

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А. Ф. Улітко, О. В. Борисейко, І. А. Улітко

ПРИКЛАДНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ
ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ
(Конспект лекцій)

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2007

Прикладні методи в задачах електропружності. (Конспект лекцій)/ А. Ф. Улітко, О. В. Борисейко, І. А. Улітко– К.: ВПЦ "Київський університет", 2007.
– 127 с.

Рецензенти

Доктор фіз.-мат. наук, проф. Л. В. Мольченко
Доктор фіз.-мат. наук, проф. В. Г. Карнаухов

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
9 жовтня 2006 р.

Зміст

Передмова	7
Лекція 1. Феноменологічна теорія п'єзоелектричного ефекту	9
1.1. Явище п'єзоелектричного ефекту. Галузі застосування п'єзоматеріалів	9
1.2. Модель мікроструктури п'єзокераміків. Поляризація	10
1.3. Найпростіша кількісна характеристика явищ п'єзоефекту .	12
Лекція 2. Повна система рівнянь електропружності. Постановка основних граничних задач	15
2.1. Рівняння стану попередньо поляризованої кераміки (п'єзокераміки)	15
2.2. Повна система рівнянь електропружності для п'єзокерамічного середовища	17
2.3. Початкові умови	19
2.4. Граничні умови для механічних змінних спряженого електропружного поля	20
2.5. Граничні умови для електричних змінних спряженого поля ..	21
Лекція 3. Задача чистого розтягу та згину прямокутної п'єзопризми	28
3.1. Постановка граничної задачі та форма загального розв'язку для призми з поперечною поляризацією	28
3.2. Електродовані бічні поверхні прямокутної призми при $z = \pm h$	32
Лекція 4. Задача чистого розтягу та згину прямокутної п'єзопризми (продовження)	36
4.1. Електродні покриття відсутні на всій поверхні призми	36
4.2. Рівномірний розтяг і чистий згин прямокутної призми з позовжньою поляризацією	37

Лекція 5. Поздовжні коливання стрижня з поперечною поляризацією	42
5.1. Постановка задачі	43
5.2. Побудова розв'язку задачі	44
5.3. Резонансні частоти та нормальні моди коливань	45
5.4. Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії	46
Лекція 6. Поздовжні коливання стрижня з поздовжньою поляризацією	49
6.1. Постановка задачі	49
6.2. Побудова загального розв'язку	50
6.3. Резонансне рівняння	51
6.4. Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії	52
Лекція 7. Планарні коливання тонких п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією	53
7.1. Гіпотези плоского електропружного стану. Рівняння коливань електродованої пластини	54
7.2. Механічні граничні умови на контурній поверхні пластини ..	56
7.3. Електричні граничні умови для електродованої пластини ...	57
Лекція 8. Планарні коливання тонких п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією (продовження)	60
8.1. Постановка граничної задачі за відсутності електродних покриттів	60
8.2. Оцінка компонентів товщинної деформації пластини, які наближено вважалися нульовими	63
Лекція 9. Радіальні коливання тонкого п'єзокерамічного диска з товщиною поляризацією	64
9.1. Рівняння коливань і граничні умови	65
9.2. Побудова загального розв'язку	66
9.3. Резонансні властивості дискового перетворювача	68
9.4. Антирезонансні частоти коливань диска та ефективність енергоперетворення	68
9.5. Планарні коливання тонкої п'єзокерамічної пластинки у вигляді кільця	70

Лекція 10. Згинні коливання одношарових пластин	72
10.1. Основні гіпотези й означення деформації згину тонких пластин	72
10.2. Сили й моменти. Рівняння в прогинах і граничні умови ...	75
10.3. Оцінки товщинних компонентів деформацій і напружень ..	79
Лекція 11. Згинні коливання шарнірно закріпленої прямокутної пластини та круглої пластини	80
11.1. Згинні коливання шарнірно закріпленої прямокутної пластини	80
11.2. Згинні коливання круглої пластини	82
Лекція 12. Біморфні п'єзоелементи	85
12.1. Розподіл напруженості електричного поля по товщині біморфної пластини	85
12.2. Вирази для компоненти електричної індукції, механічних напружень, моментів і струму провідності	87
12.3. Випадок розімкнутих електродів	89
Лекція 13. Енергетична теорія електромеханічного перетворення	90
13.1. Коефіцієнт електромеханічного зв'язку, його фізичний зміст	90
13.2. Задачі поздовжньої деформації суцільного і складеного п'єзокерамічних циліндрів	91
13.3. Загальний випадок тривимірної деформації п'єзокерамічних тіл	95
Лекція 14. Енергетична теорія електромеханічного перетворення (продовження)	97
14.1. Поздовжні коливання п'єзокерамічних циліндра і стрижня з неелектродованими ділянками біля кінців	97
14.2. Максимально можливі значення коефіцієнтів електромеханічного зв'язку	99
14.3. Статичні планарна деформація тонкої прямокутної п'єзопластини та згинна деформація прямокутного біморфа ...	101

Лекція 15. Коливання п'єзокерамічного стрижня з розрізними електродами	104
15.1. Постановка задачі	104
15.2. Побудова розв'язку задачі	105
15.3. Аналітичне визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку	107
Лекція 16. Задача про згинні коливання біморфного диска	111
16.1. Постановка задачі	111
16.2. Побудова розв'язку задачі	111
16.3. Визначення коефіцієнта електромеханічного зв'язку за формулою Мезона та енергетичним критерієм	112
Лекція 17. Планарні коливання п'єзодиска з вільним від електродного покриття краєм	116
17.1. Постановка задачі. Побудова розв'язку задачі	116
17.2. Визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку за формулою Мезона та енергетичним критерієм	118
Лекція 18. Планарні коливання п'єзокерамічного диска з розрізними електродами	122
18.1. Постановка задачі. Побудова розв'язку задачі	122
18.2. Визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку за енергетичним критерієм	123
Список літератури	126

Передмова

Дане навчальне видання – це конспект лекцій з дисципліни "Прикладні методи в задачах електропружності", яка є складовою частиною курсу теорії електропружності, що традиційно викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Електропружність як наукова дисципліна належить до порівняно нового розділу механіки – механіки спряжених полів, предметом вивчення якої є вплив теплових та електромагнітних полів на механічні процеси деформації твердих тіл. У багатьох випадках вплив фізичних полів різної природи на перебіг механічних процесів деформування не приводить до суттєвої зворотної дії. Кількісні розрахунки спряжених полів можна виконувати, не виходячи за межі класичних моделей механіки суцільного середовища.

Принципово інша ситуація має місце у випадку механічного деформування електромеханічно активних матеріалів, таких, як високоефективні п'єзоелектричні кераміки. Розрахунок механічних полів деформацій і напружень тут неможливо здійснити без урахування спряженого внутрішнього електричного поля, тобто ефект спряженості полів є суттєвим. Саме тому в пропонованому лекційному курсі ми будемо спиратися на результати так званої польової теорії деформування п'єзокерамічних тіл, ґрунтовно викладеної в монографії [11].

Після стислого феноменологічного описання явищ п'єзоелектричного ефекту ми наводимо повну систему рівнянь електропружності, що включає також і формулювання механічних та електричних граничних умов для п'єзокерамічного тіла (лекції 1 і 2). Ми не обтяжуємо викладення математично громіздкими співвідношеннями термодинаміки електропружного середовища, постановками векторних граничних задач електропружності, опускаємо фундаментальні співвідношення електромагнетизму, так як припускаємо, що читач уже знайомий з названими розділами загального курсу електропружності.

На основі систематизації даних, отриманих у відносно простих випадках, коли просторова гранична задача електропружності має точний аналітичний розв'язок, розроблено прикладні методи, що дозволяють подолати математичні труднощі й отримати розв'язки для досить широких класів

практичних задач. В основу цих методів покладено обґрунтовані точними розв'язками гіпотези про розподіли механічних і електричних характеристик спряженої електропружної деформації п'єзокерамічних елементів, які враховують особливості геометричної форми вищевказаних елементів та розподіл зовнішніх механічних і електричних навантажень. Метою даного курсу лекцій власно і є ознайомлення читача з такими прикладними методами.

У лекціях 3 та 4 розглянуто задачі про чистий розтяг та згин п'єзокерамічних прямокутних призм із поперечною та поздовжньою поляризаціями, отримано їх точні розв'язки. На основі цих розв'язків у лекціях 5–12 сформульовано прикладні теорії деформування тонких п'єзокерамічних пластин і біморфних п'єзоелементів (одновимірна поздовжня деформація стрижнів, планарна деформація й поперечний прогин пластин). Наведено розв'язки елементарних задач для стрижнів, дисків тощо, наслідки з яких широко використовуються в інженерній практиці.

Лекції 13–14 містять основи польової теорії електромеханічного перетворення енергії та розв'язки найпростіших задач про визначення ефективності енергоперетворення, що наводяться як приклади застосування цієї теорії.

У лекціях 15–18 розглянуто задачі про стаціонарні коливання п'єзокерамічних перетворювачів простої геометричної форми з розрізними поверхневими електродами, а також із частково неелектродованою поверхнею. Наведено способи підвищення ефективності електромеханічного перетворення енергії п'єзокерамічних елементів за допомогою керованого підведення електричного поля.

Лекція 1. Феноменологічна теорія п'єзоелектричного ефекту

1.1. Явище п'єзоелектричного ефекту. Галузі застосування п'єзоматеріалів

П'єзоелектричний ефект (спрощено – п'єзоэффект) було відкрито братами Жаком і П'єром Кюрі у 1880 р. Вони помітили, що при механічній деформації кристалів кварцу на їхній поверхні з'являються електричні заряди різних знаків. Це явище назвали п'єзоэффектом (від грецьк. *piezo* – тиск), що означає отримання електричних зарядів за допомогою стискання кристалу. З того самого часу відомий і зворотний п'єзоэффект: той самий кристал кварцу змінює свої розміри, тобто деформується під дією електричного поля. Відкриття тривалий час ніяк не використовувалося. Уперше воно знайшло практичне застосування в роки Першої світової війни, коли французький фізик П. Ланжевен сконструював з набору тонких кварцевих пластинок простий акустичний випромінювач для виявлення німецьких підводних човнів у Ламанші. Пізніше кристали кварцу, турмаліну та сегнетової солі знайшли використання в радіотехніці для стабілізації частоти та розділення каналів зв'язку в частотних фільтрах. Подальшому використанню п'єзоэффекту в техніці перешкоджали недоліки, притаманні кристалічним матеріалам. Наприклад, кристали кварцу мають недостатньо високий рівень ефективності перетворення механічної енергії в електричну, і навпаки (зворотний п'єзоэффект). Кристали сегнетової солі мають низький рівень механічної міцності. Нарешті, недолік, властивий усім кристалам – це малі розміри та неможливість виготовлення елементів потрібної геометричної форми.

Наприкінці 40-х рр. ХХ ст. одночасно радянськими, американськими та японськими вченими було відкрито штучні керамічні п'єзоелектричні матеріали. Елементи, виготовлені з п'єзокераміки, мають значно вищий, порівняно з кварцем, рівень ефективності перетворення енергії; окрім того, їм можна надавати довільну геометричну форму під час виготовлення й довільно вибирати напрямки поля попередньої поляризації. Для цих матеріалів існують ширші можливості практичного використання, за якими вони розподіляються на окремі групи.

- **Елементи для збурення високих електричних напруг механічним навантаженням.** Застосовуються в системах запалювання двигунів внутрішнього згорання, у побутових приладах (п'єзозапальники), у підривачах хімічних сумішей і т. ін.

- **Елементи для збурення механічних коливань значної інтенсивності.** Використовуються при створенні потужних гідроакустичних випромінювачів, ультразвукових джерел для очистки та знежирювання ємностей, зварювання пластмас і м'яких металів ультразвуком, у терапевтичній медицині тощо.
- **П'єзоелементи, що працюють на згин.** Використовуються як звукоприймальні пристрої в програвачах різних типів, у мікрофонах, у системах дистанційного контролю та керування тощо.
- **Елементи електромеханічного перетворення енергії низької потужності.** Застосовуються в техніці неруйнівного контролю (дефектоскопія), у гідрофонах для приймання підводних сигналів, у діагностичній медицині, у приладах для сейсмічних спостережень, в акустичних лініях затримки електричних сигналів.

Інші галузі застосування п'єзокераміки – п'єзотрансформатори для мікроелектроніки, широкосмугові фільтри з п'єзорезонаторами, мікрохвильові двигуни з п'єзоприводами (актуаторами), п'єзоприводи дзеркал адаптивної оптики, хвильові твердотільні гіроскопи та ін. Цей перелік постійно розширюється, що обумовлено швидким розвитком електронної промисловості в сучасному світі.

Проте може виникнути сумнів щодо існування єдиного наукового підходу до можливості розрахунків характеристик таких різних як за призначенням, так і за конструкцією пристроїв. Зазначимо, що в основу функціонування всіх перелічених пристроїв покладено одне й те саме явище взаємного перетворення механічної та електричної енергій, обумовлене п'єзо ефектом. Польова теорія електропружності, яку буде викладено нижче, є науковим підґрунтям для прикладних розрахунків усіх типів електромеханічних перетворювачів енергії з п'єзокерамічних матеріалів.

1.2. Модель мікроструктури п'єзокераміків. Поляризація

Щоб зрозуміти суть явища п'єзо ефекту в керамічних речовинах, необхідно розглянути хоча б грубу модель мікроструктури таких матеріалів. П'єзоелектричні кераміки є твердими полікристалічними речовинами, які містять у кожному кристалі елементарні диполі, утворені позитивними й негативними зарядами, розміщеними на певній малій відстані один від

одного. Передумовою для виникнення диполів є асиметрія кристала: малі зміщення іонів призводять до несиметричної будови ґратки кристала в рівноважному стані. Речовини, які в електрично рівноважному стані мають сталі електричні моменти (диполі в кожній ґратці кристала), називаються сегнетоелектриками. До такого типу кристалів належить, наприклад, титанат барію. Титанат барію має кристалічну будову, основну ґратку якої показано на рис. 1.1. Зазначимо, що такий стан кристала титанату барію зберігається лише в певному інтервалі температур. Якщо температура не перевищує так звану температуру фазового переходу Кюрі (для титанату барію вона становить $118\text{ }^{\circ}\text{C}$), то, завдяки електронній та іонній поляризації під дією локального поля, іон титанату зміщується на певну невелику відстань. Унаслідок такого зміщення поза ґраткою кристала утворюється електричне поле, що має просторові характеристики поля електричного диполя. Вище температури Кюрі кристал втрачає асиметрію і, разом з нею, – п'єзоелектричні властивості доменів, тобто набуває властивостей звичайного діелектрика.

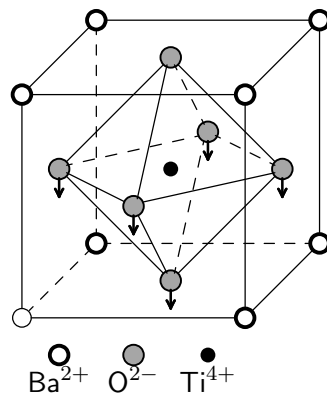


Рис. 1.1. Модель мікроструктури ґратки титанату барію

Суттєвою для практики є та обставина, що в титанаті барію елементарні диполі спонтанно упорядковуються паралельно один одному всередині малих областей (так званих областей Вейса), або доменів. Домени практично заполяризовані до насичення й самі є диполями, так що кожен домен уже наділений п'єзоелектричними властивостями. У полікристалічному керамічному матеріалі домени розташовані хаотично (рис. 1.2, а). Тому при механічному деформуванні макрооб'єму такого матеріалу сумарний зміщений заряд практично рівний нулю. Матеріал не виявляє п'єзоелектричних властивостей. Щоб надати макрооб'єму керамічного тіла цих властивостей,

необхідно упорядкувати взаємне розташування доменів, задаючи їм орієнтацію в одному певному напрямку. З цією метою проводять попередню поляризацію матеріалу в сильному зовнішньому електричному полі ($\sim 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$) при температурі, яка є трохи меншою ніж температура Кюрі. Через певний час зовнішнє електричне поле усувають, а зразок охолоджують. Унаслідок такої технологічної операції домени будуть переважно зорієнтовані в напрямку усунутого електричного поля (рис. 1.2, б). Попередньо поляризований матеріал називають п'єзокерамікою, а виготовлені з неї елементи є високоефективними електромеханічними перетворювачами енергії.

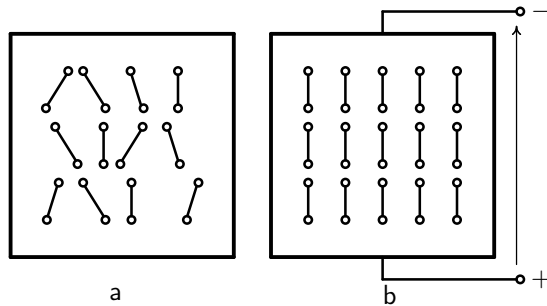


Рис. 1.2. Попередня поляризація п'єзоелектричної кераміки

1.3. Найпростіша кількісна характеристика явищ п'єзоєфекту

Щоб отримати уявлення про кількісні характеристики явища п'єзоєфекту в керамічних тілах, звернемося до результатів експериментальних досліджень, що проводилися для циліндричних зразків з керамік PZT-4, PХЕ-4, ЦТС-19 [1, 23].

Циліндричний зразок довжиною $l = 2$ см, з площею поперечного перерізу $S = 1$ см², попередньо поляризований уздовж осі циліндра, навантажувався поздовжніми силами, які повільно зростали від нульових значень до максимальних напружень $\sigma_{max} \sim 500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ (тобто $5 \times 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$). У процесі навантаження вимірювалась різниця потенціалів між срібними електродованими покриттями, які було нанесено на торцеві поверхні циліндра.

Залежність вихідної різниці потенціалів від рівня механічних напружень зображено на рис. 1.3. З графіка видно, що для максимальних напружень $\sigma_{max} = 500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ різниця потенціалів досягає 20 кВ. Сила величиною

всього у 2,5 кг викликає різницю потенціалів у 100 В. Електрична енергія, накопичувана в об'ємі циліндра, є незначною і цілком безпечною для дослідника.

Як видно з графіка (рис. 1.3), різниця потенціалів і напруженість електричного поля E лінійно залежать від механічних напружень

$$E = -g \cdot \sigma, \quad (1.1)$$

де g – п'єзоелектрична стала.

Якщо, навпаки, навантажувати зразок електричним полем, то між механічною деформацією $\varepsilon = \Delta l/l$ та підведеним електричним полем (рис. 1.4) також має місце лінійна залежність

$$\varepsilon = d \cdot E. \quad (1.2)$$

Через d тут позначено матеріальну п'єзоелектричну сталу. Вона, як і стала g , відома з дослідів практично для всіх типів промислових кераміків [1].

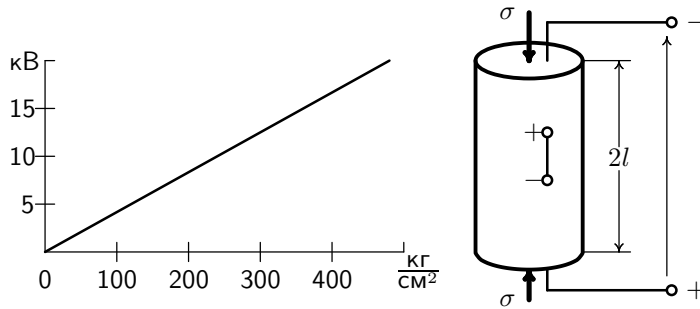


Рис. 1.3. Навантаження механічними силами

Для максимально допустимих електричних напружень (~ 20 кВ) обчислення за формулою (1.2) дають для деформації таке значення: $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$. У нашому випадку, за довжини зразка $l = 2$ см, знаходимо

$$\Delta l = \varepsilon l = 4 \times 10^{-3} = 4 \text{ мкм} \quad (1.3)$$

Нам доводиться оперувати досить малими величинами, проте переміщення величиною у 4 мкм уже є значними для пристроїв прецизійної техніки.

Об'єднуючи залежність (1.2) з відомою залежністю закону Гука для пружних матеріалів, вираз для осьової деформації п'єзокерамічного циліндричного зразка запишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{1}{E_{\text{Ю}}} \sigma + d \cdot E, \quad (1.4)$$

де через $E_{\text{Ю}}$ позначено модуль пружності Юнга за нульового електричного поля. За наявності зовнішнього електричного поля рівність (1.1) аналогі-

чно узагальнюється згідно з лінійною теорією діелектриків [22] і набуває вигляду

$$E = -g\sigma + \beta D. \quad (1.5)$$

Тут D – електричне зміщення (індукція), а β – величина, обернена до діелектричної проникності матеріалу кераміки при нульових механічних напруженнях.

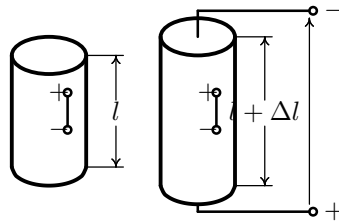


Рис. 1.4. Навантаження зовнішнім електричним полем

Залежності (1.4) і (1.5) по суті є рівняннями стану для п'єзоелектричних кераміків. Як впливає з наведених вище результатів експериментальних досліджень, лінійні залежності справджуються в досить широкому діапазоні змін механічних напружень та напруженості електричного поля.

Лекція 2. Повна система рівнянь електропружності. Постановка основних граничних задач

2.1. Рівняння стану попередньо поляризованої кераміки (п'єзокераміки)

Для попередньо поляризованих сегнетокераміків (п'єзокераміків) загальні лінійні рівняння п'єзоэффекту [11] значно спрощуються завдяки симетрії фізико-механічних властивостей п'єзоматеріалів. Лінеаризація рівнянь електрострикції для п'єзоактивних матеріалів на основі титанату барію, проведена У. Мезоном [10], та дані експериментів показують, що п'єзокерамічні матеріали за механічними та електричними властивостями виявляють себе як *трансверсально-ізотропні тіла*. При цьому вісь симетрії фізико-механічних властивостей збігається з напрямком поля попередньої поляризації кераміки.

При виборі осі Oz декартової системи координат у напрямку силових ліній поля попередньої поляризації лінійні рівняння п'єзоэффекту в кераміці набувають вигляду

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= c_{11}^E \varepsilon_x + c_{12}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z, \\
 \sigma_y &= c_{12}^E \varepsilon_x + c_{11}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z, \\
 \sigma_z &= c_{13}^E (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}^E \varepsilon_z - e_{33} E_z, \\
 \tau_{yz} &= c_{44}^E \varepsilon_{yz} - e_{15} E_y, \quad \tau_{xz} = c_{44}^E \varepsilon_{xz} - e_{15} E_x, \\
 \tau_{xy} &= c_{66}^E \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{xy}, \\
 D_x &= \epsilon_{11}^S E_x + e_{15} \varepsilon_{xz}, \quad D_y = \epsilon_{11}^S E_y + e_{15} \varepsilon_{yz}, \\
 D_z &= \epsilon_{33}^S E_z + e_{31} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + e_{33} \varepsilon_z.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для пружних констант матеріалу, п'єзоелектричних констант і діелектричних проникностей із загальних рівнянь п'єзоэффекту [11], маємо:

$$\begin{aligned}
 c_{14}^E &= 0, & c_{15}^E &= 0, & c_{16}^E &= 0, \\
 c_{24}^E &= 0, & c_{25}^E &= 0, & c_{26}^E &= 0, \\
 c_{34}^E &= 0, & c_{35}^E &= 0, & c_{36}^E &= 0, \\
 & & c_{45}^E &= 0, & c_{46}^E &= 0, \\
 & & & & c_{56}^E &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22}^E &= c_{11}^E, & c_{23}^E &= c_{13}^E, & c_{55}^E &= c_{44}^E, & c_{66}^E &= \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E), \\
e_{11} &= 0, & e_{12} &= 0, & e_{13} &= 0, & e_{14} &= 0, & e_{16} &= 0, \\
e_{21} &= 0, & e_{22} &= 0, & e_{23} &= 0, & e_{25} &= 0, & e_{26} &= 0, \\
& & & & e_{34} &= 0, & e_{35} &= 0, & e_{36} &= 0, \\
\epsilon_{12}^S &= 0, & \epsilon_{13}^S &= 0, & \epsilon_{23}^S &= 0, & \epsilon_{22}^S &= \epsilon_{11}^S.
\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння п'єзоефекту для кераміків (2.1) утримують п'ять незалежних модулів пружності: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$, що вимірюються при сталому (нульовому) електричному полі; три п'єзомодулі e_{31}, e_{15}, e_{33} ; дві діелектричні проникності ϵ_{11}^S та ϵ_{33}^S , що вимірюються при сталій (нульовій) деформації.

Стосовно рівнянь стану (2.1) слід зробити такі зауваження.

Перш за все, слід пам'ятати, що цими рівняннями описуються додаткові спряжені електропружні поля в попередньо поляризованій кераміці, які виникають унаслідок того, що до тіла прикладаються зовнішні механічні або електричні навантаження. При цьому поля початкових механічних напружень та попередня поляризація враховуються опосередковано, через значення фізичних характеристик матеріалу.

У рівняннях (2.1) передбачається однорідність поля попередньої поляризації, тобто вважається, що вектор попередньої поляризації в кожній точці тіла збігається за напрямком з віссю Oz декартової системи координат. Коли напрямок вектора попередньої поляризації змінюється від точки до точки всередині об'єму тіла, то коефіцієнти рівняння (2.1) будуть функціями координат точок тіла. При цьому, якщо поле попередньої поляризації буде виявляти певні властивості симетрії, то у відповідно підібраній системі криволінійних координат стає можливим записати відповідні рівняння стану зі сталими коефіцієнтами.

Наприклад, використання термодинамічного потенціалу Гіббса та подальше спрощення відповідних рівнянь стану для п'єзокераміків, попередньо поляризованих уздовж осі Oz , приводить до лінійних рівнянь п'єзоефекту у вигляді

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{31} E_z, \\
\varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{31} E_z, \\
\varepsilon_z &= s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \\
\varepsilon_{yz} &= s_{44}^E \tau_{yz} + d_{15} E_y, & \varepsilon_{xz} &= s_{44}^E \tau_{xz} + d_{15} E_x, \\
\varepsilon_{xy} &= s_{66}^E \tau_{xy} = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \tau_{xy}, \\
D_x &= \epsilon_{11}^T E_x + d_{15} \tau_{xz}, & D_y &= \epsilon_{11}^T E_y + d_{15} \tau_{yz}, \\
D_z &= \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} \sigma_z.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

У цих формулах $s_{11}^E, s_{12}^E, s_{13}^E, s_{33}^E, s_{44}^E$ – пружні податливості, що визнача-

ються при сталому (нульовому) електричному полі; d_{31} , d_{15} , d_{33} – п'єзоелектричні сталі; ϵ_{11}^T , ϵ_{33}^T – діелектричні проникності, які вимірюються при сталому значенні механічних напружень.

Зрозуміло, що введені у (2.2) нові фізичні характеристики матеріалу можна однозначно виразити через константи, що входять у рівняння (2.1): для цього треба деформації у (2.1) виразити через напруження й компоненти вектора напруженості електричного поля, а отриманий результат порівняти з (2.2).

У табл. 2.1 наведено значення основних фізичних характеристик та їх розмірності для деяких промислових п'єзокераміків.

2.2. Повна система рівнянь електропружності для п'єзокерамічного середовища

Виведені в попередньому пункті рівняння стану п'єзокерамічного середовища разом з рівняннями руху елемента суцільного середовища [20], рівняннями вимушеної електростатики [18] та співвідношеннями Коші [20] утворюють повну систему *диференціально-алгебраїчних* рівнянь, що описують спряжені електропружні процеси в п'єзокерамічних тілах. Цими рівняннями охоплюється лише акустичний діапазон частот вимушених коливань, оскільки ми використовуємо спрощення рівнянь Максвелла для п'єзокерамічного середовища.

У загальному вигляді повна система рівнянь руху або рівноваги п'єзокерамічних тіл подається такими рівностями:

Рівняння руху Ньютона (без урахування об'ємних сил):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_x, & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_y, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рівняння вимушеної електростатики (акустичне наближення):

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Psi. \quad (2.4)$$

Рівняння стану:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}^E \varepsilon_x + c_{12}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z, \\ \sigma_y &= c_{12}^E \varepsilon_x + c_{11}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z, \\ \sigma_z &= c_{13}^E (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}^E \varepsilon_z - e_{33} E_z, \\ \tau_{yz} &= c_{44}^E \varepsilon_{yz} - e_{15} E_y, \quad \tau_{xz} = c_{44}^E \varepsilon_{xz} - e_{15} E_x, \\ \tau_{xy} &= c_{66}^E \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_x &= \epsilon_{11}^S E_x + e_{15} \epsilon_{xz}, & D_y &= \epsilon_{11}^S E_y + e_{15} \epsilon_{yz}, \\
 D_z &= \epsilon_{33}^S E_z + e_{31}(\epsilon_x + \epsilon_y) + e_{33} \epsilon_z.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Співвідношення Коші:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \\
 \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, & \epsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Таблиця 2.1

Величина	Розмірність	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19
c_{11}^E	10^{10} Н/м^2	13,9	10,3	10,9
c_{12}^E		7,78	5,80	6,1
c_{13}^E		7,43	5,90	5,4
c_{33}^E		11,5	10,2	9,3
c_{44}^E		2,56	2,50	2,4
s_{11}^E	$10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$	12,3	15,4	15,2
s_{12}^E		-4,05	-5,1	-5,8
s_{13}^E		-5,31	-6,2	-5,3
s_{33}^E		15,5	17,0	16,9
s_{44}^E		39,0	40,0	42,6
$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0$	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$	730	1008	840
$\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$		635	893	820
$\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$		1475	1800	1490
$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$		1300	1750	1360
e_{31}	10^{-12} Кл/м^2	-5,2	-7,78	-4,9
e_{33}		15,1	15,2	14,9
e_{15}		12,7	12,9	10,6
d_{31}	10^{-12} Кл/Н	-123	-178	-125
d_{33}		289	356	304
d_{15}		496	515	450
k_{31}^2	безвимірна величина	0,11	0,13	0,09
k_{33}^2		0,49	0,49	0,45
k_{15}^2		0,50	0,44	0,36
k_p^2		0,34	0,39	0,29
ρ	10^3 Кг/м^3	7,5	7,6	7,74

Таким чином, отримано систему 22 взаємозв'язаних рівнянь із 22 невідомими (три компоненти вектора переміщень \vec{u} , шість компонентів тензора напружень \hat{T} , шість компонентів деформації \hat{S} , три компоненти вектора напруженості електричного поля \vec{E} , три компоненти вектора електричної індукції \vec{D} та невідома функція електростатичного потенціалу Ψ).

Наявність алгебраїчних співвідношень між шуканими функціями дозволяє спростити систему диференціальних рівнянь, яку належить розв'язувати в кожній конкретній задачі. Для цього існує два підходи.

Перший полягає в тому, що якщо, наприклад, знайдено компоненти вектора переміщень u_x, u_y, u_z та електричний потенціал Ψ , то шляхом диференціювання за формулами (2.4), (2.6) легко знаходяться напруженість електричного поля \vec{E} та деформації \hat{S} . Після цього механічні напруження \hat{T} та компоненти вектора електричної індукції \vec{D} виражаються алгебраїчно з рівнянь стану (2.5).

Є можливим також другий метод. За основні невідомі за механічними складовими спряженого поля можна взяти компоненти тензора напружень \hat{T} . У такому випадку за невідомі при описанні електричного поля беруться компоненти векторного потенціалу $\vec{\Phi}$, що вводиться за формулою $\vec{D} = \text{rot}\vec{\Phi}$. При цьому механічні переміщення та потенціал електричного поля знаходяться шляхом інтегрування виразів, що містять основні невідомі.

