = 1, \ldots, n$, тобто існує стрілка з вершини i у вершину l в сагайдаку $Q(e\Lambda e)$.

Навпаки, нехай існує стрілка з вершини i $(i \leq n)$ у вершину l $(l \leq n)$ в сагайдаку $Q(e\Lambda e)$. Тоді $\beta_{ij} + \beta_{jl} > \beta_{il}$ для будь-якого $j = 1, \ldots, n$. Очевидно $l \neq \sigma(i)$.

Припустимо, що в сагайдаку $Q(\Lambda)$ немає стрілки з вершини i у вершину l. Тоді існує таке значення t, що $n < t \leq n+m$ і $\beta_{it} + \beta_{tl} = \beta_{il}$. При $i \neq l$ ми маємо $\alpha_{it} + \alpha_{tl} = \alpha_{il}$. Додаючи $\alpha_{l\sigma(i)}$ до обох частин рівності, отримаємо

$$\alpha_{it} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{il} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}.$$

Потім додамо $\alpha_{t\sigma(i)}$. Будемо мати

$$\alpha_{it} + \alpha_{t\sigma(i)} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{t\sigma(i)}.$$

Звідси $\alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{t\sigma(i)}$ або $\beta_{tl} + \beta_{l\sigma(i)} = \beta_{t\sigma(i)}$. Так як $t > n$, а $\sigma(i) \leq n$, то це протирічить тому, що $q_{t\sigma(i)} = 1$. Отже, існує стрілка з вершини i у вершину l в сагайдаку $Q(\Lambda)$.

Таким чином, при $i \neq l$ існує стрілка з вершини i у вершину l $(i, l \in I_1)$ сагайдака $Q(\Lambda)$ тоді та лише тоді, коли існує стрілка з вершини i у вершину l сагайдака $Q(e\Lambda e)$. Аналогічно при $t \neq k$ стрілка з вершини t у вершину k $(t, k \in I_2)$ сагайдака $Q(\Lambda)$ тоді та лише тоді, коли існує стрілка з вершини t у вершину k сагайдака $Q(f\Lambda f)$.

Нехай $i = l$. Тоді за припущенням $\alpha_{it} + \alpha_{ti} = \alpha_{ti} + \alpha_{it} = 1$, тобто сагайдак $Q(\Lambda)$ не має петлі у вершині t. Оскільки $q_{ik} = 1$ для $k > n$, ми маємо $\alpha_{it} + \alpha_{tk} > \alpha_{ik}$ при $k \neq t$. Додаючи α_{ti} до обох частин цієї рівності, отримаємо $1 + \alpha_{tk} > \alpha_{ti} + \alpha_{ik} \geq \alpha_{tk}$. Тому $\alpha_{ti} + \alpha_{ik} = \alpha_{tk}$, тобто $q_{tk} = 0$ для всіх $k > n, k \neq t$. Отже, сагайдак Q_2 не має стрілки з вершини t у вершину k, де $k \neq t, k = n+1, \ldots, n+m$. Це протирічить тому, що сагайдак $Q(f\Lambda f)$ є сильно зв'язним. Таким чином, у сагайдака $Q(\Lambda)$ існує петля у вершині i.

Лема доведена. □

Означення 11.10. *Нагадаємо що дійсна $s \times s$ — матриця $P = (p_{ij})$ називається двічі стохастичною якщо $\sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{s} p_{ij} = 1$ для довільних $i, j = 1, \dots, s$.*

Теорема 11.11. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, E(\Lambda)\}$ зведений циклічний горенштейновий напівмаксимальний порядок. Тоді $[Q(\Lambda)] = \lambda P$, де λ — натуральне число і матриця P двічі стохастична.*

Доведення. Нехай σ є циклічна підстановка. Тоді цілі

$$q_{ik}, q_{\sigma(i)\sigma(k)}, \dots, q_{\sigma^{s-1}(i)\sigma^{s-1}(k)}$$

lie в різних рядках та стовпчиках.

Нехай $C_i = \sum\limits_{j=1}^{s} q_{ij}$ і $D_j = \sum\limits_{i=1}^{s} q_{ij}$. Тоді $C_i = \sum\limits_{j=1}^{s} q_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{s} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = C_{\sigma^m(i)}$ і $D_j = \sum\limits_{i=1}^{s} q_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{s} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = D_{\sigma^m(j)}$ для будь-якого m, тобто $C_i = C$ and $D_j = D$ для $i, j = 1, \dots, s$. Очевидно, $\sum\limits_{i}^{s} C_i = \sum\limits_{i,j=1}^{s} q_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{s} D_j$. Тому $sC = sD$, тобто $C = D = \lambda$ та $[Q(\Lambda)] = \lambda(1/\lambda[Q(\Lambda)])$, де $P = 1/\lambda[Q(\Lambda)]$ — двічі стохастична. Теорема доведена. $\square$

Зауваження. Вимога, щоб горенштейновий напівмаксимальний порядок був циклічним, є необхідною.

Наводимо приклад негоренштейнового напівмаксимального порядку Δ такого що $[Q(\Delta)] = \lambda P$, де P є стохастичною матрицею, але не двічі стохастичною.

Нехай

$$\mathcal{E}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

є матрицею показників порядку Δ,

$$\mathcal{E}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{E}(R^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ B = [Q(\Delta)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

і $\chi_B(x) = x^2(x-1)(x-3)$, де $\chi_B(x)$ — характеристичний многочлен матриці B.

Приклад . Нехай $\Gamma_\alpha = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Gamma_\alpha)\}$, де

$$\mathcal{E}(\Gamma_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha & 3\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 0 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma(\Gamma_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді $[Q(\Gamma_\alpha)] = \begin{pmatrix} [Q(T_{3\alpha,3})] & U_{3\times 2} \\ U_{2\times 3} & E_2 \end{pmatrix}$, де $\mathcal{E}(T_{3\alpha,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Приклад Γ_α показує, що умови $m > 2$ і $n > 2$ в твердженні 11.9 суттєві.

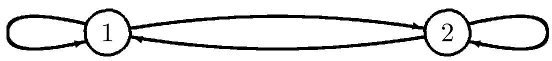
12 Сагайдаки циклічних горенштейнових порядків

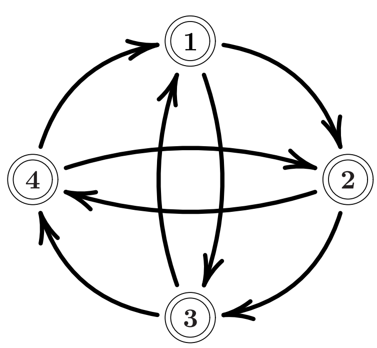
Приклад 12.1. *Нехай $\mathcal{E}_{2m} \in M_{2m}(\mathbb{Z})$ — матриця показників зведеного черепичного порядку Λ наступного вигляду:*

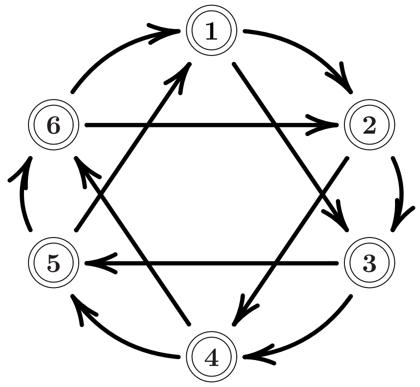
$$\mathcal{E}_{2m} = \begin{pmatrix} A & C & C & \dots & C & C \\ B & A & C & \dots & C & C \\ B & B & A & \dots & C & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B & B & B & \dots & A & C \\ B & B & B & \dots & B & A \end{pmatrix},$$

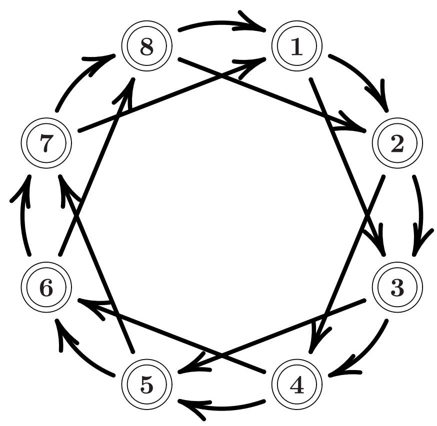
де $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Легко бачити, що Λ є зведеним циклічним горенштейновим порядком і $[Q(\Lambda)] = P_{\sigma^{n-2}} + P_{\sigma^{n-1}}$, де $\sigma = (2m\ 2m-1\ \cdots\ 2\ 1)$, $n = 2m$.*

Нижче ми наводимо сагайдаки $[Q(\Lambda)]$ цих порядків для $m = 1, 2, 3, 4$.









Зауваження 12.2. *Зазначимо, що* $in\,\mathcal{E}_4 = w(\Lambda_4) = 2$. *Очевидно, що* $d(\mathcal{E}_4) = 10$. *Горенштейновий порядок* Λ_4 *не є* $(0,1)$*-порядком. Це безпосередньо випливає з того факту, що у випадку* $n = 4$ *горенштейновими* $(0,1)$*-порядками є лише* $H_4(\mathcal{O})$ *та* $G_4 = \begin{pmatrix} H_2 & R_2 \\ R_2 & H_2 \end{pmatrix}$, *де* $d(H_4) = 6$ *і* $d(\mathcal{E}(G_4)) = 8$. *Обчислення показують, що сагайдак з матрицею суміжності*

$$P_\sigma + P_{\sigma^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не є допустимим.

Наведемо приклади опису циклічних горенштейнових порядків та їх сагайдаків.

Згідно твердженню 10.2, щоб описати горенштейнові порядки, достатньо дослідити порядки з різними типами підстановки Кириченка. Оскільки всі циклічні підстановки є підстановками одного типу, то для циклічних горенштейнових порядків візьмемо $\sigma = (1\,2\,\ldots\,n-1\,n)$.

Перетвореннями першого типу завжди можна добитися, щоб перший стовпчик матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ став нульовий, причому елементи матриці показників порядку стануть невід'ємними. Крім того, за твердженням 10.1 підстановка Кириченка σ порядку не зміниться.

Це надалі спростить наші викладки.

Далі, з рівності $\alpha_{nj} + \alpha_{j1} = \alpha_{nj} + \alpha_{j\sigma(n)} = \alpha_{n\sigma(n)} = \alpha_{n1} = 0$ для горенштейнових черепичних порядків маємо, що $\alpha_{nj} + \alpha_{j1} - \alpha_{n1} = 0$, тобто останній рядок матриці показників теж нульовий.

Таким чином, матриця (α_{ij}) така, що $\alpha_{i1} = \alpha_{ni} = \alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = \overline{1,n}$.

Приклад 12.3. *Для опису черепичних порядків та їх сагайдаків при n=5 маємо таку систему рівнянь:*

$$\begin{cases} \alpha_{13} + \alpha_{32} = \alpha_{14} + \alpha_{42} = \alpha_{15} + \alpha_{52} = \alpha_{12}, \\ \alpha_{21} + \alpha_{13} = \alpha_{24} + \alpha_{43} = \alpha_{25} + \alpha_{53} = \alpha_{23}, \\ \alpha_{31} + \alpha_{14} = \alpha_{32} + \alpha_{24} = \alpha_{35} + \alpha_{54} = \alpha_{34}, \\ \alpha_{41} + \alpha_{15} = \alpha_{42} + \alpha_{25} = \alpha_{43} + \alpha_{35} = \alpha_{45}, \\ \alpha_{52} + \alpha_{21} = \alpha_{53} + \alpha_{31} = \alpha_{54} + \alpha_{41} = \alpha_{51}. \end{cases}$$

Звідки, при вище вказаних умовах та якщо покладемо $\alpha_{12} = \alpha$, $\alpha_{13} = \beta$, *отримаємо матрицю показників:*

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 2\beta - \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - \beta & 0 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha - \beta & \alpha - \beta & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha - \beta \geq 0,\ 2\beta - \alpha \geq 0,\ \alpha \geq 1,\ \beta \geq 1.$

$$\textit{Тоді} \quad \mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & \beta & 2\beta - \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - \beta & 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha - \beta & \alpha - \beta & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{E}(R^2) =$

$$\begin{pmatrix} (2,\beta) & \alpha & (\alpha,\beta+1) & (\alpha,\beta+1) & (\alpha+1,2\beta) \\ (1,2\beta-\alpha) & (2,\beta) & \beta & (\beta,2\beta-\alpha+1) & (\alpha,\beta+1) \\ (1,\alpha-\beta) & (\beta,\alpha-\beta+1) & (2,\beta) & \beta & (\alpha,\beta+1) \\ (1,\alpha-\beta) & \begin{matrix}(2\alpha-2\beta,\\ \alpha-\beta+1)\end{matrix} & (\beta,\alpha-\beta+1) & (2,\beta) & \alpha \\ 0 & (1,\alpha-\beta) & (1,\alpha-\beta) & (1,2\beta-\alpha) & (2,\beta) \end{pmatrix},$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} (1,\beta-1) & 0 & (1,\alpha-\beta) & (1,\alpha-\beta) & (1,2\beta-\alpha) \\ (1,2\beta-\alpha) & (1,\beta-1) & 0 & (1,\alpha-\beta) & (1,\alpha-\beta) \\ (1,\alpha-\beta) & (1,2\beta-\alpha) & (1,\beta-1) & 0 & (1,\alpha-\beta) \\ (1,\alpha-\beta) & (1,\alpha-\beta) & (1,2\beta-\alpha) & (1,\beta-1) & 0 \\ 0 & (1,\alpha-\beta) & (1,\alpha-\beta) & (1,2\beta-\alpha) & (1,\beta-1) \end{pmatrix}.$$

Щоб не обчислювати матрицю $\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, виведемо формулу для знаходження елементів q_{ij} матриці суміжності сагайдака через елементи α_{ij}.

При $i \neq 1$ маємо $\gamma_{i1} = \underset{k}{min}(\beta_{ik} + \beta_{k1}) = min(1, \underset{k\neq i,1}{min}\, \beta_{ik}) = min(1, \underset{k\neq i,1}{min}\, \alpha_{ik})$, тому $q_{i1} = \gamma_{i1} = min(1, \underset{k\neq i,1}{min}\, \alpha_{ik})$.

Аналогічно, $\gamma_{11} = \underset{k}{min}(\beta_{1k} + \beta_{k1}) = min(2, \underset{k\neq 1}{min}\, \beta_{1k}) = min(2, \underset{k\neq 1}{min}\, \alpha_{1k})$.

Отже, $q_{11} = \gamma_{11} - 1 = min(2, \underset{k\neq 1}{min}\, \alpha_{1k}) - 1$.

