М.О.Перестюк, О.С.Чернікова

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

Основним методом розв’язання задач стійкості є метод функцій Ляпунова. Цей метод було запропоновано О.М.Ляпуновим (під назвою «другий метод») у його праці «Общая задача об устойчивости движения», яку вперше було опубліковано у 1892 році. Другий метод Ляпунова базується на застосуванні допоміжних функцій (функцій Ляпунова). Метод дозволяє робити висновок про характер поведінки розв’язків системи диференціальних рівнянь на підставі факту існування деякої функції, яка володіє певними властивостями. Перевага методу полягає в тому, що для його застосування немає потреби у знаходженні явного вигляду розв’язків досліджуваної системи. Метод функцій Ляпунова виявився ефективним при розв’язанні як теоретичних, так і прикладних задач теорії стійкості , що сприяло його подальшій інтенсивній розробці у роботах М.Г.Четаєва, К.П.Персидського, Є.О.Барбашина, М.М.Красовського, В.І.Зубова , І.Г Малкіна та інших вчених.

У даному посібнику викладено основи другого методу Ляпунова у теорії стійкості.

Нагадаємо означення ключових понять теорії стійкості.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{0.1}$$

визначену на множині $\Omega = [a,\infty) \times D$, де D - область в R^n. Вважатимемо, що f - неперервна функція і така, що забезпечує умову єдиності розв’язків задачі Коші з довільними початковими даними з Ω. Через $x(t,t_0,x_0)$ будемо позначати розв’язок системи (0.1), який у момент $t = t_0$, $t_0 \in [a,\infty)$, проходить через точку x_0; через $\|x\|$ позначатимемо евклідову норму вектора x.

Розв’язок $x = \varphi(t)$ $(a \le t < \infty)$ системи (0.1) називається *стійким за Ляпуновим* (або просто *стійким*), якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \in [a,\infty)$ можна вказати $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що для кожного x_0 такого, що

$$\left\| x_0 - \varphi(t_0) \right\| < \delta ,$$

розв'язок $x(t,t_0,x_0)$ існує на півосі $[t_0,\infty)$ і задовольняє нерівність

$$\left\| x(t,t_0,x_0) - \varphi(t) \right\| < \varepsilon$$

при всіх $t \geq t_0$.

Геометрично інтерпретувати введене поняття стійкості розв'язку при t_0 можна таким чином: графік кожного розв'язку, який в момент t_0 виходить із δ- околу точки $\varphi(t_0)$, повинен при $t \geq t_0$ належати ε -трубці графіка розв'язку $\varphi(t)$.

Розв'язок $x = \varphi(t)$ $(a \leq t < \infty)$ системи диференціальних рівнянь (0.1) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий і *притягуючий*, тобто якщо він стійкий, і для довільного $t_0 \in [a,\infty)$ можна вказати таке $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$, що будь-який розв'язок $x(t,t_0,x_0)$ тієї ж системи, який задовольняє нерівність $\left\| x_0 - \varphi(t_0) \right\| < \delta_0$, існує на півосі $[t_0,\infty)$ і має властивість

$$\lim_{t\to\infty} \left\| x(t,t_0,x_0) - \varphi(t) \right\| = 0 \qquad (0.2)$$

Неважко переконатися в тому, що для системи з неперервною правою частиною можна обмежуватись перевіркою на стійкість (асимптотичну стійкість) розв'язку лише для деякого заданого початкового моменту t_0.

Зауважимо, що виконання лише граничної рівності (0.2) у загальному випадку не достатньо для стійкості розв'язку $\varphi(t)$, тобто притягування не гарантує стійкість.

Дослідження стійкості розв'язку $x = \varphi(t)$ $(a \leq t < \infty)$, системи рівнянь (0.1) можна звести до дослідження стійкості тривіального розв'язку $y(t) \equiv 0$ іншої системи за допомогою заміни $y = x - \varphi(t)$. Відносно нової змінної при такій заміні одержимо систему:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,\phi(t)+y) - f(t,\phi(t)) = g(t,y), \qquad (0.3)$$

де $g(t,0)=0,\ t\in[a,\infty)$. Стійкість (асимптотична стійкість) розв’язку $x=\varphi(t)$ системи рівнянь (0.1) еквівалентна стійкості (асимптотичній стійкості) тривіального розв’язку системи (0.3).

У подальшому ми будемо розглядати питання стійкості тривіального розв’язку системи диференціальних рівнянь, вважаючи, що $0\in D$, $f(t,0)=0$ для всіх $t\in[a,\infty)$.

У даному посібнику матеріал викладено наступним чином. У пп. 1,2 наводиться допоміжний матеріал та викладено теореми Ляпунова для автономних систем диференціальних рівнянь. Теореми Ляпунова для неавтономних систем розглянуто у п.7.

Пп. 3, 4 присвячено деяким узагальненням теорем Ляпунова; зокрема, тут розглянуто теореми М.М.Красовського і Є.О.Барбашина.

Головною проблемою при застосуванні теорем Ляпунова та їх узагальнень є питання про існування та побудову функцій Ляпунова. В п.5 розглянуто питання про існування та побудову функцій Ляпунова для лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У п.6 за допомогою результатів п.5 вивчаються питання, пов’язані зі стійкістю за першим наближенням.

У пп. 8, 9 продемонстровано, як метод функцій Ляпунова може бути застосованим для дослідження питань обмеженості розв’язків диференціальних рівнянь; зокрема, наведено теорему Йошизави, що встановлює достатні умови дисипативності системи диференціальних рівнянь, а також теорему про стійкість за Лагранжем.

1. Допоміжні функції

Нехай $V(x)=V(x_1,x_2,...,x_n)$- скалярна функція змінної $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, визначена і неперервна на множині

$$J_h = \left\{ x \in R^n : \|x\| < h, h > 0 \right\}, \tag{1.1}$$

і така, що

$$V(0) = 0.$$

Функція $V(x)$ називається *додатно визначеною (від'ємно визначеною)* на множині J_h, якщо при всіх $x \in J_h$, крім $x = 0$, має місце нерівність $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$). В обох випадках функція $V(x)$ називається *знаковизначеною* на множині J_h .

Функція $V(x)$ називається *знакосталою* на множині J_h, якщо для всіх $x \in J_h$ виконується нерівність $V(x) \geq 0$ або нерівність $V(x) \leq 0$. У першому випадку $V(x)$ є *додатно сталою,* а у другому - *від'ємно сталою* на множині J_h.

Якщо функція $V(x)$ приймає на множині J_h як додатні, так і від'ємні значення, то вона називається *знакозмінною* на множині J_h.

Згідно з наведеними означеннями функція двох змінних $V(x_1, x_2) = 1 - \cos x_1 + x_2^4$ є додатно визначеною у крузі $x_1^2 + x_2^2 < 4\pi^2$; функція $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ є додатно сталою в будь-якому околі початку координат, оскільки вона дорівнює нулю не тільки у точці (0;0), а й у всіх точках прямої $x_1 - x_2 = 0$; функція $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ у довільному околі початку координат може приймати значення різних знаків, отже ця функція є знакозмінною.

Припустимо, що $V(x)$ - форма порядку m (однорідний многочлен степеня m відносно $x_1, x_2, ..., x_n$). Оскільки в цьому випадку

$$V(\lambda x) = \lambda^m V(x)$$

при довільному λ, то очевидно, що із знаковизначеності (знакозмінності) форми V у деякому околі J_h початку координат випливатиме знаковизначеність (знакозмінність) цієї форми у всьому просторі.

Очевидним є той факт, що форма непарного порядку є знакозмінною функцією. Якщо ж порядок m форми парний, то форма може бути і знаковизначеною, і знакозмінною, і знакосталою.

Для квадратичної форми

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i x_j\ ,\ \alpha_{ij}=\alpha_{ji}\ , \tag{1.2}$$

необхідну й достатню умову додатної визначеності дає наступна теорема.

Теорема 1.1 (критерій Сільвестра). Для того, щоб квадратична форма (1.2) була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці $A=\left(\alpha_{ij}\right)$, що відповідає формі (1.1), були додатними:

$$\alpha_{11}>0,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}>0,\ldots,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \hdashline \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

Встановимо деякі факти, які у подальшому буде застосовано як допоміжні.

Лема 1.1. Нехай V - знаковизначена (знакозмінна) форма порядку m, а функція $W(x)$ в області J_h задовольняє умову

$$\left|W(x)\right|\le K\|x\|^m, \tag{1.3}$$

де K - досить мале додатне число (малість визначається формою V).

Тоді функція $U(x)=V(x)+W(x)$ в області J_h також буде знаковизначеною того ж знаку, що й функція V (або відповідно - знакозмінною).