Якщо провести аналогію між щойно наведеними підходами до вирішення проблеми інтегрування зв'язаних рівнянь для п'єзокерамічних тіл та основними підходами в класичній теорії пружності, то стає очевидним, що перший підхід відповідає постановці задачі в переміщеннях, а другий – у напруженнях. У класичній теорії пружності вони відомі як постановки Ламе та Бельтрамі – Мітчела.

Подальше викладення в цьому лекційному курсі будемо проводити в межах підходу, що відповідає постановці Ламе. За основні незалежні змінні приймемо вектор пружних переміщень $\vec{u}(x, y, z, t)$ та електростатичний потенціал $\Psi(x, y, z, t)$, у скалярному вигляді – чотири невідомі функції. Для виведення диференціальних рівнянь, які задовольнятимуть \vec{u} та Ψ , необхідно з основної системи рівнянь виключити 18 інших невідомих величин, виразивши їх через похідні від функцій \vec{u} та Ψ .

2.3. Початкові умови

При вивченні нестационарних процесів у п'єзокерамічних перетворювачах необхідно задавати початкові умови, що відображають електропружний стан середовища в той момент часу $t = t_0$ (зазвичай за початковий момент часу приймається $t_0 = 0$), з якого нами починаються спостереження за динамічним процесом.

З класичної механіки відомо, що початкова умова повністю визначається заданням переміщень і швидкостей точок матеріального тіла, яке здійснює рух. Це фундаментальне положення в механіці деформівних середовищ формулюється у вигляді рівностей

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x, y, z), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|_{t=0} = \vec{v}_0(x, y, z), \quad (2.7)$$

де \vec{u}_0, \vec{v}_0 – відомі функції координат точок тіла.

Аналіз відомої в електродинаміці Максвелла постановки початкових умов [9, 17] для векторних характеристик електромагнітного поля показує, що зведення основних динамічних рівнянь Максвелла до рівнянь вимушеної електростатики, як це було зроблено в нашому випадку, знімає питання про постановку початкових умов для функції електростатичного потенціалу Ψ . Це відповідає гіпотезі про миттєву зміну електричного поля по всьому об'єму тіла, тобто про нескінченне значення швидкості поширення електромагнітних збурень. Таким чином, початковий стан п'єзокерамічного тіла повністю визначається умовами (2.7).

2.4. Граничні умови для механічних змінних спряженого електропружного поля

Граничні умови для механічних змінних формулюються за аналогією з граничними задачами класичної теорії пружності.

Розглянемо два типи граничних умов, які мають фізичний зміст (можуть бути реалізовані на практиці) і ведуть до постановок граничних задач електропружності *в переміщеннях* та *в напруженнях*.

У тому випадку, коли на поверхні тіла S з нормаллю \vec{n} (або на певній частині поверхні) задано вектор переміщень частинок тіла \vec{u}_n (рис. 2.1), то шукані розв'язки для переміщень мають бути підпорядкованими умові

$$\vec{u}|_S = \vec{u}_n \quad (2.8)$$

або, що те ж саме,

$$u_x|_S = u_{nx}, \quad u_y|_S = u_{ny}, \quad u_z|_S = u_{nz}. \quad (2.9)$$

Якщо на поверхні тіла задано вектор зовнішніх напружень (рис. 2.1) \vec{F}_n [20]:

$$\begin{aligned} F_{nx}|_S &= (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z)|_S, \\ F_{ny}|_S &= (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)|_S, \\ F_{nz}|_S &= (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z)|_S, \end{aligned} \quad (2.10)$$

то для знаходження умов, що накладаються на невідомі функції, необхідно скористатися рівняннями стану (2.5), співвідношеннями Коші (2.6) та

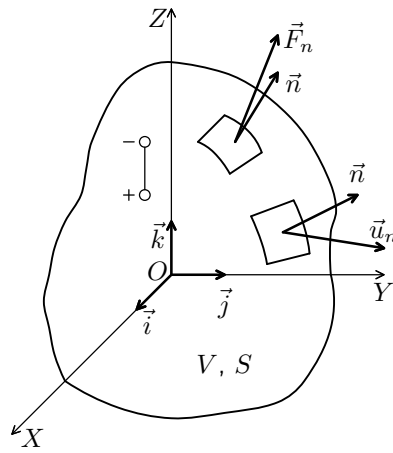


Рис. 2.1. До виведення механічних граничних умов

рівняннями (2.4), які виражають напруженість електричного поля \vec{E} через електростатичний потенціал Ψ . Тут n_x, n_y, n_z – проекції одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні S на осі декартової системи координат ($\vec{n} = \vec{i}n_x + \vec{j}n_y + \vec{k}n_z$).

Таким чином, у випадку *першої основної граничної задачі*, якщо на поверхні тіла S задано вектор зовнішніх механічних напружень \vec{F}_n , то шукані переміщення точок тіла \vec{u} та електростатичний потенціал Ψ мають задовольняти спряжені рівняння (2.4)–(2.5) і граничні умови (2.10).

Зауважимо, що граничні умови (2.10) для вектора напружень \vec{F}_n (три компоненти), як і умови (2.8) для вектора переміщень \vec{u} (три компоненти), недостатньо для того, щоб однозначно визначити чотири невідомі функції u_x, u_y, u_z та Ψ . Для того, щоб система математичних співвідношень, з яких знаходяться шукані функції розв'язку, була сумісною слід сформулювати ще одну додаткову умову. Ця гранична умова для вказаних невідомих має відображати конкретні випадки електричного навантаження п'єзокерамічних тіл.

2.5. Граничні умови для електричних змінних спряженого поля

Формулювання електричних граничних умов залежить від способу підведення (зняття) електричної енергії до (з) п'єзокерамічного тіла. Як під-

ведення, так і відвід електричної енергії від *динамічно деформованого* п'єзокерамічного тіла здійснюються за допомогою електродних покриттів, що наносяться на певну частину його поверхні.

Стосовно електродних покриттів припускається, що вони є досить тонкими ідеальними провідниками з масою, якою можна знехтувати порівняно з масою всього тіла. Для завершеної постановки граничних умов за електричними змінними поля в нашій моделі треба розглянути й дати математичний опис зовнішнього електричного кола деформованого п'єзокерамічного тіла та джерел енергії, які зумовлюють виникнення деформації. Стосовно зовнішнього кола робляться такі самі припущення, як і для поверхневих електродних покриттів, тобто вважається, що елементи цього кола є ідеальними провідниками. Як модельні джерела електричної енергії, як і загалом в електротехніці, розглядаються ідеальні генератори електричних напруг і струму.

Стосовно останніх введемо такі означення:

- Під ідеальним генератором електричних напруг розуміють таке джерело електричної енергії, для якого вихідна різниця потенціалів $\pm V_0(t)$ не залежить від величини навантаження в зовнішньому електричному колі.
- Під ідеальним генератором електричного струму розуміють таке джерело електричної енергії, внутрішній опір якого набагато перевищує опір усього зовнішнього електричного кола.

Навантаження заданою різницею потенціалів. У випадку навантаження п'єзокерамічного тіла електричним полем (різницею електричних потенціалів) на електродах, що покривають частини поверхні тіла S_1^+ та S_1^- , задається значення шуканого потенціалу Ψ (рис. 2.2). Для задач динаміки при цьому вважається, що збуджується акустичний діапазон частот $\Psi \cdot \exp(i\omega t)$. Граничні умови на цих частинах поверхні записуються у вигляді

$$\Psi|_{S_1^\pm} = \pm V_0(t). \quad (2.11)$$

Для тієї частини поверхні тіла, де відсутні електроди $S - S_1^- - S_1^+$, граничні умови сформулюємо пізніше.

Навантаження генератором струму. Можливим є випадок електричного збудження коливачів п'єзокерамічних перетворювачів, коли задається не значення різниці потенціалів на електродах, а величина струму в елементах зовнішнього електричного кола. Тобто при навантаженні п'єзокерамічного тіла генератором струму із заданим значенням $I_0(t)$ різниця потенціалів на електродах є наперед невідомою (рис. 2.3).

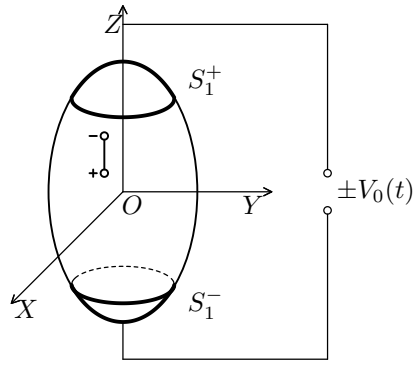


Рис. 2.2. Навантаження заданою різницею електричних потенціалів

У цьому випадку слід вимагати неперервності функції струму в електричному колі, що включає і п'єзокерамічне тіло. З цієї умови неперервності випливає інтегральна умова для вектора електричної індукції

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) dS = -I_0(t). \quad (2.12)$$

Зміст цього рівняння стає очевидним, коли врахувати, що повний заряд Q на електроді обчислюється через нормальну компоненту вектора електричної індукції за формулою [18]

$$Q = - \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) dS, \quad (2.13)$$

а струм в електричному колі за визначенням дорівнює швидкості зміни заряду в часі.

Інтегральну умову (2.12) не можна безпосередньо використовувати як граничну для точок поверхні п'єзокерамічного тіла під електродами, не конкретизувавши її змісту для шуканих змінних. Перш за все, введемо до розгляду наперед невідоме значення потенціалів на електродах S_1^\pm :

$$\Psi|_{S_1^\pm} = \pm V(t). \quad (2.14)$$

Далі задача розв'язується так само, як і у випадку граничних умов (2.11).

Поверхня, не покрита електродами. Формулювання граничних умов на тих частинах поверхні п'єзокерамічного тіла, які не мають електродів

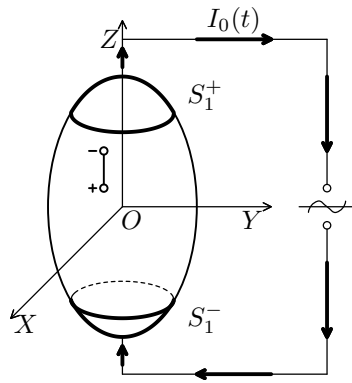


Рис. 2.3. Навантаження генератором струму

$S = S_1^- - S_1^+$, ґрунтується на спрощених рівняннях Максвела

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (2.15)$$

Будемо вважати, що зовнішнє середовище, яке оточує тіло – діелектрик з проникністю ϵ . Розглянемо малий елемент поверхні п'єзокерамічного тіла ΔS , який визначається зовнішньою до нього нормаллю \vec{n} . На цьому елементі як на плоскій основі (S є досить гладкою поверхнею) побудуємо два півциліндра з однаковою малою висотою Δh таким чином, що один з них займатиме об'єм у п'єзокераміку (1), а інший (2) – у зовнішньому середовищі (рис. 2.4).

Рівняння (2.15) є справедливим як усередині п'єзокераміки, так і в зовнішньому середовищі, тому згідно з твердженням теореми Остроградського – Гаусса воно еквівалентне рівності

$$\iint_S (\vec{n} \cdot \vec{D}) dS = 0, \quad (2.16)$$

причому в нашому випадку поверхня S обмежує такий об'єм: вона складається з двох елементарних поверхонь ΔS , одна з яких розташована в зовнішньому середовищі з нормаллю \vec{n} , а друга – усередині п'єзокерамічного тіла (з нормаллю $-\vec{n}$); завершує об'єм бокова циліндрична поверхня висотою $2\Delta h$. Покладаючи $\Delta h \rightarrow 0$ і вважаючи, що вектори індукції п'єзокераміки \vec{D}_1 та зовнішнього середовища \vec{D}_2 не змінюють свого напрямку на малих елементах ΔS , з рівності (2.16) знаходимо

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0, \quad (2.17)$$

тому $\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \vec{n} \cdot \vec{D}_1$. Отже, маємо таку умову: при переході з п'єзокерамічного тіла в зовнішнє середовище нормальна складова вектора електричної індукції змінюється неперервно.

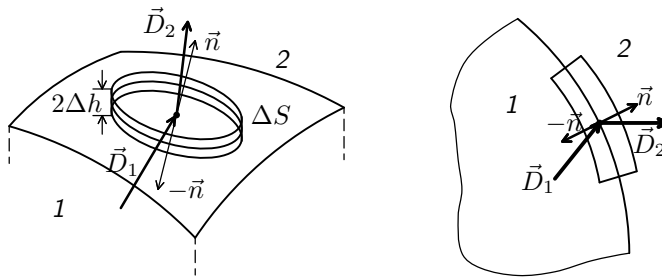


Рис. 2.4. До виведення електричних граничних умов. Потік вектора електричної індукції через поверхню п'єзокерамічного тіла на ділянках, не покритих електродами

Звернемося тепер до другого рівняння (2.15). Воно також має виконуватись і всередині будь-якого об'єму п'єзокераміки, і в зовнішньому середовищі. Шляхом аналогічних міркувань і за допомогою теореми Стокса легко встановлюється умова рівності потенціалів на поверхні розділення п'єзокераміки й зовнішнього середовища:

$$\Psi_1 = \Psi_2. \quad (2.18)$$

Граничні умови (2.17) та (2.18) указують на те, що при розв'язанні граничних задач слід урахувувати електричні поля в зовнішньому середовищі п'єзокерамічного тіла. Проте, коли зовнішнє середовище є повітрям або вакуумом з діелектричною проникністю, яка в сотні разів менша за діелектричну проникність п'єзокераміки, умову (2.17) можна замінити наближеною рівністю

$$(\vec{n} \cdot \vec{D}_1)|_{S-S_1^- - S_1^+} = D_n|_{S-S_1^- - S_1^+} \simeq 0, \quad (2.19)$$

у якій D_n – нормальна складова вектора індукції п'єзокераміки. Накопичена при цьому похибка має такий самий порядок, як і похибка, пов'язана із заміною точних рівнянь електродинаміки Максвелла на наближені (2.15).

П'єзокерамічні елементи як генератори електричної енергії. Будемо вважати, що навантаження п'єзокерамічного тіла здійснюється прикладенням зовнішніх механічних сил \vec{F}_n , а поверхневі електроди на частинах поверхні S_1^+ та S_1^- виконують функцію реєстрації електричного сигналу. У цьому випадку електрична енергія споживається в зовнішньому колі, яке замикає електроди, і модельно може бути зображена втратами на елементі

з комплексною провідністю $Y = Y_1 + iY_2$ – величиною, оберненою до електричного опору. Невідомими величинами тепер є різниця потенціалів на електродах $V(t)$ і струм $I(t)$ (рис. 2.5).

Щоб отримати електричну граничну умову для цієї задачі, необхідно скористатися законом Ома для зовнішнього кола з провідністю $Y = Y_1 + iY_2$, тобто рівнянням [23]

$$I = Y \cdot V. \quad (2.20)$$

Тоді інтегральна рівність (2.12) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) dS = -YV. \quad (2.21)$$

Процес побудови розв'язків граничних задач у цьому випадку полягає в заданні невідомої різниці електричних потенціалів $V(t)$ на електродних покриттях, тобто у використанні граничної умови (2.14) на неелектродованій частині границі, а також граничної умови (2.10) для заданих механічних напружень на поверхні тіла. Якщо за названих граничних умов знайдено розв'язок спряжених рівнянь (2.4)–(2.5), то після цього невідоме значення різниці потенціалів визначається зі щойно записаної рівності (2.21).

З граничної умови (2.21) слід виділити два важливих частинних випадки.

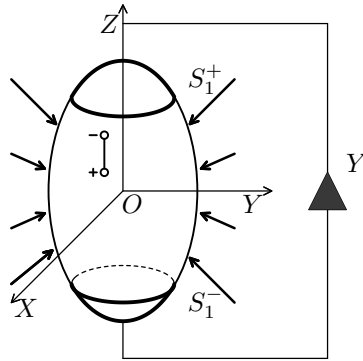


Рис. 2.5. П'єзокерамічне тіло, як генератор електричної енергії

Розімкнені електроди. Для електродів, з яких не знімається електрична енергія $Y = 0$, тобто для розімкненого електричного кола

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) dS = 0. \quad (2.22)$$

Інакше кажучи, сумарний заряд на електродах залишається незмінним у процесі деформування п'єзокерамічного тіла.

Короткозамкнуті електроди. У випадку короткозамкнутого електричного кола провідність необмежено зростає $Y \rightarrow \infty$. Тоді з умови існування скінченної границі добутку $Y \cdot V$ випливає, що $V(t) = 0$. Граничну умову на короткозамкнутих електродах можна виразити у вигляді двох ідентичних рівностей:

$$\Psi|_{S_1^\pm} = 0, \quad \Psi|_{S_1^+} - \Psi|_{S_1^-} = 0. \quad (2.23)$$

Лекція 3. Задача чистого розтягу та згину прямокутної п'єзопризми

В електропружності, як і в інших розділах механіки спряжених полів, розробка основних гіпотез прикладних теорій деформування тонкостінних елементів – пластин і оболонок – ґрунтується на результатах точного розв'язку задач про рівномірний розтяг, чистий згин, кручення та зсув деякого плоского елемента прямокутної форми. За процедурою розв'язку ці задачі не відрізняються принципово від аналогічних елементарних задач класичної лінійної теорії пружності [20]. Однак у нашому випадку, для тіла з п'єзоелектричними властивостями, уже при постановці задач мають ураховуватись ефекти зв'язаності електричних і механічних полів. Для цього застосовують лінійні рівняння п'єзоэффекту замість лінійних рівнянь закону Гука та формулюються електричні граничні умови, які не мають місця у випадку чисто пружної деформації.

Отримані нами точні розв'язки елементарних задач для прямокутної призми повністю збігаються з гіпотезами кірхгофівської теорії [19]. Тому ми вважаємо доцільним спочатку приділити увагу розв'язку елементарних задач електропружності для прямокутної призми, а вже потім перейти до вивчення теорій деформування п'єзокерамічних пластин і оболонок.

Отже, у даній лекції ми розглянемо розв'язок статичної задачі плоскої теорії електропружності для п'єзокерамічного елемента, що має форму прямокутної призми.

3.1. Постановка граничної задачі та форма загального розв'язку для призми з поперечною поляризацією

Припускається, що товщина прямокутної призми $2h$ набагато менша за її довжину $2l$ та ширину $2b$. Ці умови є необхідними для того, щоб у даному п'єзоелементі здійснювався плоский напружений стан. Прямокутну п'єзокерамічну призму вважатимемо належною до декартової прямокутної системи координат $Oxyz$, початок якої (т. O) збігається з центром мас призми.

Ґрунтуючись на матеріалі попередніх лекцій, випишемо повну систему рівнянь електропружності в декартових координатах (випадок статичного навантаження, вісь поляризації збігається з віссю OZ декартових коорди-

нат, рис. 3.1).

1. Рівняння п'єзоєфекту:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{31} E_z, \\
 \varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{31} E_z, \\
 \varepsilon_z &= s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \\
 \varepsilon_{yz} &= s_{44}^E \tau_{yz} + d_{15} E_y, \quad \varepsilon_{xz} = s_{44}^E \tau_{xz} + d_{15} E_x, \\
 \varepsilon_{xy} &= 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \tau_{xy}, \\
 D_x &= \epsilon_{11}^T E_x + d_{15} \tau_{xz}, \quad D_y = \epsilon_{11}^T E_y + d_{15} \tau_{yz}, \\
 D_z &= \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} \sigma_z.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Як і раніше, у цих формулах $s_{11}^E, s_{12}^E, s_{13}^E, s_{33}^E, s_{44}^E$ – пружні податливості; d_{31}, d_{15}, d_{33} – п'єзоелектричні сталі; $\epsilon_{11}^T, \epsilon_{33}^T$ – діелектричні проникності.

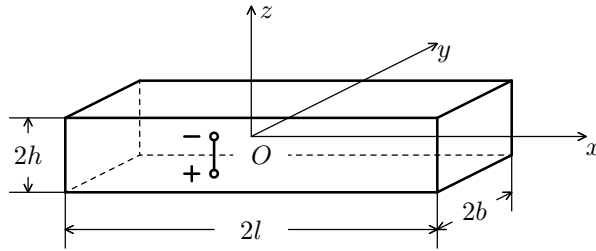


Рис. 3.1. Геометричні розміри та поляризація п'єзокерамічної призми

2. Рівняння рівноваги елемента суцільного середовища (у припущенні про відсутність об'ємних сил):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3. Рівняння вимушеної електростатики (акустичне наближення):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \\
 \vec{E} &= -\operatorname{grad} \Psi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Співвідношення Коші:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Напружено-деформівний стан рівномірного розтягу та чистого згину можна отримати, задаючи або (1) переміщення точок поверхні прямокутного елемента, або (2) граничні напруження. Однак передбачити закон зміни переміщень на поверхні, що приводить до однорідного напруженого стану розтягу чи згину, не просто. Тому при постановці задачі підемо шляхом задання зовнішніх поверхневих напружень. Очевидно можна досягти наміченої мети, якщо виходити з таких граничних умов у напруженнях (рис. 3.2):

$$\begin{aligned}\sigma_x|_{x=\pm l} &= \sigma_0 + z\sigma_1, & \tau_{xz}|_{x=\pm l} &= 0, & \tau_{xy}|_{x=\pm l} &= 0, \\ \sigma_z|_{z=\pm h} &= 0, & \tau_{zx}|_{z=\pm h} &= 0, & \tau_{zy}|_{z=\pm h} &= 0, \\ \sigma_y|_{y=\pm b} &= 0, & \tau_{yx}|_{y=\pm b} &= 0, & \tau_{yz}|_{y=\pm b} &= 0.\end{aligned}\quad (3.5)$$

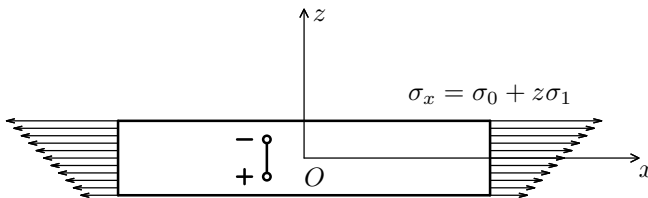


Рис. 3.2. Однорідний розтяг і чистий згин призми

Для електричних граничних умов розглянемо два випадки:

1. Плоскі грані прямокутника $z = \pm h$ покриті електродами; між цими електродними покриттями діє різниця електричних потенціалів $2V_0$; вертикальні грані $x = \pm l$ та $y = \pm b$ не мають електродних покриттів (рис. 3.3):

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0, \quad D_x|_{x=\pm l} = 0, \quad D_y|_{y=\pm b} = 0. \quad (3.6)$$

2. Електродні покриття відсутні на всій поверхні тіла (рис. 3.4):

$$D_x|_{x=\pm l} = 0, \quad D_y|_{y=\pm b} = 0, \quad D_z|_{z=\pm h} = 0. \quad (3.7)$$

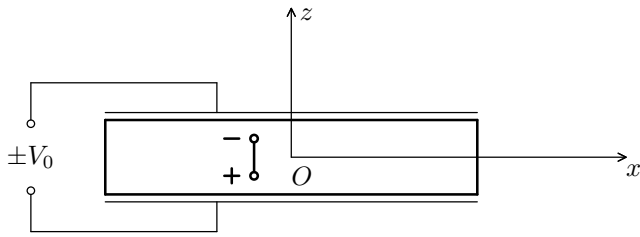


Рис. 3.3. До постановки електричних граничних умов на електродованій поверхні

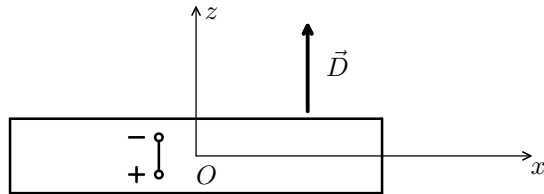


Рис. 3.4. До постановки електричних граничних умов на неелектродованій поверхні

Не є очевидним наперед, що сформульована тривимірна задача електропружності допускає точний аналітичний розв'язок в елементарних функціях. Навіть у випадку чисто пружної деформації пошук такого розв'язку містить елемент відгадування. Більш точно – виконується відбір однорідних поліномів, і ті з них, що задовольняють граничні умови, є точними розв'язками задачі. Реалізуючи такий підхід у нашому випадку електропружного середовища, спробуємо отримати точний розв'язок сформульованих задач, покладаючи

$$\begin{aligned}
 u_x &= ax + bxz, & u_y &= a_1y + b_1yz, \\
 u_z &= cz + dz^2 + ex^2 + fy^2, \\
 \Psi &= \Psi_0 + pz + qz^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Введені в ці степеневі розвинення сталі $a, b, c, d, e, f, a_1, b_1, \Psi_0, p, q$ слід підібрати таким чином, щоб задовольнити граничні умови (3.5) для механічних напружень і (3.6) або (3.7) – для компонентів напруженості та індукції електричного поля. Зрозуміло, що розв'язок (3.8) має задовольняти рівняння рівноваги (3.2) і рівняння вимушеної електростатики (3.3). Висунемо

також більш жорстку умову: будемо вимагати, щоб сталі інтегрування приймали такі значення, за яких рівні нулю граничні механічні напруження (3.5) і нульові компоненти вектора електричної індукції D_x , D_y , задані на границі, тотожно оберталися б на нуль у всіх внутрішніх точках прямокутного елемента. Саме такий розв'язок ми будемо вважати деформівним станом чистого розтягу та згину.

3.2. Електродовані бічні поверхні прямокутної призми при $z = \pm h$

Відповідно до виразів для переміщень (3.8) обрахуємо деформації та компоненти напруженості електричного поля за формулами (3.4) і (3.3). Маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a + b z, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_1 + b_1 z, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = c + 2d z, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \equiv 0, & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = (2e + b) x, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = (2f + b_1) y, \\ E_x &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, & E_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, & E_z &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -p - 2q z. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Цим розв'язком спробуємо задовольнити всі співвідношення тривимірної теорії електропружності, урахувуючи рівність нулю всіх напружень, крім $\sigma_x = \sigma_0 + z\sigma_1$, а також компонентів індукції D_x та D_y усередині об'єму тіла.

Згідно з вищенаведеним з рівнянь п'єзоефекту (3.1) маємо

$$\begin{aligned} a + b z &= s_{11}^E (\sigma_0 + z \sigma_1) - d_{31} (p + 2q z), \\ a_1 + b_1 z &= s_{12}^E (\sigma_0 + z \sigma_1) - d_{31} (p + 2q z), \\ c + 2d z &= s_{13}^E (\sigma_0 + z \sigma_1) - d_{33} (p + 2q z), \\ \varepsilon_{xy} &\equiv 0, \\ (2e + b) x &= 0, \\ (2f + b_1) y &= 0, \\ D_x &\equiv 0, \\ D_y &\equiv 0, \\ D_z &= -\epsilon_{33}^T (p + 2q z) + d_{31} (\sigma_0 + z \sigma_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рівняння рівноваги (3.2) задовольняються тотожно.

З рівнянь вимушеної електростатики (3.3) і з останньої рівності (3.10) маємо

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = -2q \epsilon_{33}^T + d_{31} \sigma_1 = 0. \quad (3.11)$$

З електричних граничних умов на електродованих поверхнях (3.6), урахуовуючи форму розв'язку для потенціалу (3.8), отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi_0 + p h + q h^2 &= V_0, \\ \Psi_0 - p h + q h^2 &= -V_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Послідовний розв'язок алгебраїчних рівнянь (3.10)–(3.12): із системи (3.12), складаючи та віднімаючи обидві частини рівнянь, отримуємо

$$p = \frac{V_0}{h}, \quad \Psi_0 = -q h^2; \quad (3.13)$$

з п'ятого та шостого рівнянь системи (3.10) –

$$e = -\frac{1}{2} b, \quad f = -\frac{1}{2} b_1; \quad (3.14)$$

а замість (3.11) напишемо

$$q = \frac{d_{31}}{2\epsilon_{33}^T} \sigma_1. \quad (3.15)$$

Сумісно розв'язуючи перші три рівняння із системи (3.10), отримуємо

$$\begin{aligned} a &= s_{11}^E \sigma_0 - d_{31} p, & b &= s_{11}^E \sigma_1 - d_{31} 2q, \\ a_1 &= s_{12}^E \sigma_0 - d_{31} p, & b_1 &= s_{12}^E \sigma_1 - d_{31} 2q, \\ c &= s_{13}^E \sigma_0 - d_{33} p, & 2d &= s_{13}^E \sigma_1 - d_{33} 2q. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Використовуючи вже знайдені значення сталих із (3.13)–(3.15), знаходимо остаточні вирази для сталих інтегрування:

$$\begin{aligned} a &= s_{11}^E \sigma_0 - d_{31} \left(\frac{V_0}{h} \right), & b &= s_{11}^E \sigma_1 - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T} \sigma_1 = s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 \\ a_1 &= s_{12}^E \sigma_0 - d_{31} \left(\frac{V_0}{h} \right), \\ b_1 &= s_{12}^E \sigma_1 - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T} \sigma_1 = s_{12}^E \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{12}^E \epsilon_{33}^T} \right) \sigma_1 = \\ &= s_{11}^E \left(\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} - \frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \frac{d_{31}^2}{s_{12}^E \epsilon_{33}^T} \right) \sigma_1 = -\nu s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 \\ c &= s_{13}^E \sigma_0 - d_{33} \left(\frac{V_0}{h} \right), \\ d &= \frac{1}{2} s_{13}^E \sigma_1 - \frac{d_{31}^2}{2\epsilon_{33}^T} \sigma_1 = \frac{1}{2} s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

У виразах для сталих b , b_1 та d містяться безвимірні комбінації пружних, електричних та п'єзоелектричних сталих п'єзокераміки. Ці величини відображають ефект зв'язаності механічного та електричного полів під час деформації п'єзокерамічного зразка і використовуються в електропружності як кількісні її міри:

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}, \quad k_s^2 = \frac{d_{31} d_{33}}{s_{13}^E \epsilon_{33}^T}. \quad (3.18)$$

Вони називаються статичними коефіцієнтами електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Відношення пружних констант матеріалу

$$\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \quad (3.19)$$

– це коефіцієнт Пуассона.