Позаяк

$$q_{ij} = q_{\sigma^{1-j}(i)\sigma^{1-j}(j)} = q_{k1}, \text{ де } \quad k \equiv i+1-j\,(mod\ n)\,,$$

то для обчислення елементів матриці суміжності отримуємо наступні формули: $(i \neq j)$

$$\begin{aligned} & q_{ij} = min(1, \underset{t\neq k,1}{min}\, \alpha_{kt}), \text{ де } \ k = \begin{cases} i+1-j, & \text{якщо } \ i+1 > j, \\ i+1-j+n, & \text{якщо } \ i+1 \leq j, \end{cases} \\ & q_{ii} = min(2, \underset{t\neq 1}{min}\, \alpha_{1t}) - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 12.4. *Матриця суміжності сагайдака циклічної горенштейнової матриці* Γ *з підстановкою* $\sigma = \sigma(\Gamma)$ *є сумою деяких степенів переставної матриці* P_σ.

Доведення. За лемою 11.7 маємо

$$q_{ij} = q_{\sigma(i)\sigma(j)} = \ldots = q_{\sigma^{n-1}i)\sigma^{n-1}(j)}.$$

Оскільки σ — циклічна підстановка, то $j = \sigma^k(i)$ для деякого k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Тому отримуємо $q_{i\sigma^k(i)} = q_{\sigma(i)\sigma^{k+1}(i)} = \ldots = q_{\sigma^{n-1}(i)\sigma^{n+k-1}(i)}$. Всі числа $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{n-1}(i)$ різні; $\sigma^k(i), \sigma^{k+1}(i), \ldots, \sigma^{n+k-1}(i)$ також різні. Тому попередній ланцюг рівностей можна записати у вигляді:

$$q_{1\ \sigma^k(1)} = q_{2\ \sigma^k(2)} = \ldots = q_{n\ \sigma^k(n)}.$$

Тоді

$$[Q] = \sum_{i,\ j=1}^{n} q_{ij}e_{ij} = \sum_{i,\ k=1}^{n} q_{i\sigma^k(i)}e_{i\sigma^k(i)} = \sum_{k=1}^{n} q_{1\sigma^k(1)} \sum_{i=1}^{n} e_{i\sigma^k(i)} = \sum_{k=1}^{n} q_{1\sigma^k(1)} P_{\sigma^k}.$$

Приймаючи до уваги, що $P_{\sigma^k} = (P_\sigma)^k$, отримаємо $[Q] = \sum\limits_{k=1}^{n} q_{1\sigma^k(1)}\,(P_\sigma)^k$. Теорема доведена. □

Матриця суміжності $[Q]$ сагайдака циклічного горенштейнового порядку повністю визначається підстановкою Кириченка σ та першим рядком або першим стовпчиком. Порядок елементів у наступному рядку або стовпчику зумовлений дією підстановки σ.

13 Горенштейнові напівмаксимальні $(0,1)$-порядки

По зведеному напівмаксимальному порядку $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ будується частково впорядкована множина $\mathcal{M}(\Lambda)$, елементами якої є нерозкладні проективні Λ-модулі $P_1, \ldots, P_n$, причому $P_i \leq P_j$ тоді та тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$.

Нагадаємо, що кільце A називається $(0,1)$-порядком, якщо $\mathcal{E}(A)$ є $(0,1)$-матрицею. Всі горенштейнові первинні напівмаксимальні $(0,1)$-порядки з точністю до Моріта-еквівалентності вичерпуються двома типами кілець:

$$(a)\ H_s(\mathcal{O}), \mathcal{E}(H_s(\mathcal{O})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s \\ s & 1 & 2 & \cdots & s-1 \end{pmatrix};$$

$$(b)\ G_{2s}, \mathcal{E}(G_{2s}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & 2s \\ s+1 & \cdots & 2s & 1 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

Теорема 13.1. *Будь-яке зведене горенштейнове напівмаксимальне* $(0,1)$*-кільце ізоморфне кільцю* $H_s(\mathcal{O})$ *або кільцю* $G_{2s}(\mathcal{O})$.

Доведення. Припустимо, що ширина частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ більша, ніж два. Тоді існує принаймі три непорівнянні між собою нерозкладні проективні праві Λ-модулі. Можна вважати, що це модулі P_1, P_2, P_3. (Це завжди можна зробити перестановкою рядків та стовпчиків матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ на перші місця). Матриця показників буде мати вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 & \\ & * & & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\sigma(i) > 3$ для $i = 1, 2, 3$. Можна вважати, що $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 6$. Тому з умови горенштейновості випливає, що $\alpha_{i4} = 1 - \alpha_{1i}$, $\alpha_{i5} = 1 - \alpha_{2i}$, $\alpha_{i6} = 1 - \alpha_{3i}$. Спочатку обчислюємо для $i = 1, 2, 3$, а потім за цими ж формулами для $i = 4, 5, 6$. Тоді матриця показників набере наступного вигляду

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & 1 & \\ & * & & 1 & 0 & 1 & * \\ & & & 1 & 1 & 0 & \\ & * & & & * & & * \end{pmatrix}.$$

Порядок зведений, тому матриця $\mathcal{E}(\Lambda)$ не має симетричних нулів. Отже $\alpha_{42} = \alpha_{43} = \alpha_{51} = \alpha_{53} = \alpha_{61} = \alpha_{62} = 1$. З нерівностей $\alpha_{24} + \alpha_{41} \geq \alpha_{21}$, $\alpha_{15} + \alpha_{52} \geq \alpha_{12}$, $\alpha_{16} + \alpha_{63} \geq \alpha_{13}$ випливає, що $\alpha_{41} = \alpha_{52} = \alpha_{63} = 1$.

Тоді матриця показників набере наступного вигляду

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ & * & & & * & & * \end{array}\right).$$

Очевидно, що $\sigma(i) > 6$ для $i = 4, 5, 6$. Можна вважати, що $\sigma(4) = 7$, $\sigma(5) = 8$, $\sigma(6) = 9$. Тому з умови горенштейновості випливає, що $\alpha_{i7} = 1 - \alpha_{4i}$, $\alpha_{i8} = 1 - \alpha_{5i}$, $\alpha_{i9} = 1 - \alpha_{6i}$. Спочатку обчислюємо для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, а потім за цими ж формулами для $i = 7, 8, 9$. Тоді матриця показників набере наступного вигляду

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 & \\ & * & & & * & & 1 & 0 & 1 & * \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & \\ & * & & & * & & & * & & * \end{array}\right).$$

Матриця не містить симетричних нулів, тому $\alpha_{71} = \alpha_{72} = \alpha_{73} = \alpha_{75} = \alpha_{76} = 1$, $\alpha_{81} = \alpha_{82} = \alpha_{83} = \alpha_{84} = \alpha_{86} = 1$, $\alpha_{91} = \alpha_{92} = \alpha_{93} = \alpha_{94} = \alpha_{95} = 1$. З нерівностей $\alpha_{57} + \alpha_{74} \geq \alpha_{54}$, $\alpha_{48} + \alpha_{85} \geq \alpha_{45}$, $\alpha_{49} + \alpha_{96} \geq \alpha_{46}$ випливає, що $\alpha_{74} = \alpha_{85} = \alpha_{96} = 1$. Отже

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ & * & & & * & & & * & & * \end{array}\right).$$

Знову $\sigma(i) > 6$ для $i = 7, 8, 9$. Продовжуючи цей процес, отримаємо, що матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має такий блочний вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & E & O & O & \cdots & O & O \\ U & A & E & O & \cdots & O & O \\ U & U & A & E & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U & U & U & U & \cdots & U & A \end{pmatrix},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця не є матрицею показників зведеного горенштейнового напівмаксимального порядку, оскільки не існує такого k, для якого $\sigma(k) = 1, 2, 3$.

Таким чином, ширина частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ не більша, ніж два.

Лема 13.2. *Нехай* $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — *зведений первинний напівмаксимальний* $(0,1)$*-порядок і* $w(\Lambda) = 1$. *Тоді порядок* Λ *ізоморфний порядку* $H_s(\mathcal{O})$.

Доведення. Можна вважати, що $P_1 \leq\leq P_2 \leq \cdots \leq P_s$. Тоді $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \cdots = \alpha_{s-1s} = 0$. Звідси при $i < j$ з використанням кільцевих нерівностей маємо $\alpha_{ij} \leq \alpha_{ii+1} + \cdots \alpha_{j-1j} = 0$, тобто $\alpha_{ij} = 0$. Оскільки порядок Λ зведений, то його матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ не містить симетричних нулів, а отже $\alpha_{ji} = 1$. Отримали $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}(H_s)$. Отже, $\Lambda \simeq H_s(\mathcal{O})$. □

Розглянемо випадок, коли ширина частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ дорівнює 2, тобто множина $\mathcal{M}(\Lambda)$ містить два непорівнянних елементи. Нехай це будуть модулі P_1 і P_2. Тоді $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$ і матриця показників має вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $\sigma(1), \sigma(2) > 2$. Можна вважати, що $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4$. Тоді з умови горенштейновості $\alpha_{1j} + \alpha_{j3} = \alpha_{13} = 1$, $\alpha_{2j} + \alpha_{j4} = \alpha_{24} = 1$ знаходимо α_{j3} і α_{j4} для $j = 1, 2, 3, 4$. Отримаємо

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & * \\ * & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Порядок Λ зведений, тому $\alpha_{32} = \alpha_{41} = 1$. З кільцевих нерівностей $\alpha_{14} + \alpha_{42} \geq \alpha_{12}$, $\alpha_{23} + \alpha_{31} \geq \alpha_{21}$

випливає, що $\alpha_{42} = \alpha_{31} = 1$. Тоді

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ \multicolumn{2}{c}{*} & \multicolumn{2}{c}{*} & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно $\sigma(3), \sigma(4) > 4$. Нехай $\sigma(3) = 5, \sigma(4) = 6$. З рівностей $\alpha_{i5} = 1 - \alpha_{3i}$ та $\alpha_{i6} = 1 - \alpha_{4i}$ обчислюємо α_{i5} та α_{i6} для $i = 1, \ldots, 6$. Матриця $\mathcal{E}(\Lambda)$ набуде вигляду

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ \multicolumn{2}{c}{*} & \multicolumn{2}{c}{*} & & & * \\ & & & & 1 & 0 & \\ \multicolumn{2}{c}{*} & \multicolumn{2}{c}{*} & \multicolumn{2}{c}{*} & * \end{pmatrix}.$$

Матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ не містить симетричних нулів, тому $\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{54} = 1$, $\alpha_{61} = \alpha_{62} = \alpha_{63} = 1$. З нерівностей $\alpha_{36} + \alpha_{64} \geq \alpha_{34}$, $\alpha_{45} + \alpha_{53} \geq \alpha_{43}$ випливає, що $\alpha_{64} = \alpha_{53} = 1$.

Продовжуючи цей процес отримаємо, що матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має наступний блочний вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & E & O & O & \cdots & O & O \\ U & A & E & O & \cdots & O & O \\ U & U & A & E & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U & U & U & U & \cdots & U & A \end{pmatrix},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця не є матрицею показників зведеного горенштейнового напівмаксимального порядку, оскільки не існує такого k, для якого $\sigma(k) = 1, 2$.

Отже, хоча б одне з чисел $\sigma(1), \sigma(2)$ меншне, ніж 3. Припустимо, що $\sigma(1) = 2$, але $\sigma(2) \neq 1$. Нехай $\sigma(2) = 3$. Тоді $\alpha_{i3} = 1 - \alpha_{2i}$ і тому матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 0 & 1 & \\ \multicolumn{2}{c}{*} & * & * \end{pmatrix}.$$

$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ і $\alpha_{13} + \alpha_{32} \geq \alpha_{12}$, тому $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 1$. Отже,

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 0 & \\ & * & & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно $\sigma(3) > 3$. Можна вважати, що $\sigma(3) = 4$. З умови горенштейновості $\alpha_{3i} + \alpha_{i4} = 1$ знаходимо α_{i4} для $i = 1, 2, 3$. Тоді

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ & & * & & * \end{pmatrix}.$$

Порядок Λ зведений, тому $\alpha_{41} = \alpha_{42} = 1$. Також $\alpha_{43} = 1$, бо $\alpha_{24} + \alpha_{43} \geq \alpha_{23}$. Матриця $\mathcal{E}(\Lambda)$ набуде вигляду

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ & & * & & * \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес отримаємо, що

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця не є матрицею показників зведеного горенштейнового напівмаксимального порядку, оскільки не існує такого k, для якого $\sigma(k) = 1$.

Таким чином, якщо P_i та P_j — два непорівнянні елементи частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$, то $\sigma(i) = j$ та $\sigma(j) = i$.

Звідси випливає, що кожен елемент P_i може мати тільки один непорівнянний елемент, а саме — $P_{\sigma(i)}$. Дійсно, якщо елемент P_i непорівнянний і з P_j, і з P_k, то повинні виконуватися одночасно рівності $\sigma(i) = j$,$\sigma(j) = i$, $\sigma(i) = k$, $\sigma(k) = i$, що можливо тільки при $j = k$.

Нехай P_1 і P_{s+1}, P_2 і P_{s+2}, ..., P_s і P_{2s} — s пар попарно непорівнянних між собою елементів частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$, а $P_{2s+1}, \ldots, P_{2s+m}$ — множина елементів з $\mathcal{M}(\Lambda)$, порівнянних з будь-яким елементом цієї множини. Елементи $P_{2s+1}, \ldots, P_{2s+m}$ лінійно впорядковані між собою і утворюють підмножину в $\mathcal{M}(\Lambda)$ ширини один. Підстановка Кириченка σ розкладається в добуток $\sigma = (1\; s+1)(2\; s+2)\cdots(s\; 2s)\sigma_m$, де підстановка σ_m діє на множині $\{2s+1,\dots,2s+m\}$.

Нехай $1 = e_1 + \cdots + e_{2s+m}$ — розклад $1 \in \Lambda$ в суму взаємно ортогональних локальних ідемпотентів, причому $e_i\Lambda = P_i$. Позначимо $f_1 = e_1 + \cdots + e_{2s}$, $f_2 = 1 - f_1$. Оскільки елементи $P_{2s+1},\dots,P_{2s+m}$ утворюють підмножину в $\mathcal{M}(\Lambda)$ ширини 1, то множина $\mathcal{M}(f_2\Lambda f_2)$ також має ширину 1. Тому $f_2\Lambda f_2 \simeq H_m(\mathcal{O})$. Отже, матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(F) & * \\ * & \mathcal{E}(H) \end{pmatrix},$$

де $F = f_1\Lambda f_1$. Позаяк $\alpha_{2s+1\sigma(2s+1)} = 0$, то $\alpha_{2s+1j} = 0$ для будь-якого $j = 1,\dots,2s+m$.