Доведення. Нехай $V(x)$- додатно визначена форма порядку m:

$$V(x)>0,x\neq 0;$$

$V(\lambda x)=\lambda^m V(x)$. Доведемо, що $U(x)$- додатно визначена функція, $x\in J_h$. Покладемо $x_i=\alpha_i\|x\|$, $i=1,2,\ldots,n$; $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$. При цьому $\|\alpha\|=1$, $x=\|x\|\alpha$, і

$$U(x)=V(x)+W(x)=V\left(\|x\|\alpha\right)+W\left(\|x\|\alpha\right)=\|x\|^m V(\alpha)+W\left(\|x\|\alpha\right). \tag{1.4}$$

Нехай $l = \inf\limits_{\|\alpha\|=1} V(\alpha)$; очевидно, що $l > 0$. З (1.4), враховуючи умову (1.3), дістанемо:

$$U(x) \geq \|x\|^m (l - K).$$

Якщо K - достатньо мале додатне число ($K < l$), то з останньої нерівності випливає доводжувана додатна визначеність функції $U(x)$.

Для випадку від'ємно визначеної форми $V(x)$ доведення твердження леми аналогічне.

Припустимо тепер, що $V(x)$ - знакозмінна форма порядку m. Тоді існують такі вектори $\bar{\alpha}$ і $\tilde{\alpha}$, $\|\bar{\alpha}\| = 1, \|\tilde{\alpha}\| = 1$, що $V(\bar{\alpha}) = -c_1 < 0$, $V(\tilde{\alpha}) = c_2 > 0$. Нехай $0 < K < \min(c_1, c_2)$. При такому припущенні на підставі (1.4) з врахуванням (1.3) приходимо до висновку, що можна вказати $\bar{x} \in J_h, \tilde{x} \in J_h$ (які відповідають $\alpha = \bar{\alpha}$ і $\alpha = \tilde{\alpha}$), для яких буде $U(\bar{x}) < 0$, $U(\tilde{x}) > 0$.Отже, U - знакозмінна функція на множині J_h. Лему доведено.

З доведеної леми випливає справедливість наступних тверджень.

Наслідок 1. Сума додатно визначеної (від'ємно визначеної, знакозмінної) форми порядку m та форми того ж порядку з достатньо малими коефіцієнтами є додатно визначеною (від'ємно визначеною, знакозмінною) формою.

Наслідок 2. Якщо V - знаковизначена (знакозмінна) форма порядку m, а $W(x)$- форма більш високого порядку, то функція $U(x) = V(x) + W(x)$ також буде знаковизначеною (знакозмінною) в деякому околі початку координат.

Геометричну інтерпретацію знаковизначених функцій дає наведена нижче лема 1.2, яка встановлює властивості поверхонь рівня таких функцій.

Поверхня $V(x) = c$ називається *поверхнею сталого рівня* (або просто – поверхнею рівня) функції $V(x)$. У випадку, коли $x \in R^2$, крива $V(x) = c$ називається *лінією сталого рівня* (лінією рівня) функції $V(x)$.

Лема 1.2. Якщо $V(x)$ - додатно визначена функція в деякому околі початку координат, то можна вказати таке $c_0 > 0$, що для довільного $c,\ 0 < c \le c_0$, поверхня рівня $V(x) = c$ є замкненою поверхнею, яка охоплює початок координат $x = 0$.

Доведення. Припустимо, що $V(x)$ - додатно визначена функція на множині $\bar{J}_h = \left\{ x \in R^n : \|x\| \le h \right\}$, і нехай $l = \inf\limits_{x \in S_h} V(x)$, де $S_h = \left\{ x \in R^n : \|x\| = h \right\}$. Очевидно, $l > 0$. Виберемо c_0 - довільне число з інтервалу $(0, l)$. Покажемо, що будь-яка неперервна крива $x = x(\tau)$, $\tau_0 \le \tau \le \tau_1$, яка сполучає початок координат $x = 0$ з будь-якою точкою $x_0 \in S_h$ (тобто $x(\tau_0) = 0$, $x(\tau_1) = x_0 \in S_h$) неодмінно перетинає поверхню рівня $V(x) = c$, якщо $0 < c \le c_0$. Дійсно, розглянемо зміну функції V вздовж кривої $x = x(\tau)$, тобто розглянемо поведінку функції $V(x(\tau)), \tau_0 \le \tau \le \tau_1$. Очевидно, що $V(x(\tau_0)) = 0$ і $V(x(\tau_1)) = V(x_0) = c^* \ge l$. В силу неперервності функція $v(\tau) = V(x(\tau))$ приймає всі значення від 0 до $V(x_0)$, отже , і від 0 до c_0. Таким чином, знайдеться точка $\tau^* (\tau_0 < \tau^* < \tau_1)$ така, що $v(\tau^*) = V(x(\tau^*)) = c$, тобто можна стверджувати, що крива $x = x(\tau)$ неодмінно перетинає поверхню $V(x) = c$. З наведених міркувань можна зробити висновок, що поверхня $V(x) = c$ є замкненою і охоплює початок координат.

Звернемо увагу на те, що наведені у лемі 1.1 властивості поверхонь рівня гарантуються (у загальному випадку) лише для достатньо малих значень c. Дійсно, якщо, наприклад, для функції $V_1(x, y) = x^2 + \alpha^2 y^2$ ($\alpha \ne 0$) при довільних $c > 0$ лінії рівня $V_1(x, y) = c$ (еліпси) є замкненими лініями, охоплюючими початок координат, то лінії рівня $V_2(x, y) = c$ додатно визначеної функції $V_2(x, y) = \dfrac{x^2}{1 + x^2} + y^2$ є замкненими лише при $0 < c < 1$.

2. Теореми Ляпунова для автономних систем

Розглянемо достатні умови стійкості тривіального розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.1}$$

де $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $f\left(x\right) \in C^1\left(J_h\right)$, $J_h = \left\{x \in R^n : \|x\| < h, h > 0\right\}$, і $f(0) = 0$.

Через $x(t, x_0)$ будемо позначати розв'язок системи (2.1), такий, що $x(0, x_0) = x_0$ (початковим моментом часу будемо вважати $t_0 = 0$). Для скорочення записів розв'язок системи може бути позначено через $x(t)$ (у тих випадках, коли вибір конкретної початкової точки x_0 не є суттєвим для доведення того чи іншого твердження , або коли таке скорочене позначення не викликає непорозумінь).

Формулювання теорем Ляпунова містять поняття "похідної функції в силу системи диференціальних рівнянь". Нагадаємо зміст цього поняття.

Нехай $V(x)$- неперервно диференційовна скалярна функція. Введемо до розгляду функцію $\dot{V}\left(x\right)$:

$$\dot{V}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\left(x\right)}{\partial x_i} f_i\left(x\right) \equiv \left\langle gradV\left(x\right), f\left(x\right)\right\rangle. \tag{2.2}$$

Функція $\dot{V}\left(x\right)$ називається похідною функції $V(x)$ в силу системи (2.1). Очевидно, що $\dot{V}\left(0\right) = 0$.

Нехай $x = x(t)$- деякий розв'язок системи (2.1). Похідна $\frac{dv}{dt}$ функції часу $v(t) = V(x(t))$ існує і визначається виразом:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_i} \frac{dx_i\left(t\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_i} f_i\left(x\left(t\right)\right) =$$

$$= \left\langle gradV\left(x\left(t\right)\right), f\left(x\left(t\right)\right)\right\rangle \tag{2.3}$$

З (2.2) і (2.3) одержуємо, що

$$\frac{dv}{dt} = \dot{V}\left(x\left(t\right)\right).$$

З викладеного випливає, що для обчислення значення $\frac{dv}{dt}$ у заданий момент часу t^* достатньо знати лише значення функції $x(t)$ в момент часу t^*; знаходити явний вигляд розв'язку $x(t)$ не обов'язково.

Переходячи до розгляду основних теорем другого методу Ляпунова, зауважимо, що у подальшому допоміжна функція $V(x)$ завжди буде вважатися неперервно диференційовною в області свого визначення.

Розглянемо першу теорему Ляпунова, яка встановлює достатню умову стійкості тривіального розв'язку системи (2.1).

Теорема 2.1 (перша теорема Ляпунова). Якщо існує знаковизначена в області J_h функція $V(x)$, похідна якої $\dot{V}\left(x\right)$в силу системи (2.1) є знакосталою функцією зі знаком, протилежним знаку функції $V(x)$, або тотожно дорівнює нулю, то тривіальний розв'язок системи (2.1) є стійким за Ляпуновим.

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли $V(x)$- додатно визначена функція. Згідно з умовами теореми при цьому похідна її в силу системи (2.1) – від'ємно стала або тотожньо дорівнює нулю. Нехай ε- довільне додатне достатньо мале число ($0 < \varepsilon < h$). Введемо до розгляду множини точок J_ε і S_ε: $J_\varepsilon = \{x \in R^n : \|x\| < \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{x \in R^n : \|x\| = \varepsilon\}$. Нехай $l = \inf\limits_{x \in S_\varepsilon} V(x)$. Очевидно, що $l > 0$. Виберемо по заданому ε число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таким чином, щоб у точках множини $J_\delta = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\}$ виконувалась нерівність $V(x) < l$. Розглянемо довільний розв'язок $x(t) = x(t, x_0)$ системи (2.1) з початковою точкою $x_0 \in J_\delta$. Покажемо, що $x(t) \in J_\varepsilon$ при $t \geq 0$. Припустимо супротивне: у деякий момент часу t_1 $x(t)$ вперше залишає окіл початку координат J_ε і потрапляє на сферу S_ε, тобто $x(t) \in J_\varepsilon$ при $0 \leq t < t_1$, і $x(t_1) \in S_\varepsilon$. При цьому має виконуватись нерівність $V(x(t_1)) \geq l$. З іншого боку, оскільки за умовою теореми $\dot{V}\left(x\right) \leq 0$, то функція $V(x(t))$ не зростає вздовж розв'язку $x(t)$, і $V(x(t_1)) \le V(x(0)) < l$. Одержана суперечність доводить, що розв'язок $x(t)$ з початковою точкою $x_0 \in J_\delta$, не може залишити множину J_ε із зростанням часу. Це доводить стійкість тривіального розв'язку розглядуваної системи диференціальних рівнянь.