Повертаючись до формул для переміщень і потенціалу (3.8), остаточний розв'язок отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_x &= \left(s_{11}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) x + s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 x z, \\ u_y &= \left(s_{12}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) y - s_{11}^E (\nu + k_{31}^2) \sigma_1 y z, \\ u_z &= \left(s_{13}^E \sigma_0 - d_{33} \frac{V_0}{h} \right) z + \frac{1}{2} s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_1 z^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} s_{11}^E \sigma_1 [(1 - k_{31}^2) x^2 - (\nu + k_{31}^2) y^2], \\ \Psi &= \frac{V_0}{h} z - \frac{d_{31}}{2\epsilon_{33}^T} (h^2 - z^2) \sigma_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

За формулами (3.1) та (3.9) для інших відмінних від нуля характеристик спряженого електропружного поля отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \sigma_1 z \\ \varepsilon_x &= \left(s_{11}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) + s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 z, \\ \varepsilon_y &= \left(s_{12}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) - s_{11}^E (\nu + k_{31}^2) \sigma_1 z, \\ \varepsilon_z &= \left(s_{13}^E \sigma_0 - d_{33} \frac{V_0}{h} \right) + s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_1 z, \\ D_z &= -\epsilon_{33}^T \frac{V_0}{h} + d_{31} \sigma_0, \quad E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \sigma_1 z. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Співвідношення (3.20) та (3.21) забезпечують точний аналітичний розв'язок поставленої граничної задачі. Вони описують елементарний електропружний стан чистого згину та рівномірного розтягу прямокутної п'єзокерамічної призми. Слід відмітити лінійний характер зміни за товщиною п'єзоелемента z пружних деформацій і напружень. Суттєвим є також те, що складова вектора магнітної індукції D_z не залежить від товщинної координати z , а складова напруженості електричного поля σ_x змінюється за лінійним законом. З виразів для переміщень u_z та u_x за відсутності розтягу елемента (якщо покласти $\sigma_0 \equiv 0$ у граничних умовах (3.5) і в усіх наступних формулах) впливає строга рівність

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Зобразимо результат розв'язку задачі через інтегральні характеристики прикладних теорій, тобто через зусилля та моменти

$$N_x = \int_{-h}^h \sigma_x dz, \quad M_x = \int_{-h}^h z \sigma_x dz. \quad (3.23)$$

Використовуючи перше рівняння (3.1) та подальші значення характеристик поля, знаходимо

$$N_x = 2h \sigma_0 \quad M_x = \frac{2}{3} h^3 \sigma_1, \quad (3.24)$$

звідки

$$\sigma_0 = \frac{N_x}{2h} \quad \sigma_1 = \frac{3}{2h^3} M_x. \quad (3.25)$$

Лекція 4. Задача чистого розтягу та згину прямокутної п'єзопризми (продовження)

4.1. Електродні покриття відсутні на всій поверхні призми

Для задачі чистого розтягу та згину прямокутного елемента без електродних покриттів вихідний вигляд розв'язку та послідовність перетворень залишаються без змін. Єдине виключення становлять електричні граничні умови (рис. 3.4), що формулюються у вигляді (3.7). Усі формули п. 3.2 зберігаються, крім формули (3.12), яку слід замінити згідно з (3.7) на таку:

$$-\epsilon_{33}^T p + d_{31} \sigma_0 = 0. \quad (4.1)$$

При цьому, без зменшення загальності розв'язку, можна знехтувати сталою складовою у виразі для потенціалу, поклавши $\Psi_0 \equiv 0$, оскільки за таких граничних умов значення Ψ_0 не впливає ні на які інші характеристики електропружного поля. У результаті для сталих інтегрування отримуємо вирази

$$\begin{aligned} p &= \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \sigma_0, & q &= \frac{d_{31}}{2\epsilon_{33}^T} \sigma_1, \\ a &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_0, & b &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1, \\ a_1 &= -s_{11}^E (\nu + k_{31}^2) \sigma_0, & b_1 &= -s_{11}^E (\nu - k_{31}^2) \sigma_1, \\ c &= s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_0, & d &= \frac{1}{2} s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_1, \\ e &= -\frac{1}{2} b, & f &= -\frac{1}{2} b_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Відповідно до цих значень сталих знаходимо вирази для переміщень та електростатичного потенціалу:

$$\begin{aligned} u_x &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) (\sigma_0 x + \sigma_1 xz), \\ u_y &= -s_{11}^E (\nu + k_{31}^2) (\sigma_0 y + \sigma_1 yz), \\ u_z &= s_{13}^E (1 - k_s^2) \left(\sigma_0 z + \frac{1}{2} \sigma_1 z^2 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} s_{11}^E \sigma_1 [(1 - k_{31}^2) x^2 - (\nu + k_{31}^2) y^2], \end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \left(\sigma_0 z + \frac{1}{2} \sigma_1 z^2 \right). \quad (4.3)$$

Інші, відмінні від нуля характеристики електропружного поля, мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \sigma_1 z \\ \varepsilon_x &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) (\sigma_0 + \sigma_1 z), \\ \varepsilon_y &= -s_{11}^E (\nu + k_{31}^2) (\sigma_0 + \sigma_1 z), \\ \varepsilon_z &= s_{13}^E (1 - k_s^2) (\sigma_0 + \sigma_1 z) \\ E_z &= -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \left(\sigma_0 + \frac{1}{2} \sigma_1 z \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Якщо розглядати напружений стан чистого згину, тобто покласти $\sigma_0 = 0$, то для двох компонентів переміщень знаходимо

$$\begin{aligned} u_x &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 xz, \\ u_z &= \frac{1}{2} s_{13}^E (1 - k_s^2) \sigma_1 z^2 - \frac{1}{2} s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_1 (x^2 - \nu y^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Між ними існує строга залежність

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Характеризуючи в цілому якісну картину напруженого стану, відмітимо деякі притаманні йому риси. Наприклад, рівність нулю напружень σ_z , деформацій ε_{zx} і відповідних до них напружень τ_{zx} у всьому об'ємі елемента. Для електричного поля є справедливим лінійний розподіл напруженості E_z за товщинною координатою, а D_z не залежить від товщини і в даному випадку обертається на нуль.

Відмічені властивості в структурі електропружних полів у двох розглянутих випадках є загальними й впливають з точних розв'язків рівнянь електропружності.

4.2. Рівномірний розтяг і чистий згин прямокутної призми з поздовжньою поляризацією

По суті, мова йде про ту ж саму постановку крайової задачі електропружності для призми, що ми розглядали, але з іншим типом поляризації – по осі Ox , а не Oz , як у попередньому випадку (рис. 4.1).

Зміну поляризації необхідно враховувати в рівняннях п'єзоефекту (3.1). Тепер ці співвідношення запишуться так:

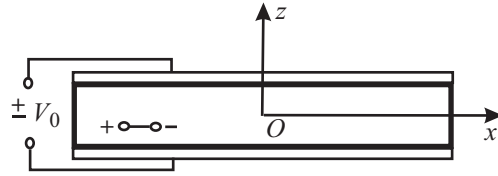


Рис. 4.1. Призма з поздовжньою поляризацією

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= s_{33}^E \sigma_x + s_{13}^E (\sigma_y + \sigma_z) + d_{33} E_x; \\
 \varepsilon_y &= s_{13}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + s_{12}^E \sigma_z + d_{31} E_x; \\
 \varepsilon_z &= s_{13}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + s_{11}^E \sigma_z + d_{31} E_x; \quad \varepsilon_{xy} = s_{44}^E \tau_{xy} + d_{15} E_y; \\
 \varepsilon_{xz} &= s_{44}^E \tau_{xz} + d_{15} E_z; \quad \varepsilon_{yz} = 2 (s_{11}^E - s_{12}^E) \tau_{yz}; \\
 D_x &= \varepsilon_{33}^T E_x + d_{33} \sigma_x + d_{31} (\sigma_y + \sigma_z); \quad D_y = \varepsilon_{11}^T E_y + d_{15} \tau_{xy}; \\
 D_z &= \varepsilon_{11}^T E_z + d_{15} \tau_{xz}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Співвідношення (3.2)–(3.4) залишаються без змін.

Граничні умови для механічних змінних формулюються, як і в попередньому випадку, у вигляді рівностей (3.5). Електричні граничні умови збігаються з їх формулюванням (3.6) для випадку покритих електродами поверхонь $z = \pm h$ і підведеного до них струму генератора, а також (3.7) для випадку поверхонь без електродного покриття.

Розв'язок для переміщень і електричного потенціалу вибираємо у вигляді (3.8) зі зміною у виразі для переміщення $u_x = ax + bxz + gz$. Для деформацій і напруженості електричного поля знаходимо значення, які у більшості своїй збігаються з (3.9):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= a + bz; \quad \varepsilon_y = a_1 + b_1 z; \quad \varepsilon_z = c + 2dz; \quad \varepsilon_{xy} = 0; \\
 \varepsilon_{xz} &= g + 2lx + bx; \quad \varepsilon_{yz} = b_1 y + 2fy; \\
 E_x &= 0; \quad E_y = 0; \quad E_z = -p - 2qz.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Поклавши, як і раніше, $\sigma_x = \sigma_0 + z\sigma_1$, а інші компоненти тензора напружень і компоненту індукції D_y тотожно-рівними нулю у всіх точках області тіла, визначення невідомих сталих у (4.8) проводимо на основі рівностей (4.7) і електричних граничних умов (3.6) або (3.7).

Розглянемо випадок електродованих поверхонь $z = \pm h$ під потенціалом $\pm V_0$.

З (4.7) маємо:

$$\begin{aligned}
 a + bz &= s_{33}^E (\sigma_0 + z\sigma_1); \quad a_1 + b_1 z = s_{13}^E (\sigma_0 + z\sigma_1); \\
 c + 2dz &= s_{13}^E (\sigma_0 + z\sigma_1); \\
 g + (2l + b)x &= -d_{15} + (p + 2qz); \quad (b_1 + 2f)y = 0;
 \end{aligned}$$

$$D_x = d_{33}(\sigma_0 + z\sigma_1); \quad D_z = -\varepsilon_{33}^T(p + 2qz). \quad (4.9)$$

Граничні умови для електростатичного потенціалу запишуться так:

$$\psi_0 + ph + qh^2 = V_0; \quad \psi_0 - ph + qh^2 = -V_0. \quad (4.10)$$

Розв'язуючи рівняння (4.9) і (4.10), знаходимо:

$$\begin{aligned} a &= s_{33}^E \sigma_0; & b &= s_{33}^E \sigma_1; & a_1 &= s_{13}^E \sigma_0; & b_1 &= s_{13}^E \sigma_1; \\ c &= s_{13}^E \sigma_0; & d &= \frac{1}{2} s_{13}^E \sigma_1; & l &= -\frac{1}{2} b; & q &= 0; \\ f &= -\frac{1}{2} b_1; & p &= \frac{V_0}{h}; & \psi_0 &= 0; & g &= -d_{15} \frac{V_0}{h}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким чином, явний вигляд для переміщень і потенціалу буде таким:

$$\begin{aligned} u_x &= -d_{15} \frac{V_0}{h} z + s_{33}^E (\sigma_0 + z\sigma_1) x; & u_y &= s_{13}^E (\sigma_0 + z\sigma_1) y; \\ u_z &= s_{13}^E \left(z\sigma_0 + \frac{1}{2} z^2 \sigma_1 \right) - \frac{1}{2} s_{33}^E \sigma_1 x^2 - \frac{1}{2} s_{13}^E \sigma_1 y^2; & \psi &= \frac{V_0}{h} z. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$D_x = d_{33}(\sigma_0 + z\sigma_1); \quad D_z = -\varepsilon_{33}^T \frac{V_0}{h}.$$

На відміну від розв'язку двох попередніх задач розтягу та чистого згину, отримані вирази для вектора переміщень і електричного потенціалу не є точними розв'язками граничної задачі електропружності з електричними граничними умовами (3.6). Умова для D_x при $x = \pm l$ залишилась невиконаною. Для характеристики особливостей даної задачі слід відзначити, що знайти її точний розв'язок, включаючи у вирази для переміщень і потенціалу додаткові поліноміальні доданки, не вдається. Також специфічною для розв'язку цієї задачі є поява у виразі для переміщення u_x доданка $-d_{15} \frac{V_0}{h} z$, що описує незалежний від механічних напружень σ_0 та σ_1 зсув. Та частина у виразі для переміщень u_x , що обумовлюється зовнішніми механічними навантаженнями, пов'язується при $\sigma_0 = 0$ з переміщеннями u_x співвідношенням (3.22). Повністю зв'язок між двома вказаними переміщеннями має вигляд

$$u_x = -d_{15} \frac{V_0}{h} z - z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4.13)$$

Для призматичного тіла без електродного покриття на всій поверхні розв'язок має задовольняти граничні умови (3.7). Причому описана методика побудови розв'язку приводить до таких виразів для переміщень, електричного потенціалу, напруженості електричного поля та індукції:

$$\begin{aligned} u_x &= s_{33}^E [(1 - k_{33}^2) \sigma_0 + \sigma_1 z] x; \\ u_y &= s_{13}^E [(1 - k_{33}^2) \sigma_0 + \sigma_1 z] y; \\ u_z &= s_{13}^E \left[(1 - k_s^2) \sigma_0 + \frac{1}{2} \sigma_1 z \right] z - \frac{1}{2} \sigma_1 (s_{33}^E x^2 + s_{13}^E y^2); \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 x, \quad E_x = -\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$

$$D_x = d_{33} \sigma_1 z, \quad D_y = 0, \quad D_z = 0, \quad k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_{33}^T \varepsilon_{33}^E}. \quad (4.14)$$

У цьому випадку граничні умови для електричної індукції D_x також не виконуються на плоских гранях $x = \pm l$.

Закономірності в розподілі характеристик електропружних полів для задач, розглянутих у цій і попередній лекціях, є спільними. Додаткових роз'яснень вимагає лише факт незадовольнення граничних умов для D_x на граничних площинах $x = \pm l$. Згадаємо, що нормальна до границі складова вектора електричної індукції дорівнює щільності вільних електричних зарядів на цій поверхні. Тому виправлення побудованого розв'язку (4.12) з метою задовольнити нульову граничну умову для D_x еквівалентне внесенню на поверхню $x = \pm l$ електричних зарядів, що компенсують заряди, відповідні до виразу D_x у (4.12). Зрозуміло, що розташування таких компенсуючих зарядів на площинах $x = \pm l$ приводить до зміни розподілу зарядів на електродних покриттях $z = \pm h$, а отже, до зміни електропружного стану керамічного елемента.

У випадку простого конденсатора [13] перерозподіл зарядів на його обкладках за рахунок привнесених зарядів у крайовій зоні змінить внутрішнє електричне поле всередині лише на відстанях, що не перевищують відстані між електродами. Такий самий стан спостерігається у випадку п'єзокерамічного елемента. Уточнення граничних умов для D_x на поверхнях $x = \pm l$ приведе до зміни його електропружного стану лише в зонах, віддалених від торців менше ніж на $2h$. Фактично у зв'язку з високою порівняно з вакуумом діелектричною проникністю кераміки зона поширення крайового ефекту виявляється набагато меншою від товщини зразка.

Для зразка з поздовжньою поляризацією труднощі, пов'язані з виконанням граничних умов, не виникають, якщо торцеві поверхні $x = \pm l$ покриті електродами й зовнішнє навантаження не має згинної складової ($\sigma_1 = 0$), електродні покриття на поверхнях $y = \pm b$, $z = \pm h$ відсутні, а до електродів на торцях підведена різниця електричних потенціалів $2V_0$. Для цієї задачі вирази для переміщень і електричного потенціалу (3.8) спрощуються до вигляду

$$u_x = ax, \quad u_y = a_1 y, \quad u_z = cz, \quad \psi = px. \quad (4.15)$$

З усіх співвідношень п'єзоефекту (4.7) істотними для даного випадку будуть тільки два:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{33}^E \sigma_x + d_{33} E_x, \quad D_x = \varepsilon_{33}^T E_x + d_{33} \sigma_x. \quad (4.16)$$

Усі інші компоненти тензора механічних напружень тотожно рівні ну-

лю. Дорівнюють нулю також компоненти D_y, D_z електричної індукції, компоненти E_y, E_z напруженості електричного поля і зсувні деформації. Поперечні деформації ε_y та ε_z обчислюються через σ_x та D_x за формулами

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = s_{13}^E \sigma_x + d_{31} E_x. \quad (4.17)$$

Виконуючи граничні умови

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = \sigma_0, \quad \psi|_{x=\pm l} = \pm V_0 \quad (4.18)$$

і рівняння вимушеної електростатики

$$\frac{dD_x}{dx} = 0, \quad E_x = -\frac{d\psi}{dx}, \quad (4.19)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} u_x &= \left(s_{33}^E \sigma_0 - d_{33} \frac{V_0}{h} \right) x, & u_y &= \left(s_{13}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) y, \\ u_z &= \left(s_{13}^E \sigma_0 - d_{31} \frac{V_0}{h} \right) z, & \psi &= \frac{V_0}{l} x. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Лекція 5. Поздовжні коливання стрижня з поперечною поляризацією

Розв'язки елементарних крайових задач електропружності про однорідний розтяг та чистий згин прямокутної призми застосовують і при побудові наближених моделей поздовжніх і згинних коливань призматичних п'єзокерамічних стрижнів. У цій та наступній лекціях ми розглянемо лише два випадки поздовжніх коливань п'єзокерамічного стрижня, відповідно з поперечною та поздовжньою поляризацією.

Перш ніж перейти до викладення оголошеної теми, доцільно звернути увагу читача не те, що математична модель стрижня буде адекватно описувати фізичну суть хвильових процесів у конкретному п'єзокерамічному зразку відповідної геометричної форми лише при виконанні певних умов.

У першу чергу, для того, щоб здійснити чисто поздовжні коливання стрижня, слід вимагати, щоб його бічна поверхня була вільною від механічних зусиль. Для п'єзокерамічного стрижня слід також вимагати, щоб розподіл електричного поля на бічній поверхні відносно осьової координати не приводив до виникнення деформації згину. Такі висновки впливають хоча б з аналізу випадків статичної деформації п'єзокерамічної прямокутної призми.

Інші умови впливають з аналізу динамічних крайових задач для чисто пружної деформації стосовно спектрів частот коливань поздовжнього, згинного та крутильного типів. За рахунок взаємного перекриття резонансних кривих у загальному випадку у стрижні можуть збуджуватися не лише поздовжні, але й поперечні та крутильні моди. Можливі також випадки так званого крайового резонансу, коли значну частину енергії хвильового руху буде сконцентровано поблизу торців стрижня. Однак для відносно низьких частот коливань, коли довжина хвилі пружної деформації значно більша за характерний розмір поперечного перерізу стрижня, його коливання можна наближено вважати чисто поздовжніми. При цьому слід дотримуватись умов однорідного розподілу напружень та деформацій у площині перерізу стрижня.

Тому при електричному збудженні стрижня слід вимагати, щоб діапазон частот генератора коливань (т. зв. смуга пропускання) відповідав спектру поздовжніх (а не згинних чи крутильних) коливань стрижня. Ці частоти слід розрахувати теоретично.

5.1. Постановка задачі

Розглянемо тонкий призматичний стрижень з поперечною поляризацією вздовж осі Oz декартової системи координат. Нехай довжина стрижня дорівнює $2l$ і є набагато більшою за його товщину $2h$ та ширину $2b$. На бічних гранях стрижня $z = \pm h$ нанесено тонкі електроди, а всі інші частини його бічної поверхні – неелектродовані.

Збудження коливань стрижня за допомогою гармонічної різниці електричних потенціалів із частотою ω , що подається на електродовані грані $z = \pm h$, математично описується такими електричними граничними умовами:

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (5.1)$$

Ці умови узгоджуються з гіпотезою лінійного розподілу електричного потенціалу по товщині стрижня у випадку однорідної деформації розтягу:

$$\Psi = z E_z(t) = z \frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (5.2)$$

Напруженість поля E_z не змінюється зі зміною поздовжньої координати x і не залежить від інших координат.

Одновимірний електропружний стан стрижня, що здійснюється у випадку одновимірного хвильового руху його частинок, описується такими співвідношеннями:

1. Спрощені рівняння п'єзоефекту:

$$\varepsilon_x = s_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z, \quad D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x. \quad (5.3)$$

2. Одновимірне рівняння руху (Ньютона):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (5.4)$$

3. Рівняння вимушеної електростатики:

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (5.5)$$

4. Співвідношення Коші для поздовжньої деформації:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5.6)$$

Стосовно невідомих осьових переміщень будемо вважати, що ця величина є функцією лише однієї осьової координати x (і, звичайно, часу):

$$u_x = u_x(x, t). \quad (5.7)$$

Припущення про просторовий розподіл переміщень впливає з гіпотези плоских перерізів: намічений у стрижні переріз площиною, перпендикулярною осі стрижня до деформації, залишається плоским і перпендикулярним осі стрижня й після деформації.

Виражаючи в першому рівнянні (5.3) осьові напруження σ_x через деформації ε_x та використовуючи співвідношення Коші (5.6), з рівнянь руху (5.4) отримуємо звичайне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (5.8)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}} \quad (5.9)$$

– швидкість поширення поздовжніх хвиль у стрижні для даного типу поляризації п'єзокераміки.

Рівняння (5.8) слід доповнити механічними граничними умовами на вільних торцях стрижня:

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = 0. \quad (5.10)$$

5.2. Побудова розв'язку задачі

Відповідно до електричних граничних умов (5.1) для гармонічних коливань із частотою ω для всіх шуканих функцій покладаємо

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \hat{u}(x) e^{i\omega t}, & \sigma_x(x, t) &= \hat{\sigma}_x(x) e^{i\omega t}, \\ D_z(x, t) &= \hat{D}_z(x) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рівняння коливань (5.8) після підстановки в нього виразу для переміщень з (5.11) переписується у вигляді

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u} = 0. \quad (5.12)$$

Частинний розв'язок цього рівняння, симетричний відносно середини стрижня $x = 0$, будемо шукати у вигляді

$$\hat{u}(x) = A \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\omega}{c}. \quad (5.13)$$

Щойно введена величина λ – хвильове число (у нашому випадку – поздовжніх пружних хвиль у стрижні). З виразу для осьових напружень $\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E} (\varepsilon_x - d_{31} E_z)$, приймаючи до уваги (5.5) та (5.6), отримуємо

$$\hat{\sigma}_x(x) = \frac{1}{s_{11}^E} \left(\frac{d\hat{u}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right). \quad (5.14)$$

Для знаходження сталої інтегрування A достатньо застосувати лише одну граничну умову на торці $x = l$. Отже, з (5.10) та (5.14) маємо

$$\frac{d\hat{u}}{dx}|_{x=l} = -d_{31} \frac{V_0}{h}. \quad (5.15)$$

Обраховуючи першу похідну від амплітуди переміщень \hat{u} , яка входить до

граничної умови, для сталої інтегрування A отримуємо

$$\lambda A = -d_{31} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\cos \lambda l}. \quad (5.16)$$

Вираз для амплітудної функції переміщень знаходимо у вигляді

$$\frac{\hat{u}(x)}{l} = -d_{31} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\lambda l \cos \lambda l} \sin \lambda x. \quad (5.17)$$

З виразу для \hat{u} випливає, що амплітуди переміщень будуть прямо пропорційними величині прикладеної до електродованих граней стрижня різниці електричних потенціалів. При цьому ефект зв'язаності полів якісно не впливає на форми коливань стрижня. Як і у випадку чисто пружного стрижня, розподіл амплітуд переміщень частинок по довжині $-l \leq x \leq l$ описується синусоїдальною залежністю.

5.3. Резонансні частоти та нормальні моди коливань

З формули для амплітуди коливань стрижня (5.17) видно, що резонансні стани матимуть місце у тих випадках, коли знаменник виразу обертається в нуль: $\cos \lambda l = 0$. Це елементарне рівняння і є резонансним рівнянням у сформульованій задачі. Множиною його розв'язків

$$(\lambda l)_R^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

визначається послідовність резонансних частот $\omega_R^{(n)}$ коливань стрижня. Ураховуючи (5.9), маємо

$$\omega_R^{(n)} = \frac{1}{l} \frac{(\lambda l)_R^{(n)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}. \quad (5.19)$$

Коли частота генератора коливань стає близькою до резонансної, збуджуються нормальні моди коливань. У випадку поздовжніх коливань нормальні моди стрижня характеризуються наявністю вузлових перерізів – ліній, перпендикулярних осі стрижня, які можна спостерігати в експерименті.

На першому основному резонансі $(\lambda l)_R^{(1)} = \frac{\pi}{2}$ маємо єдиний вузол коливання в точці $x = 0$, тобто нуль функції $A \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$ на проміжку $0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$.

На другому резонансі $(\lambda l)_R^{(2)} = \frac{3\pi}{2}$ на вказаному проміжку амплітуда переміщень $A \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)$ також обертається в нуль у точці $x = \frac{2}{3}l$. Цим і

визначається наявність трьох вузлів коливань при $x = 0$ та $x = \pm \frac{2}{3}l$.

На третьому резонансі $(\lambda l)_R^{(3)} = \frac{5\pi}{2}$ вузлових ліній буде п'ять: $x = 0$, $x = \pm \frac{2}{5}l$ та $x = \pm \frac{4}{5}l$.

Бачимо, що зі збільшенням номера n кількість вузлів коливання зростає.

5.4. Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії

Аналіз стаціонарних коливань п'єзокерамічного стрижня в традиційному для класичної динамічної теорії пружності сенсі буде неповним і не розкриватиме всебічно суті зв'язаних процесів перетворення енергії. У задачах електропружності важливу інформацію про динамічну поведінку стрижня можна отримати з аналізу електричного струму, який протікає по стрижню, включеному в коло ідеального генератора електричних напруг. Для того, щоб провести такий аналіз, слід, перш за все, виконати очевидні перетворення над компонентою вектора індукції D_z . Згідно із зображенням (5.11), із другого рівняння (5.3) послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{D}_z &= \epsilon_{33}^T \hat{E}_z + d_{31} \hat{\sigma}_x = \epsilon_{33}^T \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} (\hat{\epsilon}_x - d_{31} \hat{E}_z) = \\ &= \epsilon_{33}^T \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \right) \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \hat{\epsilon}_x = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \hat{\epsilon}_x = \\ &= -\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{V_0}{h} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{d\hat{u}}{dx}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

За визначенням струм зміщення дорівнює

$$I = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) ds, \quad (5.21)$$

де S_1^+ – площа електрода, який покриває бічну поверхню стрижня $z = h$. У нашому випадку послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} I &= -\frac{d}{dt} 2b \int_{-l}^l \hat{D}_z e^{i\omega t} dx = -2b i\omega e^{i\omega t} \int_{-l}^l \hat{D}_z dx = \\ &= -\omega 2b e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \int_{-l}^l \hat{D}_z dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Тоді, згідно з (5.22),

$$\hat{I} = -\omega 2b \left[-\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{V_0}{h} 2l + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} 2\hat{u}(l) \right]. \quad (5.23)$$

Підставляючи сюди значення амплітудної функції переміщень із (5.17), після простих перетворень отримаємо

$$\hat{I} = \omega C_0 2V_0 \left(1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin \lambda l}{\lambda l \cos \lambda l} \right), \quad (5.24)$$

де $C_0 = 2 \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{lb}{h}$ – так звана електростатична ємність недеформованого п'єзокерамічного стрижня. Як видно з (5.24), при наближенні до резонансних частот коливань струм як і інші характеристики поля, прямує до нескінченності. Цей висновок впливає з вигляду знаменника в (5.20). Проте для аналізу частотної залежності струму в колі генератора коливань має значення й зміна струму, яка визначається чисельником формули (5.20). Найважливішим при цьому є існування частот, на яких струм \hat{I} обертається в нуль. Для цих частот у літературі введено спеціальну назву – частоти антирезонансу. Обернення в нуль струму в колі не означає, що коливання стрижня відсутні на цих частотах, а лише свідчить, що струм у зовнішньому колі, генерований стрижнем як електромеханічним перетворювачем, стає рівним за величиною, але протилежним за фазою конденсаторному струму генератора напруг.

Прирівнявши (5.24) до нуля, отримаємо рівняння для визначення антирезонансних частот:

$$\cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin \lambda l}{\lambda l} = 0. \quad (5.25)$$

Для знаходження істинних значень $\omega_A^{(n)}$ за розв'язками рівняння (5.25) справедливою буде формула (5.19):

$$\omega_A^{(n)} = \frac{1}{l} \frac{(\lambda l)_A^{(n)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}.$$

Знайдемо наближені розв'язки рівняння (5.25), вважаючи, що антирезонансні частоти близько розташовані до частот резонансу:

$$(\lambda l)_A^{(n)} = (\lambda l)_R^{(n)} + \delta_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} + \delta_n, \quad \delta_n \ll 1. \quad (5.26)$$

Підставляючи значення частот у рівняння (5.25) та зберігаючи лише перші члени в розвиненнях тригонометричних функцій по малому параметру δ_n , після простих перетворень знаходимо

$$\delta_n = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1}{(2n + 1) \frac{\pi}{2}}. \quad (5.27)$$

Оскільки значення статичного КЕМЗ k_{31}^2 ніколи не перевищує 1, то величини δ_n є додатними числами для кожної гармоніки з номером n . Більше того,

послідовність δ_n монотонно спадає зі зростанням n – цим забезпечується збіжність розв'язку. Ці властивості δ_n відображаються в тому, що антирезонансні частоти завжди розташовуються у спектрі коливань стрижня вище ніж резонансні, причому різниця між ними зменшується зі зростанням номера n .

Саме явище антирезонансу породжене зв'язаністю механічних та електричних полів у п'єзокерамічному матеріалі. Слід зазначити, що різниця між частотами резонансу та антирезонансу визначається не лише величиною КЕМЗ k_{31}^2 , але й особливостями зміни напруженого стану по осьовій координаті стрижня z . З викладеного вище випливає, що для динамічного процесу в умовах однорідного напруженого стану за просторовими координатами значення антирезонансних частот однозначно визначаються через значення резонансних частот і статичних КЕМЗ. Для оцінки ефективності електромеханічного перетворення енергії в таких випадках У. Мезоном запропоновано просту формулу:

$$k_d^2 = \frac{\omega_A^2 - \omega_R^2}{\omega_A^2} = \frac{(\lambda l)_A^2 - (\lambda l)_R^2}{(\lambda l)_A^2}. \quad (5.28)$$

Величина k_d^2 називається ефективним динамічним коефіцієнтом електромеханічного зв'язку, або просто – динамічним КЕМЗ.

Лекція 6. Поздовжні коливання стрижня з поздовжньою поляризацією

6.1. Постановка задачі

Розглянемо випадок поздовжніх коливань п'єзокерамічного стрижня з поздовжньою поляризацією. Нехай призматичний стрижень з осью поляризації вздовж осі Oz декартової системи координат, довжина якого $2l$, збуджується різницею потенціалів, підведеною до електродів на його торцях (рис. 6.1). Тоді електричні граничні умови на торцевих гранях можна записати у вигляді

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (6.1)$$

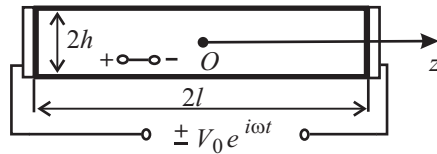


Рис. 6.1. П'єзокерамічний стрижень з торцевими електродами

Приймається також, що зовнішні механічні напруження відсутні на всій поверхні стрижня.

Рівняння п'єзоэффекту для цієї задачі спрощуються до вигляду

$$\varepsilon_z = s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \quad D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{33} \sigma_z. \quad (6.2)$$

Рівняння руху елементарного перерізу стрижня – до вигляду

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (6.3)$$

Рівняння вимушеної електростатики:

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (6.4)$$

Співвідношення Коші для поздовжньої деформації:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (6.5)$$

Стосовно невідомих осьових переміщень та потенціалу будемо вважати, що ці величини є функціями лише однієї осьової координати z (і, зви-

чайно, часу):

$$u_z = u_z(z, t), \quad \Psi = \Psi(z, t). \quad (6.6)$$

Таке припущення про просторовий розподіл переміщень і потенціалу виплаває з гіпотези плоских перерізів.

Система зв'язаних рівнянь електропружності (6.2)–(6.5), переписана в термінах переміщень і потенціалу (6.6), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \rho s_{33}^E \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

де

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T} \quad (6.8)$$

– поздовжній статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку. Виключаючи електростатичний потенціал Ψ з першого рівняння, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \quad (6.9)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}} \quad (6.10)$$

– швидкість спряжених поздовжніх хвиль у п'єзокерамічному стрижні, яка відповідає швидкості хвиль $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ у чисто пружному стрижні.