Лема 13.3. *Нехай Λ — зведений горенштейновий напівмаксимальний $(0,1)$-порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ $i,j = 1,\dots,s$ і підстановкою Кириченка σ та існує таке значення i, що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$. Тоді $\Lambda \simeq H_s(\mathcal{O})$ та ширина множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ дорівнює 1.*

Доведення. Нехай $i = 1$, $\sigma(i) = s$ (це завжди можна зробити перестановкою рядків і стовпчиків матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$). З рівності $\alpha_{1j} + \alpha_{j\sigma(1)} = \alpha_{1\sigma(1)} = 0$ випливає, що $\alpha_{1j} = 0$ для $j = 1,\dots,s$. Це означає, що елемент P_1 є найменшим у частково впорядкованій множині $\mathcal{M}(\Lambda)$, тобто $P_1 \le P_j$ для будь-якого $j = 2,\dots,s$. Нерозкладний проективний правий Λ-модуль P_1 має єдиний максимальний підмодуль — $\operatorname{rad} P_1$. Тому, враховуючи, що $\mathcal{E}(\Lambda)$ є (0, 1)-матрицею, маємо $P_1 \le \operatorname{rad} P_1 \le P_j$ для $j = 2,\dots,s$. Позаяк $P_1 = (0,\dots,0)$, $\operatorname{rad} P_1 = (1,0,\dots,0)$, то $\alpha_{j1} = 1$ для довільного $j = 2,\dots,s$. Порядок Λ горенштейновий, тому існує таке значення k, що $\sigma(k) = 1$. Можна вважати, що $k = 2$. З рівності $\alpha_{2j} + \alpha_{j1} = \alpha_{21} = 1$ знаходимо $\alpha_{2j} = 0$ для будь-якого $j = 2,\dots,s$. Тому $P_1 \le \operatorname{rad} P_1 = P_2 \le P_j$ для довільного $j = 3,\dots,s$, а тоді й $P_2 \le \operatorname{rad} P_2 \le P_j$ для $j = 2,\dots,s$. Так як $\operatorname{rad} P_2 = (1,1,0,\dots,0)$, то $\alpha_{j2} = 1$ для $j \ge 3$.

Нехай $\sigma(3) = 2$. Тоді $\alpha_{3j} + \alpha_{j2} = \alpha_{32} = 1$ і $\alpha_{3j} = 0$ для $j = 3,\dots,s$. Знову $\operatorname{rad} P_3 \le P_j$ для довільного $j = 4,\dots,s$. Продовжуючи ці міркування, одержуємо такий ланцюг елементів множини $\mathcal{M}(\Lambda)$

$$P_1 \le \operatorname{rad} P_1 = P_2 \le \operatorname{rad} P_2 = P_3 \le \cdots \le \operatorname{rad} P_{s-1} = P_s,$$

а матриця показників буде мати вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ширина частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ дорівнює 1, а саме кільце Λ ізоморфне кільцю $H_s(\mathcal{O})$. Лема доведена. $\square$

Оскільки ми розглядаємо випадок, коли ширина частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ дорівнює двом, то існування нульового рядка у матриці показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ суперечить лемі. Тому множина $\mathcal{M}(\Lambda)$ містить тільки s пар попарно непорівнянних між собою елементів. Таким чином

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} P_1 & \to & P_2 & \to & P_3 & \to & \cdots & \to & P_{s-1} & \to & P_s \\ & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & \\ P_{s+1} & \to & P_{s+2} & \to & P_{s+3} & \to & \cdots & \to & P_{2s-1} & \to & P_{2s} \end{array} \right\}. \tag{4}$$

Позначимо $e = e_1 + \cdots + e_s$, $f = 1 - e$. Позаяк підмножини $\{P_1, \ldots, P_s\}$ і $\{P_{s+1}, \ldots, P_{2s}\}$ лінійно впорядковані в $\mathcal{M}(\Lambda)$, то множини $\mathcal{M}(e\Lambda e)$ та $\mathcal{M}(f\Lambda f)$ теж лінійно впорядковані і тому $e\Lambda e \simeq f\Lambda f \simeq H_s(\mathcal{O})$. Отже

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(H) & * \\ * & \mathcal{E}(H) \end{pmatrix}.$$

Твердження 13.4. *Нехай Λ — зведений горенштейновий напівмаксимальний $(0,1)$-порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ $i,j = 1,\ldots,s$ і підстановкою Кириченка σ. Якщо для деяких значень i та j виконуються рівності $\sigma(i) = j$, а $\sigma(j) = i$, причому $\alpha_{i\sigma(i)} = \alpha_{j\sigma(j)} = 1$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{jk}$ і $\alpha_{ki} = \alpha_{kj}$ для будь-якого $k \neq i,j$.*

Доведення. Зведений порядок Λ не має симетричних нулів, тому $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} \geq 1$ для $k \neq i$. Умова горенштейновості дає рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = 1$. З цих двох співвідношень одержуємо нерівність $\alpha_{ki} \geq \alpha_{k\sigma(i)}$ для $k \neq i$. Аналогічно $\alpha_{kj} \geq \alpha_{k\sigma(j)}$ для $k \neq j$. Отже $\alpha_{ki} \geq \alpha_{kj}$ і $\alpha_{kj} \geq \alpha_{ki}$, тобто $\alpha_{kj} = \alpha_{ki}$, якщо $k \neq i,j$. Тому при тих же i,j,k маємо наступну рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = 1$. Аналоічно $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 1$. Тому $\alpha_{ik} = 1 - \alpha_{ki} = 1 - \alpha_{kj} = \alpha_{jk}$ для будь-якого $k \neq i,j$. Твердження доведено. $\square$

Елементи P_i і P_{s+i} —непорівнянні. За твердженням $\alpha_{ik} = \alpha_{s+ik}$ для будь-якого $k \neq i, s+i$. З цієї рівності знаходимо α_{ik} при $k > s$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{s+ik} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } s+i < k, \\ 1, & \text{якщо } s+i > k, \end{cases}$$

і α_{s+ik} при $k \leq s$

$$\alpha_{s+ik} = \alpha_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i < k, \\ 1, & \text{якщо } i > k. \end{cases}$$

Для $k = i, s+i$ значення α_{ik} та α_{s+ik} уже відомі $\alpha_{ii} = \alpha_{s+is+i} = 0$, $\alpha_{is+i} = \alpha_{s+ii} = 1$. Отже

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s & s+1 & s+2 & \cdots & 2s \\ s+1 & s+2 & \cdots & 2s & 1 & 2 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

Якщо елементи частково впорядкованої множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ занумерувати так, щоб елементи P_{2k-1} і P_{2k} були непорівнянними при $k = 1, \ldots, s$, то матриця показників в цьому випадку буде мати такий вигляд

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} A & O & O & \cdots & O & O \\ U & A & O & \cdots & O & O \\ U & U & A & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U & U & U & \cdots & A & O \\ U & U & U & \cdots & U & A \end{pmatrix},$$

де

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

14 Циклічні горенштейнові порядки

Лема 14.1. *Нехай Λ – циклічний зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ та підстановкою Кириченка $\sigma = (12\dots n)$. Якщо $\alpha_{i1} = 0$ для всіх $i = 1,\dots,n$, то $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ при $1 < j \leq n$.*

Доведення. Згідно наслідок 11.7 $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma^m(i)}\alpha_{\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(i)}$ для будь-якого натурального m. При $i = 1$ маємо

$$\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{\sigma^m(1)}\alpha_{\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(1)}.$$

Оскільки σ – це циклічна підстановка, то існує таке m, що $\sigma^m(j) = 1$. З співвідношення $\sigma^m(j) \equiv j + m \pmod n$ випливає $j + m = n + 1$. Звідки $m = n + 1 - j$. Тоді $\sigma^m(1) = 1 + m = n + 2 - j$ та $\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} + \alpha_{1,n+2-j}$. За умовою леми $\alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} = 0$, тому $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$. □

Твердження 14.2. *Нехай $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}$ — це довільний набір дійсних чисел. Існує єдина матриця (α_{ij}) така, що дані числа є елементами першого рядка цієї матриці, $\alpha_{kk} = \alpha_{k1} = 0$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$ для всіх $k = 1,\dots,n; i = 1,\dots,n-1$.*

Доведення. Покладемо $\alpha_{k1} = 0$. Решту елементів α_{km} матриці (α_{ij}) отримаємо з системи лінійних рівнянь $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1} \quad k = 1,\dots,n; i = 1,\dots,n-1$.

Дійсно, $\alpha_{kk+1} = \alpha_{k1} + \alpha_{1k+1} = \alpha_{1k+1}$ при $k < n$. З рівності $\alpha_{1k} + \alpha_{k2} = \alpha_{12}$ отримуємо, що $\alpha_{k2} = \alpha_{12} - \alpha_{1k}$. Оскільки $\alpha_{k2} + \alpha_{2k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$, то $\alpha_{2k+1} = \alpha_{1k+1} - \alpha_{k2} = \alpha_{1k+1} + \alpha_{1k} - \alpha_{12}$ або $\alpha_{2q} = \alpha_{1q} + \alpha_{1q-1} - \alpha_{12}$ при $q > 1$.

Далі, $\alpha_{2k} + \alpha_{k3} = \alpha_{23} = \alpha_{13}$, отже $\alpha_{k3} = \alpha_{13} - \alpha_{2k} = \alpha_{13} + \alpha_{12} - \alpha_{1k} - \alpha_{1k-1} k > 1$. З рівності $\alpha_{k3} + \alpha_{3k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$ знаходимо α_{3k+1}: $\alpha_{3k+1} = \alpha_{1k+1} - \alpha_{k3} = \alpha_{1k+1} + \alpha_{1k} + \alpha_{1k-1} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ або $\alpha_{3q} = \alpha_{1q} + \alpha_{1q-1} + \alpha_{1q-2} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ при $q > 2$.

Припустимо, що для $l < n$ елементи l-того стовпчика α_{kl}, де $k > l - 2$, виражаються через елементи першого рядка таким чином:

$$\alpha_{kl} = \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{1k-j}\ ,\ k > l - 2,$$

а елементи l-того рядка α_{lq}, де $q > l - 1$, виражаються через елементи першого рядка наступним чином:

$$\alpha_{lq} = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1q-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j}\ ,\ q > l - 1.$$

Знайдемо вирази для елементів $l+1$-шого стовпчика та $l+1$-шого рядка через елементи першого рядка.

З рівності $\alpha_{lk} + \alpha_{k,l+1} = \alpha_{l,l+1} = \alpha_{1,l+1}$ випливає, що

$$\alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,l+1} - \alpha_{lk} = \alpha_{1,l+1} - \left(\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1k-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j} \right) =$$

$$= \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1,k-j} = \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j},$$

$$k > l-1 \text{ або } k > (l+1)-2.$$

Далі, маємо $\alpha_{k,l+1} + \alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{k,k+1} = \alpha_{1,k+1}$. Отже,

$$\alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{1,k+1} - \alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,k+1} - \left(\sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,(k+1)-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad k+1 > (l+1)-1 \text{ або}$$

$$\alpha_{l+1,q} = \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,q-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad q > (l+1)-1.$$

Таким чином, за індукцією за номером стовпчика та рядка знаходимо невідомі елементи стовпчиків та рядків матриці (α_{ij}). Вони виражаються через елементи першого рядка за формулами:

$$\alpha_{km} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} \text{ при } k > m-2; \tag{5}$$

$$\alpha_{km} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} \text{ при } m > k-1. \tag{6}$$

При цьому нами розглянуто всі рівняння $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$, $k = \overline{1,n}; i = \overline{1,n-1}$. Очевидно, що розв'язок системи лінійних рівнянь задовольняє рівнянням цієї системи. Крім цього, з (5) маємо

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{k-2} \alpha_{1,k-j} = 0 \ , \ k = 2, \ldots, n,$$

а з (6) —

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1,k-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = 0 \ , \ k = 2, \ldots, n.$$

□

З формули (5) випливає, що

$$\alpha_{m-1,m} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1,m-1-j} = \sum_{t=0}^{m-2} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t} - \alpha_{11} =$$

$$= \sum_{t=0}^{(m-1)-1} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t}, \quad m = \overline{3,n}.$$

Остання рівність — це вираз $\alpha_{m-1,m}$ за формулою (6).

Тобто початкова система рівнянь є несуперечливою.

Отже, ми отримали матрицю (α_{ij}), у якої

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j}, & \text{якщо } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j}, & \text{якщо } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m}, & \text{якщо } k = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Наслідок 14.3. *Нехай (α_{ij}) — це матриця, елементи якої задовольняють (7) і $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ при $j = 2, \ldots, n$. Тоді $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де $\sigma = (12 \ldots n)$.*

Доведення. Оскільки $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$, то

$$\alpha_{nm} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1n-j} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{i=2}^{m} \alpha_{1,n+2-i} = 0$$

і $\alpha_{nm} + \alpha_{m1} = \alpha_{n1} = 0$ для всіх m. Отже, елементи матриці (α_{ij}) задовольняють умову $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де $\sigma = (12 \ldots n)$. $\square$

Твердження 14.4. *Нехай (α_{ij}) — це матриця, елементи якої задовольняють рівність (7). Тоді для кожної трійки попарно різних чисел i, j, k існують такі p, q, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik} = \alpha_{pq}$.*

Доведення. Перетворимо рівності (5)-(6):

$$\begin{aligned} \alpha_{km} &= \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} = \sum_{t=2}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=k-m+2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{при } k \geq m > 1, \\ \alpha_{km} &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = \sum_{t=m-k+1}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{при } m \geq k > 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Позначимо $S_{ijk} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$.

Для $\min(i, j, k) > 1$ розглянемо шість випадків.

Випадок 1. Нехай $i > j > k$. Тоді

$$S_{ijk} = \left(\sum_{t=2}^{j} \alpha_{1t} - \sum_{t=i-j+2}^{i} \alpha_{1t} \right) + \left(\sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=j-k+2}^{j} \alpha_{1t} \right) - \left(\sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=i-k+2}^{i} \alpha_{1t} \right).$$

Третя та п'ята суми в цій рівності однакові. В першій та четвертій сумах є однакові доданки, а також в другій і шостій сумах. Після спрощення маємо:

$$S_{ijk} = \sum_{t=2}^{j-k+1} \alpha_{1t} - \sum_{t=i-j+2}^{i-k+1} \alpha_{1t}.$$

Зазначимо, що $i - j + 2 = (i - k + 1) - (j - k + 1) + 2$ та $i - k + 1 > j - k + 1$. Тому $S_{ijk} = \alpha_{i-k+1,j-k+1}$.