Доведена теорема допускає геометричну інтерпретацію. Припустимо, що $x \in R^2$, $x = (x_1, x_2)$. Нехай для системи (2.1) у деякому околі початку координат існує додатно визначена функція $V(x_1, x_2)$ така, що похідна її в силу системи від'ємно стала: $\dot{V}(x_1, x_2) \le 0$. Нехай $0 < c_1 < c_2$, і $V(x_1, x_2) = c_1$, $V(x_1, x_2) = c_2$ - лінії рівня функції $V(x_1, x_2)$. Очевидно, що друга з цих ліній повністю охоплює першу (при цьому вважаємо, що c_1 і c_2 настільки малі, що обидві лінії рівня є замкненими). Розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (2.1) такий, що точка $x(0)$ міститься в околі початку координат, який охоплюється лінією $V(x_1, x_2) = c_1$. При всіх $t \ge 0$ точка $x(t)$ залишиться в області, охоплюваній лінією $V(x_1, x_2) = c_1$. Дійсно, $V(x_1(0), x_2(0)) = c_0 < c_1$. Якщо в деякий момент часу t_1 точка $x(t_1)$ потрапить на поверхню $V(x_1, x_2) = c_1$, то це буде означати, що $V(x_1(t_1), x_2(t_1)) = c_1 > c_0$, і функція $V(x_1(t), x_2(t))$ на певному проміжку часу зростає. Останнє суперечить тому, що $\dot{V}(x_1, x_2) \le 0$.

Тепер легко дати геометричне тлумачення вибору числа $\delta(\varepsilon)$ за заданим числом $\varepsilon > 0$. Розглянемо круг $\bar{J}_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le \varepsilon^2\}$ і "найбільшу" лінію $V(x_1, x_2) = l$, яка міститься повністю у крузі $\bar{J}_\varepsilon$. Виберемо $\delta > 0$ таке, щоб круг $\bar{J}_\delta$ повністю містився у множині точок площини, що охоплюється лінією $V(x_1, x_2) = l$. Траєкторія будь-якого руху системи (2.1), який починається на множині $\bar{J}_\delta$, не перетинає лінію $V(x_1, x_2) = l$, і, тим більше, не виходить з множини J_ε.

Приклад 2.1. Рух маятника описується диференціальним рівнянням $\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0$, або системою рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -\sin x\,. \tag{2.4}$$

Чи буде стійким положення рівноваги $(0;0)$ системи (2.4)?

Розглянемо функцію

$$V(x,y) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}\,.$$

В околі точки $(0;0)$ ця функція є додатно визначеною; її похідна за часом в силу системи (2.4)

$$\dot{V}(x,y) = \sin x \cdot y - y \cdot \sin x \equiv 0\,.$$

Отже, згідно з першою теоремою Ляпунова положення рівноваги (0;0) системи (2.4) є стійким.

Розглянемо достатню умову асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи (2.1).

Теорема 2.2 (друга теорема Ляпунова). Якщо існує знаковизначена в області J_h функція $V(x)$, похідна якої $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1) є знаковизначеною функцією зі знаком, протилежним знаку функції $V(x)$, то тривіальний розв'язок системи (2.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Доведення. Розглянемо випадок, коли функція $V(x)$- додатно визначена, а $\dot{V}(x)$- від'ємно визначена. Згідно з першою теоремою Ляпунова тривіальний розв'язок системи (2.1) стійкий, і для довільного досить малого додатного числа ε $(0 < \varepsilon < h)$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (2.1) з початковою точкою $x(0) = x_0 \in J_\delta$ при $t \geq 0$ задовольняє умову $x(t) \in J_\varepsilon$. Для доведення асимптотичної стійкості тривіального розв'язку достатньо довести, що кожний нетривіальний розв'язок $x(t)$, такий, що $x(0) \in J_\delta$, системи (2.1) задовольняє умову

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \to 0\,. \tag{2.5}$$

Розглянемо функцію $V(x(t))$. Оскільки за умовою теореми функція $V(x)$ додатно визначена, і $\dot{V}(x) < 0$, то існує скінченна границя

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \alpha, \tag{2.6}$$

причому, очевидно, $\alpha \geq 0$. Доведемо, що $\alpha = 0$.Припустимо, що це не так, тобто, що $\alpha > 0$. Неважко переконатися, що з цього припущення та неперервності функції V випливає нерівність

$$\|x(t)\| \geq \beta > 0, \tag{2.7}$$

$t \geq 0$.

У свою чергу, нерівність (2.7) приводить до співвідношення

$$\dot{V}\left(x(t)\right) \leq -b, \quad b > 0. \tag{2.8}$$

З нерівності (2.8) одержуємо :

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - bt, \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

На підставі нерівності (2.9) приходимо до висновку, що при достатньо великих значеннях t функція $V(x(t))$ стає від'ємною, що суперечить додатності функції $V(x(t))$. До суперечності призвело припущення про те, що $\alpha > 0$. Отже, $\alpha = 0$, тобто для додатно визначеної неперервної функції V маємо:

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0,$$

з чого випливає, що $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Асимптотичну стійкість тривіального розв'язку розглядуваної системи доведено.

Зауваження. З доведення випливає, що *область притягування початку координат* $x = 0$ *в момент* $t_0 = 0$ не менша області J_δ.

Як і теорема Ляпунова про стійкість, друга теорема Ляпунова (про асимптотичну стійкість) допускає геометричну інтерпретацію. Розглянемо випадок $x = (x_1, x_2)$ ($n = 2$). Припустимо, що $V(x)$ - додатно визначена функція. Завдяки від'ємній визначеності її похідної в силу системи $\dot{V}(x)$, рухома точка $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ з достатньо малим значенням $\|x(0)\|$ із зростанням t перетинає лінії рівня функції $V(x_1, x_2)$ ззовні усередину. Якщо $V(x_1(0), x_2(0)) = c_0$, то із зростанням t рухома точка $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ перетне кожну з ліній $V(x_1, x_2) = c$, $0 < c < c_0$.

Приклад 2.2. Рух маятника з тертям описується рівнянням $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\sin x=0$, або системою рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=y \quad , \ \frac{dy}{dt}=-y-\sin x\,. \qquad (2.10)$$

Чи буде асимптотично стійким положення рівноваги $(0;0)$ системи (2.10)?

Розглянемо функцію

$$V(x,y)=4(1-\cos x)+(x+y)^2+y^2\,.$$

Ця функція є додатно визначеною і в околі точки $(0;0)$ має від'ємно визначену похідну $\dot V(x,y)$ в силу системи (2.10):

$$\dot V(x,y)=-2\left(y^2+x\sin x\right).$$

Отже, згідно з другою теоремою Ляпунова положення рівноваги (0;0) системи (2.10) є асимптотично стійким.

Зауважимо, що якби б ми вибрали функцію Ляпунова таку, як у прикладі 1, то ми не мали б змоги на підставі другої теореми Ляпунова зробити висновок про асимптотичну стійкість розглядуваного положення рівноваги. Дійсно, похідна функції $V(x,y)=\frac{y^2}{2}+(1-\cos x)$ в силу системи (2.10) $\dot V(x,y)=-y^2$ не є від'ємно визначеною.

Слід також зауважити, що вдале знаходження допоміжної функції може представляти певні труднощі. У зв'язку з цим зрозуміло, що велике значення має встановлення факту існування функції Ляпунова хоча б для окремих класів диференціальних рівнянь. Питання про існування функцій Ляпунова для деяких класів систем диференціальних рівнянь буде розглянуто у п.5.

Розглянемо теореми Ляпунова про нестійкість.

Теорема 2.3 (третя теорема Ляпунова). Нехай існує функція $V(x)$, визначена в області J_h, похідна якої в силу системи (2.1) $\dot V(x)$ є знаковизначеною в області J_h функцією. Якщо при цьому функція $V(x)$ у будь-якому околі початку координат не є знакосталою функцією зі знаком, протилежним знаку $\dot{V}(x)$, то тривіальний розв'язок системи (2.1) нестійкий.