6.2. Побудова загального розв'язку

Для заданої рівністю (6.1) електричної граничної умови розв'язок системи рівнянь (6.9) шукаємо у вигляді

$$u_z(z, t) = \hat{u}_z(z) e^{i\omega t}, \quad \Psi(z, t) = \hat{\Psi}(z) e^{i\omega t}. \quad (6.11)$$

З урахуванням властивості симетрії переміщень і потенціалу відносно серединного перерізу стрижня $z = 0$ вирази для амплітудних характеристик величин (6.11) набувають вигляду

$$\hat{u}_z = A \sin \alpha z, \quad \alpha = \omega/c, \quad \hat{\Psi} = B z + \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \hat{u}_z. \quad (6.12)$$

З урахуванням цих розв'язків легко виразити амплітудні значення осьових напружень і деформацій стрижня, а також напруженості та індукції в напрямку осі стрижня Oz :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_z &= \alpha A \cos \alpha z, & \hat{\sigma}_z &= \frac{1}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \hat{\epsilon}_z + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} B, \\ \hat{E}_z &= -B - \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \hat{\epsilon}_z, & \hat{D}_z &= -\epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) B. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Довільні сталі загального розв'язку (6.12)–(6.13) визначимо з електричної граничної умови для потенціалу (6.1) та умови обернення в нуль механічних напружень на торцях стрижня:

$$\sigma_z|_{z=\pm l} = 0. \quad (6.14)$$

Отримаємо

$$A = -\frac{d_{33}(1 - k_{33}^2)}{\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l} V_0, \quad B = \frac{\alpha l \cos \alpha l}{\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l} \frac{V_0}{l}. \quad (6.15)$$

Вирази для амплітудних функцій переміщень і потенціалу мають вигляд

$$\hat{u}_z = -\frac{d_{33}(1 - k_{33}^2) \sin \alpha z}{\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l} V_0, \quad \hat{\Psi} = \frac{\alpha z \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha z}{\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l} V_0. \quad (6.16)$$

З виразу для \hat{u}_z випливає, що ефект зв'язаності полів якісно не впливає на форму коливань стрижня. Як і у випадку чисто пружного стрижня, розподіл амплітуд переміщень частинок по довжині описується синусоїдальною залежністю. Для електростатичного потенціалу поряд з лінійною по z складовою, як і у випадку простого конденсатора, існує складова, яка повторює закон розподілу переміщень по довжині стрижня l .

6.3. Резонансне рівняння

Залежність амплітуд стаціонарних коливань (6.16) від частоти ($\omega = \alpha c$) свідчить, що резонансні стани мають місце в тому випадку, коли знаменник указаних виразів обертається в нуль, тобто

$$\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l = 0, \quad (6.17)$$

або, що теж саме,

$$\operatorname{tg} \alpha l = \frac{\alpha l}{k_{33}^2}. \quad (6.18)$$

За відсутності електромеханічного зв'язку (для чисто пружного стрижня слід покласти $k_{33}^2 = 0$) власні частоти визначаються нулями функції $\cos \alpha l$ і відповідають значенням $(\alpha l)_n = (2n - 1)\pi/2$, ($n = 1, 2, \dots$). Відповідні корені рівняння (6.17) завжди менші вказаних величин, тобто зв'язаність електричних і механічних полів у п'єзокераміці приводить до зниження частот коливань.

Щоб оцінити міру впливу зв'язаності полів на власні частоти поздовжніх коливань стрижня, порівняємо значення коренів рівнянь (6.18) та $\cos \alpha l = 0$ з відповідними номерами. Нижче записано по три послідовних значення цих коренів (для п'єзострижня покладається $k_{33}^2 = 0.5$):

$$\begin{array}{lll} \text{п'єзострижень:} & (\alpha l)_1 = 1.17, & (\alpha l)_2 = 4.60, & (\alpha l)_3 = 7.79; \\ \text{чисто пружний стрижень:} & (\alpha l)_1 = 1.57, & (\alpha l)_2 = 4.71, & (\alpha l)_3 = 7.85. \end{array}$$

Видно, що зі збільшенням номера n вплив зв'язаності зменшується. Для власних частот з великими номерами зв'язаність полів узагалі стає несуттєвою.

6.4. Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії

Для обчислення струму $I(t)$ скористаємося формулою

$$I = -S \frac{\partial D_z}{\partial t} = -i\omega S \hat{D}_z e^{i\omega t}, \quad (6.19)$$

де S – площа поперечного перерізу стрижня. Значення амплітуди індукції \hat{D}_z отримується за формулами (6.13) та (6.15). Для амплітуди струму отримуємо

$$\hat{I} = -2i\omega C_0 \frac{\alpha l \cos \alpha l}{\alpha l \cos \alpha l - k_{33}^2 \sin \alpha l} V_0, \quad (6.20)$$

де $C_0 = \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) S / 2l$ – так звана електростатична ємність недеформованого п'єзокерамічного стрижня.

Як видно з (6.20), при наближенні до резонансних частот коливань струм, як і інші характеристики поля, прямує до нескінченності. Цей висновок випливає з вигляду знаменника в (6.20). Проте для аналізу частотної залежності струму в колі генератора коливань має значення й зміна струму, яка визначається чисельником формули (6.20). Найважливішим при цьому є існування частот, на яких струм \hat{I} обертається в нуль: $\cos \alpha l = 0$. Для цих частот у літературі введено спеціальну назва – частоти антирезонансу. Обернення в нуль струму в колі не означає, що коливання стрижня відсутні на цих частотах. Це лише свідчить, що струм у зовнішньому колі, генерований стрижнем як електромеханічним перетворювачем, стає рівним за величиною, але протилежним за фазою конденсаторному струму генератора напруг.

Таким чином, п'єзокерамічний стрижень як коливальна система при вимушених коливаннях характеризується двома послідовностями частот: резонансу й антирезонансу. Легко встановити, що відповідні за номером n частоти резонансу завжди лежать нижче ніж частоти антирезонансу, причому різниця між ними зменшується зі зростанням номера n .

Як і в задачі про поздовжні коливання п'єзострижня, динамічний КЕМЗ визначаємо за формулою Мезона (5.28).

Лекція 7. Планарні коливання тонких п'єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією

Тіло, утворене двома паралельними площинами й циліндричною поверхнею, яка їх перетинає під прямим кутом, називається пластиною.

Тонкостінна пластина характеризується виродженою геометрією за товщинною координатою, тобто $2h/d \ll 1$, де d – характерний лінійний розмір у площині, $2h$ – товщина.

Серединною площиною пластини називається площина, рівновіддалена від обох плоских поверхонь пластини.

Розташуємо початок системи декартових координат $Oxyz$ у серединній площині пластини таким чином, щоб вісь Oz була перпендикулярною до її плоских поверхонь. Тоді вектор попередньої поляризації, наведеної за допомогою електродів на гранях $z = \pm h$, буде паралельним осі Oz . У такому разі загальні рівняння п'єзоефекту для даного типу поляризації п'єзокераміки записуються у вигляді (3.1).

Використовуючи ці співвідношення, розглянемо два випадки планарної (без згину) деформації п'єзокерамічної пластини: з електродованими бічними гранями $z = \pm h$ та без електродних покриттів. Щоб записати співвідношення планарної деформації п'єзокерамічної пластини, скористаємось результатами точних розв'язків елементарних задач для прямокутної п'єзокерамічної призми (випадок чистого розтягу), що були отримані у лекціях 3–4.

Для здійснення планарної деформації будемо вимагати, щоб лицеві плоскі поверхні пластини $z = \pm h$ були вільними від будь-яких зовнішніх механічних навантажень у всіх випадках, а нормальні σ_n та дотичні τ_{ns} напруження, що можуть задаватися на контурній поверхні S , були б незалежними від координати z , тобто рівномірно розподіленими по товщині пластини.

Якщо провести аналогію з формулюваннями та розв'язками задач для прямокутної призми, то остання вимога забезпечує сталість напрямку нормалі до серединної поверхні пластини під час деформації, тобто відсутність згину, і відповідає тому випадку, коли покладається $\sigma_1 = 0$ як у граничних умовах, так і в розв'язках задач.

7.1. Гіпотези плоского електропружного стану. Рівняння коливань електродованої пластини

Відповідно до точного розв'язку задачі для прямокутної призми при рівномірному розтягу покладаємо

$$\begin{aligned} u_x &\simeq u_x(x, y, t), & u_y &\simeq u_y(x, y, t), \\ \sigma_z &\simeq 0, & \tau_{zx} &\simeq 0, & \tau_{zy} &\simeq 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для електричних змінних як вихідну гіпотезу приймаємо

$$E_x \simeq 0, \quad E_y \simeq 0, \quad E_z = E_z(t). \quad (7.2)$$

З урахуванням цих спрощень, рівняння п'єзоефекту (3.1) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_{xy} &= 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \tau_{xy}, \\ D_z &= \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (7.3)$$

При цьому, у доповнення до гіпотез (7.1) та (7.2), маємо

$$D_x \simeq 0, \quad D_y \simeq 0, \quad \varepsilon_{xz} \simeq 0, \quad \varepsilon_{yz} \simeq 0. \quad (7.4)$$

Деформація розтягу-стиску пластини за товщинною координатою z , що не ввійшла до запису спрощених рівнянь стану (7.3), обраховується після того, як знайдено розв'язок задачі за формулою

$$\varepsilon_z = s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} E_z. \quad (7.5)$$

Замість трьох рівнянь руху (2.3) у теорії планарних коливань пластин використовуються лише два рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для електродованої пластини з рівнянь вимушеної електростатики (3.3) зберігається лише одне:

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (7.7)$$

Кососиметричний відносно серединної площини розв'язок цього рівняння записується у вигляді

$$\Psi = -z E(t). \quad (7.8)$$

Співвідношеннями (7.1), (7.2) та (7.8) виражаються гіпотези плоского електропружного стану, аналогічні гіпотезам узагальненого плоского напруженого стану лінійної теорії пружності.

Ґрунтуючись на записаних співвідношеннях, виведемо рівняння планарних коливань п'єзопластини відносно переміщень u_x та u_y серединної поверхні. Для цього спочатку слід виразити в рівняннях п'єзоефекту (7.3) напруження σ_x , σ_y та τ_{xy} через відповідні деформації, розв'язуючи ці рівняння алгебраїчним шляхом. Потім слід підставити отримані значення напружень у рівняння руху (7.6), одночасно виражаючи деформації ε_x , ε_y , ε_{xy} через переміщення u_x та u_y за формулами Коші (3.4).

Послідовно отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} [(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - d_{31}(1+\nu)E_z] = \\ &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} [(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_y - d_{31}(1+\nu)E_z], \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} [(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) - d_{31}(1+\nu)E_z] = \\ &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} [(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\varepsilon_x - d_{31}(1+\nu)E_z], \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2s_{11}^E(1+\nu)} \varepsilon_{xy}.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Після підстановки виразів (7.9) у рівняння руху (7.6) та заміни деформацій на похідні від переміщень отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \\ &= 2\rho s_{11}^E(1+\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \\ &= 2\rho s_{11}^E(1+\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Системі рівнянь (7.10) можна поставити у відповідність одне векторне рівняння, якщо скористатись тим, що

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{u}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = (\operatorname{rot} \vec{u})_z.$$

Операції дивергенції та вихору визначаються за компонентами вектора переміщень лише в площині xOy . Помножуючи перше рівняння системи (7.10)

на орт \vec{i} осі Ox , а друге – на орт \vec{j} осі Oy та складаючи обидва рівняння, отримуємо

$$\frac{2}{1-\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} d_{31} \text{grad } E_z = 2\rho s_{11}^E (1+\nu) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (7.11)$$

У випадку суцільних електродів, що покривають плоскі бічні грані пластини $z = \pm h$, напруженість E_z визначається за формулою (7.2) як функція часу, що не залежить від координат, тому $\text{grad } E_z \equiv 0$. Однак, якщо в електродних покриттях пластини є діелектричні проміжки (розрізи електродів), то цю складову слід зберегти в рівнянні (7.11).

7.2. Механічні граничні умови на контурній поверхні пластини

Нагадаємо, що граничні умови для рівняння коливань (7.11) формулюються на контурній криволінійній поверхні S пластини для компонентів вектора зовнішніх механічних напружень

$$\vec{F}_n = \vec{n}\sigma_n + \vec{s}\tau_{ns} = \vec{i}F_{nx} + \vec{j}F_{ny}.$$

Коли коливання збуджуються лише електричним полем, $\vec{F}_n|_S = 0$. Щоб вивести граничні умови для переміщень за заданими напруженнями на контурі пластини, необхідно скористатися формулами зв'язку між напруженнями на похилій площадці, побудованій за вектором нормалі \vec{n} до поверхні S та на головних площадках, паралельних координатним площинам xOz і yOz :

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x \cos(n, \hat{x}) + \tau_{xy} \cos(n, \hat{y}) = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ F_{ny} &= \tau_{yx} \cos(n, \hat{x}) + \sigma_y \cos(n, \hat{y}) = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y, \\ \vec{n} &= \vec{i} \cos(n, \hat{x}) + \vec{j} \cos(n, \hat{y}) = \vec{i} n_x + \vec{j} n_y. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Виконаємо перетворення формул, підставляючи у них відповідні напруження з (7.9). Для компонент F_{nx} та F_{ny} знаходимо

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left\{ n_x \left[\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right] + \frac{1}{2} n_y \varepsilon_{xy} \right\}, \\ F_{ny} &= \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left\{ n_y \left[\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_y - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right] + \frac{1}{2} n_x \varepsilon_{xy} \right\}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Перетворимо рівності (7.13) до векторного вигляду таким самим чи-

ном, як і рівняння руху (7.11). Маємо

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_n &= \vec{i} F_{nx} + \vec{j} F_{ny} = \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left\{ (\vec{i} n_x + \vec{j} n_y) \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{i} n_x \varepsilon_x + \right. \\
 &\quad \left. + \vec{j} n_y \varepsilon_y - (\vec{i} n_x + \vec{j} n_y) d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z + \frac{1}{2} \vec{i} n_y \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \vec{j} n_x \varepsilon_{xy} \right\} = \\
 &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left\{ \vec{n} \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + (\vec{n} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} - \vec{i} n_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \vec{j} n_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \vec{i} n_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \vec{j} n_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \vec{n} d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right\} = \\
 &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left\{ \vec{n} \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + (\vec{n} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}) - \right. \\
 &\quad \left. - \vec{n} d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right\}. \tag{7.14}
 \end{aligned}$$

З векторної рівності (7.14) випливає, що навіть за відсутності зовнішніх механічних навантажень на контурі пластини S

$$\vec{F}_n|_S = 0$$

уже за рахунок електричного поля $E_z(t)$ будуть виникати рівномірно розподілені за товщиною нормальні напруження інтенсивністю $d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z$, які не дозволяють розглядати щойно записану граничну рівність як тотожність. Інакше кажучи, збудження коливань пластини електричним полем буде еквівалентним прикладенню нормальних напружень на її контурі, інтенсивність яких пропорційна величині напруженості електричного поля.

7.3. Електричні граничні умови для електродованої пластини

Із загального формулювання електричних граничних умов на електродованій поверхні тіла (див. лекцію 3) виділимо два типові випадки їх постановки, що не протирічать умовам планарної деформації пластини.

За наявності електродних покриттів на плоских гранях пластини $z = \pm h$ будемо розглядати режим збудження коливань генератором напруг з вихідною різницею потенціалів $2V_0(t)$ та режим "холостого ходу" у випадку розімкнених електродів. Відповідні до цих режимів умови записуються у вигляді:

- збудження коливань генератором напруг

$$\Psi \Big|_{z=\pm h} = \pm V_0(t), \quad (7.15)$$

- коливання при розімкнених електродах

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z ds = 0, \quad (7.16)$$

де S_1^+ – площа електродного покриття при $z = h$.

Обидва типи граничних умов для електричних змінних на лицевих електродованих гранях пластини $z = \pm h$ слід доповнити умовою на торцевій контурній поверхні S :

$$D_n \Big|_s = 0. \quad (7.17)$$

При розв'язанні конкретних задач корисними є деякі формули для розрахунку розподілів електричних полів як усередині п'єзопластини, так і в зовнішньому електричному колі. До таких характеристик належить струм у колі генератора напруг, пов'язаний з компонентою індукції D_z співвідношенням

$$I(t) = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z ds. \quad (7.18)$$

Для компоненти D_z з останнього рівняння (7.3) шляхом перетворень, описаних при виведенні рівнянь руху, отримуємо

$$D_z = -\epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{V_0(t)}{h} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \operatorname{div} \vec{u}. \quad (7.19)$$

Введена щойно безвимірною величина

$$k_p^2 = \frac{2}{1 - \nu} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (7.20)$$

називається планарним КЕМЗ і служить для визначення ефективності перетворення енергії на планарній деформації.

Як відомо із загальної теорії, потребує уточнення задання електричних граничних умов (7.16) у випадку коливань тіла з розімкненими електродами. Ураховуючи, що й у цьому випадку величина E_z не залежить від координат x, y серединної площини пластини, з інтегральної рівності (7.16) та виразу для D_z (7.18) знаходимо

$$E_z = -\frac{1}{2} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{S_1^+} \operatorname{div} \vec{u} ds. \quad (7.21)$$

Тоді, згідно з (7.8), для шуканої різниці потенціалів маємо

$$\Psi^+ - \Psi^- = \frac{h}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{S_1^+} \operatorname{div} \vec{u} ds. \quad (7.22)$$

На основі цієї рівності слід провести уточнення рівняння коливань і механічних граничних умов на контурі пластини. Можна показати, що і в даному випадку коливань з розімкненими електродами рівняння коливань не утримуватиме складової з $\text{grad } E_z$, проте гранична умова для механічних напружень на контурі S набуде незвичного вигляду: вектор напружень \vec{F}_n тепер утримуватиме інтегральну складову від $\text{div } \vec{u}$:

$$\vec{F}_n = \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left\{ \vec{n} \frac{\nu}{1-\nu} \text{div } \vec{u} + (\vec{n} \cdot \text{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot } \vec{u}) + \right. \\ \left. + \vec{n} \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{S_1^+} \text{div } \vec{u} ds \right\}. \quad (7.23)$$

Слід зазначити, що наявність цієї інтегральної складової не ускладнює суттєво процес побудови розв'язку векторного рівняння (7.11).

Лекція 8. Планарні коливання тонких п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією (продовження)

8.1. Постановка граничної задачі за відсутності електродних покриттів

Зміну типу електричних граничних умов на плоских бічних поверхнях пластини $z = \pm h$ – рівність нулю компонентів вектора магнітної індукції D при переході з п'єзокераміки в зовнішнє середовище

$$D_z|_{z=\pm h} = 0 \quad (8.1)$$

слід ураховувати вже під час запису рівнянь п'єзоефекту. Так, стосовно четвертого рівняння із системи (7.3) будемо вимагати, щоб у всіх внутрішніх точках

$$D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{31}(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (8.2)$$

звідки

$$E_z = -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (8.3)$$

Тоді перші два рівняння із системи (7.3) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Складаючи ці рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= (s_{11}^E + s_{12}^E)(\sigma_x + \sigma_y) - 2 \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T}(\sigma_x + \sigma_y) = \\ &= s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2) (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Отже, подаючи суму напружень $\sigma_x + \sigma_y$ у вигляді

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2)} \operatorname{div} \vec{u}, \quad (8.5)$$

перепишемо (8.4) таким чином:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T} \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu) (1-k_p^2)} \operatorname{div} \vec{u}, \\ \varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T} \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu) (1-k_p^2)} \operatorname{div} \vec{u},\end{aligned}\quad (8.6)$$

звідки

$$\begin{aligned}s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y &= \varepsilon_x + \frac{1}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \operatorname{div} \vec{u}, \\ s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y &= \varepsilon_y + \frac{1}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \operatorname{div} \vec{u}.\end{aligned}\quad (8.7)$$

Очевидно, що значення напружень σ_x та σ_y знаходяться з рівнянь (8.7) алгебраїчним шляхом. Розв'язуючи ці рівняння за формулами Крамера, після досить простих перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \operatorname{div} \vec{u} \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[(\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \operatorname{div} \vec{u} \right].\end{aligned}\quad (8.8)$$

Для дотичних напружень справедливою залишається формула

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2s_{11}^E (1+\nu)} \varepsilon_{xy}.\quad (8.9)$$

При виведенні рівнянь коливань неелектродованої пластинки доцільно щойно отримані вирази для нормальних напружень (8.8) переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[\left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} - (1-\nu) \varepsilon_y \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left[\left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} - (1-\nu) \varepsilon_x \right].\end{aligned}\quad (8.10)$$

Використовуючи формули (8.9), (8.10) та (7.6), послідовно перетворюємо перше рівняння:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \\ &= \frac{1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2s_{11}^E(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (8.11)$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-\nu} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{u} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 2\rho s_{11}^E(1+\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Аналогічно перетворюється й друге рівняння руху. Векторне рівняння руху набуде вигляду

$$\frac{2}{1-\nu} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = 2\rho s_{11}^E(1+\nu) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (8.13)$$

При виведенні виразу для головного вектора зовнішніх сил на контурній поверхні пластини, що використовується для постановки векторних граничних умов, доцільно скористатися такими виразами для нормальних напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} + \varepsilon_x \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} + \varepsilon_y \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Побудовані за цими формулами компоненти головного вектора зовнішніх поверхневих сил у проєкціях на декартові осі будуть такими:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \\ &= \frac{n_x}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} + \varepsilon_x \right] + \frac{n_y}{2s_{11}^E(1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \\ F_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \\ &= \frac{n_y}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} \left(\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} + \varepsilon_y \right] + \frac{n_x}{2s_{11}^E(1+\nu)} \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Нарешті, у векторному вигляді отримуємо одне рівняння:

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left\{ \frac{\vec{n}}{1-\nu} \left(\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \operatorname{div} \vec{u} + \right. \\ & \left. + (\vec{n} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}) \right\}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

8.2. Оцінка компонентів товщинної деформації пластини, які наближено вважалися нульовими

Введемо оцінку малості величин, для яких були сформульовані гіпотези (7.1)–(7.2) або (7.4)–(7.5). Як уже зазначалося, деформація пластини за товщиною ε_z має обраховуватись за розв'язком задачі для нормальних напружень. Нехай такий розв'язок для σ_x та σ_y установлено. Тоді

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} E_z = \\
 &= \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1 - \nu)^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x + \varepsilon_y - 2 d_{31} (1 + \nu) E_z] + d_{33} E_z = \\
 &= \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1 - \nu)^2} [(1 + \nu) \operatorname{div} \vec{u} - 2 d_{31} (1 + \nu) E_z] + d_{33} E_z = \\
 &= \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1 - \nu)} [\operatorname{div} \vec{u} - 2 d_{31} E_z] + d_{33} E_z = \\
 &= -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u} + \left(d_{33} + 2 d_{31} \frac{1}{1 + \nu} \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \right) E_z. \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

Оскільки деформація розтягу-стиску за товщиною пластини зв'язана з нормальним переміщенням за формулою $\varepsilon_z = \partial u_z / \partial z$, то інтегруванням по z з точністю до довільної сталої отримуємо

$$u_z = -z \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u} + z \left(d_{33} + 2 d_{31} \frac{1}{1 + \nu} \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \right) E_z. \quad (8.18)$$

Згідно з цією формулою, покладаючи $z = \pm h$, можна встановити рельєф деформованої поверхні пластини, якщо плоска об'ємна деформація $\operatorname{div} \vec{u}$ відома.

Перевірку правильності вихідних гіпотез можна провести, використовуючи формулу (8.18) та співвідношення Коші (3.4). Так, для зсувних деформацій, що характеризують викривлення нормалі до плоскої бічної поверхні пластини, маємо

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} z \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{u}), \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} z \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{u}). \quad (8.19)
 \end{aligned}$$

Лекція 9. Радіальні коливання тонкого п'єзокерамічного диска з товщинною поляризацією

Найпростішим прикладом реалізації загальних рівнянь теорії планарних коливань п'єзокерамічних пластин може служити задача про радіальні коливання п'єзокерамічного диска у змінному за часом електричному полі.

Збудження коливань п'єзокерамічного диска, що має радіус a , товщину $2h$ та попередню товщинну поляризацію, здійснюється за допомогою гармонічної різниці електричних потенціалів із круговою частотою ω , яка подається від генератора коливань до плоских електродованих поверхонь $z = \pm h$ (рис. 9.1).

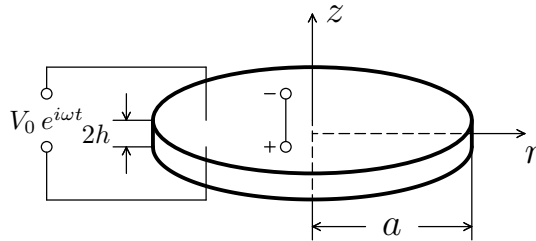


Рис. 9.1. Круговий п'єзокерамічний диск із товщинною поляризацією

При постановці задачі обмежимося лише тим випадком, коли поверхневі електроди $z = \pm h$ є суцільними. Ця умова спрощує векторне рівняння руху (7.11) так, що воно не містить складової $\text{grad } E_z$, оскільки напруженість поля E_z для суцільних електродів не залежить від координат $\text{grad } E_z \equiv 0$ (див. лекцію 7).

Поряд з умовою відсутності механічних навантажень на плоских бічних поверхнях, яка є необхідною для здійснення плоского електропружного стану, будемо вимагати, щоб і торцева поверхня диска $r = a$ була вільною і від нормальних, і від дотичних напружень. Очевидно, що сформульована таким чином гранична задача буде цілком вісесиметричною, інакше кажучи, переміщення серединної поверхні залежатимуть лише від радіальної координати r , більше того, будуть чисто радіальними. За таких умов векторне рівняння руху перетворюється на одновимірне скалярне рівняння – рівняння Бесселя, що значно полегшує знаходження його загального розв'язку та підпорядкування цього розв'язку граничним умовам.

У процесі пошуку розв'язку для механічних та електричних характеристик коливань диска буде отримане трансцендентне рівняння у функціях Бесселя – резонансне рівняння. Корені цього рівняння повністю визначають спектр резонансних частот коливань диска. Відповідні до цих частот нормальні моди коливань легко піддаються візуалізації. У випадку стаціонарних коливань можна спостерігати за вузловими лініями нормальних мод: на поверхні $z = h$ можна бачити концентричні кола – нерухомі лінії вузлів коливання.

Далі ми введемо формальне визначення явища антирезонансу та знайдемо антирезонансні частоти коливань диска: на цих частотах струм зміщення в зовнішньому колі обертається в нуль (але коливальний процес не припиняється). Точний розрахунок резонансних та антирезонансних частот дозволяє оцінити ефективність перетворення енергії за динамічними КЕМЗ (формула Мезона).

9.1. Рівняння коливань і граничні умови

За відсутності механічних навантажень на торці диска $r = a$ для вектора пружних переміщень серединної поверхні диска покладаємо

$$\vec{u} = \vec{i}u_x + \vec{j}u_y = \vec{e}_r u_r(r, t). \quad (9.1)$$

Звернемося до векторного рівняння руху (7.11) та спроєкуємо його на осі полярної системи координат. Для цього слід, у першу чергу, виразити операції градієнта, дивергенції та ротора в полярній системі (r, ϑ) . При цьому тривимірні загальні формули, відомі з курсу диференціального та інтегрального числення векторних полів

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \operatorname{rot} \vec{u} &= \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ &\quad + \vec{k} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right), \\ \operatorname{grad} \Phi &= \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}$$

згідно із зображенням (9.1) значно спрощуються:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{u} \equiv 0, \quad \operatorname{grad} (\cdot) = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (\cdot). \quad (9.2)$$

Рівняння радіальних коливань п'єзодиска набуває вигляду

$$\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 2 \rho s_{11}^E (1+\nu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (9.3)$$

Вирази для вектора напружень на торці диска – на площадках, перпендикулярних радіусу (у цьому випадку $\vec{n} = \vec{e}_r$) та круговій координаті ($\vec{n} = \vec{e}_\vartheta$) отримаємо, якщо переписемо формули (7.13) у вигляді

$$\begin{aligned} F_{nr} = \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_r}{\partial r} - d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_z \right], \\ F_{n\vartheta} = \sigma_\vartheta &= \frac{1}{s_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{u_r}{r} - d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_z \right]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

За рахунок того, що $\operatorname{rot} \vec{u} \equiv 0$, дотичні напруження $\tau_{r\vartheta} = 0$.

Для задачі збудження коливань диска генератором електричних напруг електричні граничні умови формулюються у вигляді

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (9.5)$$

Згідно з (7.8) для напруженості електричного поля отримуємо вираз

$$E_z = -\frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (9.6)$$

Умова відсутності зовнішніх механічних навантажень на контурі диска $r = a$ записується як

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 \quad (9.7)$$

і на основі першої формули (9.4) перетворюється до граничної рівності

$$\left(\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a} = -d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (9.8)$$

9.2. Побудова загального розв'язку

З граничної умови (9.8) випливає, що шукані переміщення u_r (а значить, і напруження σ_r , σ_ϑ) також будуть гармонічними функціями частоти ω , тобто розв'язок для u_r будемо шукати у вигляді

$$u_r(r, t) = \hat{u}_r(r) e^{i\omega t}. \quad (9.9)$$

Підстановка (9.9) у рівняння коливань (9.3) приводить до рівняння для амплітудної функції переміщень

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\hat{u}_r}{dr} + \frac{\hat{u}_r}{r} \right) = -\rho s_{11}^E (1 - \nu^2) \omega^2 \hat{u}_r \quad (9.10)$$

або, у перетвореному вигляді, до

$$\frac{d^2 \hat{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_r}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \varkappa^2 \right) \hat{u}_r = 0, \quad \varkappa = \frac{\omega}{c}, \quad (9.11)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}} \quad (9.12)$$

– швидкість поширення поздовжніх хвиль у пластині. Якщо в рівнянні (9.11) ввести заміну в аргументі шуканої функції, покладаючи $z = \alpha r$, то його можна подати у вигляді

$$z^2 \frac{d^2 \hat{u}_r}{dz^2} + z \frac{d\hat{u}_r}{dz} + (z^2 - 1) \hat{u}_r = 0. \quad (9.13)$$

Таке просте, на перший погляд, лінійне рівняння у звичайних похідних другого порядку зі змінними коефіцієнтами не має простого розв'язку в елементарних функціях. Його розв'язок зображується степеневим рядом

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (9.14)$$

відомим з літератури як функція Бесселя першого роду і, у нашому випадку, першого порядку. Таким чином, загальний розв'язок для переміщень має вигляд

$$\hat{u}_r(\alpha r) = A J_1(\alpha r). \quad (9.15)$$

Для того, щоб виписати формули загального розв'язку в напруженнях, слід скористатися формулою для дивергенції (9.2) та відомими рекурентними співвідношеннями для функцій Бесселя:

$$\frac{2\nu}{z} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}, \quad 2 \frac{dJ_\nu}{dz} = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}. \quad (9.16)$$

Послідовно знаходимо

$$\operatorname{div} \hat{u} = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} + \frac{\hat{u}_r}{r} = \alpha \left(\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} + \frac{\hat{u}_r}{z} \right) = \alpha A \left(\frac{dJ_1}{dz} + \frac{J_1}{z} \right) = \alpha A J_0. \quad (9.17)$$

Тоді амплітудні значення напружень відповідно до виразів (9.4) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_r &= \frac{\alpha A}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left(J_0(\alpha r) - (1-\nu) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} \frac{V_0}{h}, \\ \hat{\sigma}_\vartheta &= \frac{\alpha A}{s_{11}^E (1-\nu^2)} \left(\nu J_0(\alpha r) + (1-\nu) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu)} \frac{V_0}{h}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Єдина стала інтегрування A в розв'язку (9.15) знаходиться з граничної умови (9.8) на торці диска $r = a$. З урахуванням першої рівності (9.18) отримуємо

$$\alpha A = - \frac{d_{31} (1+\nu) (\alpha a)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1-\nu) J_1(\alpha a)} \cdot \frac{V_0}{h}, \quad (9.19)$$

тим самим повністю визначаючи всі характеристики спряженого електропружного поля пластини. Зокрема, для амплітудної функції радіальних переміщень знаходимо

$$\frac{\hat{u}_r}{a} = - \frac{d_{31} (1+\nu) J_1(\alpha r)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1-\nu) J_1(\alpha a)} \cdot \frac{V_0}{h}. \quad (9.20)$$

9.3. Резонансні властивості дискового перетворювача

З формул (9.19), (9.20) видно, що резонансні стани п'єзокерамічного диска здійснюються тоді, коли знаменник у виразах обертається в нуль. Тобто резонансні частоти коливань диска визначаються коренями трансцендентного рівняння

$$(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a) = 0. \quad (9.21)$$

Значення кількох перших коренів цього рівняння при $\nu = 0.33$ (кераміка PZT-4) будуть такими:

$$(\alpha a)_R^{(1)} = 2.07, (\alpha a)_R^{(2)} = 5.40, (\alpha a)_R^{(3)} = 8.58, (\alpha a)_R^{(4)} = 11.73. \quad (9.22)$$

При цьому резонансні частоти коливань розраховуються за формулою

$$\omega_R^{(k)} = \frac{1}{a} \frac{(\alpha a)_R^{(k)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}. \quad (9.23)$$

Форми коливань пластини поблизу резонансних частот установлюються із залежності амплітуди радіальних переміщень \hat{u}_r від координати r (9.20). Стисло проаналізуємо випадки перших чотирьох резонансів (9.22).