Випадок 2. При $j > i > k$ маємо

$$S_{ijk} = \left(\sum_{t=j-i+1}^{j} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{i} \alpha_{1t} \right) + \left(\sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=j-k+2}^{j} \alpha_{1t} \right) -$$

$$-\left(\sum_{t=2}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=i-k+2}^{i}\alpha_{1t}\right)=-\sum_{t=2}^{i-k+1}\alpha_{1t}+\sum_{t=j-i+1}^{j-k+1}\alpha_{1t}=\alpha_{i-k+1,j-k+1},$$

тому що $j-k+1>i-k+1$ та $i-j+1=(j-k+1)-(i-k+1)+1$.

Випадок 3. Якщо $i>k>j$, тоді

$$S_{ijk}=\left(\sum_{t=2}^{j}\alpha_{1t}-\sum_{t=i-j+2}^{i}\alpha_{1t}\right)+\left(\sum_{t=k-j+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{j}\alpha_{1t}\right)-$$

$$-\left(\sum_{t=2}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=i-k+2}^{i}\alpha_{1t}\right)=\sum_{t=i-k+2}^{i-j+1}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{k-j}\alpha_{1t}=\alpha_{k-j,i-j+1},$$

оскільки $i-k+2=(i-j+1)-(k-j)+1$ та $k-j<i-j+1$.

Випадок 4. Для $k>i>j$

$$S_{ijk}=\left(\sum_{t=2}^{j}\alpha_{1t}-\sum_{t=i-j+2}^{i}\alpha_{1t}\right)+\left(\sum_{t=k-j+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{j}\alpha_{1t}\right)-$$

$$-\left(\sum_{t=k-i+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{i}\alpha_{1t}\right)=\sum_{t=2}^{i-j+1}\alpha_{1t}-\sum_{t=k-i+1}^{k-j}\alpha_{1t}=\alpha_{k-j,i-j+1},$$

з того що $k-j\geq i-j+1$ та $k-i+1=(k-j)-(i-j+1)+2$.

Випадок 5. Нехай $j>k>i$, тоді

$$S_{ijk}=\left(\sum_{t=j-i+1}^{j}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{i}\alpha_{1t}\right)+\left(\sum_{t=2}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=j-k+2}^{j}\alpha_{1t}\right)-$$

$$-\left(\sum_{t=k-i+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{i}\alpha_{1t}\right)=\sum_{t=2}^{k-i}\alpha_{1t}-\sum_{t=j-k+2}^{j-i}\alpha_{1t}=\alpha_{j-i,k-i},$$

тому що $j-i>k-i$ та $j-k+2=(j-i)-(k-i)+2$.

Випадок 6. При $k>j>i$ маємо

$$S_{ijk}=\left(\sum_{t=j-i+1}^{j}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{i}\alpha_{1t}\right)+\left(\sum_{t=k-j+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{j}\alpha_{1t}\right)-$$

$$-\left(\sum_{t=k-i+1}^{k}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{i}\alpha_{1t}\right)=\sum_{t=k-j+1}^{k-i}\alpha_{1t}-\sum_{t=2}^{j-i}\alpha_{1t}=\alpha_{j-i,k-i},$$

оскільки $j-i<k-i$ та $k-j+1=(k-i)-(j-i)+1$.

Якщо i,j,k – попарно різні та $\min(i,j,k)=1$, то при $k=1$

$$S_{ijk}=\alpha_{ij}+\alpha_{j1}-\alpha_{i1}=\alpha_{ij}.$$

При $j=1$ маємо два випадки.

Випадок 1: $i > k$. Тоді

$$S_{ijk} = \alpha_{i1} + \alpha_{1k} - \alpha_{ik} = \alpha_{1k} - \left(\sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=i-k+2}^{i} \alpha_{1t} \right) =$$

$$= \sum_{t=i-k+2}^{i} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{k-1} \alpha_{1t} = \alpha_{k-1,i},$$

з того що $i > k-1$ та $i-k+2 = i-(k-1)+1$.

Випадок 2: $k > i$. Отже,

$$S_{ijk} = \alpha_{i1} + \alpha_{1k} - \alpha_{ik} = \alpha_{1k} - \left(\sum_{t=k-i+1}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{i} \alpha_{1t} \right) =$$

$$= \sum_{t=2}^{i} \alpha_{1t} - \sum_{t=k-i+1}^{k-1} \alpha_{1t} = \alpha_{k-1,i},$$

тому що $k-1 \geq i$ та $k-i+1 = (k-1)-i+2$.

Для $i = 1$ теж розглянемо два випадки.

Випадок 1: $j > k$. Маємо

$$S_{ijk} = \alpha_{1j} + \alpha_{jk} - \alpha_{1k} = \alpha_{1j} - \alpha_{1k} + \left(\sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=j-k+2}^{j} \alpha_{1t} \right) =$$

$$= \sum_{t=2}^{k-1} \alpha_{1t} - \sum_{t=j-k+2}^{j-1} \alpha_{1t} = \alpha_{j-1,k-1},$$

оскільки $j-1 > k-1$ та $j-k+2 = (j-1)-(k-1)+2$.

Випадок 2: $k > j$. Тоді

$$S_{ijk} = \alpha_{1j} + \alpha_{jk} - \alpha_{1k} = \alpha_{1j} - \alpha_{1k} + \left(\sum_{t=k-j+1}^{k} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{j} \alpha_{1t} \right) =$$

$$= \sum_{t=k-j+1}^{k-1} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{j-1} \alpha_{1t} = \alpha_{j-1,k-1},$$

тому що $k-1 > j-1$ та $k-j+1 = (k-1)-(j-1)+1$.

Таким чином,

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \alpha_{i-k+1,j-k+1}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = k, \\ \alpha_{k-j,i-j+1}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = j, \\ \alpha_{j-i,k-i}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = i. \end{cases}$$

У випадках, коли хоча б два індекси співпадають, отримуємо

$$S_{ijj} = \alpha_{ij} + \alpha_{jj} - \alpha_{ij} = 0,$$

$$S_{iik} = \alpha_{ii} + \alpha_{ik} - \alpha_{ik} = 0,$$

$$S_{iji} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \alpha_{ii} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0.$$

□

Наслідок 14.5. *Матриця (α_{ij}), елементи якої невід'ємні, задовольняють рівностям (7) і $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ для всіх $2 \leq j \leq n$, є матрицею показників зведеного циклічного горенштейнового порядка з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$.*

Згідно твердженню 14.4 елементи матриці (α_{ij}) задовольняють кільцевим нерівностям. За формулою (5) маємо $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i. Тому за наслідком 14.3 (α_{ij}) є матрицею показників горенштейнового черепичного порядка Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$.

Якщо $m > k$, то

$$\alpha_{km} + \alpha_{mk} = \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} \right) + \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{1k-j} - \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} \right) = \alpha_{1k-m+1} > 0.$$

Якщо $m < k$, то

$$\alpha_{km} + \alpha_{mk} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} \right) + \left(\sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{k-2} \alpha_{1m-j} \right) = \alpha_{1m-k+1} > 0.$$

Твердження 14.6. *Матриця (α_{ij}) показників циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядка Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$, у якої $\alpha_{i1} = 0$ для $i = \overline{1, n}$, є симетричною відносно бічної діагоналі.*

Доведення. Очевидно, матриця (α_{ij}) є симетричною відносно бічної діагоналі, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{n+1-j,n+1-i}$.

Розглянемо різницю $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k}$. Нехай $k > m$. Тоді $n+1-m > n+1-k$ і за формулами (7) маємо

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} \right) - \left(\sum_{j=2}^{n+1-k} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{n+1-k-2} \alpha_{1n+1-m-j} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{t=k-m+2}^{k} \alpha_{1t} \right) - \left(\sum_{j=2}^{n+1-k} \alpha_{1j} - \sum_{l=k-m+2}^{n+1-m} \alpha_{1l} \right).$$

Якщо $m < n+1-k$, то $k < n+1-m$ і

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = -\left(\sum_{j=m+1}^{n+1-k} \alpha_{1j} - \sum_{q=k+1}^{n+1-m} \alpha_{1q} \right).$$

Оскільки за лемою 14.1 $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$, то

$$\sum_{j=m+1}^{n+1-k} \alpha_{1j} = \sum_{j=m+1}^{n+1-k} \alpha_{1,n+2-j} = \sum_{p=k+1}^{n+1-m} \alpha_{1p}$$

і $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = 0$.

При $m > n+1-k$ маємо $k > n+1-m$ та

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{j=n+2-k}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=n+2-m}^{k} \alpha_{1j}.$$

Застосовуючи лему 14.1, отримуємо

$$\sum_{j=n+2-m}^{k} \alpha_{1j} = \sum_{j=n+2-m}^{k} \alpha_{1,n+2-j} = \sum_{p=n+2-k}^{m} \alpha_{1p}$$

і $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = 0$.

Отже, $\alpha_{km} = \alpha_{n+1-m,n+1-k}$ при $k > m$.

Аналогічно попередньому покажемо, що рівність вірна, коли $k < m$.

Дійсно, $n+1-k > n+1-m$ і за формулами (8) отримуємо

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = \left(\sum_{t=m-k+1}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} \right) - \left(\sum_{t=m-k+1}^{n+1-k} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{n+1-m} \alpha_{1t} \right).$$

При $m < n+1-k$ маємо $k < n+1-m$ та

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = -\left(\sum_{t=m+1}^{n+1-k} \alpha_{1t} - \sum_{t=k+1}^{n+1-m} \alpha_{1t} \right).$$

Для $m > n+1-k$ отримуємо $k > n+1-m$ і

$$\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = \sum_{t=n+2-k}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=n+2-m}^{k} \alpha_{1t}.$$

Використання леми 14.1 дає в обох випадках, що $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = 0$.

Якщо $m = n+1-k$, тоді $k = n+1-m$ і рівність очевидна.

Таким чином, матриця (α_{ij}) є симетричною відносно бічної діагоналі. □

На підставі наслідків 14.3, 14.5 та твердження 14.6 отримуємо теорему, що повністю описує циклічні зведені горенштейнові черепичні порядки.

Теорема 14.7. *Будь-який циклічний зведений горенштейновий черепичний порядок є ізоморфним зведеному порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$, матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ якого має такі властивості:*

1. Всі елементи матриці (α_{ij}) виражаються за формулами (7) через $\left[\frac{n}{2}\right]$ натуральні параметри $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

2. $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ для всіх j.

3. Матриця (α_{ij}) є симетричною відносно бічної діагоналі.

Навпаки, кожна невід'ємна цілочисельна матриця (α_{ij}) із властивостями 1-3 , для якої $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ $(i \neq j)$, є матрицею показників деякого циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядка з підстановкою Кириченка $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$.

Тому можна вказати такий алгоритм обчислення елементів матриці $\mathcal{E}(\Lambda)$ за елементами першого рядка: для знаходження елемента α_{ij} треба додати i елементів, які беруться з першого рядка, починаючи з α_{1j}, рухаючись циклічно справа наліво, та відняти i елементів $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1i}$.

15 Горенштейнові порядки з попарно взаємно простими циклами

Перетворення двох типів не змінюють суму всіх елементів матриці показників. Легко бачити, що справедливе наступне твердження.

Твердження 15.1. *Нехай Λ і Λ' — ізоморфні зведені горенштейнові черепичні порядки з матрицями показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, $\mathcal{E}(\Lambda') = (\alpha'_{ij})$ та підстановками Кириченка σ, σ' відповідно. Тоді $\sum\limits_{i,j}^{n} \alpha_{ij} = \sum\limits_{i,j}^{n} \alpha'_{ij}$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha'_{i\sigma'(i)}$.*

Лема 15.2. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ і підстановкою Кириченка σ, причому $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються. Тоді*

$$\frac{\sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{| < \sigma_1 > |} = \frac{\sum\limits_{k} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{| < \sigma_2 > |}.$$

Доведення. Можна вважати, що $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ та $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$ (цього можна досягти ізоморфними перетвореннями другого типу над рядками і стовпчиками матриці показників $\mathcal{E}(\Lambda)$). Тоді матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_1$ — матриця показників зведеного циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка σ_1, $\mathcal{E}_2$ — матриця показників зведеного циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка σ_2. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)} = \alpha_{i\sigma_1(i)}$ для всіх $j = n+1, \ldots, n+m$, $i = 1, \ldots, n$ і $\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)} = \alpha_{k\sigma_2(k)}$ для всіх $l = 1, \ldots, n$, $k = n+1, \ldots, n+m$. Тоді отримаємо

$$m \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)}) =$$
$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} (\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)} = n \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}.$$

Звідси $m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = n \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}$, тобто

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

□

Наслідок 15.3. *Якщо n і m — взаємно прості числа, то*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m} = t,$$

де t — натуральне число.

Теорема 15.4. *Нехай Λ — зведений циклічний горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ та підстановкою Кириченка σ. Порядок Λ ізоморфний порядку Λ', матриця показників якого є лінійною комбінацією степенів переставної матриці підстановки Кириченка σ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{<\sigma>} \cdot \sum\limits_i \alpha_{i\sigma(i)} = t$ — натуральне число.*

Доведення. Будемо вважати, що $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Елементи матриці показників циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку з нульовим першим стовпчиком порядку задовольняють співвідношення

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} & \text{якщо } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j} & \text{якщо } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m} & \text{якщо } k = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Нехай $\frac{1}{<\sigma>} \cdot \sum\limits_i \alpha_{i\sigma(i)} = t$ — натуральне число. Покажемо, що перетвореннями першого типу можна з матриці показників порядку Λ отримати матрицю показників порядку Λ' з потрібною властивістю. Виконаємо перетворення першого типу: до елементів k-ого рядка додамо число x_k, а від елементів k-ого стовпчика віднімемо число x_k. Тоді $\alpha'_{km} = \alpha_{km} + x_k - x_m$. Для знаходження x_k будемо вимагати, щоб $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ для всіх k. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 = t - \alpha_{12}, \\ x_2 - x_3 = t - \alpha_{23}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} - x_n = t - \alpha_{n-1n}, \\ x_n - x_1 = t - \alpha_{n1}. \end{gathered}$$

Ця система має розв'язок

$$\begin{gathered} x_2 = \alpha_{12} - t + x_1, \\ x_3 = \alpha_{12} + \alpha_{23} - 2t + x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t + x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{n-1n} - (n-1)t + x_1. \end{gathered} \tag{10}$$

Тому перетвореннями першого типу матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ зводиться до матриці $(\alpha'_{ij}) = \mathcal{E}(\Lambda')$, у якої $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ для всіх k.

Покажемо тепер, що $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всіх i, j.