Доведення. Будемо вважати, що $\dot{V}(x)$- додатно визначена функція. Нехай $0<\varepsilon<h$, і в кулі $\bar{J}_\varepsilon$ виконуються умови теореми. Згідно з умовами теореми у будь-якому околі J_δ ($\delta>0$) початку координат можна знайти точку, в якій функція V приймає додатне значення. Нехай $x_0 \in J_\delta$ є такою точкою; $V(x_0)>0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)=x(t,x_0)$ в деякий момент часу неодмінно залишає множину $\bar{J}_\varepsilon$. Припустимо супротивне: $x(t)\in \bar{J}_\varepsilon$ при $t\geq 0$. Нехай $\eta>0$ таке число, що $|V(x)|<V(x_0)$ при $x\in J_\eta$ (існування числа η випливає з неперервності функції V і того, що $V(0)=0$). Очевидно, що $x(t)$ не може потрапити у множину J_η, оскільки функція $\dot{V}(x)$- додатно визначена, і $V(x(t))$ зростає із зростанням t. Отже, $x(t)\in \bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$, $t\geq 0$. З цього випливає існування такого числа $m>0$, що $\dot{V}(x(t))\geq m$ при $t\geq 0$. Отже, справедлива нерівність

$$V(x(t))\geq V(x_0)+mt, \tag{2.11}$$

$t\geq 0$.

Нерівність (2.11) суперечить обмеженості неперервної функції V на множині $\bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$. Одержана суперечність доводить теорему.

Приклад 2.3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt}=ax^m+g(x), \tag{2.12}$$

де m -натуральне число, $a\neq 0$, $g(0)=0$, $\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=0}=\ldots=\left.\frac{d^m g}{dx^m}\right|_{x=0}=0$.

1) Нехай m - непарне число ($m=2p+1$).

Виберемо допоміжну функцію $V(x)=x^2$. Знайдемо її похідну за часом в силу рівняння (2.12):

$$\dot{V}(x)=2ax^{m+1}+2xg(x). \tag{2.13}$$

Функція $\dot{V}(x)$ є знаковизначеною у досить малому околі точки $x=0$, оскільки перший доданок у правій частині (2.13) - знаковизначена форма, а розклад функції $xg(x)$ у ряд Тейлора в околі точки $x=0$ починається з членів степеня не нижчого, ніж $m+2$ (див.лему 1.1). При $a<0$ виконується умови другої теореми Ляпунова, і тривіальний розв'язок рівняння є асимптотично стійким.

При $a>0$ вибрана допоміжна функція $V(x)=x^2$ задовольняє умови третьої теореми Ляпунова, і тривіальний розв'язок рівняння (2.12) - нестійкий.

2) Нехай m - парне число ($m=2p$).

Виберемо допоміжну функцію $V(x)=x$. Знайдемо її похідну за часом в силу розглядуваного рівняння:

$$\dot{V}(x)=ax^{2p}+g(x).$$

Похідна $\dot{V}(x)$ є знаковизначеною функцією у достатньо малому околі точки $x=0$, а сама функція $V(x)=x$ - знакозмінна. Отже, виконуються умови третьої теореми Ляпунова, і у випадку парного m тривіальний розв'язок рівняння (2.12) нестійкий.

Теорема 2.4 (четверта теорема Ляпунова). Нехай існує функція $V(x)$, визначена в області J_h, така, що її похідна $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1), має вигляд

$$\dot{V}(x)=\lambda V(x)+W(x), \tag{2.14}$$

де $\lambda>0$, а $W(x)$ - або тотожно дорівнює нулю, або є знакосталою, і при цьому в останньому випадку функція $V(x)$ у будь-якому околі точки $x=0$ не є знакосталою зі знаком, протилежним знаку $W(x)$.Тоді тривіальний розв'язок системи (2.1) нестійкий.

Доведення. Припустимо, що $W(x)\geq 0$. У довільно малому околі J_δ початку координат виберемо точку x_0 таку, що $V(x_0)=V_0>0$. Нехай $x(t)=x(t,x_0)$- розв'язок системи (2.1) з початковою точкою x_0. Покажемо, що $x(t)$ в деякий момент часу неодмінно залишить довільну кулю $\bar{J}_\varepsilon$, в якій виконуються умови теореми.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто що $x(t) \in \bar{J}_\varepsilon$ при $t \geq 0$. На підставі співвідношення (2.14) одержимо:

$$V(x(t)) = e^{\lambda t}\left[\int_0^t e^{-\lambda t} W(x(t))dt + V_0\right],$$

і

$$V(x(t)) \geq V_0 e^{\lambda t}. \qquad (2.16)$$

Одержано суперечність: $V(x(t))$ має бути обмеженою, якщо $x(t) \in \bar{J}_\varepsilon$ для всіх $t \geq 0$, проте функція в правій частині (2.16) необмежено зростає при $t \to \infty$, оскільки $\lambda > 0$. Одержана суперечність доводить нестійкість тривіальний розв'язку системи (2.1).

3. Узагальнення теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість

Теореми, які буде розглянуто у даному пункті, дозволяють робити висновки про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь на підставі існування для системи (2.1) додатно визначеної функції, похідна якої в силу системи є лише від'ємно сталою , а не від'ємно визначеною. Отже, ці теореми є узагальненням теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Крім того, деякі з теорем встановлюють достатні умови так званої стійкості у цілому (означення цього поняття наводиться нижче) тривіального розв'язку розглядуваної системи рівнянь. Результати, які викладено в цьому параграфі, встановлено Красовським М.М. і Барбашиним Є.О.

Нагадаємо деякі поняття і факти, відомі з якісної теорії диференціальних рівнянь, якими ми будемо користуватися при викладенні узагальнень другої теореми Ляпунова.

Як і раніше, будемо розглядати систему диференціальних рівнянь (2.1).

Точка y фазового простору називається ω- *граничною точкою розв'язку* $x(t, x_0)$ (або ω - *граничною точкою півтраєкторії* $x(t, x_0; R^+)$), якщо існує послідовність моментів часу $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, така, що $y = \lim_{n \to \infty} x(t_n, x_0)$. Точка

y фазового простору називається α - *граничною точкою розв'язку* $x(t,x_0)$ (або α - *граничною точкою півтраєкторії* $x(t,x_0;R^-)$), якщо існує послідовність моментів часу $\{t_n\}$, $t_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, така, що $y = \lim_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$.

Множина ω-граничних точок розв'язку $x(t,x_0)$ називається ω-граничною множиною розв'язку $x(t,x_0)$ і позначається через Ω_{x_0}; множина α-граничних точок розв'язку $x(t,x_0)$ називається α-граничною множиною розв'язку $x(t,x_0)$ і позначається через A_{x_0}.

Очевидно, що множина Ω_{x_0} (A_{x_0}) обмеженого при $t \geq 0$ ($t \leq 0$) розв'язку $x(t,x_0)$ не порожня.

Асимптотично стійке положення рівноваги системи є прикладом ω-граничної точки для кожної півтраєкторії $x(t,x_0;R^+)$, в якої x_0 знаходиться у достатньо малому околі цього положення.

Зокрема, для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x\,,\ \lambda < 0\,,$$

точка $x = 0$ є ω-граничною точкою для всіх точок $x_0 \in R$.

Прикладом α- граничних точок є точки граничного циклу $x^2 + y^2 = 1$ системи

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\left(x^2 + y^2 - 1\right),\quad \frac{dy}{dt} = x + y\left(x^2 + y^2 - 1\right),$$

заданої на площині. Дійсно, перейдемо до полярних координат, покладаючи $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; при цьому одержимо рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\left(\rho^2 - 1\right),\qquad \frac{d\varphi}{dt} = 1\ (\rho \geq 0).$$

Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\rho(0) = \rho_0 \neq 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ для останньої системи має вигляд

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - Ae^{2t}}}\,;\ \varphi(t) = \varphi_0 + t\,,\ \text{де}\ A = \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2}.$$

Неважко помітити, що $\rho(t) \to 1$ при $t \to -\infty$ як для $\rho_0 < 1$, так і для $\rho_0 > 1$. Коло $\rho = 1$ є α-граничною множиною траєкторій як з $\rho_0 < 1$, так і з $\rho_0 > 1$.

Лема 3.1. Множини Ω_{x_0} і A_{x_0} є замкненими інваріантними множинами.

Доведення. Доведемо справедливість твердження леми для множини Ω_{x_0}. Нехай $\{y_n\}, n = 1,2,...$, - деяка послідовність точок, $y_n \in \Omega_{x_0}$, така, що $y_n \to y$, $n \to \infty$. Доведемо, що $y \in \Omega_{x_0}$, тобто що Ω_{x_0} - замкнена множина. Оскільки y - гранична точка послідовності $\{y_n\}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n \geq 1$, що $\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки точка y_n є ω-граничною точкою розв'язку $x(t, x_0)$, то знайдеться таке $t_n > 0$, що $\|x(t_n, x_0) - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином, справджується нерівність $\|x(t_n, x_0) - y\| < \varepsilon$. На підставі наведених міркувань можна зробити висновок, що y є ω-граничною точкою розв'язку $x(t, x_0)$.

Доведемо інваріантність множини Ω_{x_0}, тобто доведемо, що з належності $y \in \Omega_{x_0}$ випливає належність $x(t, y) \in \Omega_{x_0}$, $\forall\ t \in R$.