На першому основному резонансі ($(\alpha a)_R^{(1)} = 2.07$) функція Бесселя $J_1(2.07 \frac{r}{a})$ на проміжку $0 \leq r \leq a$ не обертається в нуль у жодній точці. Отже вузлові кола, у яких переміщення дорівнювали б нулю, відсутні (рис. 9.2, а).

На другому резонансі ($(\alpha a)_R^{(2)} = 5.40$) існує одне коло вузлів коливання, розташоване на віддалі $r = 0.71a$ від центра диска (рис. 9.2, б).

На третьому резонансі ($(\alpha a)_R^{(3)} = 8.58$) матимемо два вузлових кола відповідно при $r = 0.45a$ та $r = 0.82a$ (рис. 9.2, с).

На четвертому резонансі ($(\alpha a)_R^{(4)} = 11.73$) будемо мати три вузлових кола при значеннях радіуса $r = 0.34a$, $r = 0.62a$ та $r = 0.89a$ (рис. 9.2, д).

9.4. Антирезонансні частоти коливань диска та ефективність енергоперетворення

Визначимо амплітуду компоненти вектора електричної індукції D_z , що характеризує розподіл густини зарядів на границі розділення кераміки та електродного покриття:

$$\hat{D}_z = -\epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \times \left[1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{(\alpha a) J_0(\alpha r)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] \frac{V_0}{h}. \quad (9.24)$$

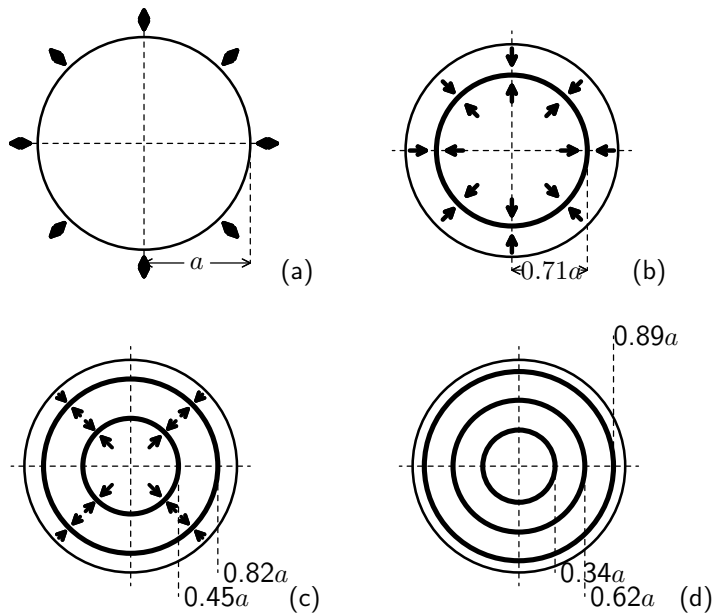


Рис. 9.2. Нормальні моди планарних коливань диска

Після цього легко визначити амплітуду струму зміщення, що протікає через п'єзокерамічну пластину: він дорівнює струму провідності в колі генератора коливань. Виконуючи інтегрування по площі електрода S_1^+ (ця площа збігається з площею круга радіусом a), отримуємо

$$\hat{I} = i\omega C_0 \left[1 + (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{J_1(\alpha a)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] 2V_0, \quad (9.25)$$

де $C_0 = \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi a^2 / 2h$ – електрична ємність п'єзокерамічної пластини при нульових деформаціях.

Із щойно записаних формул видно, що при наближенні до резонансних частот необмежено зростають не тільки механічні, але й електричні характеристики спряженого поля, зокрема – струм зміщення (9.25).

Важливим є випадок, коли \hat{I} обертається в нуль. Частоти коливань, для яких це справджується, отримали назву антирезонансних. Вони визна-

чаються з такого трансцендентного рівняння:

$$(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) \left(1 - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) J_1(\alpha a) = 0. \quad (9.26)$$

Для п'єзокерамічного (PZT-4) диска перші чотири антирезонансних частоти приймають значення

$$(\alpha a)_A^{(1)} = 2.39, (\alpha a)_A^{(2)} = 5.51, (\alpha a)_A^{(3)} = 8.65, (\alpha a)_A^{(4)} = 11.79. \quad (9.27)$$

Дані про резонансні та антирезонансні частоти коливань дозволяють оцінити ефективність перетворення енергії при збудженні нормальних мод коливань диска. За формулою Мезона, що пов'язує динамічний ефективний коефіцієнт електромеханічного зв'язку зі значеннями цих частот:

$$k_d^2 = \frac{\omega_A^2 - \omega_R^2}{\omega_A^2}. \quad (9.28)$$

Значення цього коефіцієнта на перших чотирьох формах коливань диска будуть такими:

$$k_{d,1}^2 = 0.25, \quad k_{d,2}^2 = 0.04, \quad k_{d,3}^2 = 0.02, \quad k_{d,4}^2 = 0.01. \quad (9.29)$$

Видно, що на вищих нормальних модах коливань диска, для яких характерна наявність вузлових кіл, характеристика ефективності збудження коливань є значно меншою, ніж на основному резонансі. Фізичне пояснення цьому факту можна легко дати, якщо звернути увагу на те, що на вищих модах коливань частинки диска в межах центрального кола та концентричних кілець, утворених колами вузлів, рухаються назустріч одна одній. Виникає зміна знаку \dot{y} у характеристиці об'ємної деформації $\text{div } \vec{u}$. Це, у свою чергу, приводить до виникнення поляризаційних зарядів різних знаків під поверхнею електрода. Тому на електроді сумарний вільний заряд зменшується, що й приводить до зменшення ефективності збудження коливань. Крім того, під ділянками поверхні, де поляризаційні заряди мають знак, протилежний знаку сумарного заряду, електромеханічна взаємодія полів перешкоджає розвитку коливального процесу.

9.5. Планарні коливання тонкої п'єзокерамічної пластини у вигляді кільця

Розглянемо коливання тонкого п'єзокерамічного кільця $a \leq r \leq b$ з товщиною поляризацією під дією підведеного до поверхневих електродів гармонічного електричного навантаження. Для такої задачі, як і для задачі про радіальні коливання п'єзодиска, справедливими будуть формули (9.1)–(9.14) за виключенням граничних умов (9.7), (9.8), які слід замінити

умовами відсутності механічних навантажень на внутрішній $r = a$ та зовнішній $r = b$ бічних поверхнях кільця, які в амплітудних значеннях радіальних переміщень мають вигляд:

$$\left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{d\hat{u}_r}{dr} + \frac{\hat{u}_r}{r} \right) + \frac{d\hat{u}_r}{dr} + d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{V_0}{h} \right]_{r=a,b} = 0. \quad (9.30)$$

Загальний розв'язок рівняння (9.11) для кільцевої області буде мати вигляд:

$$\hat{u}_r = AJ_1(\kappa r) + BY_1(\kappa r). \quad (9.31)$$

Підставивши розв'язок (9.31) у (9.30), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення констант A і B :

$$\begin{cases} \Delta_j(\kappa a)A + \Delta_y(\kappa a)B = -d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}a \\ \Delta_j(\kappa b)A + \Delta_y(\kappa b)B = -d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}b \end{cases}, \quad (9.32)$$

де $\Delta_j(z) = zJ_0(z) - (1-\nu)J_1(z)$; $\Delta_y(z) = zY_0(z) - (1-\nu)Y_1(z)$.

Розв'язавши систему (9.32), отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{a\Delta_y(\kappa b) - b\Delta_y(\kappa a)}{\Delta} d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}, \\ B &= -\frac{b\Delta_j(\kappa a) - a\Delta_j(\kappa b)}{\Delta} d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

$$\Delta = \Delta_j(\kappa a)\Delta_y(\kappa b) - \Delta_j(\kappa b)\Delta_y(\kappa a). \quad (9.34)$$

Прирівнявши визначник (9.34) до нуля, отримаємо рівняння резонансу для кільця.

Рівняння антирезонансу отримаємо з умови

$$\hat{I} = -\frac{d}{dt} = \iint_{(S)} \hat{D}_z dS = 0. \quad (9.35)$$

Амплітуда товщинної компоненти електричної індукції згідно із (7.3), (9.4) має вигляд:

$$\hat{D}_z = -\varepsilon_{33}^T \frac{V_0}{h} (1 - k_p^2) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1}{1-\nu} (\kappa AJ_0(\kappa r) + \kappa BY_0(\kappa r)). \quad (9.36)$$

Провівши інтегрування у (9.35), отримаємо рівняння антирезонансу:

$$\begin{aligned} \Delta + (1+\nu) \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{b^2-a^2} [b(AJ_1(\kappa b) + BY_1(\kappa b)) - \\ - a(AJ_1(\kappa a) + BY_1(\kappa a))] = 0. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Чисельно розв'язавши рівняння резонансу й антирезонансу, отримаємо значення резонансних та антирезонансних частот. За наближеною формулою Мезона отримаємо значення КЕМЗ на першій резонансній частоті для кільця розмірами $a = 349$ мм та $b = 499$ мм із матеріалу PZT-4:

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2} = 0,22k_p^2. \quad (9.38)$$

Лекція 10. Згинні коливання одношарових пластин

Теорія згину тонкостінних п'єзокерамічних елементів посідає центральне місце у прикладній електропружності. Це обумовлене тим, що на згинних коливаннях тонких оболонок і пластин забезпечується електромеханічне перетворення енергії в низькочастотній області спектра. Разом з тим, практично неможливо уникнути деформації згину в тонкостінних п'єзоелементах, призначених для роботи на інших типах деформації, наприклад, на розглянутій вище планарній деформації. Причиною цього є відхилення реальних елементів від ідеальної геометричної форми, а також неоднорідність матеріалу за пружними та п'єзоелектричними властивостями. Деформація згину також може бути обумовлена незначною асиметрією прикладання навантаження відносно серединної площини пластини.

10.1. Основні гіпотези й означення деформації згину тонких пластин

Нехай тонка пластина, виготовлена з п'єзокерамічного матеріалу, згинається під дією поперечного навантаження за визначених умов закріплення на контурі (рис. 10.1). Припускається, що пластина попередньо поляризована по товщині. При виведенні рівнянь коливань будемо припускати наявність електродних покриттів на плоских лицевих гранях пластини $z = \pm h/2$ і відсутність електродного покриття на контурній поверхні пластини S .

Відмітимо, що вибір осі Oz декартових координат (див. рис. 10.1), позначення для величин, що характеризують механічні змінні задачі, а також правила вибору їх додатної направленості в подальшому викладенні приймаються відповідними до відомого курсу С.П. Тимошенка [19]. Це позбавляє нас від необхідності детально викладати основи кірхгофівської теорії згину тонкого плоского елемента в тій частині, яка стосується введення інтегральних характеристик напруженого стану – зусиль і моментів, а також запису рівнянь рівноваги (руху) через ці характеристики. Основи кірхгофівської теорії ми обговорювали під час розв'язання задач про чистий згин призматичного елемента в лекції 3. Там само сформульовані гіпотези стосовно поведінки електричних змінних спряженого поля для різних типів поляризації тонкостінних елементів, що адекватно доповнюють гіпотези Кірхгофа для механічних змінних.

Для елементів з товщиною поляризацією відповідно до узагальнених

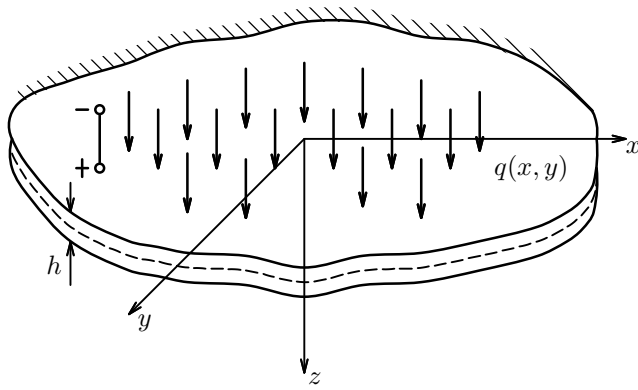


Рис. 10.1. Деформація згину п'єопластики

гіпотез Кірхгофа покладаємо

$$\begin{aligned} \sigma_z \simeq 0, \quad \tau_{zx} \simeq 0, \quad \tau_{zy} \simeq 0, \\ E_x \simeq 0, \quad E_y \simeq 0, \quad D_x \simeq 0, \quad D_y \simeq 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

У результаті рівняння п'єзоэффекту (2.2) спрощуються й набувають вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_z &= s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} E_z, \\ \varepsilon_{xy} &= 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \tau_{xy}, \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Виділення основних змінних у співвідношеннях (10.2) ґрунтується на використанні кінематичної гіпотези Кірхгофа, що встановлює зв'язок між взаємно перпендикулярними планарними компонентами вектора переміщень і поперечними переміщеннями точок серединної площини пластини $u_z(x, y, 0) = w(x, y)$, тобто її прогином

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (10.3)$$

а також залежність компоненти вектора напруженості електричного поля від товщинної координати z :

$$E_z = z E_1. \quad (10.4)$$

Формули (10.3) та (10.4) установлюють наближені рівності для загального випадку згину п'єопластин і збігаються з точними співвідношеннями (3.20)

та (3.21) у задачі чистого згину призматичного елемента з поперечною поляризацією.

За формулами для переміщень (10.3) і співвідношеннями Коші (2.6) знаходимо значення деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \varepsilon_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_{xz} &\simeq 0, & \varepsilon_{yz} &\simeq 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Деформація ε_z не може бути прийнята рівною нулю, оскільки це протиріччю б третій рівності (10.2). Саме ця рівність у першому наближенні визначає товщинну деформацію ε_z і переміщення в напрямку осі Oz , що розраховуються за цією деформацією.

Проаналізуємо останню рівність у рівняннях п'єзоефекту (10.2). Під час аналізу розв'язків задач чистого згину призматичних стрижнів (див. лекцію 3) було встановлено, що, незалежно від наявності чи відсутності електродних покриттів, компонента вектора електричної індукції D_z у напрямку товщинної координати z не залежить від цієї координати. Оскільки в праву частину рівності для D_z у (10.2) входять складові, лінійно залежні від величини z , то необхідно покласти $D_z = 0$. Виконання цієї умови приводить до рівності

$$E_z = -\frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (10.6)$$

Рівність (10.5) дозволяє виключити величину E_z зі співвідношень п'єзоефекту (10.2). У результаті ці співвідношення перетворюються таким чином, що не містять у явному вигляді електричних змінних задачі. Розв'язуючи їх відносно напружень як алгебраїчні рівняння, для основних механічних змінних, що входять у співвідношення Кірхгофівської теорії, знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) (\varepsilon_x + \bar{\nu} \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) (\bar{\nu} \varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2s_{11}^E (1 - \nu^2)} \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

де

$$\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \quad k_p^2 = \frac{1}{(1 - \nu)} \frac{2d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}{1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}. \quad (10.8)$$

Тут $\bar{\nu}$ – зведений коефіцієнт Пуассона в площині ізотропії xOy , k_p^2 – статичний планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Товщинна деформація ε_z виражається через основні в теорії пластин компоненти деформації ε_x та ε_y таким чином:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{1-\nu} \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E} \frac{1-k_s^2}{1-k_p^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad k_s^2 = \frac{d_{31}d_{33}}{s_{13}^E \epsilon_{33}^T}. \quad (10.9)$$

Перетворимо рівності (10.7) з урахуванням виразів для деформацій (10.5). У результаті знаходимо вирази для напружень через функцію прогину:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \cdot z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \cdot z \left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)} \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Аналогічно записується вираз для поперечної компоненти напруженості електричного поля (10.6) і товщинної деформації (10.9):

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \cdot z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \cdot z \nabla^2 w, \\ \varepsilon_z &= -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)} \frac{1-k_s^2}{1-k_p^2} \cdot z \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Маючи функцію прогину середньої поверхні пластини w , за наведеними вище формулами можна визначити всі змінні спряженого електропружного поля, які відповідно до гіпотез Кірхгофа та адекватних гіпотез електропружності відмінні від нуля.

10.2. Сили й моменти. Рівняння в прогинах і граничні умови

Виведення рівняння для функції прогину w при статичному згині ґрунтується на використанні рівнянь рівноваги нескінченно малого елемента пластини. У кірхгофівській теорії згину пластин, на відміну від тривимірної теорії пружності, під нескінченно малим елементом розуміють елемент пластини, виділений близькими перерізами в напрямку осей Ox та Oy ($x, x+dx$ та $y, y+dy$). Однак цей елемент має скінченну товщину h у напрямку

осі Oz . Зрозуміло, що при такому виборі елемента в рівняння рівноваги мають входити не напруження в поперечних перерізах (10.10), а їх інтегральні характеристики за товщиною елемента. Ці характеристики називаються моментами згину й кручення. Вони знаходяться за формулами [19]

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \\ M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Унаслідок рівності $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, що виражає умову парності дотичних напружень, з (10.12) випливає, що $M_{yx} = -M_{xy}$.

Після підстановки у формули (10.12) значень для напружень (10.10) та інтегрування знаходимо

$$\begin{aligned} M_x &= -\bar{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\bar{D} \left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= \frac{h^3}{12s_{11}^E(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & M_{yx} &= -M_{xy}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Тут через \bar{D} позначено жорсткість при циліндричному згині п'єзокерамічної пластини:

$$\bar{D} = \frac{h^3}{12s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right). \quad (10.14)$$

Відмітимо, що у виразі для циліндричної жорсткості \bar{D} , як і у виразі для зведеного коефіцієнта Пуассона $\bar{\nu}$ з (10.8), міститься складова з величиною КЕМЗ k_p^2 , за якою враховується ефект зв'язаності полів.

Як відомо зі статки абсолютно твердого тіла, рівняння рівноваги зводяться до вимоги рівності нулю головного вектора й головного моменту сил, прикладених до тіла. У даному випадку це означає, що для елемента пластини, який у загальному випадку знаходиться також під дією деякого розподіленого поперечного навантаження $q(x, y)$, необхідно разом з моментами (10.13) ввести до розгляду перерізуювальні сили в перерізах. На цьому етапі виявляються деякі труднощі кірхгофівської теорії. Суть їх полягає в тому, що згідно з вихідними припущеннями (10.1) дотичні напруження в перерізах $x = \text{const}$ і $y = \text{const}$ у напрямку осі Oz приймаються рівними нулю, а їх інтегральні характеристики, як указано вище, мають бути відмінними

від нуля. Згідно з [19], перерізувальні сили вводимо за формулами

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (10.15)$$

Рівняння рівноваги елемента, зображеного на рис. 10.2, мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Ще три рівняння рівноваги елемента – рівність нулю проекцій головного вектора на осі Ox та Oy і головного момента на вісь Oz – виконуються тотожно. Виключаючи Q_x та Q_y у першому рівнянні за допомогою двох інших, отримуємо рівняння рівноваги у моментах

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (10.17)$$

Використовуючи вирази (10.13), приходимо до такого рівняння рівноваги для функції прогину серединної поверхні пластини:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}. \quad (10.18)$$

При цьому друге й третє рівняння (10.16) разом зі співвідношеннями (10.13) дозволяють виразити перерізувальні сили через прогин w :

$$Q_x = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad Q_y = -\bar{D} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \quad (10.19)$$

Отримане рівняння статичного згину пластини легко узагальнюється на випадок поперечних (згинних) коливань. Для цього достатньо скористатися принципом Даламбера й у праву частину рівняння (10.18), крім зовнішнього навантаження $q(x, y)$, ввести сили інерції, що діють на одиничний елемент пластини: $-\rho h \cdot \partial^2 w / \partial t^2$. У результаті знаходимо

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}. \quad (10.20)$$

Однозначність розв'язку рівнянь (10.18) та (10.20) досягається тільки тоді, коли на контурі пластини задані крайові умови. Типовими умовами закріплення пластини на контурі є умови шарнірного опирання, жорсткого закріплення та умови на вільному краї. Для прикладу запишемо всі три типи умов для прямокутної пластини $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ з однотипним закріпленням на всьому контурі [19]:

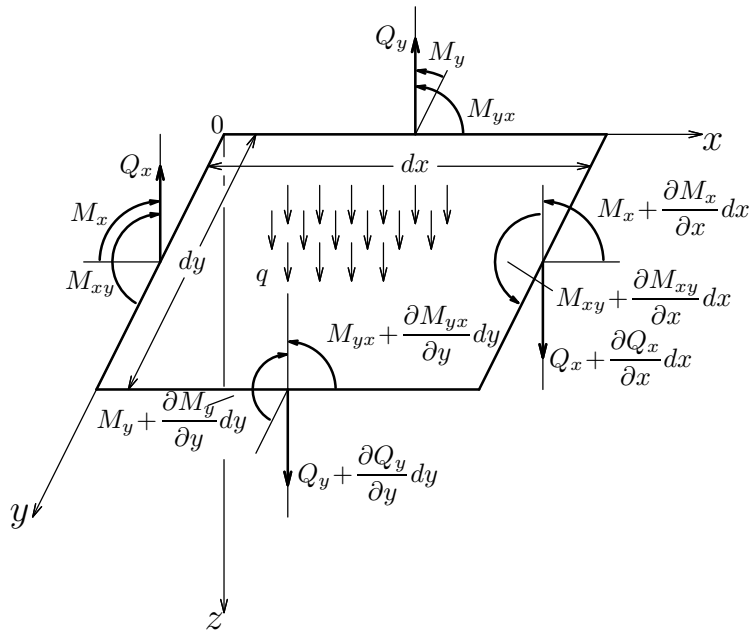


Рис. 10.2. Баланс сил і моментів на елементі пластини

Умови шарнірного опирання:

$$\begin{aligned} w|_{x=\pm a} &= 0, & w|_{y=\pm b} &= 0, \\ M_x|_{x=\pm a} &= 0, & M_y|_{y=\pm b} &= 0 \end{aligned} \quad (10.21)$$

або, через функцію прогину,

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=\pm a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=\pm b} = 0. \quad (10.22)$$

Умови жорсткого закріплення:

$$\begin{aligned} w|_{x=\pm a} &= 0, & w|_{y=\pm b} &= 0, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=\pm a} &= 0, & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=\pm b} &= 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Умови на вільному краї:

$$\begin{aligned} M_x|_{x=\pm a} &= 0, & M_y|_{y=\pm b} &= 0, \\ \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm a} &= 0, & \left(Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm b} &= 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$

або, що те ж саме,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, & \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \bar{\nu}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=\pm a} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = 0, & \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \bar{\nu}) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{y=\pm b} = 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

10.3. Оцінки товщинних компонентів деформацій і напружень

Слід зупинитися на формулах (10.11), якими визначаються поперечна компонента напруженості електричного поля E_z і товщинна деформація пластини ε_z . За виразом для E_z можна знайти розподіл електростатичного потенціалу в пластині:

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \psi = \frac{1}{4d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \nabla^2 w. \quad (10.26)$$

Відмітимо, що, незалежно від присутності чи відсутності електродних покриттів на плоских гранях пластини $z = \pm h/2$, різниця потенціалів між ними дорівнює нулю. Це відображає той факт, що за допомогою підведеної до електродів різниці потенціалів у пластині з товщиною поляризацією неможливо здійснити прогин. Така пластина буде деформуватися у своїй площині. Це не означає, що при згині не виявляється ефект зв'язаності електричного й механічних полів. Його вияв знаходить відображення у зміні характеристик жорсткості пластини $\bar{\nu}$ та \bar{D} – відповідно (10.8) та (10.14).

Шляхом інтегрування співвідношення Коші $\varepsilon_z = \partial u_z / \partial z$ із другої формули (10.11) знаходимо такий вираз для компоненти переміщень у напрямку товщини пластини:

$$u_z = w(x, y, t) = -\frac{1}{2} \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{1 - k_s^2}{1 - k_p^2} z^2 \nabla^2 w. \quad (10.27)$$

До характеристик такого порядку малості, як ε_z , належать і дотичні напруження в пластині. Їх розподіл за товщиною пластини є таким самим, як і у випадку консолі. Якщо відома функція прогину $w(x, y, t)$, то значення цих напружень обраховуються за формулами

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{6\bar{D}}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \\ \tau_{yz} &= -\frac{6\bar{D}}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \end{aligned} \quad (10.28)$$

Лекція 11. Згинні коливання шарнірно закріпленої прямокутної пластини та круглої пластини

11.1. Згинні коливання шарнірно закріпленої прямокутної пластини

Задача полягає в інтегруванні рівняння коливань відносно невідомої функції прогину $w(x, y)$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D_m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D_m} \quad (11.1)$$

у прямокутній області ($a \leq x \leq a, b \leq y \leq b$) за заданого значення навантаження q як функції координат x, y і часу t за умов шарнірного закріплення пластини:

$$w|_{x=\pm a} = 0, \quad w|_{y=\pm b} = 0, \quad M_x|_{x=\pm a} = 0, \quad M_y|_{y=\pm b} = 0. \quad (11.2)$$

Розглянемо задачу про стаціонарні коливання пластини у випадку, коли поперечне навантаження q є гармонічною функцією часу

$$q(x, y, t) = \hat{q}(x, y) \cdot e^{i\omega t}, \quad (11.3)$$

де ω – кругова частота коливань.

Відповідно до прикладеного навантаження q функцію прогину w також будемо шукати аналогічно:

$$w(x, y, t) = \hat{w}(x, y) \cdot e^{i\omega t}. \quad (11.4)$$

Тоді рівняння коливань (11.1) зводиться до неоднорідного бігармонічного рівняння відносно амплітуди прогину \hat{w} :

$$\nabla^2 \nabla^2 \hat{w} - \omega^2 \frac{\rho h}{D_m} \hat{w} = \frac{\hat{q}}{D_m}. \quad (11.5)$$

Граничні умови (11.2) відносно амплітудної функції прогину запишуться так:

$$\hat{w}|_{x=\pm a} = 0, \quad \hat{w}|_{y=\pm b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm b} = 0. \quad (11.6)$$

Записуючи останні дві рівності (11.6), ми врахували, що

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm b} = 0.$$

Для побудови розв'язку задачі скористаємося методом Фур'є. Припустимо, що функція зовнішнього навантаження $\hat{q}(x, y)$ є парною за обома координатами в області пластини $a \leq x \leq a, b \leq y \leq b$. Використовуючи

тригонометричні функції, спробуємо знайти розв'язок для $\hat{w}(x, y)$ у вигляді добутку

$$\hat{w}(x, y) = A \cos \alpha x \cos \beta y, \quad (11.7)$$

де A, α, β – деякі дійсні числа. Підберемо α і β таким чином, щоб задовольнити граничні умови (11.6). Це можливо, якщо виконуються рівності

$$\cos \alpha a = 0, \quad \cos \beta b = 0. \quad (11.8)$$

Звідси

$$\alpha_n a = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad \beta_m b = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (11.9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, набір власних функцій \hat{w}_{nm} , відповідних до власних значень (11.9) таких, що задовольняють граничні умови (11.6), задається формулою

$$\hat{w}_{nm}(x, y) = A_{nm} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b}, \quad (11.10)$$

де A_{nm} – довільні дійсні константи. Запишемо загальний розв'язок для амплітудної функції прогину $\hat{w}(x, y)$ у вигляді суперпозиції частинних розв'язків (11.10) для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$ та $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$\hat{w}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b}. \quad (11.11)$$

Цей подвійний ряд Фур'є в області $a \leq x \leq a, b \leq y \leq b$ зображує загальний розв'язок задачі для амплітуд прогинів пластини. При цьому система функцій у вигляді добутків косинусів є повною й ортогональною у вказаній області. Остання властивість виражається рівністю

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b} \cos \left(n' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \times \\ & \quad \times \cos \left(m' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b} dy = \\ & = \int_{-a}^a \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \left(n' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} dx \int_{-b}^b \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b} \times \\ & \quad \times \cos \left(m' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b} dy = \\ & = \begin{cases} ab & n' = n, \quad m' = m \\ 0 & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases} \quad (11.12) \end{aligned}$$

Розклавши функцію амплітуди навантаження \hat{q} у ряд Фур'є

$$\hat{q}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{nm} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cdot \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b}, \quad (11.13)$$

з рівняння (11.5) отримаємо

$$A_{nm} \left\{ \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^4 + 2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b} \right]^2 + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b} \right]^4 - \omega^2 \frac{\rho h}{D_m} \right\} = \frac{q_{nm}}{D_m}. \quad (11.14)$$

Звідси

$$A_{nm} = \frac{q_{nm}}{D_m \left\{ \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b} \right]^2 \right\}^2 - \omega^2 \rho h}. \quad (11.15)$$

11.2. Згинні коливання круглої пластини

Розглянемо згинні коливання круглої пластинки радіусом $r = a$ під дією нормального навантаження, що гармонічно змінюється в часі з круговою частотою ω (рис. 11.1)

$$q(r, \varphi, t) = \hat{q}(r, \varphi) e^{i\omega t}. \quad (11.16)$$

за умови шарнірного закріплення на контурі ($r = a$).

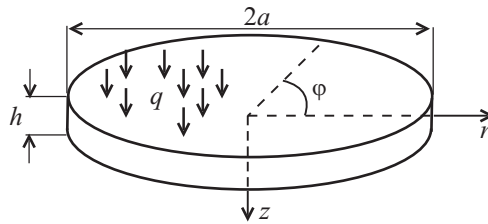


Рис. 11.1. П'єзодиск під дією поперечного розподіленого навантаження

Розв'язування задачі зводиться до інтегрування рівняння (11.1), попередньо записаного в полярних координатах, які вводяться формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (11.17)$$

і виконання граничних умов закріплення на контурі.