Нехай $k > m > 1$. Тоді

$$\alpha'_{km} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} + (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t + x_1) - (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{m-1m} -$$

$$-(m-1)t + x_1) = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} + (\alpha_{mm+1} + \dots + \alpha_{k-1k}) - (k-m)t \qquad (11)$$

і

$$\alpha'_{km} - \alpha'_{k+1m+1} = \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} + (\alpha_{mm+1} + \dots + \alpha_{k-1k}) - (k-m)t \right) -$$

$$- \left(\sum_{j=2}^{m+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m+1-2} \alpha_{1k+1-j} + (\alpha_{m+1m+2} + \dots + \alpha_{kk+1}) - (k-m)t \right) =$$

$$= -\alpha_{1m+1} + \alpha_{1k+1} + \alpha_{mm+1} - \alpha_{kk+1} = 0.$$

При $m = 1$, враховуючи, що $\alpha_{j-1j} = \alpha_{1j}$ для всіх j, маємо

$$\alpha'_{k1} = x_k - x_1 = \alpha_{12} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - (k-1)t. \qquad (12)$$

Тому

$$\alpha'_{k1} - \alpha'_{k+12} = (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t) -$$

$$- \left(\sum_{j=2}^{2} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{0} \alpha_{1k+1-j} + (\alpha_{23} + \dots + \alpha_{kk+1}) - (k-1)t \right) = (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t) -$$

$$- (\alpha_{12} - \alpha_{1k+1} + (\alpha_{23} + \alpha_{34} + \dots + \alpha_{kk+1}) - (k-1)t) = -\alpha_{1k+1} + \alpha_{1k+1} = 0.$$

Нехай $k < m < n$. Тоді

$$\alpha'_{km} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} + (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t + x_1) - (\alpha_{12} + \dots + \alpha_{m-1m} -$$

$$(m-1)t + x_1) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - (\alpha_{kk+1} + \dots + \alpha_{m-1m}) + (m-k)t. \qquad (13)$$

Тому

$$\alpha'_{km} - \alpha'_{k+1m+1} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - (\alpha_{kk+1} + \dots + \alpha_{m-1m}) + (m-k)t \right) -$$

$$- \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{1m+1-j} - \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_{1j} - (\alpha_{k+1k+2} + \dots + \alpha_{mm+1}) + (m-k)t \right) =$$

$$= -\alpha_{1m+1} + \alpha_{1k+1} + \alpha_{mm+1} - \alpha_{kk+1} = 0.$$

Далі при $k < n$ та $m = n$, враховуючи, що $\alpha_{1n+2-l} = \alpha_{1l}$ для всіх l, маємо

$$\alpha'_{kn} - \alpha'_{k+11} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1n-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - (\alpha_{kk+1} + \dots + \alpha_{n-1n}) + (n-k)t \right) -$$

$$- \left(\sum_{j=2}^{k+1} \alpha_{1j} - kt \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1n-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{1j} + nt - \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_{1j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1n-j} - \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_{1j} = \sum_{l=0}^{k+1} \alpha_{1n+2-l} - \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_{1j} = 0.$$

Таким чином, $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всіх i, j. Тому $\mathcal{E}(\Lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} P_\sigma^{j-1}$, де $P_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j\sigma(j)}$, e_{ij} — матричні одиниці.

В обернену сторону твердження теореми очевидне. □

Наведемо приклад двох циклічних горенштейнових порядків Λ і A з матрицями показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, $\mathcal{E}(A) = (a_{ij})$, для яких $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_{i\sigma(i)} = \sum\limits_{i=1}^{4} a_{i\sigma(i)}$, але $\Lambda \not\simeq A$.

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$[Q(\Lambda)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q(A)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $Q(\Lambda) \not\simeq Q(A)$ і $\Lambda \not\simeq A$.

Лема 15.5. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ і підстановкою Кириченка $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, де $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$, причому числа n та m взаємно прості. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з матрицею показників*

$$\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_1 & x_{12} U_{12} \\ x_{21} U_{21} & \mathcal{E}'_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ — матриці показників зведених циклічних горенштейнових порядків з підстановками $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ і $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, U_{12}, U_{21} — матриці, всі елементи яких дорівнюють одиниці, x_{12}, x_{21} — цілі числа, причому

$$x_{12} + x_{21} = t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

Доведення. Матриця показників горенштейнового черепичного порядку, підстановка Кириченка якого є добутком циклів, що не перетинаються, має блочний вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_1 = (e_{11} + \cdots + e_{nn})\, \mathcal{E}\, (e_{11} + \cdots + e_{nn})$,
$\mathcal{E}_2 = (e_{n+1n+1} + \cdots + e_{n+mn+m})\, \mathcal{E}\, (e_{n+1n+1} + \cdots + e_{n+mn+m})$ — матриці показників циклічних горенштейнових порядків з підстановками Кириченка σ_1, σ_2 відповідно. Позаяк числа n і m взаємно прості, то за

наслідком 6

$$x_{12}+x_{21}=t=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

Тоді за теоремою 7 матриці $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ перетвореннями першого типу зводяться до матриць $\mathcal{E}'_1$ і $\mathcal{E}'_2$, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, причому $\alpha_{i\sigma_1(i)}=\alpha_{k\sigma_2(k)}=t$ для всіх $i=1,\dots,n$ і $k=n+1,\dots,n+m$. З умови горенштейновості маємо $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma_1(i)}=\alpha_{i\sigma_1(i)}=t$ для всіх $i=1,\dots,n$, $j=n+1,\dots,n+m$ і $\alpha_{kl}+\alpha_{l\sigma_2(k)}=\alpha_{k\sigma_2(k)}=t$ для всіх $l=1,\dots,n$ та $k=n+1,\dots,n+m$. Звідси при $j=k$ и $l=\sigma_1(i)$ отримуємо $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma_1(i)}=\alpha_{j\sigma_1(i)}+\alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$, тобто $\alpha_{ij}=\alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Оскільки порядки підстановок σ_1 і σ_2 взаємно прості, то $\alpha_{ij}=\alpha_{1n+1}$ для всіх $i=1,\dots,n$, $j=n+1,\dots,n+m$. Покладемо $\alpha_{1n+1}=x_{12}$ — ціле раціональне число. Тоді $\alpha_{kl}=\alpha_{n+11}=t-x_{12}$. Отже, матриця показників $\mathcal{E}'$ буде мати вигляд

$$\mathcal{E}'=\begin{pmatrix}\mathcal{E}'_1 & x_{12}U_{12}\\ x_{21}U_{21} & \mathcal{E}'_2\end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ — матриці показників зведених циклічних горенштейнових порядків з підстановками $\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ і $\sigma_2=\begin{pmatrix}n+1 & n+2 & \cdots & n+m\end{pmatrix}$ відповідно, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, U_{12}, U_{21} — матриці, всі елементи яких дорівнюють одиниці,

$$x_{12}+x_{21}=t=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma_1(i)}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

□

Теорема 15.6. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)=(\alpha_{ij})$, підстановка Кириченка σ якого є добутком циклів, що не перетинаються, $\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_m$, причому довжини циклів підстановок попарно взаємно прості. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з підстановкою Кириченка $\sigma'=\sigma'_1\cdots\sigma'_m$ і матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda')=(\alpha'_{ij})$ виду*

$$\begin{pmatrix}\mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m}\\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m\end{pmatrix},$$

де

$$x_{ij}+x_{ji}=t=\frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|}\alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

для всіх $i,j=1,\dots m$, $i\neq j$ та $x_{ij}+x_{js}\geq x_{is}$ для всіх попарно різних $i,j,s=1,\dots m$, $\mathcal{E}_k$ — матриці показників циклічних горенштейнових порядків з спряженими до σ_k підстановками Кириченка σ'_k, які є лінійними комбінаціями переставних матриць $P_{\sigma'_k}$ $(k=1,\dots,m)$.

Доведення. Горенштейновий черепичний порядок Λ ізоморфний порядку Λ'' з підстановкою Кириченка $\sigma' = \sigma'_1 \cdots \sigma'_m$, де кожна підстановка σ'_k діє на множині послідовних натуральних чисел. Тоді матриця показників порядку Λ'' буде мати вид

$$\mathcal{E}(\Lambda') = \mathcal{E}(\Lambda'') = \begin{pmatrix} \mathcal{E}''_1 & \mathcal{E}''_{12} & \cdots & \mathcal{E}''_{1m} \\ \mathcal{E}''_{21} & \mathcal{E}''_2 & \cdots & \mathcal{E}''_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}''_{m1} & \mathcal{E}''_{m2} & \cdots & \mathcal{E}''_m \end{pmatrix}.$$

Позаяк порядки підстановок σ'_k попарно взаємно прості, то

$$t = \frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma'_i>|} \alpha''_{k\sigma'_i(k)}}{|<\sigma'_i>|} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|} \alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

для всіх $i = 1, \dots m$. Отже, матриці показників $\mathcal{E}''_k$ з підстановками Кириченка σ'_k перетвореннями першого типу зводяться до вигляду, в якому вони є лінійною комбінацією степенів своїх переставних матриць $P_{\sigma'_k}$.

Для довільних i та j $(i \neq j)$ розглянемо горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma'_i \cdot \sigma'_j$ і матрицею показників

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}''_i & \mathcal{E}''_{ij} \\ \mathcal{E}''_{ji} & \mathcal{E}''_j \end{pmatrix}.$$

За лемою 9 його матриця показників зводиться до виду

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}'_i & x_{ij}U_{ij} \\ x_{ji}U_{ji} & \mathcal{E}'_j \end{pmatrix},$$

де матриці $\mathcal{E}'_i$, $\mathcal{E}'_j$ є лінійними комбінаціями степенів своїх переставних матриць. Отже, матриця показників буде мати вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda') = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m} \\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m \end{pmatrix}.$$

Нерівності $x_{ij} + x_{js} \geq x_{is}$ випливають з кільцевих нерівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. □

16 Горенштейнові порядки зі взаємно простими циклами у сукупності

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черпичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються, m_k — довжина циклу σ_k. Можна вважати, що $\sigma_k = \begin{pmatrix} g_k+1 & g_k+2 & \cdots & g_k+m_k \end{pmatrix}$ (цього можна досягти перетвореннями другого типу), де $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j$ при $k > 1$, $g_1 = 0$. Нехай $f_k = e_{g_k+1 g_k+1} + e_{g_k+2 g_k+2} + \cdots + e_{g_k+m_k g_k+m_k}$,

$1 = f_1 + \cdots + f_s$ — розклад одиниці кільця Λ в суму взаємно ортогональних ідемпотентів. Двосторонній пірсовський розклад кільця Λ має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1s} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_{s1} & \Lambda_{s2} & \cdots & \Lambda_{ss} \end{pmatrix},$$

де Λ_{kk} — зведений циклічний горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m_k \end{pmatrix}$. Відповідно до цього матриця показників порядку має вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_{kk}$ — матриця показників циклічного горенштейнового зведеного черепичного порядку Λ_{kk}. Запишемо умову горенштейновості порядку Λ в матричному вигляді $\mathcal{E} + P_\sigma \mathcal{E}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma(k)}\}U$ або

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{\sigma_1'} & O & \cdots & O \\ O & P_{\sigma_2'} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & P_{\sigma_s'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}^T & \mathcal{E}_{21}^T & \cdots & \mathcal{E}_{s1}^T \\ \mathcal{E}_{12}^T & \mathcal{E}_{22}^T & \cdots & \mathcal{E}_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{1s}^T & \mathcal{E}_{2s}^T & \cdots & \mathcal{E}_{ss}^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_1(k)}\} & O & \cdots & O \\ O & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_2(k)}\} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_s(k)}\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{s1} & U_{s2} & \cdots & U_{ss} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо систему матричних рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{jj} + P_{\sigma_j'}\mathcal{E}_{jj}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}U_{jj} \\ \mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ji}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij} \\ \mathcal{E}_{ji} + P_{\sigma_j'}\mathcal{E}_{ij}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}U_{ji} \end{cases}$$

Елементи матриці показників $\mathcal{E}$ циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$ і з нульовим першим стовпчиком обчислюються за формулами

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad m = 1 \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} & \text{якщо} \quad k \geq m > 1 \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j} & \text{якщо} \quad 1 < k < m \\ \alpha_{1m} & \text{якщо} \quad k = 1 \end{cases},$$

причому $\alpha_{1j} = \alpha_{1n+2-j}$ для всіх j. Матриця показників зведеного черепичного порядку не містить двох нульових стовпчиків або рядків. Елементи матриці показників $\mathcal{E}$ циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12\cdots n)$ і з довільним першим стовпчиком обчислюються за формулами

$$\alpha'_{km} = \alpha_{km} + x_k - x_m.$$

Крім цього, елементи блочних матриць $\mathcal{E}_{11}$, $\mathcal{E}_{22}$, ..., $\mathcal{E}_{ss}$ задовольняють систему

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m_1} \alpha_{k\sigma'_1(k)}}{m_1} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_2} \alpha_{k\sigma'_2(k)}}{m_2} = \dots = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_s} \alpha_{k\sigma'_s(k)}}{m_s}.$$

Для знаходження $\mathcal{E}_{ij}$ маємо систему

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma'_i}\mathcal{E}^T_{ji} = \operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} \\ \mathcal{E}_{ji} + P_{\sigma'_j}\mathcal{E}^T_{ij} = \operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji} \end{cases}$$

Звідси

$$\mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma'_i}\left(\operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji} - P_{\sigma'_j}\mathcal{E}^T_{ij}\right)^T = \operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij}$$

або

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = \operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} - P^T_{\sigma'_i}U_{ij}\operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}.$$

Враховуючи, що переставна матриця при множенні лише переставляє рядки або стовпчики матриці-співмножника, маємо

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = \operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\operatorname{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = 0$ та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розглянемо розв'язок однорідного рівняння.

Лема 16.1. *Нехай $\sigma_1 = (12\cdots n)$, $\sigma_2 = (12\cdots m)$, $(n,m) = d$, $n = du$, $m = dv$. Розв'язок рівняння $X - P_{\sigma_1}XP^T_{\sigma_2} = 0$ є наступною блочною $u \times v$ матрицею $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix}$, де $F \in M_d(\mathbb{Z})$ і F є лінійною комбінацією з довільними коефіцієнтами степенів переставної матриці $P_\tau = \sum\limits_{k=1}^{d} e_{k\tau(k)}$, де $\tau = (12\cdots d)$.*

Доведення. Рівняння $X = P_{\sigma_1}XP^T_{\sigma_2}$ можна подати у вигляді $x_{ij} = x_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Звідси $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(j)}$ для довільного цілого k. Покажемо, що для довільних цілих чисел p, q таких, що $0 < i+pd \leqslant n$, $0 < j+qd \leqslant m$ виконується рівність $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$.