Якщо $y \in \Omega_{x_0}$, то існує послідовність $t_1, t_2, ..., t_n, ...$, $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$, така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0) = y$. Нехай τ - довільне число. З властивостей розв'язків системи вигляду (2.1) випливає, що

$$x(\tau, y) = \lim_{n\to\infty} x(t_n + \tau, x_0).$$

Отже, для довільного $\tau \in R$ точка $x(\tau, y)$ є ω-граничною точкою розв'язку $x(t, x_0)$ (послідовність точок $\tau_n = t_n + \tau$, $n = 1,2,...$, є тією послідовністю моментів часу, про яку йде мова у означенні ω-граничної точки розв'язку $x(t, x_0)$). Лему доведено.

*Лема 3.2.*Якщо існує обмежена знизу (зверху) функція $V(x)$, похідна якої $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1), є від'ємно сталою (додатно сталою) у деякій області J_h, то всі ω-граничні точки будь-якого розв'язку системи (2.1), розташованого при $t \geq 0$ в області J_h, містяться на одній поверхні рівня функції $V(x)$.

Доведення. Множина Ω_{x_0} не порожня для довільного розв'язку $x(t,x_0)$, такого, що $x(t,x_0)\in J_h$, $t\geq 0$. Нехай y - ω-гранична точка такого розв'язку, і $\{t_n\}$ ($t_n\to\infty$, $n\to\infty$) - така послідовність моментів часу, що $\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n,x_0)=y$. Розглянемо функцію $V(x(t,x_0))$. Будемо вважати, що вона обмежена знизу. Відповідно до умови теореми похідна $\dot{V}(x)$ цієї функції, складена в силу системи рівнянь (2.1), – від'ємно стала: $\dot{V}(x)\leq 0$. Функція $V(x(t,x_0))$ при $t\to\infty$ не зростає і обмежена знизу, отже, існує границя

$$V_0=\lim_{t\to\infty}V(x(t,x_0)). \qquad (3.1)$$

В силу неперервності функції V маємо: $V(y)=\lim\limits_{n\to\infty}V(x(t_n,x_0))$; враховуючи ж існування границі (3.1), приходимо до висновку, що $V(y)=V_0$. Лему доведено.

Теорема 3.1. Якщо в області J_h існує додатно визначена функція $V(x)$ така, що її похідна $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1), є від'ємно сталою, і при цьому множина $M=\{x:\dot{V}(x)=0\}$ не містить цілих траєкторій, окрім точки $x=0$, то тривіальний розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий.

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 2.1, то тривіальний розв'язок системи (2.1) є стійким, і для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що з умови $x_0\in J_\delta$ випливає належність $x(t,x_0)\in J_\varepsilon$ при $t\geq 0$.
Для доведення асимптотичної стійкості достатньо додатково довести, що $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,x_0)=0$.

Оскільки $x(t,x_0)\in \bar{J}_\varepsilon$ при $t\geq 0$, то $\Omega_{x_0}\neq\varnothing$. Неважко переконатися в тому, що якщо множина Ω_{x_0} складається з однієї точки $x=0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,x_0)=0$, отже, у такому випадку твердження теореми справедливе. Покажемо, що дійсно $\Omega_{x_0}=\{0\}$. Припустимо супротивне: існує $y\in\Omega_{x_0}, y\neq 0$. Оскільки згідно з лемою 3.1 множина Ω_{x_0} є інваріантною, то $x(t,y)\in\Omega_{x_0}$, $t\in R$. Розглянемо функцію $V(x(t,y))$. Згідно з лемою 3.2 всі ω -граничні точки розв'язку $x(t,x_0)$ лежать на одній й тій самій поверхні рівня функції V; отже, $V(x(t,y))=V(y)$. Звідси випливає, що $\dot{V}\left(x\left(t,y\right)\right)=0$, і $x(t,y)\in M, t\in R$. Отже, множина M містить цілу траєкторію $x(t,y;R)$, відмінну від точки $x=0$. Одержано суперечність з умовою теореми.

Таким чином, множина Ω_{x_0} не містить інших точок, крім точки $x=0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що переконатися у відсутності на множині M цілих траєкторій досить легко. Припустимо, що множину M можна задати рівнянням $\varphi(x)=0$. Тоді якщо виконується умова

$$\left\langle grad\varphi, f\right\rangle \neq 0, \tag{3.2}$$

то множина M не містить цілих траєкторій системи (2.1).

Для розгляду інших узагальнень другої теореми Ляпунова наведемо деякі означення.

Функція $V(x)$, визначена для всіх $x\in R^n$, називається *нескінченно великою*, якщо для довільного додатного числа a існує додатне число r $(r=r(a))$ таке, що $V(x)>a$ для всіх $x\in R^n$ таких, що $\|x\|>r$.

Поверхні рівня нескінченно великих функцій обмежені. Дійсно, нехай $V(x)$- нескінченно велика функція, і рівняння $V(x)=c$ задає поверхню сталого рівня. Візьмемо додатне число a, $a>c$. Для числа a існує таке $r>0$, що $V(x)>a$ на множині точок $x\in R^n$ таких, що $\|x\|>r$. Очевидно, що множина точок $x\in R^n$, для яких $V(x)=c$, має бути розташованою всередині кулі $\|x\|\leq r$.

Приклад 3.1. З'ясувати, чи є нескінченно великими функції $V_1(x,y)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+y^2$ і $V_2(x,y)=x^2+\alpha^2y^2$.

Функція $V_1(x,y)$ не є нескінченно великою, хоча вона може набувати як завгодно великих значень. Яким би великим не було значення $|x|$ функція $V_1(x,0)$ є обмеженою (вздовж прямої $y=0$ функція $V_1(x,y)$ є обмеженою). Так, для числа

$a=1$ не можна знайти такого r, щоб при $x^2+y^2>r^2$ виконувалась нерівність $V_1(x,y)>1$ для всіх x,y.

Щодо функції $V_2(x,y)$, то при $\alpha=0$ ця функція не є нескінченно великою: $V_2(0,y)=0$. У випадку, коли $\alpha\neq 0$, функція $V_2(x,y)$є нескінченно великою. Це випливає з того, що $V_2(x,y)\geq\alpha^2(x^2+y^2)$, якщо $0<\alpha^2\leq 1$, і $V_2(x,y)\geq x^2+y^2$, якщо $\alpha^2>1$.

Припустимо тепер, що в системі (2.1) $f(x)\in C^1(R^n)$.

Наступна теорема встановлює достатню умову *стійкості у цілому* тривіального розв'язку системи (2.1).

Тривіальний розв'язок системи рівнянь (2.1) називається *стійким у цілому*, якщо він стійкий за Ляпуновим і якщо для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ цієї системи $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$.

Тривіальний розв'язок системи рівнянь (2.1) називають *глобально притягуючим*, якщо будь-який інший розв'язок $x(t)$ системи (2.1) має властивість $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$.

Теорема 3.2 (теорема Барбашина-Красовського). Нехай існує додатно визначена нескінченно велика функція $V(x)$ така, що її похідна $\dot V(x)$ в силу системи (2.1) є від'ємно сталою, і при цьому множина $M=\{x:\dot V(x)=0\}$ не містить цілих траєкторій, крім точки $x=0$. Тоді тривіальний розв'язок системи (2.1) стійкий у цілому.

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 3.1, то тривіальний розв'язок системи (2.1) асимптотично стійкий. Для доведення теореми слід показати , що тривіальний розв'язок є глобально притягуючим. Нехай $x(t,x_0)$- довільний нетривіальний розв'язок системи (2.1). Можна стверджувати, що за умов теореми розв'язок $x(t,x_0)$ є обмеженим при $t\geq 0$. Дійсно, розглянемо функцію $V(x(t,x_0))$. На підставі умови $\dot V(x)\leq 0$, маємо: $V(x(t,x_0))\leq V(x_0)$. З цієї нерівності та того, що V за умовою теореми є нескінченно великою функцією, випливає існування такого числа $R > 0$, що $x(t, x_0) \in \bar{J}_R$, $t \geq 0$.

З обмеженості розв'язку $x(t, x_0)$ випливає, що множина його ω -граничних точок не порожня: $\Omega_{x_0} \neq \varnothing$. Доведемо, що множина Ω_{x_0} складається з однієї точки – початку координат :$\Omega_{x_0} = \{0\}$. Припустимо, що це не так, тобто що множина Ω_{x_0} містить точку $y, y \neq 0$. В силу інваріантності множини Ω_{x_0} (лема 3.1) тоді $x(t, y) \in \Omega_{x_0}$, $t \in R$. Згідно з лемою 3.2 всі точки $x(t, y)$, $t \in R$, розташовані на одній поверхні рівня. Отже, $V(x(t, y)) = C$, і $\dot{V}(x(t, y)) \equiv 0$, $t \in R$. Звідси випливає, що ціла траєкторія $x(t, y, R)$ міститься у множині M, але це суперечить умові теореми. Таким чином, множина Ω_{x_0} не може містити жодної точки, крім точки $x = 0$. Оскільки $\Omega_{x_0} = \{0\}$, то $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0$. З останнього співвідношення можна зробити висновок про те, що тривіальний розв'язок системи (2.1) є глобально притягуючим, оскільки x_0 - довільна точка простору R^n. Теорему доведено.

Наведемо ще один варіант достатньої умови стійкості в цілому тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь. При цьому будемо користуватися поняттям стійкості за Лагранжем (див.означення у п. 8 даного посібника).