Оператор Лапласа в полярних координатах матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (11.18)$$

Запишемо рівняння коливань у полярних координатах:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \\ & + \frac{\rho h}{D_m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D_m}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Оскільки навантаження q задано у вигляді (11.16), то розв'язок w також шукаємо у вигляді

$$w(r, \varphi, t) = \hat{w}(r, \varphi) e^{i\omega t}. \quad (11.20)$$

Після підстановки у (11.19) маємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \varphi^2} \right) - \\ & - \omega^2 \frac{\rho h}{D_m} \hat{w} = \frac{\hat{q}}{D_m}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Далі необхідно записати амплітуду поперечного навантаження $\hat{q}(r, \varphi)$ у вигляді ряду Фур'є по коловій координаті φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Припустивши, що навантаження симетричне відносно діаметра ($\varphi = 0$; $\varphi = \pi$), запишемо:

$$\hat{q}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(r) \cos n\varphi. \quad (11.22)$$

Аналогічно подамо й невідому функцію амплітуди прогину:

$$\hat{w}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\varphi. \quad (11.23)$$

Після підстановки вказаних рядів Фур'є в рівняння (11.21) з урахуванням ортогональності й повноти тригонометричних функцій $\cos n\varphi$ на проміжку $(0; 2\pi)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \\ & - \omega^2 \frac{\rho h}{D_m} w_n = \frac{q_n}{D_m}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Позначимо

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D_m}. \quad (11.25)$$

Розглянемо спочатку однорідне рівняння, відповідне до (11.24):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \beta^4 w_n = 0. \quad (11.26)$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - \beta^2\right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n + \beta^2 w_n\right) = 0 \quad (11.27)$$

або

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + \beta^2\right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n - \beta^2 w_n\right) = 0. \quad (11.28)$$

Зрозумілим є висновок, що рівняння (11.27) та (11.28) будуть задовольнятися, якщо відповідно покласти

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) w_n &= 0; \\ \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) w_n &= 0. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Можна показати, що сума розв'язків двох записаних рівнянь другого порядку є загальним розв'язком вихідного рівняння (11.26) четвертого порядку. Рівняння (11.29) – це рівняння Бесселя для звичайних і модифікованих функцій Бесселя n -го порядку. Загальний розв'язок першого з них має вигляд

$$w_n(r) = a_n J_n(\beta r) + b_n Y_n(\beta r), \quad (11.30)$$

а другого –

$$w_n(r) = c_n I_n(\beta r) + d_n K_n(\beta r). \quad (11.31)$$

Функції Y_n та K_n мають особливість при $r = 0$ і для суцільної пластини мають бути відкинутими. Тоді загальний розв'язок рівняння (11.26) запишеться у вигляді двох доданків:

$$w_n(r) = a_n J_n(\beta r) + c_n I_n(\beta r). \quad (11.32)$$

Сталі інтегрування у (11.32) визначаються з граничних умов на краю круглій пластинки.

Лекція 12. Біморфні п'єзоелементи

Електромеханічне перетворення енергії на згинних деформаціях можна отримати, використовуючи елементи у вигляді двошарових пластин (рис. 12.1). Такі елементи в технічній літературі називають біморфними пластинами [16, 23]. Біморфні пластини є керамічними структурами, які складаються з двох жорстко скріплених п'єзокерамічних пластин однакової товщини, що мають товщинну поляризацію. У серединній площині такої структури $z = 0$, тобто в площині з'єднання пластин і на плоских гранях $z = \pm h/2$ нанесено суцільні електродні покриття. Причому при з'єднанні пластин напрямок вектора попередньої поляризації в нижній пластині вибирається протилежним його напрямку у верхній (рис. 12.1). Кожна з пластин, взята окремо й поміщена в поперечне електричне поле однакової за величиною й напрямком напруженості E_z , буде деформуватися у своїй площині без згину, тобто матимуть місце планарні деформації пластин. Однак їх знаки будуть різними: одна пластина отримує деформацію розтягу, інша – стиску. Оскільки пластини жорстко скріплені одна з одною, то в однонаправленому поперечному електричному полі E_z вони будуть згинатися, причому так, що точки серединної площини $z = 0$ (площина з'єднання пластин) не матимуть планарних переміщень. Подібне явище спостерігається, наприклад, при рівномірному нагріванні біметалічних пластин. Відмітимо, що при підведенні до біморфних пластин однакової за величиною, але різної за знаком напруженості електричного поля E_z (відносно поляризації) отримуємо не згинну, а планарну їх деформацію. Переміщення точок серединної поверхні біморфної пластини в напрямку осі Oz , як і в задачі для одношарової п'єзопластины, будемо позначати через $w(x, y, t) = u(x, y, 0, t)$.

12.1. Розподіл напруженості електричного поля по товщині біморфної пластини

Виведення рівняння коливань для функції прогину w у межах теорії Кірхгофа ґрунтується на тих самих спрощених співвідношеннях, які використовувалися раніше при виведенні рівняння коливань для одношарової пластини за виключенням наближеної рівності (10.4), умови рівності нулю нормальної складової вектора електричної індукції D_z і співвідношень, які з них випливають. Далі ми введемо уточнення для названих електричних змінних, які зміни ми отримуємо в деяких інших співвідношеннях теорії Кірхгофа.

Розглянемо задачу про згинну деформацію біморфної пластини під

дією заданої різниці електричних потенціалів $V_0(t)$, підведеної до плоских поверхонь пластинки $z = \pm h/2$ (див. рис. 12.1). Електрод, розташований у серединній площині пластини $z = 0$, електрично не навантажений.

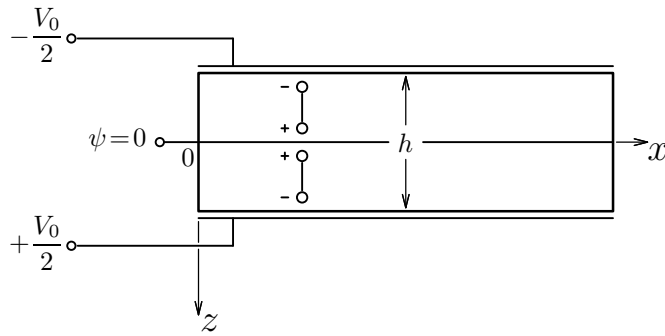


Рис. 12.1. Біморфний п'єзоелемент

Подумки розбиваючи біморфну пластинку на окремі пластинки й урахувуючи, що їх плоскі поверхні $z = 0$ не мають планарних переміщень, деформований стан елементів кожної з пластинок можемо подати як результат суперпозиції планарної деформації та згину. З умов сумісного деформування пластин випливає, що одна з них буде знаходитись під дією деформації розтягу у своїй площині, а інша – під дією рівної першій за величиною деформації стиску. Ці деформації додаються до сталої за знаком згинної деформації обох пластинок. Тому, повертаючись до прикладної теорії одношарової п'єзопластини, у співвідношення для напруженості електричного поля E_z (10.4) необхідно ввести доданок, незалежний від товщинної координати z . Залежність такого типу встановлюється формулами (3.21), (4.4). Ці формули характеризують розподіл напруженості електричного поля у статично деформованому призматичному п'єзоелементі з товщинною поляризацією при одночасній дії напружень розтягу і згину на його торцях. Відповідно до даних розв'язків для нижньої пластинки покладемо

$$E_z = E_0 + zE_1. \quad (12.1)$$

Наближений вираз для верхньої пластинки отримаємо аналогічно, замінивши знак при E_1 :

$$E_z = E_0 - zE_1. \quad (12.2)$$

Зміна знаку при E_1 обумовлена протилежним напрямком поляризації у верхній пластині.

Об'єднуючи обидві рівності й ураховуючи, що $E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$, вираз для функції електростатичного потенціалу ψ запишемо у вигляді

$$\psi = -zE_0 \mp \frac{1}{2}z^2E_1. \quad (12.3)$$

Незалежна від товщинної координати складова напруженості електричного поля E_0 , що входить до цього виразу, визначається електричними граничними умовами задачі

$$\psi|_{z=\pm\frac{h}{2}} = \pm \frac{V_0(t)}{2}. \quad (12.4)$$

Звідси знаходимо:

$$E_0 = -\frac{V_0(t)}{h} - \frac{h}{4}E_1. \quad (12.5)$$

У результаті для розподілу напруженості електричного поля по товщині біморфної пластинки отримаємо:

$$E_z = -\frac{V_0(t)}{h} - \left(\frac{h}{4} \mp z\right) E_1. \quad (12.6)$$

12.2. Вирази для компоненти електричної індукції, механічних напружень, моментів і струму провідності

Наступні операції, пов'язані з виведенням рівняння для функції прогиону $w(x, y, t)$, повністю збігаються з викладками, наведеними в лекції 10 для одношарової п'єзокерамічної пластини. Потрібно тільки враховувати протилежність напрямку вектора попередньої поляризації біморфних пластин. З напрямком поляризації відносно додатного напрямку осі Oz пов'язаний вибір знака п'єзomodулів d_{31} , d_{33} і d_{15} . Так, у нашому випадку рівняння п'єзо-ефекту (10.2), розв'язані відносно напружень, необхідно записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{S_{11}^E(1-\nu^2)}((\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi) \mp d_{31}(1+\nu)E_z); \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{S_{11}^E(1-\nu^2)}((\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) \mp d_{31}(1+\nu)E_z); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2s_{11}^E(1+\nu)}\varepsilon_{xy}; \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T(1-k_p^2)E_z \pm \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Тут верхні знаки при d_{31} відповідають нижній частині пластинки ($0 \leq z \leq \frac{h}{2}$), а нижні – верхній ($-\frac{h}{2} \leq z \leq 0$). Деформації, які входять у (12.7), виражаються через функцію прогину за формулами (10.5).

Як і у випадку одношарової пластини, останнє співвідношення п'єзо-ефекту в (12.7) дозволяє визначити лінійну складову напруженості електричного поля в (12.6). Умовою для її визначення є незалежність D_z від товщинної координати z . Останнє твердження впливає з точного розв'язку елементарних задач для призматичного елемента, наведених у лекціях 3–4. У результаті відповідних підстановок знаходимо:

$$E_1 = \frac{1}{2d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left(\frac{h}{4} \mp z \right) \nabla^2 \hat{w}. \quad (12.8)$$

Кінцеві вирази для напруженості електричного поля й електричної індукції D_z , через функцію прогину записуються у вигляді

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{1}{2d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left(\frac{h}{4} \mp z \right) \nabla^2 \hat{w};$$

$$D_z = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[\frac{V_0(t)}{h} + \frac{h}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \nabla^2 \hat{w} \right]. \quad (12.9)$$

Виконуючи інтегрування в (10.12) при значеннях напружень (12.7) і E_z з (12.9), для моментів отримаємо явні вирази через прогин і підведену різницю електричних потенціалів:

$$M_x = -\bar{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right);$$

$$M_y = -\bar{D} \left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right);$$

$$M_{xy} = -\bar{D} (1 - \bar{\nu}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (12.10)$$

У цих рівностях значення циліндричної жорсткості \bar{D} та зведеного коефіцієнта Пуассона $\bar{\nu}$ обчислюються за формулами

$$\bar{D} = \frac{h^3}{12s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(1 + \frac{1 + \nu}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right); \quad \bar{\nu} = \frac{\nu + \frac{1 + \nu}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}{1 + \frac{1 + \nu}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}. \quad (12.11)$$

Рівняння коливань для функції прогину отримується з рівнянь моментів (10.17):

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}, \quad (12.12)$$

отже, ми приходимо до стандартного рівняння згинних коливань пластин у теорії Кірхгофа.

Для характеристики перетворювачів на основі біморфних структур цікавою є величина струму провідності в ланцюгу генератора:

$$I(t) = C_0 \frac{d}{dt} \left[V_0(t) + \frac{h^2}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{(S_1^+)} \nabla^2 w dx dy \right], \quad (12.13)$$

де $C_0 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) S_1^+ / h$ – ємність біморфної пластини при нульових деформаціях, а S_1^+ – площа пластини.

Для гармонічних коливань у змінному електричному полі $V_0(t) = V_0 e^{i\omega t}$ формула (12.13) дозволяє визначити резонансні ($I \rightarrow \infty$) та антирезонансні ($I = 0$) частоти коливань.

12.3. Випадок розімкнутих електродів

Якщо у вихідній постановці задачі приймається, що електроди розімкнуті (зовнішній ланцюг відсутній), то формула (12.13) дозволяє знайти значення вихідної різниці потенціалів $V(t)$ між електродами, розташованими на поверхнях пластинки $z = \pm h/2$. За відсутності зовнішнього ланцюга струм $I = 0$, і для $V(t)$ з (12.13) знаходимо

$$\frac{V_0(t)}{h} = -\frac{h}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{(S_1^+)} \nabla^2 w dx dy. \quad (12.14)$$

Вирази для моментів (12.10) у цьому разі приймають вигляд:

$$\begin{aligned} M_x &= -\bar{D} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{(1 - \bar{\nu}) k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{(S_1^+)} \nabla^2 w dx dy \right]; \\ M_y &= -\bar{D} \left[\left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{(1 - \bar{\nu}) k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{S_1^+} \iint_{(S_1^+)} \nabla^2 w dx dy \right]; \\ M_{xy} &= -\bar{D} (1 - \bar{\nu}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Наявність інтегральних доданків, залежних від $\nabla^2 w$, у цих рівностях не приводить до зміни рівняння коливань (12.12), але ускладнює постановку граничних умов на контурі пластини, а саме умов шарнірного опирання (10.21) та вільного краю пластини (10.24). Для умов жорсткого закріплення пластини (10.23) інтегральний доданок не входить у граничну умову.

Лекція 13. Енергетична теорія електромеханічного перетворення

13.1. Коефіцієнт електромеханічного зв'язку, його фізичний зміст

Нагадаємо, що важливою характеристикою електропружних процесів є кількісна міра ефективності перетворення енергії – КЕМЗ.

Більшість авторів [23, 24] так розкривають фізичний зміст означення КЕМЗ: квадрат КЕМЗ визначається відношенням здатної до обернення накопиченої в об'ємі електричної (механічної) енергії до всієї підведеної ззовні до п'єзокерамічного тіла механічної (електричної) енергії. Таке визначення є найбільш повним і практично виправданим, хоча й не зовсім чітким у трактуванні поняття "здатна до обернення". Відзначимо, що труднощі енергетичної теорії значною мірою зумовлені наявністю простих формально-математичних правил обчислення коефіцієнтів електромеханічного зв'язку для однорідних випадків розподілення електропружного поля в керамічних елементах. До однакових вірних значень статичних КЕМЗ приводять, наприклад, правило відношення діагональних добутків матриці рівнянь стану й правило відношення взаємної енергії U_m до середнього геометричного пружної U_e і електричної U_d енергій:

$$k = \frac{U_m}{\sqrt{U_e U_d}}. \quad (13.1)$$

Однак поширення цих правил, у тому числі й формули (13.1), на випадок неоднорідної деформації по об'єму тіла приводить до помилкових результатів.

Для оцінки ефективності збудження коливань п'єзокерамічних тіл на власних формах Мезон запропонував поняття ефективного (динамічного) КЕМЗ. Його визначення ґрунтується на відношенні різниці квадратів частот антирезонансу (f_a) та резонансу (f_r) до квадрата частоти антирезонансу:

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}, \quad (13.2)$$

а саме величин, які легко визначаються експериментально за кривою провідності при електричному збудженні коливань. Використання формули Мезона в найпростіших задачах показало, що для однорідної деформації еле-

ментів значення динамічних КЕМЗ збігаються зі статичними значеннями. Однак, якщо деформація неоднорідна по об'єму п'єзоелемента, то значення КЕМЗ нижчі, а для високих частот – значно нижчі статичних. При цьому вважається, що розташування поверхневих електродів, через які здійснюється підведення електричної енергії, є незмінним на всіх частотах коливань. Ситуація може змінитися, якщо використовувати внутрішні (розміщені всередині об'єму тіла) чи поверхневі розділені електроди. Однак і тут динамічні значення КЕМЗ завжди нижчі статичних на однорідній деформації, хоча й можуть бути близькими одне до одного. Таку поведінку КЕМЗ у динаміці Мезон пояснив при встановленні формули (13.2). Подаючи розв'язок задач в околі резонансних частот коливань у вигляді простих еквівалентних схем, він знайшов зв'язок отриманої формули зі статичною й динамічною ємностями п'єзоелементів. Зауважимо, що визначення величини k_d^2 за формулою Мезона можливе лише на резонансних частотах коливань і не може бути використане для позарезонансних частот. Існують також труднощі в узагальненні формули (13.2) на випадок збудження коливань механічними навантаженнями.

Головна ідея енергетичного методу визначення динамічних КЕМЗ полягає в тому, що ця важлива характеристика ефективності перетворення енергії має повністю визначатися полем деформацій в об'ємі п'єзокерамічного тіла й характером розташування електродів на його поверхні чи всередині.

13.2. Задачі поздовжньої деформації суцільного і складеного п'єзокерамічних циліндрів

Розглянемо з позицій енергетичного методу дві найпростіші задачі про поздовжню деформацію суцільного і складеного п'єзокерамічних циліндрів, поляризованих уздовж осі (рис. 13.1).

Рівняння п'єзоефекту у випадку осьового деформування циліндрів мають вигляд:

$$\varepsilon_z = s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \quad D_z = d_{33} \sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \quad (13.3)$$

Нехай суцільний циліндр із розімкнутими електродами (рис. 13.1) ($D_z \equiv 0$) деформований рівномірно в напрямку своєї осі ($\varepsilon_z = \varepsilon_0$). Механічні напруження та напруженість електричного поля, що виникають при такій деформації, легко знайти з (13.3):

$$\sigma_z^{(0)} = \frac{\varepsilon_0}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}, \quad E_z^{(0)} = -\frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \varepsilon_0. \quad (13.4)$$

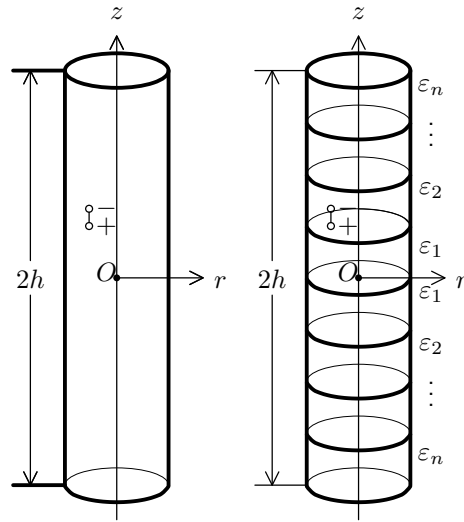


Рис. 13.1. Суцільний та секціонований п'єзоциліндри

Тут $k_{33}^2 = d_{33}^2 / s_{33}^E \epsilon_{33}^T$ – поздовжній статичний коефіцієнт електро-механічного зв'язку.

Якщо електроди циліндра короткозамкнуті ($E_z \equiv 0$), то при такій самій осьовій деформації $\epsilon_z = \epsilon_0$ механічні напруження й напруженість електричного поля будуть визначатися таким чином:

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{\epsilon_0}{s_{33}^E}, \quad D_z^{(1)} = \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \epsilon_0. \quad (13.5)$$

Обчислимо значення внутрішньої енергії для двох указаних вище випадків електричних граничних умов. Виходячи із загальної формули для щільності внутрішньої енергії п'єзокерамічного тіла, можемо записати:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_z \epsilon_z + E_z D_z). \quad (13.6)$$

Отже, значення енергій в об'ємі циліндра з розімкнутими (U_p) і короткозамкнутими (U_k) електродами на одній і тій самій осьовій деформації ϵ_0 мають вигляд:

$$U_p = hS \frac{\epsilon_0^2}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}, \quad U_k = hS \frac{\epsilon_0^2}{s_{33}^E} \quad (13.7)$$

(S – площа поперечного перерізу циліндра).

Так як при статичному розряді циліндр із розімкнутими електродами переходить у стан із закороченими електродами, то різниця $U_p - U_k$ до-

рівнює здатній до обернення електричній енергії $U_{\text{ел}}^{\text{об}}$ (на незмінній осьовій деформації). Тоді

$$U_{\text{ел}}^{\text{об}} = U_p - U_k = hS \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\varepsilon_0^2}{s_{33}^E}. \quad (13.8)$$

Сумарне значення механічної та електричної енергій в об'ємі циліндра перед розрядом дорівнює U_p . Унаслідок електричної умови $D_z = 0$ внутрішня енергія U_p накопичується тільки за рахунок механічної роботи зовнішніх напружень σ_z , що приводять п'єзоциліндр у деформований стан $\varepsilon_z = \varepsilon_0$.

Таким чином, згідно з енергетичним означенням КЕМЗ, за формулами (13.7), (13.8) знаходимо:

$$k_d^2 = \frac{U_{\text{ел}}^{\text{об}}}{U_{\text{мех}}^{\text{пов}}} = \frac{U_{\text{ел}}^{\text{об}}}{U_p} = k_{33}^2, \quad (13.9)$$

тобто приходимо до відомого результату для КЕМЗ на однорідній деформації вздовж осі поляризації.

Перейдемо до задачі про поздовжню деформацію складеного циліндра (рис. 13.1). Будемо вважати, що циліндр складається з $2n$ однакових круглих пластин, поляризованих по товщині, плоскі поверхні яких покриті електродами. Товщина пластин $\Delta z = h/n$, сусідні пластини жорстко з'єднані одна з одною. Припустимо, що існує спосіб незалежного механічного деформування кожної з пластин у напрямку їх поляризації. Позначимо через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ товщинні деформації пластин з розімкнутими електродами в порядку їх наступності в напрямку осі Oz .

Використовуючи першу з формул (13.7), знаходимо повну механічну енергію, підведену до складеного п'єзокерамічного циліндра:

$$U_{\text{мех}}^{\text{пов}} = U_p = S \frac{\Delta z}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2. \quad (13.10)$$

При такому ж деформованому стані складеного циліндра, але із замкнутими електродами кожної пластини, внутрішня енергія становитиме

$$U_k = S \frac{\Delta z}{s_{33}^E} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2. \quad (13.11)$$

Отже, маючи можливість знімати електричну енергію з кожної окремо взятої пластини, її сумарне значення записуємо так:

$$U_{\text{ел}}^{\text{об}} = U_p - U_k = S \frac{k_{33}^2}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \Delta z \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2. \quad (13.12)$$

КЕМЗ у цьому випадку також дорівнює k_{33}^2 .

В іншому випадку, коли немає можливості зняти електричну енергію з кожної пластини, а розряд можливий лише через зовнішні електроди $z =$

$\pm h$, то її значення на неоднорідній деформації складеного циліндра не буде визначатися формулою (13.12) – воно буде меншим за вказане у формулі. Здатну до обернення електричну енергію в цьому випадку можна знайти, використовуючи формулу для енергії розряду простого конденсатора

$$U = \frac{1}{2} C_0 V^2, \quad (13.13)$$

де $C_0 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) S / 2h$ – ємність стиснутого п'єзоциліндра; $V = \psi^+ - \psi^-$ – різниця потенціалів між електродами на торцях $z = \pm h$.

Напруженість електричного поля кожної з пластин обчислюється за другою формулою з (13.4). Звідси різниця потенціалів між електродами на торцях визначається формулою

$$V = \psi^+ - \psi^- = \frac{2}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \Delta z \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2, \quad (13.14)$$

а здатна до обернення електрична енергія –

$$U_{\text{ел}}^{\text{об}} = \frac{S}{h} \frac{1}{s_{33}^E} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \left[\Delta z \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right]^2. \quad (13.15)$$

Для КЕМЗ на однорідній деформації складеного циліндра з використанням формул (13.10), (13.15) отримуємо:

$$k_d^2 = k_{33}^2 \frac{\left[\Delta z \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right]^2}{h \Delta z \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2}. \quad (13.16)$$

Якщо деформація розподілена неперервно вздовж осі циліндра, то вираз (13.16) набуває вигляду

$$k_d^2 = k_{33}^2 \frac{\left[\int_{-h}^h \varepsilon_z dz \right]^2}{2h \int_{-h}^h \varepsilon_z^2 dz}. \quad (13.17)$$

Для прикладу обчислимо КЕМЗ для випадку нерівномірної деформації вигляду $\varepsilon_z = \varepsilon_0 \cos \lambda z$. Виконуючи в (13.17) операції інтегрування, знаходимо:

$$k_d^2 = 2k_{33}^2 \frac{\sin^2 \lambda h}{(\lambda h)^2} \frac{1}{1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h}}. \quad (13.18)$$

Аналіз цієї формули наведемо далі.

Відзначимо, що вище розглядалися випадки деформування п'єзоциліндрів зовнішніми механічними навантаженнями, а саме: ззовні підводилась енергія в механічній формі. Однак це не є обмеженням енергетичного методу.

13.3. Загальний випадок тривимірної деформації п'єзокерамічних тіл

Розглянемо загальний випадок тривимірної деформації п'єзокерамічних тіл. Нехай п'єзокерамічне тіло займає довільний об'єм V . Напрямок поля попередньої поляризації збігається з віссю Oz декартової системи координат. Розташування електродів S_1^\pm на поверхні чи в об'ємі тіла відоме. Припустимо, що на основі рівнянь крайових задач електропружності ми визначили спряжене електромеханічне поле в об'ємі тіла для деяких довільних зовнішніх механічних і електричних навантажень, що змінюються з круговою частотою ω . При $\omega = 0$ отримуємо розв'язки статичних задач.

Вважаючи надалі переміщення й деформації заданими незмінними функціями координат і кругової частоти, визначаємо здатну до обернення електричну енергію на даній деформації. Для цього проінтегруємо рівняння для електростатичного потенціалу

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \psi + (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = e_{15} \nabla^2 u_z + \\ + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{u} + (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (13.19)$$

з відомою правою частиною. Знаходимо розв'язок цього рівняння для розімкнутих

$$\iint_{(S_1^\pm)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = 0 \quad (13.20)$$

та короткозамкнутих

$$\psi|_{S_1^+} - \psi|_{S_1^-} = 0 \quad (13.21)$$

електродів, причому вектор \mathbf{D} , який входить у (13.20), обчислюємо з рівнянь п'єзоефекту:

$$\hat{T} = c^E \hat{S} - e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = e \hat{S} + \varepsilon^S \mathbf{E}. \quad (13.22)$$

На неелектродованій частині поверхні тіла в обох випадках приймається умова $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) = D_n = 0$.

Нехай напруженість електричного поля $\mathbf{E} = -grad\psi$ для розімкнутих електродів виявляється рівною $\mathbf{E}^{(p)}$, а для короткозамкнутих – $\mathbf{E}^{(k)}$. Використавши формулу для внутрішньої енергії п'єзокерамічного тіла, обчислюємо енергію в об'ємі тіла при розімкнутих (U_p) і закорочених U_k електродах. Для U_p :

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \left\{ c_{11}^E (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + c_{33}^E \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{xy}^2 + 2c_{12}^E \varepsilon_x \varepsilon_y + 2c_{13}^E (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \varepsilon_z + c_{44}^E (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) \right\} + \left[\varepsilon_{11}^S (E_x^{(p)} E_x^{(p)} + E_y^{(p)} E_y^{(p)}) + \varepsilon_{33}^S E_z^{(p)} E_z^{(p)} \right] dV. \quad (13.23)$$

Аналогічно записується вираз для U_k , але потрібно замінити $E^{(p)}$ на $E^{(k)}$. Різниця $U_p - U_k$ буде рівною тій частині електричної енергії, накопиченої в об'ємі, яка здатна до обернення на даній незмінній деформації:

$$U_{ел}^{об} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \left[\varepsilon_{11}^S (E_x^{(p)} E_x^{(p)} + E_y^{(p)} E_y^{(p)} - E_x^{(k)} E_x^{(k)} - E_y^{(k)} E_y^{(k)}) + \varepsilon_{33}^S (E_z^{(p)} E_z^{(p)} - E_z^{(k)} E_z^{(k)}) \right] dV. \quad (13.24)$$

Динамічний КЕМЗ згідно з енергетичним означенням визначається за формулою

$$k_d^2 = \frac{U_{ел}^{об}}{U_{мех}^{пов}} = \frac{U_{ел}^{об}}{U_p}. \quad (13.25)$$

Відзначимо, що величина U_p ототожнюється з роботою зовнішніх механічних сил, дією яких викликано заданий електропружний стан п'єзокерамічного тіла з розімкнутими електродами.

Лекція 14. Енергетична теорія електромеханічного перетворення (продовження)

14.1. Поздовжні коливання п'єзокерамічних циліндра і стрижня з неелектродованими ділянками біля кінців

Як приклади розглянемо задачі про поздовжні коливання п'єзокерамічного циліндра довжиною $2h$ із заглибленими електродами на відстані $h - a$ від торців (рис. 14.1) і стрижня довжиною $2l$ з неелектродованими ділянками $l - a$ біля кінців (рис. 14.2). В обох задачах приймається, що збудження коливань здійснюється електричним полем з круговою частотою ω , підведеним до електродів. За формулою (13.25) отримано такі вирази для динамічних КЕМЗ:

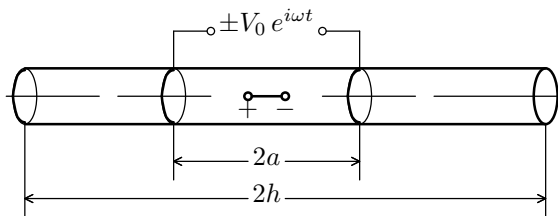


Рис. 14.1. П'єзоциліндр із заглибленими електродами

1) Поздовжні коливання циліндра із заглибленими електродами:

$$k_d^2 = 2k_{33}^2 \frac{\sin^2 \lambda a}{(\lambda a)^2} \left[\left(1 + \frac{\sin 2\lambda a}{2\lambda a} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{h}{a} - 1 \right) \left(1 - \frac{\sin 2\lambda (h-a)}{2\lambda (h-a)} \right) \frac{\sin^2 \lambda a}{\cos^2 [\lambda (h-a)]} \right]^{-1}, \quad (14.1)$$

$$\lambda = \omega [\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

2) Для задачі про поздовжні коливання стрижня з неелектродованими ділянками біля кінців:

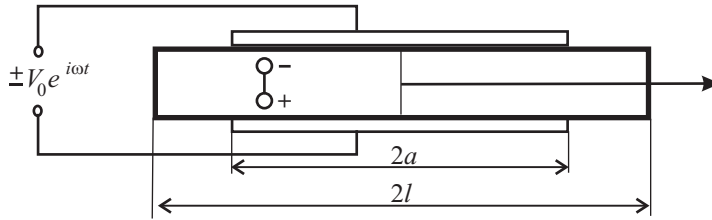


Рис. 14.2. П'єзострижень з неелектродованими ділянками біля кінців

$$\begin{aligned}
 k_d^2 = & 2 \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin^2 \kappa a}{(\kappa a)^2} \left[\left(1 + \frac{\sin 2\kappa a}{2\kappa a} \right) + 2 \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin^2 \kappa a}{(\kappa a)^2} + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{l}{a} - 1 \right) \frac{\sin^2 \kappa a^2}{\cos} \left[\kappa (l - a) \sqrt{1 - k_{31}^2} \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left. \left(1 - \frac{\sin \left[2\kappa (l - a) \sqrt{1 - k_{31}^2} \right]}{2\kappa (l - a) \sqrt{1 - k_{31}^2}} \right) \right]^{-1}, \quad (14.2) \\
 k_{31}^2 = & \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}, \quad \kappa = \omega (\rho s_{11}^E)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

З формули (14.1) при $a = h$ отримуємо вираз для k_d^2 , що збігається з (13.18). З аналізу (14.1) залежно від співвідношення a/h впливає, що при $a = h$ і $a = h/2$ для k_d^2 отримуємо однакові значення. Максимальне значення k_d^2 на першій резонансній частоті поздовжніх коливань досягається при $a = 0,748h$ (матеріал PZT-4). При $\omega \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0$) з (14.1) впливає $k_d^2 = k_{33}^2$ (поздовжній коефіцієнт зв'язку матеріалу). На частотах, для яких $\lambda a = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$), коефіцієнт $k_d^2 = 0$ і при вказаному розташуванні електродів електричним способом коливання в циліндрі не збуджуються.

З аналізу формули (14.2) впливають якісно аналогічні результати.

На рис. 14.3 і 14.4 показано поведінку динамічних КЕМЗ на перших резонансних частотах коливань для циліндра і стрижня з кераміки PZT-4 залежно від відносних розмірів областей, що електрично збуджуються. Суцільні криві відповідають обчисленням за формулами (14.1), (14.2), а штриховані – за формулою (13.2). Спостерігається хороше узгодження отриманих результатів, особливо у випадку оптимального розташування електродів, при $a = 0,75h$ і $a = 0,75l$. Максимальне значення КЕМЗ дуже близькі одне до одного й кількісно мало відрізняються від коефіцієнтів електро механічного зв'язку матеріалу. Лише для малих значень k_d^2 , які відповідають відносно малим розмірам областей електричного навантаження, відмінність між цими значеннями стає помітною.