Для довільного цілого k мають місце співвідношення $\sigma_1^k(i) \equiv i + k (\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k (\mathrm{mod}\ m)$. Оскільки числа u та v взаємно прості, то існують натуральні числа a та b такі, що $p-q = bv-au$. Покладемо $k = pd + an + cnm = qd + bm + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + pd (\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k \equiv j + qd (\mathrm{mod}\ m)$. Звідси випливає, що $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$. Це означає, що матриця X розбивається на uv однакових квадратних блоків F порядку d (по u блоків у блочному стовпчику та по v блоків у блочному рядку матриці X). Отже, $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix} \in M_{u\times v}(F)$. Покажемо тепер, що $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ при $i, j \leqslant d$, де $\tau = (12\cdots d)$.

Якщо $i, j < d$, то при $k = 1$ маємо $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{i+1,j+1} = x_{\tau(i)\tau(j)}$.

Нехай $i < d$, $j = d$. Позаяк числа u та v взаємно прості, то $1 = \delta v - \gamma u$ для деяких цілих чисел δ та γ. Покладемо $k = 1 + \gamma n + cnm = 1 - d + \delta m + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + 1 + \gamma n + cnm \equiv i + 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + \delta m + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(i)\tau(d)} = x_{i+1,1} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{id}$.

Аналогічно при $i = d$, $j < d$ покладемо $k = 1-d-\gamma n+cnm = 1-\delta m+cnm$. Тоді $\sigma_1^k(d) \equiv d+k \equiv 1-\gamma n+cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j+k \equiv j+1-\delta m+cnm \equiv j+1(\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(d)\tau(j)} = x_{1,j+1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(j)} = x_{dj}$.

При $i = d$, $j = d$ покладемо $k = 1 - d + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(d)\tau(d)} = x_{1,1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(d)} = x_{dd}$.

Таким чином, $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ при $i, j \leqslant d$. Тому $F = x_{11}E + x_{12}P_\tau + x_{13}P_\tau^2 + \cdots + x_{1d}P_\tau^{d-1}$. $\square$

Твердження 16.2. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки в добуток циклів, що не перетинаються, причому довжини циклів σ_k взаємно прості в сукупності, тобто $(|\langle\sigma_1\rangle|, \cdots, |\langle\sigma_s\rangle|) = 1$. Тоді $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|} \sum\limits_i^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|} \sum\limits_j^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$, де t — натуральне число.*

Доведення. Нехай m_k — довжина циклу σ_k, $Y_k = \sum\limits_i \alpha_{i\sigma_k(i)}$. Оскільки $(m_1, \ldots, m_s) = 1$, то існують цілі числа $a_1, \ldots, a_s$ такі що $a_1 \quad m_1 + \ldots + a_s \quad m_s = 1$. За лемою 15.2 $\frac{Y_p}{m_p} = \frac{Y_q}{m_q}$ або $m_qY_p = m_pY_q$. Помножимо цю рівність на a_q. Отримаємо $a_qm_qY_p = a_qm_pY_q$. Звідси $\sum\limits_{q\neq p} a_qm_qY_p = \sum\limits_{q\neq p} a_qm_pY_q$ або $Y_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qm_q = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. З урахуванням рівності $(m_1, \ldots, m_s) = 1$ маємо $Y_p \cdot (1 - a_pm_p) = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. Числа $1 - a_pm_p$ та m_p взаємно прості, тому Y_p ділиться на m_p для всіх p. $\square$

Теорема 16.3. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються. Нехай m_k — довжина циклу $\sigma_k = (g_k + 1\, g_k + 2\, \ldots\, g_k + m_k)$, де $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j$ для $k > 1$, $g_1 = 0$, нехай $d_{ij} = (m_i, m_j)$ — найбільший спільний дільник чисел m_i, m_j та $(m_1, \ldots, m_s) = 1$. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з підстановкою Кириченка $\sigma' = \sigma_1' \cdots \sigma_s'$ і матрицею показників $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix}$, де $\frac{1}{m_i} \sum\limits_{k=1}^{m_i} \alpha'_{k\sigma'(k)} = t \in \mathbb{N}$ для всіх $i = 1, \ldots s$. Матриця $\mathcal{E}_{kk}$ є матрицею показників циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка $\sigma_k' = (1\, 2\, \ldots\, m_k)$ і є лінійною комбінацією степенів переставної матриці $P_{\sigma_k'}$ $(k = 1, \ldots, s)$. Матриця $\mathcal{E}_{kl} = \begin{pmatrix} F_{kl} & \cdots & F_{kl} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{kl} & \cdots & F_{kl} \end{pmatrix}$, $k \neq l$, є $\frac{m_k}{d_{kl}} \times \frac{m_l}{d_{kl}}$ блочною матрицею,* *де F_{kl} є квадратною $d_{kl} \times d_{kl}$ матрицею, яка є лінійною комбінацією степенів переставної матриці $P_{\tau_{kl}}$ з $\tau_{kl} = (1\,2\,\ldots\,d_{kl})$.*

Доведення. За твердженням $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|}\sum\limits_{i}^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|}\sum\limits_{j}^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$, де t — натуральне число. Тоді кожна діагональна матриця $\mathcal{E}_{kk}$ ізоморфними перетвореннями зводиться до матриці $\mathcal{E}'_{kk}$, яка є лінійною комбінацією переставної матриці $P_{\sigma'_k}$, причому $\alpha_{i\sigma_k(i)} = t$ для всіх i та k. Тому матричне рівняння для $\mathcal{E}_{ij}$ $\quad \mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}$ набуває вигляду $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = 0$. Використовуючи лему, отримуємо твердження теореми. □

17 Латинські квадрати та горенштейнові порядки

В загальному випадку латинський квадрат порядку n — це квадратна матриця, у якої кожен рядок і кожен стовпчик є перестановкою елементів множини $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Кожний латинський квадрат є таблицею Келі скінченної квазігрупи.

Зокрема, таблиця Келі скінченної групи є латинським квадратом.

За множину S ми бедемо брати $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Приклад 17.1. *Латинський квадрат* $\mathcal{E}(\Gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *є таблицею Келі четверної групи Клейна* $(2)\times(2)$ *і матрицею показників* $\mathcal{E}(\Gamma_2)$ *горенштейнового напівмаксимального порядку* Γ_2 *з підстановкою Кириченка* $\sigma = (14)(23)$.

Тоді $\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{E}(R^2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

і

$$B = [Q(\Gamma_2)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен матриці B дорівнює

$$\chi_B(x) = (x+1)(x-1)^2(x-3).$$

Покладемо $G_0 = \{0\}$. Позначимо через Γ_0 горенштейновий напівмаксимальний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Gamma_0) = (0)$. Тоді $Q(\Gamma_0)$ є петлею.

Матриця $\mathcal{E}(\Gamma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є таблицею Келі циклічної групи (2) і є також матрицею показників горенштейнового напівмаксимального порядку Γ_1 з підстановкою Кириченка $\sigma = (12)$.

Позначимо через

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

квадратну матрицю порядку n.

Очевидно, що таблиця Келі четверної групи Клейна $(2) \times (2)$ може бути записана у такому вигляді:

$$\mathcal{E}(\Gamma_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\Gamma_1) & \mathcal{E}(\Gamma_1) + 2U_2 \\ \mathcal{E}(\Gamma_1) + 2U_2 & \mathcal{E}(\Gamma_1) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$\mathcal{E}(\Gamma_k) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\Gamma_{k-1}) & \mathcal{E}(\Gamma_{k-1}) + 2^{k-1}U_{2^{k-1}} \\ \mathcal{E}(\Gamma_{k-1}) + 2^{k-1}U_{2^{k-1}} & \mathcal{E}(\Gamma_{k-1}) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Твердження 17.2. $\mathcal{E}(\Gamma_k)$ — *матриця показників напівмаксимального порядку.*

Доведення. Очевидно,

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1} & \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} \\ \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} & \Gamma_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Індукцією за k легко отримуємо, що Γ_k — порядок. □

Нехай $G = H \times < g >$ — скінченна абелева група, $H = \{h_1, \dots, h_n\}$, $g^2 = e$. Будемо розглядати таблицю Келі групи H як матрицю $K(H) = (h_{ij})$ з елементами з H, де $h_{ij} = h_i h_j$. Очевидним є наступне твердження.

Твердження 17.3. *Таблиця Келі групи G має вигляд*

$$K(G) = \begin{pmatrix} K(H) & gK(H) \\ gK(H) & K(H) \end{pmatrix}.$$

Твердження 17.4. $\mathcal{E}(\Gamma_k)$ — *таблиця Келі групи G_k порядку 2^k.*

Доведення. Доведення індукцією за k. База індукції вже розглядалася. Якщо $\mathcal{E}(\Gamma_{k-1})$ — таблиця Келі групи порядку 2^{k-1}, то за твердженням 2 $\mathcal{E}(\Gamma_k)$ — таблиця Келі групи G_k порядку 2^k. □

Твердження 17.5. *Напівмаксимальний порядок* Γ_k *— горенштейновий з підстановкою Кириченка*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2^k-1 & 2^k \\ 2^k & 2^k-1 & 2^k-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Доведемо горенштейновість напівмаксимального порядку Γ_k за індукцією по k. Для $k=1$ це очевидно. Нехай напівмаксимальний порядок Γ_k є горенштейновим з матрицею показників $\mathcal{E}(\Gamma_k) = (\alpha_{ij}^k)$ ($i,j = 1,2,\dots,2^k$) і підстановкою Кириченка $\sigma = \sigma_k$, де $\sigma_k(i) = 2^k + 1 - i$. Тоді

$$\alpha_{ij}^k + \alpha_{j\sigma_k(i)}^k = \alpha_{i\sigma_k(i)}^k$$

для всіх $i,j = 1,2,\dots,2^k$. Оскільки

$$\begin{gathered} \alpha_{2^k+ij}^{k+1} = \alpha_{i2^k+j}^{k+1} = \alpha_{ij}^k + 2^k, \\ \alpha_{2^k+i2^k+j}^{k+1} = \alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^k \end{gathered} \tag{15}$$

для всіх $i,j = 1,2,\dots,2^k$, то

$$(\alpha_{ij}^k + 2^k) + \alpha_{j\sigma_k(i)}^k = \alpha_{ij}^k + (2^k + \alpha_{j\sigma_k(i)}^k) = \alpha_{i\sigma_k(i)}^k + 2^k.$$

Звідси з урахуванням (2) отримуємо, що

$$\alpha_{ij}^{k+1} + \alpha_{j2^k+\sigma_k(i)}^{k+1} = \alpha_{i2^k+\sigma_k(i)}^{k+1},\ \alpha_{i2^k+j}^{k+1} + \alpha_{2^k+j2^k+\sigma_k(i)}^{k+1} = \alpha_{i2^k+\sigma_k(i)}^{k+1},$$

$$\alpha_{2^k+i2^k+j}^{k+1} + \alpha_{2^k+j\sigma_k(i)}^{k+1} = \alpha_{2^k+i\sigma_k(i)}^{k+1},\ \alpha_{2^k+ij}^{k+1} + \alpha_{j\sigma_k(i)}^{k+1} = \alpha_{2^k+i\sigma_k(i)}^{k+1}$$

$i,j = 1,2,\dots,2^k$. Поклавши $\sigma_{k+1}(i) = 2^k + \sigma_k(i)$, $\sigma_{k+1}(2^k+i) = \sigma_k(i)$, будемо мати

$$\alpha_{pq}^{k+1} + \alpha_{q\sigma_{k+1}(p)}^{k+1} = \alpha_{p\sigma_{k+1}(p)}^{k+1},$$

для всіх $p,q = 1,2,\dots,2^{k+1}$, тобто напівмаксимальний порядок Γ_{k+1} є горенштейновим з підстановкою Кириченка $\sigma = \sigma_{k+1}$, де $\sigma_{k+1}(i) = 2^{k+1} + 1 - i$. □

Теорема 17.6. *Таблиця Келі скінченної групи* G *є матрицею показників зведеного горенштейнового напівмаксимального порядку тоді і тільки тоді, коли* $G = G_k = (2) \times \ldots \times (2)$.

Доведення. Таблиця Келі елементарної абелевої 2-групи G_k має вигляд (14) і є матрицею показників порядку Γ_k.

Навпаки, нехай G — скінченна група та її таблиця Келі є матрицею показників зведеного горенштейнового напівмаксимального порядку. Тоді для будь-якого $g \in G$ ми маємо $g^2 = e$ і G є елементарною абелевою 2-групою. Теорема доведена. □

Обчислимо матрицю суміжності сагайдака $Q(\Gamma_k)$. Для цього подамо порядок Γ_k у такому вигляді

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1} & \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} \\ \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} & \Gamma_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Нехай $R_k = \mathrm{rad}\,\Gamma_k$ — радикал Джекобсона кільця Γ_k і $\mathcal{E}(\Gamma_k) = (\alpha_{ij}^k)$, $\mathcal{E}(R_k) = (r_{ij}^k)$, $\mathcal{E}(R_k^2) = (\beta_{ij}^k)$. Тоді

$$R_k = \begin{pmatrix} R_{k-1} & \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} \\ \pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1} & R_{k-1} \end{pmatrix},\ R_k^2 = \begin{pmatrix} R_{k-1}^2 + \pi^{2^k}\Gamma_{k-1} & \pi^{2^{k-1}}R_{k-1}\Gamma_{k-1} \\ \pi^{2^{k-1}}R_{k-1}\Gamma_{k-1} & R_{k-1}^2 + \pi^{2^k}\Gamma_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Так як $r_{ij}^{k-1} \le 2^{k-1}$, то $\beta_{ij}^{k-1} \le 2^k \le 2^k + \alpha_{ij}^{k-1}$. Звідси маємо

$$R_{k-1}^2 + \pi^{2^k}\Gamma_{k-1} = R_{k-1}^2.$$

Для будь-якого первинного напівмаксимального кільця A виконується рівність $(\mathrm{rad}\,A)A = A(\mathrm{rad}\,A) = \mathrm{rad}\,A$. Тому $\pi^{2^{k-1}}R_{k-1}\Gamma_{k-1} = \pi^{2^{k-1}}R_{k-1}$. Позаяк $\mathcal{E}(\pi^{2^{k-1}}R_{k-1}) - \mathcal{E}(\pi^{2^{k-1}}\Gamma_{k-1}) = (2^{k-1} + \mathcal{E}(R_{k-1}) - (2^{k-1} + \mathcal{E}(\Gamma_{k-1})) = E$, то

$$\mathcal{E}(R_k^2) - \mathcal{E}(R_k) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(R_{k-1}^2) - \mathcal{E}(R_{k-1}) & E \\ E & \mathcal{E}(R_{k-1}^2) - \mathcal{E}(R_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що

$$[Q(\Gamma_k)] = \begin{bmatrix} [Q(\Gamma_{k-1})] & E \\ E & [Q(\Gamma_{k-1})] \end{bmatrix}.$$

Обчислимо характеристичний многочлен $\chi_k(x) = \chi_{[Q(\Gamma_k)]}(x)$.

$$\chi_{k+1}(x) = |xE - [Q(\Gamma_{k+1})]| = \begin{vmatrix} xE - [Q(\Gamma_k)] & -E \\ -E & xE - [Q(\Gamma_k)] \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} xE - [Q(\Gamma_k)] - E & xE - [Q(\Gamma_k)] - E \\ -E & xE - [Q(\Gamma_k)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xE - [Q(\Gamma_k)] - E & 0 \\ -E & xE - [Q(\Gamma_k)] + E \end{vmatrix} =$$

$$= |xE - [Q(\Gamma_k)] - E| \cdot |xE - [Q(\Gamma_k)] + E| =$$

$$= |(x-1)E - [Q(\Gamma_k)]| \cdot |(x+1)E - [Q(\Gamma_k)]| = \chi_k(x-1) \cdot \chi_k(x+1)$$

Отже

$$\chi_{k+1}(x) = \chi_k(x-1) \cdot \chi_k(x+1). \tag{16}$$

Оскільки

$$\chi_1(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-2),$$

то

$$\chi_2(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x+1) = (x-3)(x-1)^2(x+1),$$

$$\chi_3(x) = (x-4)(x-2)^2 x(x-2)x^2(x+2) = (x-4)(x-2)^3 x^3 (x+2).$$

Твердження 17.7. $\chi_m(x) = \prod\limits_{i=0}^{m} (x - m - 1 + 2i)^{C_m^i}$.