Теорема 3.3. Нехай існує додатно визначена функція $V(x)$ така, що її похідна $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1), є від'ємно сталою, і множина $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ не містить цілих траєкторій, крім точки $x = 0$. Якщо при цьому система (2.1) є стійкою за Лагранжем, то тривіальний розв'язок системи (2.1) є стійким у цілому.

Доведення теореми 3.3 аналогічне до доведення теореми 3.2.

Приклад 3.2. У прикладі 2.2 було встановлено асимптотичну стійкість положення рівноваги маятника з тертям, рух якого задається рівнянням $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \sin x = 0$. Покажемо, як цей факт можна встановити за допомогою теореми 3.1.

Дане рівняння еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y\,,\ \frac{dy}{dt} = -y - \sin x\,. \tag{3.3}$$

Розглянемо питання про стійкість положення рівноваги $(0;0)$ системи (3.3).

Виберемо допоміжну функцію $V(x,y) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}$. Похідна за часом $\dot{V}(x,y)$цієї функції, складена в силу системи (3.2), є від'ємно сталою: $\dot{V}(x,y) = -y^2$; ця похідна обертається в нуль лише на осі Ox ($y = 0$). Неважко переконатися, безпосередньо виходячи з вигляду системи (3.3), в тому, що у достатньо малому околі початку координат єдиною цілою траєкторією на множині M, про яку йде мова у теоремі 3.1, є точка $(0;0)$.

Приклад 3.3. З'ясувати, чи буде стійким у цілому тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + ay \quad ,\ \frac{dy}{dt} = -ax - y^3\,. \tag{3.4}$$

Виберемо допоміжну функцію $V(x,y) = x^2 + y^2$. Функція $V(x,y)$ є додатно визначеною і нескінченно великою.Її похідна $\dot{V}(x,y)$ в силу системи (3.4) є від'ємно визначеною у всьому просторі R^n:

$$\dot{V}(x,y) = 2x(-x^3 + ay) + 2y(-ax - y^3) = -2(x^4 + y^4)\,.$$

Згідно з теоремою 3.2 тривіальний розв'язок системи (3.4) є стійким у цілому.

Приклад 3.4. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + ay\,,\quad \frac{dy}{dt} = -ax\,,\ a \neq 0\,. \tag{3.5}$$

Як і у попередньому прикладі, візьмемо допоміжну функцію $V(x,y) = x^2 + y^2$. Оскільки її похідна, складена в силу системи (3.5), є від'ємно сталою

$$\dot{V}(x,y) = 2x(-x^3 + ay) - 2axy = -2x^4\,,$$

то з першої теореми Ляпунова можна зробити висновок про стійкість тривіального розв'язку системи (3.5). Якщо ж звернутися до теореми Барбашина-Красовського, то можна прийти до висновку, що тривіальний розв'язок розглядуваної системи стійкий в цілому. Дійсно, множиною M, яка фігурує у теоремі Барбашина-Красовського, у випадку системи (3.5) є пряма $x=0$ (вісь Oy). З першого рівняння системи (3.5) випливає, що на осі Oy немає цілих траєкторій, крім точки (0;0). Отже, тривіальний розв'язок системи (3.5) стійкий у цілому.

4. Узагальнення третьої теореми Ляпунова

Наступну умову нестійкості встановлено М.М.Красовським.

Теорема 4.1. Нехай існує функція $V(x)$, така, що її похідна $\dot{V}(x)$ в силу системи (2.1), є знакосталою, і множина $M=\left\{x:\dot{V}\left(x\right)=0\right\}$ не містить цілих траєкторій, крім точки $x=0$. Якщо ні в якому околі початку координат $V(x)$ не є знакосталою зі знаком, протилежним знаку $\dot{V}\left(x\right)$, то тривіальний розв'язок системи (2.1) нестійкий.

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли $\dot{V}\left(x\right)\geq 0$. Виберемо довільно малий окіл J_δ початку координат. Нехай $x_0 \in J_\delta$- така точка, що $V_0=V(x_0)>0$. Існує куля J_η ($\eta>0$) така, що для всіх точок $x\in J_\eta$ справджується нерівність $|V(x)|<V_0$. Нехай вибрано $\varepsilon>\eta$. Доведемо, що точка $x(t,x_0)$ не може залишатися у множині J_ε при всіх значеннях $t\geq 0$. Припустимо супротивне: $x(t,x_0)\in J_\varepsilon$, $\forall t\geq 0$. Очевидно, що при цьому $x(t,x_0)\in \bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$, $t\geq 0$, оскільки $x(t,x_0)$ не може потрапити у окіл J_η завдяки властивості додатної сталості $\dot{V}\left(x\right)$. З належності $x(t,x_0)\in \bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$, $t\geq 0$, випливає, що $\Omega_{x_0}\neq\varnothing$, $\Omega_{x_0}\subset \bar{J}_\varepsilon \setminus J_\eta$. Згідно з лемами 3.1, 3.2 множина Ω_{x_0} є замкненою, складається з цілих траєкторій і міститься на одній й ті й самій поверхні рівня $V(x)=c$.Отже, на множині Ω_{x_0} маємо $\dot{V}\left(x\right)=0$, тобто $\Omega_{x_0}\subset M$. Останнє суперечить умові теореми щодо відсутності на множині M цілих траєкторій, відмінних від $x = 0$. До суперечності призвело припущення про те, що $x(t, x_0) \in J_\varepsilon$, $\forall t \geq 0$.

Таким чином, точка $x(t, x_0)$ неодмінно виходить за межі $\bar{J}_\varepsilon$, і тривіальний розв'язок системи (2.1) нестійкий.

Умови третьої теореми Ляпунова про нестійкість допускають і інші узагальнення, точніше, послаблення. Ідея одного з них (теореми Четаєва) полягає у наступних міркуваннях: оскільки для доведення нестійкості тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь достатньо показати існування у довільному як завгодно малому околі початку координат лише однієї точки x_0 такої, що її додатна півтраєкторія $x(t, x_0)$, $t \geq 0$, виходить за межі фіксованого околу, то можна не вимагати знаковизначеності похідної $\dot{V}(x)$ у повному околі початку координат (на відміну від третьої теореми Ляпунова). Наведемо відповідний результат.

Теорема 4.2 (теорема Четаєва). Нехай в області J_h визначена функція $V(x)$ з такими властивостями:

1) $V(x) > 0$ у деякій області D, такій, що $D \subset J_h$, $0 \in \partial D$, і $V(x) = 0$, якщо $x \in \partial D$;

2) похідна за часом функції $V(x)$ в силу системи (2.1) в області D додатна: $\dot{V}(x) > 0$, $x \in D$.

Тоді тривіальний розв'язок системи (2.1) нестійкий.

Доведення. Виберемо деяке число $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h$). Оскільки за умовою теореми $0 \in \partial D$, то у як завгодно малому околі J_δ точки $x = 0$ знайдеться точка $x_0 \in J_\delta \cap D$. Нехай $x(t) = x(t, x_0)$ - розв'язок системи (2.1) такий, що $x(0) = x_0$. Покажемо, що точка $x(t, x_0)$ неодмінно виходить з множини $\bar{J}_\varepsilon$. Припустимо супротивне:

$$x(t, x_0) \in \bar{J}_\varepsilon \tag{4.1}$$

при всіх $t \geq 0$. В силу умов теореми $\dot{V}(x) > 0$ при $V(x(t)) > 0$, і відповідно $V(x(t)) \geq V(x_0)$, якщо $V(x(t)) > 0$. Очевидно, що точка $x(t)$ може залишити область додатності функції V (область D), лише проходячи у деякий момент часу $T>0$ через її межу ∂D, де $V(x(T))=0$. Припустимо, що $x(t)\in D$ для $t\in[0,T)$, і $x(T)\in\partial D$. Тоді має бути $V(x(t))\geq V(x_0)>0$ для $t\in[0,T)$ і, як зазначалося вище, $V(x(T))=0$. Для неперервної функції така поведінка неможлива. Отже, $x(t)\in D$ при $t\geq 0$.

Враховуючи це, неважко переконатися у справедливості нерівності

$$\dot{V}\left(x\left(t\right)\right)\geq\beta>0, \tag{4.2}$$

$t\geq 0$.

З (4.2) дістаємо нерівність

$$V\left(x\left(t\right)\right)\geq V\left(x_0\right)+\beta t. \tag{4.3}$$

Нерівність (4.3) суперечить обмеженості $V(x(t))$ при всіх $t\geq 0$, яка забезпечується співвідношенням (4.1). Одержана суперечність доводить нестійкість тривіального розв’язку розглядуваної системи.

Приклад 4.1. За допомогою теорем пп.2-4 встановити достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості тривіального розв’язку системи

$$\frac{dx}{dt}=ax^3+by,\qquad\frac{dy}{dt}=-cx+dy^3, \tag{4.4 }$$

за умови $bc>0$.

На розглядуваному прикладі продемонструємо застосування одного з методів побудови функції Ляпунова – методу поділу змінних.