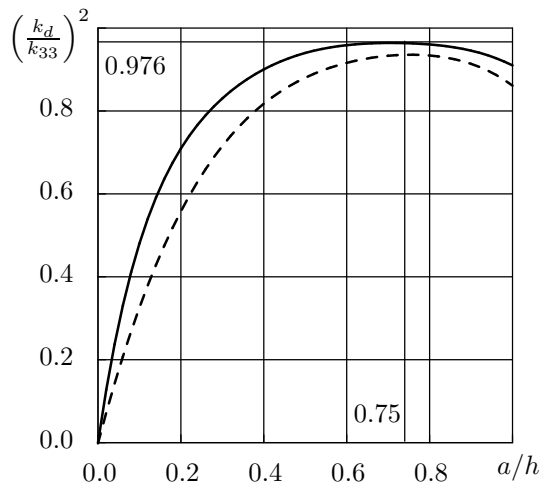


Рис. 14.3. Відносні значення КЕМЗ п'єзоциліндра з неелектродованими краями

14.2. Максимально можливі значення коефіцієнтів електромеханічного зв'язку

Висновки про добре узгодження результатів розвинутої тут енергетичної теорії КЕМЗ і теорії Мезона стосуються розглянутих у попередньому пункті прикладів. З'ясування можливостей теорії Мезона, побудованої на основі аналізу одномодової еквівалентної схеми, а також її узагальнення на багатомодові форми коливань, при дослідженні електромеханічного перетворення енергії у складних задачах коливань п'єзокерамічних тіл вимагають додаткового дослідження.

Енергетичну теорію КЕМЗ можна поширити на задачі статички й вимушених коливань. За цією теорією для найпростіших задач однорідної деформації отримуються табличні значення коефіцієнтів зв'язку.

Наявність енергетичної теорії дозволяє сформулювати й вирішити питання про пошук однорідної деформації більш загального вигляду, якій відповідає максимально можливе значення коефіцієнта зв'язку. Для загального випадку однорідної деформації всі компоненти тензора напружень необхідно розглядати як параметри, незалежні від координат. Використовуючи для них звичайні позначення $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ і вважаючи напрямом

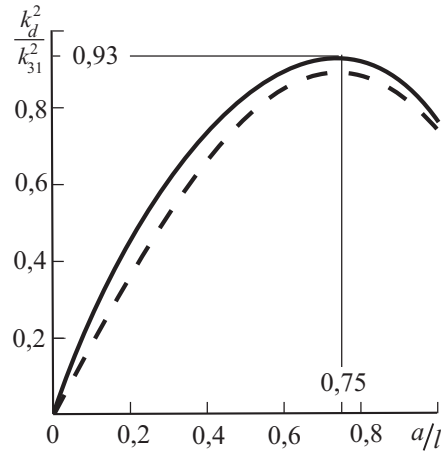


Рис. 14.4. Відносні значення КЕМЗ п'єзострижня з неелектродованими ділянками біля кінців

осі Oz колінеарним напрямку попередньої поляризації, деформації в тілі обчислюємо за рівняннями п'єзоефекту (3.1). Причому для змінних електричного поля, що входять до цих рівностей, у випадку розімкнутих електродів слід покласти рівними нулю компоненти вектора електричної індукції D_x, D_y, D_z , а для стану з короткозамкнутими електродами – компоненти вектора напруженості електричного поля E_x, E_y, E_z . Необхідні для розрахунку значення коефіцієнта зв'язку k_d^2 величини внутрішньої енергії обчислюються за формулами (13.23) та (13.24). Після цього значення ефективного КЕМЗ обчислюється за формулою (13.25):

$$k_d^2 = \frac{A(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{B(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}, \quad (14.3)$$

де квадратичні форми A і B мають вигляд:

$$\begin{aligned} A &= k_{31}^2 (\sigma_x^2 + 2\sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) - 2\nu_1 k_s^2 (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_z + \\ &+ \sigma_1 k_{33}^2 \sigma_z^2 + \sigma_2 k_{15}^2 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2), \\ B &= \sigma_x^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 k_{31}^2 - 2\nu_1 (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_z + \\ &+ \sigma_1 \sigma_z^2 + 2(1 + \nu) \tau_{xy}^2 + \sigma_2 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Тут використано раніше введені позначення для табличних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку $k_{31}^2, k_{33}^2, k_s^2, k_{15}^2$, а також позначення:

$$\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \quad \nu_1 = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}, \quad \sigma_1 = \frac{s_{33}^E}{s_{11}^E}, \quad \sigma_2 = \frac{s_{44}^E}{s_{11}^E}. \quad (14.5)$$

Наявність п'єзоелектрично неактивних напружень τ_{xy} для даного типу поляризації приводить лише до зменшення k_d^2 . У зв'язку з цим у наведених виразах прийнято $\tau_{xy} = 0$.

Дослідження k_d^2 на максимум як функції п'яти незалежних параметрів показує, що вона має два відносні максимуми. Один з них має місце тоді, коли нормальні напруження дорівнюють нулю, і в цьому випадку, як видно з виразів для A і B , $k_d^2 = k_{15}^2$. В іншому випадку відсутні дотичні напруження. При цьому максимальне значення k_d^2 досягається при $\sigma_x = \sigma_y$ і $\sigma_x = \alpha\sigma_z$. Параметр α , який встановлює оптимальну залежність між величинами напружень уздовж і впоперек поляризації, обчислюється за формулою

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma_1}{\nu_1} \frac{[(1-\nu)k_{33}^2 - 2k_{31}^2]}{[(1-\nu)k_s^2 - 2k_{31}^2]} \times \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2 (k_s^2 - k_{33}^2) [(1-\nu)k_s^2 - 2k_{31}^2]}{\nu_1^2 [(1-\nu)k_{33}^2 - 2k_{31}^2]^2}} \right]. \quad (14.6)$$

Причому максимальне значення

$$(k_d^2)_{\max} = \frac{4k_{31}^2\alpha^2 - 4\nu_1k_s^2\alpha + \sigma_1k_{33}^2}{2(1-\nu)\alpha^2 - 4\nu_1\alpha + \sigma_1}. \quad (14.7)$$

Обчислення за цією формулою виконувались для кераміки PZT-4. У результаті отримали:

$$\alpha = -0,345, \quad k_d^2 = 0,490. \quad (14.8)$$

Для порівняння відзначимо, що табличні значення коефіцієнтів зв'язку для цього матеріалу такі: $k_{33}^2 = 0,468$, $k_{15}^2 = 0,483$. Кількісні відмінності між коефіцієнтами зв'язку для простих типів деформації та оптимальним коефіцієнтом невеликі. Звернемо увагу також на те, що можна збільшити поздовжній коефіцієнт зв'язку, як показує знак величини α , приклавши до зразка, стиснутого вздовж осі поляризації, напруження розтягу певної величини в поперечному напрямку.

14.3. Статичні планарна деформація тонкої прямокутної п'єзопластини та згинна деформація прямокутного біморфа

У попередній лекції для випадку однорідної деформації вздовж осі поляризації було отримано КЕМЗ, рівний k_{33}^2 . У лекції 7 ми ввели планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку k_p^2 . Фізичний зміст енергети-

чної характеристики з'ясується при аналізі внутрішньої енергії елемента п'єзопластинки, який знаходиться в умовах рівномірного розтягу у двох напрямках: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0$. Нехай задано елемент пластинки з товщиною поляризацією розміром $2a \times 2b \times h$. Електродні покриття, нанесені на грані елемента $z = \pm h/2$, будемо вважати розімкненими. За заданими деформаціями на основі рівностей (8.8) знаходимо значення напружень:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\varepsilon_0}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{1}{1 - k_p^2}. \quad (14.9)$$

Тут напруженість електричного поля визначається за формулою (8.3), а різниця потенціалів V_0 при такій деформації визначається так:

$$V_0 = \frac{h}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \varepsilon_0. \quad (14.10)$$

Компонента вектора електричної індукції D_z у випадку відсутності зовнішнього електричного навантаження дорівнює нулю. Значення внутрішньої енергії, накопиченої в елементі, обчислюється за формулою (13.24):

$$U_p = \frac{4abh\varepsilon_0^2}{s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2)}. \quad (14.11)$$

Розглянемо також електропружний стан такого самого елемента з короткозамкнутими електродами. Механічні напруження в цьому випадку обчислюються за формулами (7.9) за умови $E_z = 0$:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\varepsilon_0}{s_{11}^E (1 - \nu)}. \quad (14.12)$$

Внутрішня енергія елемента

$$U_k = \frac{4abh\varepsilon_0^2}{s_{11}^E (1 - \nu)}. \quad (14.13)$$

За формулою (13.15) отримаємо значення коефіцієнта електромеханічного зв'язку для такого типу деформації:

$$k^2 = \frac{U_p - U_k}{U_p} = k_p^2. \quad (14.14)$$

Вище відзначалось, що за такого ж типу неоднорідної по об'єму деформації значення енергетичного коефіцієнта електромеханічного зв'язку буде меншим, ніж при однорідній деформації. Тому цікавим буде порівняння коефіцієнта електромеханічного зв'язку елемента біморфної пластини за умови чистого згину зі значенням k_p^2 . Нагадаємо, що у випадку чистого згину пластини деформації лінійно змінюються по товщинній координаті і є неоднорідними. Для прогину серединної площини елемента пластини в умовах чистого згину маємо [19]

$$w = w_0 (x^2 + y^2). \quad (14.15)$$

Деформації в елементі визначаються за формулами (10.5):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -2w_0z; \quad \varepsilon_{xy} = 0. \quad (14.16)$$

Величини напружень залежать від електричних граничних умов на електродах. Для розімкнутих електродів величина D_z дорівнює нулю, а напруженість електричного поля за формулами (12.9) визначається так:

$$E_z = \pm \frac{2w_0}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} z. \quad (14.17)$$

У результаті для напружень за формулами (12.7) знаходимо:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{2w_0}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{z}{1 - k_p^2}. \quad (14.18)$$

Внутрішня енергія елемента має вигляд:

$$U_p = 2ab \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) dz = \frac{4}{3} \frac{abh^3 w_0^2}{s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2)}. \quad (14.19)$$

Для випадку короткозамкнутих електродів ($V_0 = 0$) із (12.9) отримуємо значення для напруженості електричного поля E_z та індукції D_z :

$$E_z = -\frac{2w_0}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left(\frac{h}{4} \mp z \right), \quad D_z = -\varepsilon_{33}^T \frac{w_0 h}{2d_{31}} k_p^2. \quad (14.20)$$

Відповідно для напружень за формулами (12.7) знаходимо:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{2w_0}{s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2)} \left(z \mp \frac{h}{4} k_p^2 \right). \quad (14.21)$$

Внутрішня енергія елемента U_k визначається так:

$$\begin{aligned} U_k &= 2ab \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + D_z E_z) dz = \\ &= \frac{4}{3} \frac{abh^3 w_0^2}{s_{11}^E (1 - \nu) (1 - k_p^2)} \left(1 - \frac{3}{4} k_p^2 \right). \end{aligned} \quad (14.22)$$

Енергетичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку для біморфного елемента становить

$$k^2 = \frac{U_p - U_k}{U_p} = \frac{3}{4} k_p^2. \quad (14.23)$$

Видно, що ефективність електромеханічного перетворення при деформації чистого згину хоч і менша, ніж на однорідній планарній деформації, але все ж є достатньо високою.

Лекція 15. Коливання п'єзокерамічного стрижня з розрізними електродами

15.1. Постановка задачі

Розглядається поперечно поляризований призматичний стрижень довжиною $2l$, з поперечним перерізом $2b \times 2h$, ($b \ll l$, $h \ll l$). Електродовані бічні поверхні $z = \pm h$ розділені симетричними відносно площини $x = 0$ тонкими діелектричними розрізами в точках $x = \pm a$, причому значення a наперед невідоме. Стрижень має поперечну попередню поляризацію в напрямку осі Oz . Резонансні коливання стрижня збуджуються гармонічною різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2V_0 e^{i\omega t}$, підведеною до електродів в області (1), та протилежною за фазою різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = -2V_0 e^{i\omega t}$ в областях (2) та (3), як показано на рис. 15.1.

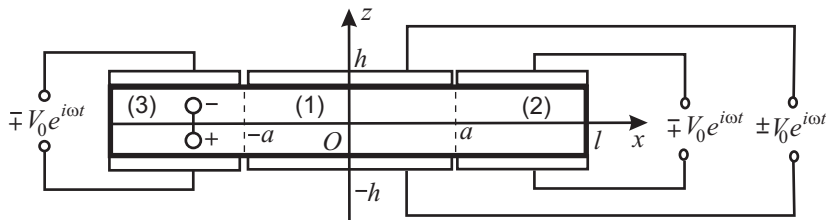


Рис. 15.1. П'єзострижень з розрізними електродами

Під дією розподіленого електричного навантаження такого типу, згідно з розв'язками елементарних задач електропружності для прямокутника, отриманими в лекціях 3 – 4, у стрижні матиме місце однорідний стан поздовжньої деформації, тобто частинки стрижня здійснюватимуть коливальний рух лише в напрямку, паралельному поздовжній осі Ox . Тому вектор переміщень матиме лише одну ненульову компоненту

$$\vec{u} = \vec{u}(x, t) = \{ u_x(x, t), 0, 0 \}. \quad (15.1)$$

З повної системи рівнянь електропружності (3.1)–(3.4) для даного випадку як наслідок слід використовувати такі рівняння:

а) Рівняння п'єзоефекту:

$$\varepsilon_x = s_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z; \quad D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x. \quad (15.2)$$

б) Співвідношення Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (15.3)$$

в) Рівняння руху елемента:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (15.4)$$

г) Рівняння вимушеної електростатики:

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (15.5)$$

Протифазність підведеної різниці потенціалів на розрізних електродах в областях $|x| < a$ та $a < |x| < l$ приводить до відмінності у визначенні компоненти напруженості електричного поля з другого рівняння вимушеної електростатики (15.5). Тому товщинні компоненти вектора електричної індукції для областей $|x| < a$ та $a < |x| < l$ мають вигляд:

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{i\omega t}, \quad E_z^{(2)} = E_z^{(3)} = -E_0 e^{i\omega t}, \quad E_0 = -\frac{V_0}{h}. \quad (15.6)$$

Виразивши з рівнянь (15.2) напруження σ_x через деформацію ε_x , а потім, за допомогою співвідношення (15.3), – через переміщення u_x , запишемо рівняння поздовжніх коливань стрижня в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho s E_{11}}}. \quad (15.7)$$

Тут c – швидкість поздовжніх акустичних хвиль у стрижні. Розв'язок рівняння (15.7) будемо за механічних граничних умов на кінцях стрижня

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = 0 \quad (15.8)$$

та за умов неперервності переміщень і напружень на границях областей:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)} \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{та} \\ \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(3)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(3)} \quad \text{при} \quad x = -a. \end{aligned} \quad (15.9)$$

15.2. Побудова розв'язку задачі

Відповідно до вибраного нами типу збудження розв'язок задачі для i -ї ($i = 1, 2, 3$) області стрижня будемо шукати у вигляді

$$u_x^{(i)}(x, t) = \hat{u}^{(i)}(x) e^{i\omega t}. \quad (15.10)$$

Осьові компоненти деформацій та напружень, товщинну складову електричної індукції запишемо аналогічно:

$$\varepsilon_x^{(i)}(x, t) = \hat{\varepsilon}^{(i)}(x)e^{i\omega t}, \quad \sigma_x^{(i)}(x, t) = \hat{\sigma}^{(i)}(x)e^{i\omega t}. \quad (15.11)$$

$$D_z^{(i)}(x, t) = \hat{D}_z^{(i)}(x)e^{i\omega t}. \quad (15.12)$$

Підставляючи переміщення (15.10) у рівняння (15.7) та опускаючи ненульовий гармонічний співмножник, отримуємо рівняння для визначення невідомих амплітуд переміщень $\hat{u}^{(i)}(x)$:

$$\frac{d^2 \hat{u}^{(i)}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}^{(i)} = 0. \quad (15.13)$$

Загальні розв'язки рівняння (15.13) матимуть такий вигляд:

$$\hat{u}^{(i)} = A_i \cos \lambda x + B_i \sin \lambda x, \quad (i = 1, 2, 3; \lambda = \frac{\omega}{c}). \quad (15.14)$$

Для амплітуд осьових деформацій та напружень отримуємо вирази:

$$\hat{\varepsilon}^{(i)} = \lambda (-A_i \sin \lambda x + B_i \cos \lambda x),$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(i)} &= \frac{1}{s_{11}^E} (\hat{\varepsilon}^{(i)} \mp d_{31} E_0) = \\ &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_i \sin \lambda x + \lambda B_i \cos \lambda x \mp d_{31} E_0). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Тут і надалі верхній знак відповідає області (1), нижній – іншим двом областям стрижня.

Унаслідок симетричності задачі ($u_x(x, t) = -u_x(-x, t)$) амплітуда переміщень при $x = 0$ дорівнює нулю. Звідси випливають такі рівності для сталих інтегрування:

$$A_1 = 0 \text{ та } A_3 = -A_2; \quad B_3 = -B_2. \quad (15.16)$$

Сталі інтегрування B_1 , A_2 та B_2 знаходимо з граничної умови (15.8) на вільному торці $x = l$ та перших двох умов (15.9). У результаті з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(2)} \Big|_{x=l} &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_2 \sin \lambda l + \lambda B_2 \cos \lambda l + d_{31} E_0) = 0, \\ \left(\hat{\sigma}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{\sigma}^{(2)} \Big|_{x=a} \right); \\ \frac{1}{s_{11}^E} (\lambda B_2 \cos \lambda a - d_{31} E_0) &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_2 \sin \lambda a + \lambda B_2 \cos \lambda a + d_{31} E_0), \\ \left(\hat{u}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{u}^{(2)} \Big|_{x=a} \right); \\ B_1 \sin \lambda a &= A_2 \cos \lambda a + B_2 \sin \lambda a; \quad \left(\hat{u}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{u}^{(2)} \Big|_{x=a} \right), \end{aligned} \quad (15.17)$$

отримаємо

$$B_1 = -\frac{1 - 2 \cos \lambda (l - a)}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0;$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\sin \lambda (l + a) - \sin \lambda (l - a)}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0; \\
 B_2 &= \frac{\cos \lambda (l - a) - \cos \lambda (l + a) - 1}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0.
 \end{aligned}
 \tag{15.18}$$

15.3. Аналітичне визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку

Згідно з енергетичною теорією електромеханічного енергоперетворення, КЕМЗ для п'єзокерамічних елементів із суцільним електродним покриттям визначається (у тому числі – на нерезонансних частотах) за формулою

$$k_d^2 = \frac{U_p - U_K}{U_p}. \tag{15.19}$$

Тут U_p – повна енергія стрижня з розімкнутими електродами,

U_K – з короткозамкнутими.

Указані енергії обчислюються на одному й тому ж самому полі деформацій, визначеному виразами (15.14).

Для стрижня з розрізними електродами вказані енергії обчислюються окремо для кожної з трьох указаних вище ділянок стрижня, а повні механічні енергії мають три складові частини:

$$U_* = U_*^{(1)} + 2U_*^{(2)}. \tag{15.20}$$

Рівність $U_*^{(2)} = U_*^{(3)}$ очевидна.

Повна енергія i -ї частини стрижня з розімкнутими електродами визначається інтегралом:

$$U_p^{(i)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \left(\hat{\sigma}_p^{(i)} \hat{\varepsilon}^{(i)} + \hat{D}_z^{(i)} E_p^{(i)} \right) dV. \tag{15.21}$$

Величина $E_p^{(i)}$ визначається з умови

$$\iint_{S_i^+} \hat{D}_z^{(i)} dS = 0. \tag{15.22}$$

Для відповідних частин стрижня з короткозамкнутими електродами виконується умова:

$$\psi|_{S_i^+} - \psi|_{S_i^-} = 0. \tag{15.23}$$

Звідси

$$U_K^{(i)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \hat{\sigma}_K^{(i)} \hat{\varepsilon}^{(i)} dV. \tag{15.24}$$

Використовуючи друге рівняння з (15.2) та виражаючи напруження через деформації, отримаємо вираз для поперечної компоненти електричної індукції:

$$D_z^{(i)} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[\pm E_z + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \varepsilon^{(i)} \right]. \quad (15.25)$$

Підставивши отримані вирази в умови (15.22), отримаємо для компонент напруженості електричного поля при розімкнутих електродах:

$$E_p^{(1)} = -\frac{1}{2a} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \int_{-a}^a \hat{\varepsilon}^{(1)} dx, \quad (15.26)$$

$$E_p^{(2)} = \frac{1}{l-a} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \int_a^l \hat{\varepsilon}^{(2)} dx. \quad (15.27)$$

Згадавши, що

$$\hat{\sigma}_p^{(i)} = \frac{1}{s_{11}^E} \left(\hat{\varepsilon}^{(i)} \mp d_{31} E_p^{(i)} \right), \quad \hat{\sigma}_K^{(i)} = \frac{1}{s_{11}^E} \hat{\varepsilon}^{(i)}, \quad (15.28)$$

для різниць енергій у чисельнику (15.19) отримаємо:

$$\begin{aligned} U_p^{(1)} - U_K^{(1)} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \left(\hat{\sigma}_p^{(1)} - \hat{\sigma}_K^{(1)} \right) \hat{\varepsilon}^{(1)} dV = \\ &= 2hb \frac{1}{2a} \frac{1}{s_{11}^E} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left[\int_{-a}^a \hat{\varepsilon}^{(1)} dx \right]^2 = \\ &= \frac{4hb}{a} \frac{1}{s_{11}^E} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} B_1^2 \sin^2 \lambda a. \quad (15.29) \\ U_p^{(2)} - U_K^{(2)} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \left(\hat{\sigma}_p^{(2)} - \hat{\sigma}_K^{(2)} \right) \hat{\varepsilon}^{(2)} dV = \\ &= 2hb \frac{1}{l-a} \frac{1}{s_{11}^E} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left[\int_{-a}^a \hat{\varepsilon}^{(2)} dx \right]^2 = \\ &= \frac{2hb}{l-a} \frac{1}{s_{11}^E} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} [A_2 (\cos \lambda l - \cos \lambda a) + B_2 (\sin \lambda l - \sin \lambda a)]^2. \quad (15.30) \end{aligned}$$

Повну енергію в частинах стрижня з короткозамкнутими електродами визначаємо за формулою

$$U_K^{(i)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \hat{\sigma}_K^{(i)} \hat{\varepsilon}^{(i)} dV = \frac{1}{2s_{11}^E} \iiint_{V_i} \left(\hat{\varepsilon}^{(i)} \right)^2 dV. \quad (15.31)$$

Відповідно отримаємо:

$$U_K^{(1)} = \frac{1}{s_{11}^E} \frac{2hb}{a} B_1^2 (\lambda a) [(\lambda a) + 0,5 \sin 2\lambda a]; \quad (15.32)$$

$$U_K^{(2)} = \frac{1}{s_{11}^E} \frac{hb}{a} (\lambda a) [(A_2^2 + B_2^2) \lambda (l - a) - (A_2^2 - B_2^2) \sin \lambda (l - a) \cos \lambda (l + a) - 2A_2 B_2 \sin \lambda (l - a) \sin \lambda (l + a)]. \quad (15.33)$$

Розглянемо вплив змін, що відбуваються у стрижні з розрізними електродами з протифазним електричним збудженням наведеного вище типу, на ефективність роботи п'єзокерамічного енергоперетворювача на робочих (резонансних частотах).

Резонансні частоти визначаються рівнянням

$$\cos \lambda l = 0 \quad (15.34)$$

і дорівнюють

$$(\lambda l)_{p,n} = \frac{\pi}{2} + \pi(n - 1), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (15.35)$$

На рис. 15.2 наведено графік залежності значення k_d^2 від величини відношення a/l для другої резонансної частоти $(\lambda l)_{p,2} = \frac{3\pi}{2}$. Як видно з графіка, максимальне значення динамічного КЕМЗ $k_{d,2,\max}^2 = 0,514$ досягається при $a = \frac{l}{3}$, а саме у випадку розділення поверхневих електродів на три рівні частини. Слід зазначити, що для стрижня із суцільним електродним покриттям $k_{d,2}^2 = 0,0998$, тобто КЕМЗ збільшується більш ніж у п'ять разів.

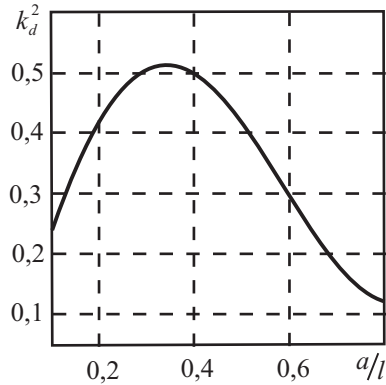


Рис. 15.2. Залежність КЕМЗ від положення розрізів електродів

Точки стрижня $x = \pm \frac{l}{3}$ є точками зміни знаку функції амплітуди електричної індукції для стрижня із суцільним електродним покриттям на другій робочій частоті:

$$\hat{D}_z = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \hat{\varepsilon} \right] =$$

$$= \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda l} \right] E_0. \quad (15.36)$$

Очевидно, що для n -ї резонансної частоти нулі даної функції визначаються рівнянням

$$\cos \lambda x = \cos (\lambda l)_{p,n} \frac{x}{l} = 0, \quad -l \leq x \leq l. \quad (15.37)$$

Звідси з урахуванням (15.35) отримуємо корені рівняння для n -ї резонансної частоти:

$$\frac{x}{l} = \pm \frac{1}{2n-1}; \pm \frac{3}{2n-1}; \dots; \pm \frac{2n-3}{2n-1}. \quad (15.38)$$

Таким чином, для отримання оптимальної з погляду ефективності перетворення енергії роботи п'єзоелемента у вигляді стрижня на n -му резонансі необхідно розділити поверхневі електроди на $2n - 1$ однакових частин. Кожна наступна з отриманих за допомогою такого розділення частин стрижня має збуджуватись електричним струмом, протифазним до струму, підведеного до сусідніх частин. При цьому оптимальність роботи на першій резонансній частоті досягається підведенням синфазного електричного навантаження до всіх частин електродного покриття.

Розглянутий вище спосіб підвищення ефективності енергоперетворення можна застосувати й для п'єзокерамічних пластин та оболонкових елементів складнішої форми.

Лекція 16. Задача про згинні коливання біморфного диска

16.1. Постановка задачі

Збудження коливань п'єзокерамічного біморфного диска (рис. 12.1) радіусом a та товщиною h , здійснюється за допомогою гармонічної зміни різниці електричних потенціалів із круговою частотою ω , яка подається від генератора коливань до плоских електродованих поверхонь $z = \pm \frac{h}{2}$ та $z = 0$. Бічна поверхня біморфа $r = a$ вільна від нормальних і дотичних напружень.

Диференціальне рівняння для визначення функції прогину має вигляд

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (16.1)$$

Прийнявши до уваги осьову симетрію та гармонічність навантаження, функцію прогину запишемо у такому вигляді:

$$w(r, t) = \hat{w}(r) e^{i\omega t}. \quad (16.2)$$

Тоді для амплітуди функції прогину отримаємо:

$$\nabla^2 \nabla^2 \hat{w} - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \hat{w} = 0, \quad (16.3)$$

або

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \right) \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{w}}{dr} + \beta^2 \hat{w} \right) = 0, \quad (16.4)$$

де $\beta^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$.

На вільному від механічних навантажень краю диска задаються граничні умови:

$$M_r|_{r=a} = 0; \quad \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (16.5)$$

16.2. Побудова розв'язку задачі

Загальний розв'язок рівняння (16.4) (зважаючи на особливості в точці $r = 0$) має вигляд

$$\hat{w}(r) = A J_0(\beta r) + C I_0(\beta r). \quad (16.6)$$

Сталі інтегрування A і C визначаються з граничних умов (16.5), які

перепишуться у вигляді

$$\hat{M}_r \Big|_{r=a} = \left(-\bar{D} \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right) \right) \Big|_{r=a} = 0$$

$$\left(\hat{Q}_r - \frac{\partial \hat{M}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=a} = \bar{D} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{w}}{dr} \right) \right] \Big|_{r=a} = 0. \quad (16.7)$$

Звідси отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$(\beta A) (-\beta a J_0(\beta a) + (1-\bar{\nu}) J_1(\beta a)) +$$

$$+ (\beta C) (\beta a I_0(\beta a) + (1-\bar{\nu}) I_1(\beta a)) = \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right) \frac{a}{\bar{D}}$$

$$(\beta A) J_1(\beta a) + (\beta C) I_1(\beta a) = 0. \quad (16.8)$$

16.3. Визначення коефіцієнта електромеханічного зв'язку за формулою Мезона та енергетичним критерієм

Згідно з формулою Мезона значення коефіцієнта електромеханічного зв'язку визначається за формулою

$$k_{d,i}^2 = \frac{\omega_{a,i}^2 - \omega_{r,i}^2}{\omega_{a,i}^2}, \quad (16.9)$$

де $\omega_{a,i}$ – антирезонансні частоти, $\omega_{r,i}$ – резонансні частоти.

Для гармонічних коливань у змінному електричному полі резонансні та антирезонансні частоти визначаються з умов нескінченного зростання $\hat{I} \rightarrow \infty$ та рівності нулю $\hat{I} = 0$ амплітуди струму зміщення в колі ідеального генератора електричної напруги.

Величина струму зміщення визначається за формулою

$$I(t) = C_0 \frac{d}{dt} \left[V_0(t) + \frac{h^2}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{S} \iint_{S^+} \nabla^2 w r d r d \varphi \right], \quad (16.10)$$

де $C_0 = \frac{\varepsilon_{33}^T (1-k_p^2) S}{h}$ – ємність біморфної пластинки при нульових деформаціях, S – площа пластинки, k_p^2 – планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Умова нескінченного зростання величини (16.10) виконується на тих частотах (βa) , для яких визначник системи рівнянь (16.8)

$$\Delta = 2(1 - \bar{\nu}) J_1(\beta a) I_1(\beta a) - (\beta a) (J_0(\beta a) I_1(\beta a) + J_1(\beta a) I_0(\beta a)) \quad (16.11)$$

обертається в нуль. Отже, рівняння резонансу отримаємо, прирівнявши визначник (16.8) до нуля.

Сталі інтегрування визначаються виразами

$$A = \frac{A^*}{\beta \Delta} I_1(\beta a); \quad C = \frac{A^*}{\beta \Delta} J_1(\beta a), \quad (16.12)$$

де $A^* = \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(\frac{V_0}{h} \right) \frac{a}{D}$.