Доведення. Доведення проведемо за індукцією. База індукції очевидна. Припустимо, що формула вірна для $m = k$. Тоді за формулою (3) маємо

$$\chi_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^{k}(x-k-2+2i)^{C_k^i} \cdot \prod_{j=0}^{k}(x-k+2j)^{C_k^j} =$$

$$= (x-k-2)\prod_{i=1}^{k}(x-k-2+2i)^{C_k^i} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(x-k+2j)^{C_k^j}(x+k) =$$

$$= (x-k-2)\prod_{i=0}^{k-1}(x-k+2i)^{C_k^{i+1}} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(x-k+2j)^{C_k^j}(x+k) =$$

$$= (x-k-2)\prod_{i=0}^{k-1}(x-k+2i)^{C_k^i + C_k^{i+1}}(x+k).$$

Оскільки $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}$, то

$$\chi_{k+1}(x) = (x-k-2)\prod_{i=0}^{k-1}(x-k+2i)^{C_{k+1}^{i+1}}(x+k) =$$

$$= (x-k-2)\prod_{j=1}^{k}(x-k+2(j-1))^{C_{k+1}^j}(x+k) = \prod_{j=0}^{k+1}(x-(k+1)-1+2j)^{C_{k+1}^j}.$$

□

Індукцією легко доводиться, що $\sum\limits_{i=1}^{2^k} q_{ij}(\Gamma_k) = k+1$, $\sum\limits_{j=1}^{2^k} q_{ij}(\Gamma_k) = k+1$. Тому $[Q(\Gamma_k)] = (k+1)P_k$, де P_k є двічі стохастичною матрицею.

Означення 17.8. *Скінченну квазігрупу $\mathcal{L}$ визначену на множині $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ будемо називати горенштейновою квазігрупою, якщо її таблиця Келі $C(\mathcal{L}) = (\alpha_{ij})$ має нульову головну діагональ та існує підстановка $\sigma : i \to \sigma(i)$ для $i = 1, \ldots, n$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Відзначимо, що матриця показників симетрична як відносно головної, так і відносно побічної діагоналі. Але двічі симетрична таблиця Келі горенштейнової квазігрупи не завжди є матрицею показників зведеного первинного горенштейнового напівмаксимального порядку. Матриця

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
1 & 0 & 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 & 11 & 10 \\
2 & 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 8 & 10 & 7 & 11 & 6 & 9 \\
3 & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 10 & 6 & 11 & 7 & 9 & 8 \\
4 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 & 9 & 11 & 6 & 10 & 8 & 7 \\
5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 11 & 9 & 10 & 8 & 7 & 6 \\
6 & 7 & 8 & 10 & 9 & 11 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\
7 & 8 & 10 & 6 & 11 & 9 & 2 & 0 & 5 & 1 & 3 & 4 \\
8 & 9 & 7 & 11 & 6 & 10 & 1 & 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\
9 & 6 & 11 & 7 & 10 & 8 & 3 & 1 & 4 & 0 & 5 & 2 \\
10 & 11 & 6 & 9 & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 \\
11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

є таблицею Келі горенштейнової квазігрупи з підстановкою

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Але кільцеві нерівності не виконуються: $\alpha_{17} + \alpha_{79} = 7 < \alpha_{19} = 8$.

Приклади.

I.

Латинський квадрат

$$\mathcal{L}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

є горенштейновою матрицею з підстановкою

$$\sigma = \sigma(\mathcal{L}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

і

$$[Q(\mathcal{L}_4)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $[Q(\mathcal{L}_4)] = E + P_{\sigma^2} + P_{\sigma^3}$ і

$$
Q(\mathcal{L}_4) \;=\; \begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & 2 \arrow[loop right] \arrow[d] \\
3 \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur] & 4 \arrow[loop right] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

II.

Латинський квадрат

$$
\mathcal{E}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

є таблицею Келі четверної групи Клейна і є горенштейновою матрицею з підстановкою $\sigma(\mathcal{E}) \;=\; (14)(23)$. За твердженнями **??** та **??** матриці $\mathcal{E}_2$ та $\mathcal{L}_4$ не є еквівалентними.

$$
[Q(\mathcal{E}_2)] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Очевидно,

$$
Q(\mathcal{E}_2) \;=\; \begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & 2 \arrow[loop right] \arrow[d, leftrightarrow] \\
3 \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] & 4 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

Введемо наступні позначення:

$$
\mathcal{E}_0 \;=\; (0),\, \mathcal{E}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\, \mathcal{E}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
U_n \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ та } U_n \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},\; X_{k-1} \;=\; 2^{k-1} U_{2^{k-1}};
$$

$$
\mathcal{E}_k \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{k-1} & \mathcal{E}_{k-1} + X_{k-1} \\ \mathcal{E}_{k-1} + X_{k-1} & \mathcal{E}_{k-1} \end{pmatrix} \text{ для } k = 1, 2, \dots .
$$

Очевидно $\mathcal{E}_k$ є горенштейновою матрицею з підстановкою

$$\sigma = \sigma(\mathcal{E}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^k \\ 2^k & 2^k - 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 17.9. *Нехай латинський квадрат $\mathcal{L}_n$ з першим рядком і першим стовпчиком* $(0\,1\,\dots\,n-1)$ *є матрицею показників. Тоді $n = 2^m$ і $\mathcal{L}_n = \mathcal{E}_m$ є таблицею Келі прямого добутку m екземплярів циклічної групи порядку 2.*

Навпаки, таблиця Келі $\mathcal{E}_m$ елементарної абелевої групи $G_m = (2) \times \ldots \times (2)$ (m множників) порядку 2^m є латинським квадратом і горенштейновою симетричною матрицею з першим рядком $(0, 1, \dots, 2^m - 1)$ *і*

$$\sigma(\mathcal{E}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2^m - 1 & 2^m \\ 2^m & 2^m - 1 & 2^m - 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лема 17.10. *Нехай $\mathcal{L}_n = (\alpha_{ij})$ як визначена вище. Тоді*

$$|\, i - j \,| \le \alpha_{ij} \le i + j - 2.$$

Доведення. Очевидно $\alpha_{1i} + \alpha_{ij} \ge \alpha_{1j}$ і $\alpha_{ij} \ge j - 1 - (i-1) = j - i$. Аналогічно $\alpha_{ij} + \alpha_{j1} \ge \alpha_{i1}$ і $\alpha_{ij} \ge i - 1 - (j-1) = i - j$, тобто $\alpha_{ij} \ge |\, i - j \,|$. Маємо $\alpha_{i1} + \alpha_{1j} \ge \alpha_{ij}$ і $\alpha_{ij} \le i + j - 2$. □

Лема 17.11. *Останній рядок матриці $\mathcal{L}_n$ є $(n-1, n-2, \dots, 1)$.*

Доведення. За визначенням матриці $\mathcal{L}_n$ маємо $\alpha_{n1} = n - 1$. За лемою 17.10 маємо $\alpha_{ni} \ge n - i$. Тоді $\alpha_{n2} = n - 2$, $\alpha_{n3} = n - 3$ і $\alpha_{nn} = 0$. □

Наслідок 17.12. *Останній стовпчик матриці $\mathcal{L}_n$ є $(n-1, n-2, \dots, 1)^T$, де T означає транспонування.*

Лема 17.13. *Нехай $\mathcal{L}_n = (\alpha_{ij})$ визначена як вище. Тоді*

$$|i + j - (n+1)| \le |n - 1 - \alpha_{ij}|.$$

Доведення. За лемою 17.11 та наслідком 17.12 маємо $\alpha_{ij} \le \alpha_{in} + \alpha_{nj} = (n-i) + (n-j) = 2n - (i+j)$. За лемою 17.10 $\alpha_{ij} \le i + j - 2$. З першої нерівності отримуємо

$$\alpha_{ij} - (n-1) \le n + 1 - (i+j).$$

З другої нерівності маємо

$$\alpha_{ij} - (n-1) \le (i+j) - (n+1).$$

Отже,

$$|(i+j) - (n+1)| \le |\alpha_{ij} - (n-1)|.$$

□

Наслідок 17.14. *Число n — парне.*

Доведення. За лемою 17.13 число $n-1$ стоїть на місцях (i,j), для яких $|(n-1)-(n-1)| \geq |i+j-(n+1)|$, тобто $i+j=n+1$. Отже, побічна діагональ має наступний вигляд: $(n-1,\dots,n-1)$. Якщо n непарне, то для $i=j=\frac{n+1}{2}$ маємо $\alpha_{ii}=n-1$. Отримали протиріччя. Отже, $n=2n_1$. $\square$

Перейдемо до доведення основної теореми.

Доведення. Якщо $\alpha_{ij}=1$, то за лемою 17.10 $|i-j| \leq 1$. Враховуючи, що $\alpha_{ii}=0$ для всіх i, маємо $|i-j|=1$. Тоді одиниці можуть стояти лише на місцях $(k,k+1)$ і $(k+1,k)$. Точніше в k-ому рядку одиниця стоїть на місці $(k,k-1)$ або $(k,k+1)$, в k-ому стовпчику одиниця стоїть на місці $(k-1,k)$ або $(k+1,k)$. За умовою теореми $\alpha_{12}=1$ та $\alpha_{21}=1$. В третьому рядку число 1 може стояти на місці $(3,4)$ або $(3,2)$. На місці $(3,2)$ одиниця не може стояти, бо у другому стовпчику вона стоїть на місці $(1,2)$. Тому $\alpha_{34}=1$. Аналогічно одиниця у третьому стовпчику не може стояти на місці $(2,3)$ і тоді $\alpha_{43}=1$.

Далі $\alpha_{54} \neq 1$, бо в четвертому стовпчику $\alpha_{34}=1$. Тому $\alpha_{56}=1$. Аналогічно в четвертому рядку 1 стоїть на місці $(4,3)$, тому $\alpha_{45} \neq 1$ а $\alpha_{65}=1$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо $\alpha_{2k,2k-1}=1$, $\alpha_{2k-1,2k}=1$ для всіх $k=1,\dots,n_1$ і

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & * & \cdots & * \\ * & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & * & \cdots & * \\ * & \mathcal{E}_1 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}.$$

За лемою 17.13 число $n-2$ стоїть на місцях (i,j), для яких $|i+j-(n+1)| \leq |n-1-(n-2)|=1$. Якщо $i+j=n+1$, то $\alpha_{ij}=n-1$. Тому число $n-2$ стоїть на місцях (i,j), для яких $|i+j-(n+1)|=1$ і тоді $i+j=n$ або $i+j=n+2$. Число $n-2$ може стояти в k-ому рядку на місці $(k,n-k)$ або $(k,n+2-k)$, в k-ому стовпчику — на місці $(n-k,k)$ або $(n+2-k,k)$.

За умовою теореми $\alpha_{1,n-1}=n-2$ і за наслідком 17.12 $\alpha_{2n}=n-2$. В третьому рядку число $n-2$ може стояти на місці $(3,n-3)$ або $(3,n-1)$. В $(n-1)$-ому стовпчику число $n-2$ стоїть на місці $(1,n-1)$. Тому $\alpha_{3,n-3}=n-2$. В $(n-2)$-ому стовпчику $n-2$ може стояти на місці $(2,n-2)$ або $(4,n-2)$. Оскільки у другому рядку $\alpha_{2n}=n-2$, то $\alpha_{2,n-2} \neq n-2$ а $\alpha_{4,n-2}=n-2$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \begin{matrix} n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 \end{matrix} \\ * & \cdots & \begin{matrix} n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 \end{matrix} & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 \end{matrix} & \cdots & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & A_1 \\ * & \cdots & A_1 & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 & \cdots & * & * \end{pmatrix},$$

де $A_1 = \begin{pmatrix} n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 \end{pmatrix}$.

На головній діагоналі матриці $\mathcal{L}_n$ стоїть n_1 блок $\mathcal{E}_1$, на побічній — n_1 блок A_1. При непарному n_1 повинен існувати блок, який належить одночасно як головній, так і побічній діагоналям. Але $\mathcal{E}_1 \neq A_1$. Тому число n_1 — парне, $n_1 = 2n_2$.

Якщо $\alpha_{ij} = 2$, то за лемою 17.10 $|i-j| \leq 2$. Звідси число 2 може стояти в k-ому рядку на одному з чотирьох місць $(k, k-2)$, $(k, k-1)$, $(k, k+1)$, $(k, k+2)$, а в k-ому стовпчику — на одному з чотирьох місць $(k-2, k)$, $(k-1, k)$, $(k+1, k)$, $(k+2, k)$.

За умовою теореми $\alpha_{13} = 2$ і $\alpha_{31} = 2$. В другому рядку двійка може стояти на місцях $(2,1)$, $(2,3)$, $(2,4)$. На місці $(2,1)$ стоїть 1, а у третьому стовпчику двійка стоїть на місці $(1,3)$. Тому $\alpha_{24} = 2$.

У другому стовпчику двійка може стояти на місцях $(1,2)$, $(3,2)$, $(4,2)$. На місці $(1,2)$ стоїть 1, а у третьому рядку двійка стоїть на місці $(1,3)$. Тому $\alpha_{42} = 2$. Отримали, що у перших чотирьох рядках та стовпчиках двійка стоїть на місцях $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,4)$, $(4,2)$.