Спробуємо знайти допоміжну функцію для системи (4.4) у вигляді

$$V(x,y)=F_1(x)+F_2(y).$$

Похідна функції V, складена в силу системи (4.4), матиме вигляд: $\dot{V}\left(x,y\right)=F_1'\left(x\right)\left(ax^3+by\right)-F_2'\left(y\right)\left(cx-dy^3\right)$. Вимагатимемо, щоб і функція $\dot{V}\left(x,y\right)$ мала таку ж структуру, що й функція V: $\dot{V}\left(x,y\right)=\Phi_1\left(x\right)+\Phi_2\left(y\right)$, тобто щоб мало місце співвідношення $bF_1'(x)y-cF_2'(y)x\equiv 0$, або ж $\dfrac{cx}{F_1'(x)}=\dfrac{by}{F_2'(y)}$.

Кожен з останніх дробів має бути сталою величиною; покладемо, що ці дроби дорівнюють $\frac{1}{2}$. Тоді визначимо, що $F_1(x) = cx^2$, $F_2(y) = by^2$, і

$$V(x,y) = cx^2 + by^2, \ \dot{V}(x,y) = 2acx^4 + 2bdy^4 .$$

Якщо $a < 0$, $d < 0$, то тривіальний розв'язок системи (4.4) асимптотично стійкий. Справедливість цього твердження випливає з другої теореми Ляпунова (теорема 2.2).

Якщо $a \le 0$, $d \le 0$, то тривіальний розв'язок системи (4.4) стійкий. Стійкість забезпечує перша теорема Ляпунова (теорема 2.1).

Якщо $a = 0$, $d < 0$, (окремий випадок попереднього), то має місце й асимптотична стійкість. Дійсно, звернемося до теореми 3.1. Множиною M у розглядуваному випадку є вісь Ox $(y = 0)$. Неважко переконатися в тому, що на осі Ox немає цілих траєкторій системи (4.4), крім точки (0;0). Аналогічна ситуація при $a < 0$, $d = 0$.

Розв'язок $x = 0$ нестійкий , якщо $a > 0, d > 0$. У цьому випадку застосовна теорема 2.3.

5. Існування функцій Ляпунова

У формулюваннях розглянутих вище теорем про стійкість міститься припущення про існування функції $V(x)$ з певними властивостями. Функції $V(x)$, які задовольняють умови класичних теорем другого методу Ляпунова , прийнято називати функціями Ляпунова. При розгляді прикладів, що ілюструють застосування теорем другого методу Ляпунова, ми досить вдало "вгадували" потрібну функцію $V(x)$. Звичайно, виникає питання: якщо напевне відомо, що тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь є стійким (асимптотично стійким, нестійким), то чи дійсно існує відповідна функція Ляпунова, тобто виникає питання про оберненість теорем Ляпунова і одночасно про універсальність методу Ляпунова. Для практичного застосування другого методу Ляпунова також важливо знати конкретні способи побудови функцій Ляпунова для певних класів систем. Нижче ми розглянемо питання про існування і побудову функцій Ляпунова для системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{5.1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$,

для якої необхідні і достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості системи (5.1), сформульовані в термінах властивостей власних чисел матриці, є загальновідомими.

Для викладення основних результатів нам необхідно зупинитися спочатку на деяких допоміжних фактах.

Нехай $U(x)$ - форма порядку m $, m \geq 1$, і нехай поставлено задачу знайти форму $V(x)$ того ж порядку, яка б задовольняла рівняння

$$\dot{V}(x) = U(x),$$

де $\dot{V}(x)$ - похідна функції $V(x)$, складена в силу системи (5.1), тобто рівняння

$$\langle gradV(x), Ax \rangle = U(x), \tag{5.2}$$

Нехай $a_1, a_2, ..., a_N$ - коефіцієнти форми $V(x)$, $b_1, b_2, ..., b_N$ - коефіцієнти форми $U(x)$, N - число членів форми m-го порядку (кількість членів форми m-го порядку співпадає з кількістю всіх наборів цілих невід'ємних чисел $m_1, m_2, ..., m_n$ таких, що $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$). Задача полягає у визначенні коефіцієнтів $a_1, a_2, ..., a_N$. Виконуючи у лівій частині (5.2) дію скалярного множення і прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах, дістанемо для визначення невідомих коефіцієнтів $a_1, a_2, ..., a_N$ систему рівнянь

$$\widehat{A}a = b, \tag{5.3}$$

де $a = (a_1,...,a_N), b = (b_1,...,b_N)$, $\widehat{A}$ - стала матриця, елементи якої є лінійними комбінаціями елементів матриці A. Якщо визначник матриці $\widehat{A}$ відмінний від нуля (матриця $\widehat{A}$ не має нульових власних чисел), то система рівнянь (5.3) має єдиний розв'язок $a = (a_1,...,a_N)$.

З'ясуємо, якими умовами на власні значення матриці A можна забезпечити відсутність нульових власних значень у матриці $\widehat{A}$. Для цього розглянемо допоміжну задачу: визначити форму m-го порядку $V(x)$, яка задовольняє рівняння

$$\left\langle gradV(x), Ax\right\rangle = \lambda V(x), \tag{5.4}$$

де λ - стала.

Припустимо спочатку, що $V(x)$- лінійна форма, тобто $m=1$. У даному випадку $N = n$, $V(x) = \langle a, x\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$; рівняння (5.4) набуває вигляду

$$\langle a, Ax\rangle = \lambda\langle a, x\rangle . \tag{5.5}$$

Прирівнюючи у (5.5) коефіцієнти при $x_1, x_2, ..., x_n$, одержуємо систему для визначення $a = (a_1,...,a_n)$:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)a_1 + a_{21}a_2 + ... + a_{n1}a_n = 0 \\ &a_{12}a_1 + (a_{22} - \lambda)a_2 + ... + a_{n2}a_n = 0 \\ &a_{1n}a_1 + a_{2n}a_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)a_n = 0 . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для того, щоб система (5.6) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб число λ було коренем рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто щоб λ було власним значенням матриці A.

Отже, для того, щоб рівняння (5.4) можна було задовольнити лінійною формою $V(x)$, необхідно й достатньо, щоб число λ було власним значенням матриці A. При цьому кожному власному значенню матриці A відповідає своя лінійна форма $V(x)$. Якщо матриця A має n різних власних значень, то система (5.6) дозволяє визначити n різних лінійних форм .

Нехай тепер $m \geq 2$, і $V(x)$- форма порядку m, $a_1, a_2, ..., a_N$ - її коефіцієнти. Розглядаючи знову рівняння (5.4), одержимо для визначення коефіцієнтів форми V систему рівнянь

$$\begin{aligned} &(A_{11}-\lambda)a_1 + A_{12}a_2 + ... + A_{1N}a_N = 0 \\ &A_{21}a_1 + (A_{22}-\lambda)a_2 + ... + A_{2N}a_N = 0 \\ &A_{N1}a_1 + A_{N2}a_2 + ... + (A_{NN}-\lambda)a_N = 0\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

де A_{ij}- деякі сталі, кожна з яких є деякою лінійною комбінацією елементів матриці A.

Для того, щоб система (5.7) мала нетривіальний розв’язок $(a_1, a_2, ..., a_N)$ (і, відповідно, рівняння (5.4) можна було задовольнити формою порядку m), необхідно і достатньо, щоб

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & ... & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & ... & A_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{N1} & A_{N2} & ... & A_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \tag{5.8}$$

тобто щоб число λ, яке фігурує в (5.4), було коренем рівняння (5.8).

Зв’язок між коренями рівняння (5.8) і власними значеннями матриці A встановлює наступне твердження.

Теорема 5.1. Всі розв’язки рівняння (5.8) визначаються формулою

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_n\lambda_n\,, \tag{5.9}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - власні числа матриці A, а $m_1, m_2, ..., m_n$ - цілі невід’ємні числа, такі, що

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = m\,. \tag{5.10}$$

Доведення. Розглянемо форму порядку m $V(x) = V_1^{m_1}(x)V_2^{m_2}(x)...V_n^{m_n}(x)$, де m_i- довільні цілі невід’ємні числа, що задовольняють співвідношення (5.10), $V_i(x)$- лінійна форма, яка задовольняє рівняння $\dot{V}_i(x) = \langle gradV_i(x), Ax\rangle = \lambda_i V_i(x)$, λ_i - власне значення матриці A.

Знайдемо похідну $\dot{V}(x)$ форми $V(x)$ в силу системи (5.1):

$$\dot{V}(x)=m_1V_1^{m_1-1}(x)V_2^{m_2}(x)...V_n^{m_n}(x)\dot{V}_1(x)+m_2V_1^{m_1}(x)V_2^{m_2-1}(x)...V_n^{m_n}(x)\dot{V}_2(x)+...+$$
$$+m_nV_1^{m_1}(x)V_2^{m_2}(x)...V_n^{m_n-1}(x)\dot{V}_n(x)=(m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+...+m_n\lambda_n)V(x). \qquad (5.11)$$

З (5.11) випливає, що форма $V(x)$ задовольняє рівняння (5.4) зі сталою λ, яка визначається згідно з (5.9). З врахуванням цього та викладених вище міркувань щодо розв'язності рівняння (5.4) приходимо до висновку, що всі величини (5.9) є коренями рівняння (5.8).