Частинний розв'язок задачі (16.4), (16.7) запишеться у вигляді

$$\hat{w}(r) = \frac{A^*}{\beta \Delta} (I_1(\beta a) J_0(\beta r) + J_1(\beta a) I_0(\beta r)). \quad (16.13)$$

Тоді для амплітуди струму зміщення отримаємо такий вираз:

$$\hat{I} = C_0 \omega \left[V_0 - \frac{h^2}{2} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{a} \frac{A^*}{\Delta} J_1(\beta a) I_1(\beta a) \right]. \quad (16.14)$$

Прирівнюючи амплітуду струму зміщення до нуля, знаходимо рівняння антирезонансу:

$$\Delta - 3 \frac{\frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2}} J_1(\beta a) I_1(\beta a) = 0. \quad (16.15)$$

За енергетичним критерієм квадрат КЕМЗ визначається відношенням здатної до обернення накопиченої в об'ємі електричної (механічної) енергії до всієї підведеної ззовні до п'єзокерамічного тіла механічної (електричної) енергії:

$$k_d^2 = \frac{U_{\text{ел}}^{\text{об}}}{U_{\text{мех}}^{\text{пов}}} = \frac{U_p - U_k}{U_p}, \quad (16.16)$$

де U_p – повна енергія в диску з розімкненими електродами:

$$\iint_{S_1^+} (n \cdot D) dS = 0, \quad (16.17)$$

а U_k – з короткозамкнутими:

$$\psi|_{S_1^+} - \psi|_{S_1^-} = 0. \quad (16.18)$$

Указані енергії визначаються на незмінному полі деформацій ε_r та ε_φ :

$$\varepsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \varepsilon_\varphi = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (16.19)$$

За заданими деформаціями знаходимо значення напружень σ_r та σ_φ :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} ((\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi) \mp d_{31} (1 + \nu) E_z);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} ((\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) \mp d_{31} (1 + \nu) E_z). \quad (16.20)$$

Товщинна компонента вектора напруженості електричного поля E_z визначається за формулою

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{1}{2d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left(\frac{h}{4} \mp z \right) \nabla^2 \hat{w}, \quad (16.21)$$

а компонента вектора електричної індукції D_z – з формули

$$D_z = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left(\frac{V_0}{h} + \frac{h}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \nabla^2 \hat{w} \right). \quad (16.22)$$

У формулах (16.18), (16.19) верхній знак відповідає нижній частині пластинки ($0 \leq z \leq \frac{h}{2}$).

Величини повної енергії в диску з розімкнутими й короткозімкнутими електродами визначаємо за формулами

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r^p \varepsilon_r + \sigma_\varphi^p \varepsilon_\varphi + D_z^p E_z^p) dV; \quad (16.23)$$

$$U_k = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r^k \varepsilon_r + \sigma_\varphi^k \varepsilon_\varphi + D_z^k E_z^k) dV. \quad (16.24)$$

При обчисленні енергії (16.23) у формули (16.21) та (16.22) підставляється значення $\left(\frac{V_0}{h}\right)_p$, отримане з умови (16.17):

$$\left(\frac{V_0}{h}\right)_p = -\frac{1}{a^2} \frac{h}{4} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \int_0^a \nabla^2 \hat{w} r dr. \quad (16.25)$$

При обчисленні енергії (16.24) слід покласти

$$\left(\frac{V_0}{h}\right)_k = 0. \quad (16.26)$$

Відповідно матимуть відмінності й поля напружень для даних електричних умов.

Провівши інтегрування, отримаємо вирази для енергій (16.23)–(16.24):

$$\begin{aligned} U_p = & \frac{\pi h^3}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left(\frac{A^*}{\Delta} \right)^2 \beta^2 \left(\frac{1}{12} \frac{1}{1 + \nu} + \frac{1}{96} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\beta a}{2} \right) [(\beta a) (I_1^2(\beta a) J_0^2(\beta a) + J_1^2(\beta a) I_0^2(\beta a)) + \\ & + 2 (J_1(\beta a) J_0(\beta a) I_1^2(\beta a) + I_1(\beta a) I_0(\beta a) J_1^2(\beta a))] - \\ & - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{1}{4} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) I_1^2(\beta a) J_1^2(\beta a); \end{aligned} \quad (16.27)$$

$$U_k = \frac{\pi h^3}{s_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{A^*}{\Delta} \right)^2 \beta^2 \left(\frac{1}{12} \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{96} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\beta a}{2} \right) [(\beta a) (I_1^2 (\beta a) J_0^2 (\beta a) + J_1^2 (\beta a) I_0^2 (\beta a)) +$$

$$+ 2 (J_1 (\beta a) J_0 (\beta a) I_1^2 (\beta a) + I_1 (\beta a) I_0 (\beta a) J_1^2 (\beta a))] -$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} I_1^2 (\beta a) J_1^2 (\beta a) . \quad (16.28)$$

Різниця енергій у чисельнику (16.16) має вигляд

$$U_p - U_k = \frac{\pi h^3}{4s_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{A^*}{\Delta} \right)^2 \beta^2 \frac{k_p^2}{1-k_p^2} I_1^2 (\beta a) J_1^2 (\beta a) . \quad (16.29)$$

Значення резонансних та антирезонансних частот для п'єзодиска, виготовленого з кераміки PZT-4, отримані з рівнянь резонансу та антирезонансу, а також значення КЕМЗ, отримані за формулами (16.9) та (16.16), наведено в табл. 16.1.

Таблиця 16.1

Номер резонансу	$(\beta a)_a$	$(\beta a)_p$	k_d^2 за Мезоном	k_d^2 за енергетичним критерієм
1	3,170	3,068	0,0634	0,1749
2	6,291	6,235	0,0180	0,0468
3	9,428	9,389	0,0082	0,0212
4	12,568	12,539	0,0047	0,0120
5	15,709	15,686	0,0030	0,0077
6	18,851	18,831	0,0021	0,0053

Значення КЕМЗ, отримані за енергетичним критерієм становлять приблизно 75 % КЕМЗ для планарних коливань круглої пластинки. Подібний результат для статичних КЕМЗ було отримано у лекції 14. Виявлена відмінність між результатами за Мезоном і за енергетичним критерієм є суттєвою. Значення КЕМЗ, отримані за енергетичним критерієм, перевищують значення, отримані за формулою Мезона, у 2–3 рази. Як і слід було очікувати, формула Мезона на неоднорідній деформації дає значно занижені результати.

Лекція 17. Планарні коливання п'єзодиска з вільним від електродного покриття краєм

17.1. Постановка задачі. Побудова розв'язку задачі

Розглядається кругла пластинка радіусом a та товщиною $2h$. Електродне покриття також має форму круга з радіусом b та центром, що збігається з центром пластинки $r \leq b$ (область 1) (рис. 17.1). Область, вільна від електродного покриття (область 2), – це кільце $b \leq r \leq a$. Коливання пластинки збуджуються різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2V_0 e^{i\omega t}$, що підведена до електродів.

Унаслідок того, що частинки рухаються радіально, вектор переміщень має вигляд

$$\vec{u} = \vec{e}_r u_r(r, t).$$

Для області з електродним покриттям рівняння руху матиме вигляд:

$$\frac{2}{1-\nu} \left[\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} \right] = 2\rho s_{11}^E \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2}.$$

Елементи тензора напружень визначаються зі співвідношень:

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z^{(1)} \right];$$

$$\sigma_\varphi^{(q)} = \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{u_r^{(1)}}{r} - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z^{(1)} \right],$$

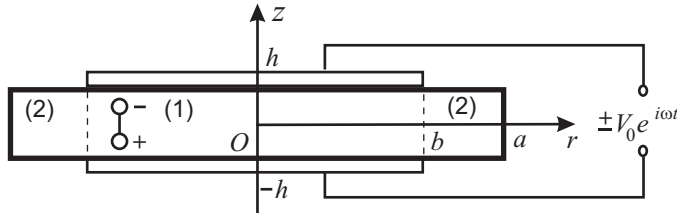


Рис. 17.1. П'єзодиск з неелектродованим краєм

де $E_z^{(1)} = -\frac{V_0}{h} e^{i\omega t}$.

Виділивши часовий множник ($u_r^{(1)} = \hat{u}_r^{(1)} e^{i\omega t}$), для амплітудної складової радіальних переміщень отримаємо рівняння Бесселя:

$$r^2 \frac{d^2 \hat{u}_r^{(1)}}{dr^2} + r \frac{d\hat{u}_r^{(1)}}{dr} + [(\kappa r)^2 - 1] \hat{u}_r^{(1)} = 0,$$

де $\kappa = \frac{\omega}{c}$; $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_s E_{11} (1-\nu^2)}}$; $r \leq b$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\hat{u}_r^{(1)} = A J_1(\kappa r). \quad (17.1)$$

Розглянемо тепер область $b \leq r \leq a$.

Для області без електродного покриття $D_z^{(2)} \equiv 0$. Рівняння руху тоді має вигляд:

$$\frac{2}{1-\nu} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1+k_p^2} \right) \left[\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} \right] = 2\rho_s E_{11} \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2}.$$

Компоненти напружень визначаються співвідношеннями:

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left[\left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \text{div} \vec{u}^{(2)} + \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} \right];$$

$$\sigma_\varphi^{(2)} = \frac{1}{s_{11}^E (1+\nu)} \left[\left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right) \text{div} \vec{u}^{(2)} + \frac{u_r^{(2)}}{r} \right].$$

Для амплітудної складової радіальних переміщень маємо рівняння

$$r^2 \frac{d^2 \hat{u}_r^{(2)}}{dr^2} + r \frac{d\hat{u}_r^{(2)}}{dr} + [(\kappa_1 r)^2 - 1] \hat{u}_r^{(2)} = 0,$$

де $\kappa_1 = \frac{\omega}{c_1}$; $c_1 = c \sqrt{\frac{2-(1-\nu)k_p^2}{2(1-k_p^2)}}$; $b \leq r \leq a$.

Загальний розв'язок цього рівняння записується у вигляді

$$\hat{u}_r^{(2)} = B J_1(\kappa_1 r) + C Y_1(\kappa_1 r). \quad (17.2)$$

Таким чином, отримано загальні розв'язки диференціальних рівнянь для радіальних переміщень в області з електродним покриттям і в області, вільній від електродів. Довільні сталі A , B і C визначаються з крайової умови

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a} = 0$$

та умов на межі розділення областей:

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=b}; \quad u_r^{(1)} \Big|_{r=b} = u_r^{(2)} \Big|_{r=b}.$$

Отримано систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими. Розв'язуючи цю систему за методом Крамера, одержимо такі

вирази для визначників:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{a(1-\nu)} \left\{ \kappa_c (1-\nu) J_1(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta(a, b) + \Delta^{(1)}(b, a) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \kappa J_0(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta^{(1)}(a, b) - \Delta^{(2)}(a, b) \right] \right\}; \\ \Delta_1 &= - \left[\kappa_c a \Delta^{(1)}(a, b) - \Delta^{(2)}(a, b) \right] \cdot \frac{1}{a} d_{31} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{V_0}{h}; \\ \Delta_2 &= - [\kappa_c a Y_0(\kappa_1 a) - Y_1(\kappa_1 a)] J_1(\kappa b) \cdot \frac{1}{a} d_{31} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{V_0}{h}; \\ \Delta_3 &= [\kappa_c a J_0(\kappa_1 a) - J_1(\kappa_1 a)] J_1(\kappa b) \cdot \frac{1}{a} d_{31} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{V_0}{h}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

У формулах (17.3) використано такі позначення:

$$\begin{aligned}\Delta(a, b) &= J_0(\kappa_1 a) Y_0(\kappa_1 b) - J_0(\kappa_1 b) Y_0(\kappa_1 a); \\ \Delta^{(1)}(a, b) &= J_0(\kappa_1 a) Y_1(\kappa_1 b) - J_1(\kappa_1 b) Y_0(\kappa_1 a); \\ \Delta^{(2)}(a, b) &= J_1(\kappa_1 a) Y_1(\kappa_1 b) - J_1(\kappa_1 b) Y_1(\kappa_1 a); \quad \kappa_c = \frac{\kappa^2}{\kappa_1}.\end{aligned}$$

Отже, визначенням довільних сталих отримані вирази для амплітудних складових радіальних переміщень. За відомими переміщеннями легко одержати вирази для напружень $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$, $\sigma_r^{(2)}$, $\sigma_\varphi^{(2)}$, відповідних деформацій, електричної індукції $D_z^{(1)}$ і напруженості електричного поля $E_z^{(2)}$.

17.2. Визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку за формулою Мезона та енергетичним критерієм

Дослідження ефективності енергоперетворення будемо проводити на першій резонансній частоті. Для цього визначимо КЕМЗ за формулою Мезона:

$$k_d^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2},$$

де ω_a – антирезонансна, ω_r – резонансна частоти.

Для області з електродним покриттям запишемо вираз для амплітудної складової електричної індукції:

$$\begin{aligned}\hat{D}_z^{(1)} &= -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \times \\ &\times \left[1 - \frac{k_p^2}{2(1 - k_p^2)} \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\kappa_c a \Delta^{(1)}(a, b) - \Delta^{(2)}(a, b)}{\Delta} \cdot \frac{\kappa}{a} J_0(\kappa r) \right] \frac{V_0}{h}.\end{aligned}$$

Скориставшись формулою

$$I(t) = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z dS,$$

для амплітуди струму зміщення отримаємо вираз

$$\hat{I} = i\omega C_0 \left[1 - \frac{k_p^2}{2(1-k_p^2)} \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\kappa_c a \Delta^{(1)}(a,b) - \Delta^{(2)}(a,b)}{\Delta} \cdot \frac{1}{ab} J_1(\kappa b) \right] 2V_0,$$

де $C_0 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi a^2 / 2h$.

З умови рівності нулю амплітуди струму зміщення маємо рівняння для визначення антирезонансних частот:

$$\begin{aligned} & (1 - k_p^2) b \left\{ \kappa_c (1 - \nu) J_1(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta(a,b) + \Delta^{(1)}(b,a) \right] - \right. \\ & \left. - \kappa J_0(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta^{(1)}(a,b) - \Delta^{(2)}(a,b) \right] \right\} - \\ & - k_p^2 (1 + \nu) \left[\kappa_c a \Delta^{(1)}(a,b) - \Delta^{(2)}(a,b) \right] J_1(\kappa b) = 0. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Резонансні частоти визначимо з рівняння, яке отримаємо з нескінченного зростання амплітуди струму зміщення:

$$\begin{aligned} & \frac{c_1}{c} (1 - \nu) J_1(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta(a,b) + \Delta^{(1)}(b,a) \right] - \\ & - J_0(\kappa b) \left[\kappa_c a \Delta^{(1)}(a,b) - \Delta^{(2)}(a,b) \right] = 0. \end{aligned} \quad (17.5)$$

У табл. 17.1 наведено значення перших коренів $(\kappa a)_a^{(1)}$ та $(\kappa a)_r^{(1)}$ трансцендентних рівнянь (17.4) і (17.5) для різних значень відношення b/a . Отримані значення резонансних та антирезонансних частот при $b = a$ (випадок пластинки з повністю електродованою поверхнею) збігаються з результатами, наведеними в лекції 9.

Таблиця 17.1

b/a	$(\kappa a)_r^{(1)}$	$(\kappa a)_a^{(1)}$
0,6	2,348	2,677
0,65	2,326	2,684
0,7	2,298	2,676
0,75	2,265	2,653
0,8	2,229	2,618
0,85	2,190	2,574
0,9	2,150	2,523
0,95	2,108	2,468
1	2,067	2,411

Згідно з енергетичним означенням, КЕМЗ визначається як відношення накопиченої в об'ємі тіла електричної (механічної) енергії, що здатна до обернення, до всієї підведеної до тіла механічної (електричної) енергії:

$$k_d^2 = \frac{U_{\text{ел}}^{\text{об}}}{U_{\text{мех}}^{\text{п}}} = \frac{U_p - U_{\text{к}}}{U_p},$$

де U_p – енергія в об'ємі тіла при розімкнутих електродах. Для нашої задачі

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + D_z E_z) dV \quad \text{за умови} \quad \iint_{S_1^+} D_z dS = 0;$$

$U_{\text{к}}$ – енергія в об'ємі тіла при короткозамкнутих електродах ($E_z = 0$):

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) dV.$$

Указані енергії обчислюються при незмінному полі деформацій.

Зрозуміло, що для області 2 ($b \leq r \leq a$) $U_p^{(2)} = U_{\text{к}}^{(2)}$, так як $D_z^{(2)} \equiv 0$.

Обчисливши відповідні інтеграли, маємо такі значення амплітудних складових енергій:

$$\begin{aligned} \hat{U}_p^{(2)} &= \hat{U}_{\text{к}}^{(2)} = \frac{\pi}{s_{11}^E (1 + \nu)} \left\{ \kappa^2 \frac{r^2}{2} \left[(BJ_0(\kappa_1 r) + CY_0(\kappa_1 r))^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (BJ_1(\kappa_1 r) + CY_1(\kappa_1 r))^2 \right] - (BJ_1(\kappa_1 r) + CY_1(\kappa_1 r))^2 \right\} \Big|_b^a; \\ \hat{U}_{\text{к}}^{(1)} &= \frac{\pi}{s_{11}^E (1 + \nu)} A^2 \left\{ \frac{(\kappa b)^2}{2(1 - \nu)} [J_0^2(\kappa b) + J_1^2(\kappa b)] - J_1^2(\kappa b) \right\}; \\ \hat{U}_p^{(1)} &= \hat{U}_{\text{к}}^{(1)} + \frac{\pi}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} A^2 J_1^2(\kappa b). \end{aligned}$$

Тоді для визначення КЕМЗ згідно з енергетичним означенням отримаємо формулу

$$k_d^2 = \frac{\frac{k_p^2}{1 - k_p^2} A^2 J_1^2(\kappa b)}{\frac{k_p^2}{1 - k_p^2} A^2 J_1^2(\kappa b) + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left\{ \tilde{U}_{\text{к}}^{(1)} + \tilde{U}_{\text{к}}^{(2)} \right\}},$$

де $\tilde{U}_{\text{к}}^{(1)} = \tilde{\Delta}_1^2 \left\{ \frac{(\kappa b)^2}{2(1 - \nu)} [J_0^2(\kappa b) + J_1^2(\kappa b)] - J_1^2(\kappa b) \right\};$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{к}}^{(2)} &= \left\{ \kappa^2 \frac{r^2}{2} \left[\left(\tilde{\Delta}_2 J_0(\kappa_1 r) + \tilde{\Delta}_3 Y_0(\kappa_1 r) \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\tilde{\Delta}_2 J_1(\kappa_1 r) + \tilde{\Delta}_3 Y_1(\kappa_1 r) \right)^2 \right] - \left(\tilde{\Delta}_2 J_1(\kappa_1 r) + \tilde{\Delta}_3 Y_1(\kappa_1 r) \right)^2 \right\} \Big|_b^a. \end{aligned}$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_1 &= \kappa_c a \Delta^{(1)}(a, b) - \Delta^{(2)}(a, b); \\ \tilde{\Delta}_2 &= -[\kappa_c a Y_0(\kappa_1 a) - Y_1(\kappa_1 a)] J_1(\kappa b); \\ \Delta_3 &= [\kappa_c a J_0(\kappa_1 a) - J_1(\kappa_1 a)] J_1(\kappa b).\end{aligned}$$

На рис.17.2 зображено графіки залежності КЕМЗ від величини b/a . Суцільна лінія відповідає розрахункам, проведеним за формулою Мезона. Штрихована лінія побудована за результатами, отриманими за енергетичним означенням. Видно, що за формулою Мезона отримані значення КЕМЗ дещо нижчі ніж КЕМЗ, обчислені за енергетичним критерієм.

Крім того, обидві криві мають максимуми:

$$\frac{b}{a} = 0,83; \text{ значення } k_d^2 = 0,276 \text{ (за формулою Мезона).}$$

$$\frac{b}{a} = 0,9; \text{ значення } k_d^2 = 0,291 \text{ (за енергетичним означенням).}$$

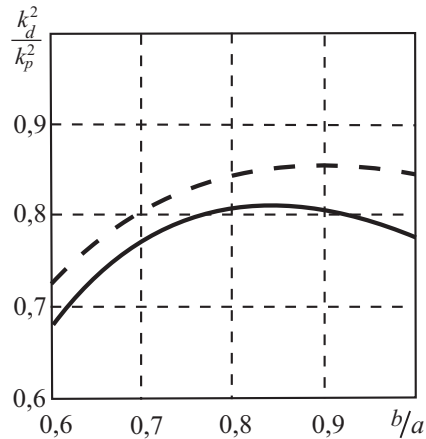


Рис. 17.2. Залежність КЕМЗ від відносних розмірів електродів

Таким чином, для п'єзоелементів у вигляді круглих пластинок раціональним круглим електродним покриттям є покриття з радіусом, що становить 90 % від радіуса пластини.

Лекція 18. Планарні коливання п'єзокерамічного диска з розрізними електродами

18.1. Постановка задачі. Побудова розв'язку задачі

Розглядається кругла п'єзокерамічна пластинка радіусом a , на електродній поверхні якої є тонкий, концентричний її краю діелектричний проміжок (розріз) з радіусом b (рис. 18.1). Коливання пластинки збуджуються різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2 V_0 e^{i\omega t}$, прикладеною до електродів.

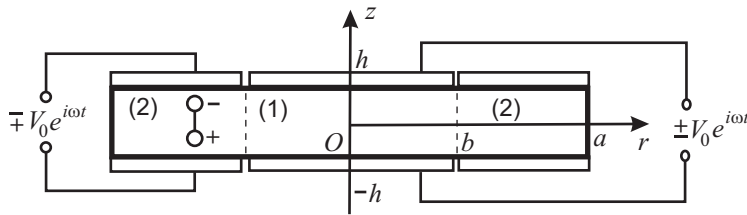


Рис. 18.1. П'єзодиск із розрізними електродами

Для ненульової складової вектора напруженості поля маємо:

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{i\omega t}; \quad E_z^{(2)} = -E_0 e^{i\omega t}, \quad \text{де } E_0 = -\frac{V_0}{h}. \quad (18.1)$$

Частинки пластинки рухаються радіально внаслідок осьової симетрії задачі, тому вектор переміщень має вигляд

$$\vec{u} = \vec{e}_r u_r(r, t). \quad (18.2)$$

Для визначення амплітуди переміщень \hat{u}_r як в області 1, так і в області 2 отримуємо рівняння Бесселя

$$r^2 \frac{d^2 \hat{u}_r^{(i)}}{dr^2} + r \frac{d\hat{u}_r^{(i)}}{dr} + [(\kappa r)^2 - 1] \hat{u}_r^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (18.3)$$

де $\kappa = \frac{\omega}{c}$; $c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}$.

Його загальні розв'язки для внутрішньої та зовнішньої частин диска відповідно мають вигляд

$$\hat{u}_r^{(1)} = A J_1(\kappa r); \quad \hat{u}_r^{(2)} = B J_1(\kappa r) + C Y_1(\kappa r). \quad (18.4)$$

Компоненти тензора напружень визначаються виразами

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= \frac{1}{S_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \pm d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_0 \right]; \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{S_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{u_r^{(1)}}{r} \pm d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_0 \right].\end{aligned}\quad (18.5)$$

У (18.5) знак "-" вибирається для області 1, знак "+" – для області 2.

Довільні сталі загальних розв'язків знайдемо з умов

$$\sigma_r^{(2)}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_r^{(1)}|_{r=b} = \sigma_r^{(2)}|_{r=b}; \quad u_r^{(1)}|_{r=b} = u_r^{(2)}|_{r=b}. \quad (18.6)$$

$$\begin{aligned}A &= -\frac{\pi b [\kappa a \Delta^{(1)}(a, b) - (1 - \nu) \Delta^{(1)}(a, b)] + a}{\kappa a J_0(\kappa a) - (1 - \nu) J_1(\kappa a)} d_{31} (1 + \nu) E_0; \\ B &= -\frac{\pi b [\kappa a Y_0(\kappa a) - (1 - \nu) Y_1(\kappa a)] - a}{\kappa a J_0(\kappa a) - (1 - \nu) J_1(\kappa a)} d_{31} (1 + \nu) E_0; \\ C &= -\pi b J_1(\kappa b) d_{31} (1 + \nu) E_0,\end{aligned}\quad (18.7)$$

де $\Delta^{(1)}(a, b) = J_0(\kappa a) Y_1(\kappa b) - J_1(\kappa b) Y_0(\kappa a)$.

18.2. Визначення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку за енергетичним критерієм

Визначимо величини динамічних КЕМЗ за енергетичним критерієм:

$$k_d^2 = \frac{U_{\text{ел}}^{\text{об}}}{U_{\text{мех}}^{\text{п}}} = \frac{U_p - U_{\text{к}}}{U_p}, \quad (18.8)$$

де U_p – енергія в об'ємі тіла при розімкнутих електродах. Для нашої задачі

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + D_z E_z) dV \quad \text{за умови} \quad \iint_{S_1^+} D_z dS = 0; \quad (18.9)$$

$U_{\text{к}}$ – енергія в об'ємі тіла при короткозамкнутих електродах ($E_z = 0$):

$$U_{\text{к}} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi) dV. \quad (18.10)$$

Обчисливши відповідні інтеграли, отримаємо значення амплітудних складових енергії:

1) для внутрішньої області ($r < b$):

$$\hat{U}_{\text{к}}^{(1)} = \frac{\pi}{S_{11}^E (1 + \nu)} A^2 \left\{ \frac{(\kappa b)^2}{2(1 - \nu)} [J_0^2(\kappa b) + J_1^2(\kappa b)] - J_1^2(\kappa b) \right\}; \quad (18.11)$$

$$\hat{U}_p^{(1)} = \hat{U}_K^{(1)} + \frac{\pi}{S_{11}^E (1-\nu)} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} A^2 J_1^2(\kappa b); \quad (18.12)$$

2) для кільцевої частини:

$$\hat{U}_K^{(2)} = \frac{\pi}{S_{11}^E (1+\nu)} \left\{ \frac{\kappa^2}{1-\nu} \frac{r^2}{2} \left[(BJ_0(\kappa r) + CY_0(\kappa r))^2 + (BJ_1(\kappa r) + CY_1(\kappa r))^2 \right] - (BJ_1(\kappa r) + CY_1(\kappa r))^2 \right\} \Big|_b^a; \quad (18.13)$$

$$\hat{U}_p^{(2)} = \hat{U}_K^{(2)} + \hat{U}_+^{(2)},$$

де

$$\hat{U}_+^{(2)} = \pi \left\{ \frac{1}{S_{11}^E (1-\nu)} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{a^2 - b^2} \left[B(aJ_1(\kappa a) - bJ_1(\kappa b))^2 + C(aY_1(\kappa a) - bY_1(\kappa b))^2 \right] \right\}.$$

Вираз КЕМЗ у цьому випадку має вигляд:

$$k_d^2 = \frac{\frac{k_p^2}{1-k_p^2} \tilde{\Delta}_A'' J_1^2(\kappa b) + \hat{U}_+^{(2)}}{\frac{1-\nu}{1+\nu} \left\{ \tilde{U}_k^{(1)} + \tilde{U}_k^{(2)} \right\} + \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \tilde{\Delta}_A'' J_1^2(\kappa b) + \hat{U}_+^{(2)}}, \quad (18.14)$$

$$\text{де } \tilde{U}_k^{(1)} = \left(\tilde{\Delta}_A'' \right)^2 \left\{ \frac{(\kappa b)^2}{2(1-\nu)} [J_0^2(\kappa b) + J_1^2(\kappa b)] - J_1^2(\kappa b) \right\},$$

$$\tilde{U}_k^{(2)} = \frac{\pi}{S_{11}^E} \left\{ \frac{\kappa^2}{(1-\nu)} \frac{r^2}{2} \left[\left(\tilde{\Delta}_B'' J_0(\kappa r) + \tilde{\Delta}_C'' Y_0(\kappa r) \right)^2 + \left(\tilde{\Delta}_B'' J_1(\kappa r) + \tilde{\Delta}_C'' Y_1(\kappa r) \right)^2 \right] - \left(\tilde{\Delta}_B'' J_1(\kappa r) + \tilde{\Delta}_C'' Y_1(\kappa r) \right)^2 \right\} \Big|_b^a;$$

$$\tilde{\Delta}_A'' = - \left(\kappa a \Delta^{(1)}(a, b) - (1-\nu) \Delta^{(2)}(a, b) \right) + \frac{a}{\pi b};$$

$$\tilde{\Delta}_B'' = - \left(\kappa a Y_0(\kappa a) - (1-\nu) Y_1(\kappa a) \right) - \frac{a}{\pi b}; \quad \tilde{\Delta}_C'' = J_1(\kappa b).$$

Радіус розрізу b визначається нулем функції амплітуди електричної індукції п'єзокерамічної круглої пластинки із суцільним електродним покриттям. Для амплітуди товщинної компоненти електричної індукції маємо:

$$\hat{D}_z^{(1)} = -\varepsilon_{33}^T (1-k_p^2) \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \cdot \frac{\kappa a J_0(\kappa r)}{\kappa a J_0(\kappa a) - (1-\nu) J_1(\kappa a)} \right] \frac{V_0}{h}.$$

Для резонансних частот поведінка цієї величини цілком характеризується поведінкою функції Бесселя $J_0(\kappa r)$. На рис. 18.2 наведено графіки вказаної функції залежно від величини відношення $\frac{r}{a}$ для першої – четвертої головних мод коливань. Як видно з графіка, на першій резонансній частоті функція не змінює знак. Для вищих за першу мод коливань маємо одну чи

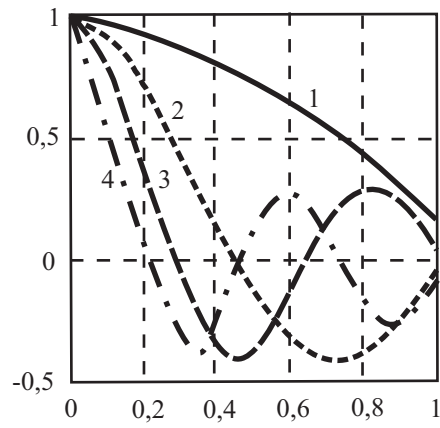


Рис. 18.2. Функція $J_0(kr)$

більше змін знаків функції $J_0(kr)$. Відповідно раціональна кількість розрізів на електродних поверхнях диска збігатиметься з кількістю нулів указаної функції. Розглянутій вище задачі про протифазне збудження коливань відповідає випадок другої резонансної частоти. У цьому випадку розріз (рис. 18.2) повинен мати радіус $b = 0,44a$. Тоді з (18.14) отримаємо значення КЕМЗ $k_{d,2}^2 = 0,1626$, у той час як для диска із суцільним електродним покриттям $k_{d,2}^2 = 0,04$.

Список літератури

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. П. Мезона. – М., 1966. – Т. 1 – Ч. А. – С. 204–326.
2. Борисейко О.В. Планарні коливання круглої п'єзокерамічної платівки з неповним електродним покриттям // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 1. – С. 95–97.
3. Борисейко О.В. Планарні коливання п'єзокерамічного диска при протифазному збудженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 89-94.
4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К., 1978.
5. Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. – 1976. – 12, №5. – С. 71–78.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К., 1981.
7. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М., 1978.
8. Карлаш В.Л., Улитко А.Ф. Исследование колебаний пьезокерамических элементов методом пьезотрансформаторного датчика // Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций. – К., 1984. – С. 178 – 196.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М., 1982.
10. Мезон У.П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М., 1951.
11. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5: Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К., 1989.
12. Новацкий В. Теория упругости. – М., 1975.
13. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М., 1963.
14. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды // Тр. Моск. ин-та хим. машиностроения. –

1974. – 56. – С. 3–13.

15. Половинкина И.Б., Улитко А.Ф. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып. 18. – С. 10–17.

16. Пьезокерамические преобразователи: Справочник / В.В. Ганопольский, Б.А. Касаткин, Ф.Ф. Легуша и др. – Л., 1984.

17. Смайт В. Электростатика и электродинамика. – М., 1954.

18. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М., 1976.

19. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. – М., 1982.

20. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975.

21. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К., 1979.

22. Фрелих Г. Теория диэлектриков. – М., 1960.

23. Piezoxide-Wandler, Grundlagen und Anwendungen, Herausgegeben von der Valvo GmbH. – Hamburg, 1968.

24. Reichard W. Elektroakustik. – Leipzig, 1971.

25. Toulis W.J. Electromechanical coupling and composite transducers // J. Acous. Soc. Amer. – 1963. – 35, №1. – P. 74–80.