Матриця $\mathcal{L}_n$ набуває вигляду

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 0 & 1 \\ * & 2 & 1 & 0 \end{matrix} & * \\ * & B_2 \end{pmatrix}.$$

У матриці B_2, як і у матриці $\mathcal{L}_n$, на головній діагоналі стоять блоки $\mathcal{E}_1$ а двійки стоять на місцях (i,j), для яких $|i-j| \leq 2$. Тому матриця B_2 також повинна містити блок $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 0 & 1 \\ * & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Продовжуючи аналогічні міркування отримаємо

$$\mathcal{L}_n = \left(\begin{array}{cccc} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 0 & 1 \\ * & 2 & 1 & 0 \end{matrix} & * & \cdots & * \\ * & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 0 & 1 \\ * & 2 & 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 2 & * & 0 & 1 \\ * & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right).$$

Якщо $\alpha_{ij} = 3$, то $|i - j| \leq 3$.

З нерівностей

$\alpha_{4t+4,4t+1} \leq \alpha_{4t+4,4t+2} + \alpha_{4t+2,4t+1} = 2 + 1 = 3$, $\alpha_{4t+1,4t+4} \leq \alpha_{4t+1,4t+3} + \alpha_{4t+3,4t+4} = 2 + 1 = 3$ та $\alpha_{4t+4,4t+1} \geq |(4t+4) - (4t+1)| = 3$, $\alpha_{4t+1,4t+4} \geq |(4t+4) - (4t+1)| = 3$ випливає, що $\alpha_{4t+4,4t+1} = 3$, $\alpha_{4t+1,4t+4} = 3$.

З нерівностей $\alpha_{4t+2,4t+3} \leq \alpha_{4t+2,4t+1} + \alpha_{4t+1,4t+3} = 1 + 2 = 3$, $\alpha_{4t+3,4t+2} \leq \alpha_{4t+3,4t+1} + \alpha_{4t+1,4t+2} = 2 + 1 = 3$, враховуючи, що числа $0, 1, 2$ на місцях $(4t+2, 4t+3)$ та $(4t+3, 4t+2)$ не стоять, отримуємо $\alpha_{4t+2,4t+3} = \alpha_{4t+3,4t+2} = 3$.

Ми отримали наступну матрицю:

$$\mathcal{L}_n = \left(\begin{array}{cccc} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} & * & \cdots & * \\ * & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 & * & \cdots & * \\ * & \mathcal{E}_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}.$$

Доведемо індукцією наступні два твердження:

- для кожного k існує єдиний латинський квадрат $\mathcal{E}_k$ порядку 2^k, який задовольняє умові теореми, а саме $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(\Gamma_k)$;
- для кожного k кількість n_{k-1} блоків $\mathcal{E}_{k-1}$ ($\mathcal{E}_k \neq \mathcal{L}_n$) на головній діагоналі $\mathcal{L}_n$ завжди парна.

База індукції вже розглянута.

Припустимо, що $2^k < n$ і на головній діагоналі матриці $\mathcal{L}_n$ стоїть n_k блоків $\mathcal{E}_k$ (кожний порядку 2^k).

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_k & * & \cdots & * \\ * & \mathcal{E}_k & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & \mathcal{E}_k \end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{k-1} & \mathcal{E}_{k-1} + 2^{k-1}U_k \\ \mathcal{E}_{k-1} + 2^{k-1}U_k & \mathcal{E}_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Якщо $\alpha_{ij} = 2^k$, то за лемою 17.13 $|i-j| \leq 2^k$. Нехай $i \leq 2^k$. Тоді $j \leq 2^k + i$. Крім цього, при $j \leq 2^k$ елементи α_{ij} належать блоку $\mathcal{E}_k$ і тоді $\alpha_{ij} < 2^k$. Тому маємо $2^k < j \leq 2^k + i$. За умовою теореми $\alpha_{1,2^k+1} = 2^k$. Якщо $i = 2$, то $2^k < j \leq 2^k + 2$. На місці $(2, 2^k+1)$ не може стояти число 2^k, бо в (2^k+1)-ому стовпчику воно стоїть на місці $(1, 2^k+1)$. Тому $j = 2^k + 2$, $\alpha_{2,2^k+2} = 2^k$.

Доведемо індукцією, що $\alpha_{l,2^k+l} = 2^k$ для всіх $l = 1, 2, \ldots, 2^k$. Базу індукції ми вже розглянули. Припустимо, що $\alpha_{l,2^k+l} = 2^k$ для всіх $l = 1, 2, \ldots, m$, де $m < 2^k$. Нехай в $(m+1)$-ому рядку число 2^k стоїть на місці $(m+1, j)$. Тоді $2^k < j \leq 2^k + m + 1$. У стовпчиках з номерами $2^k+1,\ 2^k+2,\ \ldots,\ 2^k+m$ за припущенням число 2^k стоїть на місцях $(1, 2^k+1)$, $(2, 2^k+2)$, $\ldots$, $(m, 2^k+m)$. Тому $j > m$, а отже, $j = m+1$. Тоді $\alpha_{m+1,2^k+m+1} = 2^k$.

Таким чином, $\alpha_{l,2^k+l} = 2^k$ для всіх $l = 1, 2, \ldots, 2^k$.

Проводячи аналогічні міркування над стовпчиками отримаємо $\alpha_{2^k+l,l} = 2^k$ для всіх $l = 1, 2, \ldots, 2^k$.

Числа 2^k ми розташували у перших $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ рядках та стовпчиках. Матриця $\mathcal{L}_n$ набула вигляду

$$\mathcal{L}_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & 2^k & \cdots & * & \\ & \mathcal{E}_k & & \cdots & \ddots & \cdots & \\ & & & * & \cdots & 2^k & * \\ 2^k & \cdots & * & & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \mathcal{E}_k & & \\ * & \cdots & 2^k & & & & \\ & & * & & & & B_k \end{array}\right)$$

У матриці B_k, як і у матриці $\mathcal{L}_n$, на головній діагоналі стоять блоки $\mathcal{E}^k$ і число 2^k стоїть на тих місцях (i,j), для яких $|i-j| \leq 2^k$. Тому з аналогічних міркувань матриця B_k при умові, що порядок матриці B_k не менший, ніж 2^k, також містить блок

$$
\begin{pmatrix}
 & & & 2^k & \cdots & * \\
 & \mathcal{E}_k & & \cdots & \ddots & \cdots \\
 & & & * & \cdots & 2^k \\
2^k & \cdots & * & & & \\
\cdots & \ddots & \cdots & & \mathcal{E}_k & \\
* & \cdots & 2^k & & &
\end{pmatrix}.
$$

Припустимо, що число n_k — непарне. Тоді отримаємо

$$
\mathcal{L}_n = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & 2^k & \cdots & * & & & & & & & & & \\
 & \mathcal{E}_k & & & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & & & & & \\
 & & & & * & \cdots & 2^k & \cdots & & & * & & & & & \\
2^k & \cdots & * & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \ddots & \cdots & & & \mathcal{E}_k & & & & & & & & & & \\
* & \cdots & 2^k & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \cdots & & & & \ddots & & & \cdots & & & & & * \\
 & & & & & & & & & & & & 2^k & \cdots & * & \\
 & & & & & & & & & \mathcal{E}_k & & & \cdots & \ddots & \cdots & \\
 & & & * & & & & \cdots & & & & & * & \cdots & 2^k & \\
 & & & & & & & & 2^k & \cdots & * & & & & & \\
 & & & & & & & & \cdots & \ddots & \cdots & & & \mathcal{E}_k & & \\
 & & & & & & & & * & \cdots & 2^k & & & & & \\
 & & & & & & & * & & & & & & & & \mathcal{E}_k
\end{array}\right).
$$

Число 2^k стоїть у матриці $\mathcal{L}_n$ в усіх рядках і стовпчиках, окрім останніх 2^k рядків та стовпчиків. У блоці $\mathcal{E}_k$ всі елементи менші, ніж 2^k. Тому в останніх 2^k рядках та стовпчиках не можна розташувати число 2^k так, щоб матриця $\mathcal{L}_n$ залишилася латинським квадратом. Отже, $n_k = 2n_{k+1}$ — парне число.

Крім цього, за побудовою маємо рівності

$$
\alpha_{t2^{k+1}+i,t2^{k+1}+2^k+i} = 2^k,
$$

$$
\alpha_{t2^{k+1}+2^k+i,t2^{k+1}+i} = 2^k
$$

для всіх можливих $t \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$.

Позначимо через Y_l l-ий діагональний $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ блок матриці $\mathcal{L}_n$ $l = 1, 2, \ldots, n_{k+1}$.

$$Y_l = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_k & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_k \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2^k & \cdots & * \\ & \mathcal{E}_k & & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & * & \cdots & 2^k \\ 2^k & \cdots & * & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \mathcal{E}_k & \\ * & \cdots & 2^k & & & \end{array} \right).$$

Оскільки матриця $\mathcal{L}_n$ є латинським квадратом, то у блоці Y_l у кожному рядку та у кожному стовпчику стоять різні числа. Числа $0, 1, \ldots, 2^k - 1$ стоять у блоках $\mathcal{E}_k$. Тоді всі елементи блоків $\mathcal{E}_{12}$ та $\mathcal{E}_{21}$ повинні бути більшими або дорівнювати 2^k. З іншого боку, для елементів цих блоків маємо

$$2^k \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+2^k+j} \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+j} + \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+j, t\cdot 2^{k+1}+2^k+j} =$$

$$= \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+j} + 2^k < 2^{k+1};$$

$$2^k \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+2^k+i, t\cdot 2^{k+1}+j} \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+2^k+i, t\cdot 2^{k+1}+i} + \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+j} =$$

$$= 2^k + \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+j} < 2^{k+1}$$

для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, 2^k$. Тому матриці $\mathcal{E}_{12}$ та $\mathcal{E}_{21}$ є латинськими квадратами на множині $\{2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Покажемо, що перший рядок і перший стовпчик блоку Y_l має вигляд $(0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1)$ і $(0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1)^T$ відповідно.

З нерівностей

$$\alpha_{t\cdot 2^{k+1}+1, t\cdot 2^{k+1}+2^k+i} \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+1, t\cdot 2^{k+1}+i} + \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+2^k+i} = (i-1) + 2^k = 2^k + i - 1$$

$$\alpha_{t\cdot 2^{k+1}+2^k+i, t\cdot 2^{k+1}+1} \leq \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+2^k+i, t\cdot 2^{k+1}+i} + \alpha_{t\cdot 2^{k+1}+i, t\cdot 2^{k+1}+1} = 2^k + (i-1) = 2^k + i - 1$$

для всіх $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, враховуючи, що матриці $\mathcal{E}_{12}$ та $\mathcal{E}_{21}$ є латинськими квадратами та $\mathcal{E}_{12} \geq 2^k U$, $\mathcal{E}_{21} \geq 2^k U$, послідовно для значень $i = 1, 2, \ldots, 2^k$ отримуємо

$$\alpha_{t\cdot 2^{k+1}+1, t\cdot 2^{k+1}+2^k+i} = 2^k + i - 1$$

$$\alpha_{t\cdot 2^{k+1}+2^k+i, t\cdot 2^{k+1}+1} = 2^k + i - 1$$

Тому перший рядок (перший стовпчик) матриць $\mathcal{E}_{12}$ та $\mathcal{E}_{21}$ має наступний вигляд $(0, 1, \ldots, 2^k - 1)$ $((0, 1, \ldots, 2^k - 1)^T)$.

Оскільки $2^k U_k \leq \mathcal{E}_{12} < 2^{k+1} U$, то $0 \leq \mathcal{E}_{12} - 2^k U_k < 2^k U$, і $\mathcal{E}_{12} - 2^k U_k$ є латинським квадратом на множині $\{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.

Позаяк $2^k U_k \leq \mathcal{E}_{21} < 2^{k+1} U$, то $0 \leq \mathcal{E}_{21} - 2^k U_k < 2^k U$, і $\mathcal{E}_{21} - 2^k U_k$ є латинським квадратом на множині $\{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$.

За припущенням індукції маємо $\mathcal{E}_{12} - 2^k U_k = \mathcal{E}_{21} - 2^k U_k = \mathcal{E}_k$ і блоки

$$Y_l = \mathcal{E}_{k+1} \ = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_k & \mathcal{E}_k + X_k \\ \mathcal{E}_k + X_k & \mathcal{E}_k \end{pmatrix} = \mathcal{E}_{k+1}$$

стоять на головній діагоналі.

Твердження індукції доведено.

Ми показали, що кількість n_k блоків $\mathcal{E}_k$ на діагоналі $\mathcal{E}$ є $n_{k+1} = \frac{n_k}{2}$ і $n = 2^k n_k$. Для деякого $k = m$ отримаємо $n_m = 1$. Тоді $n = 2^m$ і $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$.

$$\mathcal{L}_n \ = \ \mathcal{E}_m \ = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{m-1} & \mathcal{E}_{m-1} + X_{m-1} \\ \mathcal{E}_{m-1} + X_{m-1} & \mathcal{E}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

□

Друга частина цієї теореми доведена в теоремі 17.6.

Зауваження 17.15. *Приклад I показує, що для основної теореми умова для латинського квадрату мати перший рядок і перший стовпчик вигляду* $(01 \dots n-1)$ *є необхідною.*

Література

[1] Chernousova, Zh.T., Dokuchaev, M.A., Khibina, M.A., Kirichenko, V.V., Miroshnichenko, S.G., and Zhuravlev, V.N., *Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. I.*, Algebra and Discrete Math. v. 1 (2002), pp. 32-63.

[2] Chernousova, Zh.T., Dokuchaev, M.A., Khibina, M.A., Kirichenko, V.V., Miroshnichenko, S.G., and Zhuravlev, V.N., *Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. II.*, Algebra and Discrete Math. v. 2, N 2, (2003), pp. 47-86.

[3] Gubareni, N.M. and Kirichenko, V.V., Rings and Modules. – Czestochowa, 2001.

[4] Tuganbaev, A. A., Semidistributive modules and rings, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[5] Zavadskij A.G., *The Structure of Orders with Completely Decomposable Representations*, Mat. Zametki, v. 13, N 2, 1973, pp. 325-335 (in Russian).

[6] Kirichenko, V.V.,*On semiperfect rings of injective dimension one*, preprint, Trabalhos do departamento de matemática, Universidade de São Paulo, Instituto de matemática e estatistica, Brasil, 2006, 25 p.

[7] Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. Науч. семинаров Ленингр. Отд. Мат. ин-та АН СССР.– 1976.– т.57.– с. 100-116.

[8] Кириченко В.В. О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1978.– т.148.– с. 168-174.

[9] M.Hazewinkel, N.Gubareni and V.V.Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol.2, Series: Mathematics and Its Applications, 586, Springer, Dordrecht, 2007, xii+400pp.

[10] M.Hazewinkel, N.Gubareni and V.V.Kirichenko, Algebras, Rings and Modules. Vol.1, Series: Mathematics and Its Applications, 575, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.