Якщо всі числа $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+...+m_n\lambda_n$ різні (при всіх можливих наборах цілих невід'ємних чисел $m_1,m_2,...,m_n$, які задовольняють (5.10)), то справедливість твердження теореми очевидна.

Припустимо, що існують різні системи цілих невід'ємних чисел $m_1,m_2,...,m_n$, $m_1+m_2+...+m_n=m$, для яких суми $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+...+m_n\lambda_n$ співпадають. Покажемо, що і в цьому випадку рівняння (5.8) не має коренів, які не охоплюються формулою (5.9).

Припустимо супротивне: деякий корінь λ^* рівняння (5.8) не можна подати у вигляді (5.9). Нехай $\alpha=\left|\lambda^*-\lambda_0\right|$ ($\alpha>0$), де λ_0 - найближче до λ^* число з набору чисел (5.9). Введемо до розгляду матрицю $\widetilde{A}$, елементи якої $\widetilde{a}_{ij}$ мало збурені відносно елементів матриці A: $\widetilde{a}_{ij}=a_{ij}+\varepsilon_{ij}$. Нехай рівняння (5.8) у випадку збуреної матриці $\widetilde{A}$ набуває вигляду

$$\widetilde{D}(\lambda)=0, \qquad (5.12)$$

і нехай $\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_n$ -власні значення матриці $\widetilde{A}$. Власні значення матриці $\widetilde{A}$ будуть як завгодно мало відрізнятися від власних значень матриці A, а корені рівняння (5.12) - як завгодно мало відрізнятися від коренів рівняння (5.8) при відповідному виборі величин $\left|\varepsilon_{ij}\right|$. При цьому серед коренів рівняння (5.12) існує корінь $\widetilde{\lambda}^*$, який як завгодно мало відрізняється від λ^*. Очевидно, підбором величин ε_{ij} можна добитися того, щоб значення

$$\tilde{\lambda} = m_1\tilde{\lambda}_1 + m_2\tilde{\lambda}_2 + \ldots + m_n\tilde{\lambda}_n \qquad (5.13)$$

були всі різні для довільних цілих невід'ємних чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які задовольняють (5.10). Вважаючи, що ε_{ij} вибрано саме таким чином, приходимо до висновку, що всі корені (5.12) (зокрема $\tilde{\lambda}^*$) подаються у вигляді (5.13). Серед набору чисел (5.9) знайдеться число як завгодно близьке до $\tilde{\lambda}^*$. З наведених міркувань випливає, що серед чисел (5.9) при цьому знайдеться число як завгодно близьке до λ^*. Але це суперечить нашому припущенню про те, що $\left|\lambda^* - \lambda_0\right| = \alpha > 0$, де λ_0 - найближче до λ^* число з набору чисел (5.9). Одержана суперечність доводить теорему.

Розглянутий результат встановлено О.М.Ляпуновим.

Повернемося до рівнянь (5.2) і (5.3). Як зазначалося вище, якщо визначник матриці $\hat{A}$ відмінний від нуля (матриця $\hat{A}$ не має нульових власних чисел), то система рівнянь (5.3) має єдиний розв'язок $a = (a_1, \ldots, a_N)$. Оскільки

$$\det \hat{A} = D(0),$$

то теорема 5.1 дозволяє прийти до наступного твердження.

Теорема 5.2. Нехай власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A такі, що

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \neq 0$$

при будь-яких цілих невід'ємних числах $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які пов'язані співвідношенням $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$. Тоді для довільної форми $U(x)$ порядку m існує єдина форма $V(x)$ порядку m, яка задовольняє рівняння (5.2).

Розглянемо питання існування функцій Ляпунова у окремих випадках .

Теорема 5.3. Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то для довільної знаковизначеної форми $U(x)$ порядку m існує єдина форма $V(x)$ порядку m, яка задовольняє рівняння (5.2); при цьому форма $V(x)$ є знаковизначеною формою, знаку, протилежного знаку форми $U(x)$.

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 5.2, то для довільної форми $U(x)$ порядку m існує єдина форма $V(x)$ того ж порядку m, яка задовольняє рівняння (5.2).

Доведемо ту частину твердження теореми (5.2), яка стосується знаковизначеності форми $V(x)$. Нехай $U(x)$- від'ємно визначена форма. Форма $V(x)$ у такому випадку не може приймати від'ємні значення. Дійсно, з одного боку, за умови теореми щодо власних значень матриці A тривіальний розв'язок системи (5.1) асимптотично стійкий; з іншого боку, якби форма $V(x)$ приймала від'ємні значення, то згідно з третьою теоремою Ляпунова тривіальний розв'язок системи (5.1) мав би бути нестійким. Отже, форма $V(x)$ може бути або додатно сталою, або додатно визначеною. Припустимо, що $V(x)$ не є додатно визначеною, а є лише додатно сталою. Тоді існує точка x_0, $x_0 \neq 0$, така, що $V(x_0) = 0$. Нехай $x(t, x_0)$- розв'язок системи (5.1) такий, що $x\left(0, x_0\right) = x_0$. З нашого припущення щодо знаку форми $U(x)$ випливає, що похідна $\dot{V}\left(x\left(t, x_0\right)\right)$- від'ємна. Отже, функція $V(x(t, x_0))$ має зменшуватись і при $t > 0$ приймати від'ємні значення, що суперечить її додатній сталості.

Таким чином, форма $V(x)$ не може набувати від'ємних значень, а також не може бути додатно сталою. Залишається лише варіант її додатної визначеності. Теорему доведено.

*Теорема 5.4.*Нехай серед власних значень $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, і нехай

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_n\lambda_n \neq 0 \tag{5.14}$$

при будь-яких цілих невід'ємних числах $m_1, m_2, ..., m_n$, які пов'язані співвідношенням $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$. Тоді для довільної знаковизначеної форми $U(x)$ порядку m існує єдина форма $V(x)$ порядку m, яка задовольняє рівняння (5.2); при цьому форма $V(x)$ не є знакосталою, знаку, протилежного знаку форми $U(x)$.

Доведення. Існування для довільної форми $U(x)$ порядку m єдиної форми $V(x)$ того ж порядку, яка задовольняє рівняння (5.2), встановлює теорема 5.2.

Переконаємося у тому, що для знаковизначеної форми $U(x)$ форма $V(x)$ не може бути знакосталою , знаку, протилежного знаку форми $U(x)$.

Припустимо, що $U(x)$- додатно визначена форма. Слід довести, що $V(x)$ не може бути від'ємно сталою і , зокрема, не може бути від'ємно визначеною.

Якщо припустити, що $V(x)$- від'ємно визначена форма, то можна прийти до суперечності: з одного боку, у такому випадку за другою теоремою Ляпунова (теорема 2.2) тривіальний розв'язок системи (5.1) мав би бути асимптотично стійким; з іншого боку, оскільки за умовою теореми серед власних чисел матриці A є число з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок нестійкий. Отже, від'ємно визначеною форма $V(x)$ бути не може. Вона також не може бути й від'ємно сталою. Дійсно, припустимо, що $V(x)$- від'ємно стала, і нехай $x_0 \neq 0$- така точка, що $V(x_0) = 0$. Нехай $x(t, x_0)$- розв'язок системи (5.1) з початковою точкою x_0. З нашого припущення щодо знаку форми $U(x)$ випливає, що похідна $\dot{V}\left(x\left(t, x_0\right)\right)$ - додатна. Отже, функція $V(x(t, x_0))$ має зростати і при $t > 0$ приймати додатні значення, що суперечить її від'ємній сталості. Теорему доведено.

Теореми 5.3 і 5.4 вирішують питання про існування і побудову функцій Ляпунова, що задовольняють умови теорем 2.2 і 2.3, для систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. При цьому суттєвою є умова (5.14). Якщо за умов теореми 5.3 співвідношення (5.14) автоматично має місце, то у випадку , про який йде мова у теоремі 5.4, це не так. Наприклад, якщо серед власних чисел матриці A є число 0, то існує комбінація цілих невід'ємних чисел $m_1, m_2, ..., m_n,$ таких, що $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$, і $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_n\lambda_n = 0$. Дійсно, нехай $\lambda_1 = 0$; вибираючи $m_1 = m$, $m_2 = m_3 = ... = m_n = 0$, одержуємо саме таку комбінацію чисел.

Неважко переконатися в тому, що у випадку, коли серед власних значень матриці A є власне значення, яке дорівнює нулю, неможливо побудувати функцію Ляпунова, яка б задовольняла умови теореми 2.3, незважаючи на наявність власного значення з додатною дійсною частиною (наявність власного значення з додатною дійсною частиною, як відомо, забезпечує нестійкість тривіального розв’язку системи (5.1)). Дійсно, якщо матриця A має нульове власне значення ($\det A = 0$), то у довільному околі початку координат $x = 0$ знайдеться точка $x_0, x_0 \neq 0$, така, що система (5.1) має розв’язок вигляду $x(t, x_0) \equiv x_0$ (це випливає з існування нетривіальних розв’язків системи рівнянь $Ax = 0$ з виродженою матрицею A). Для таких розв'язків

$$\dot{V}(x) = \langle gradV(x), Ax \rangle = 0$$

для довільної диференційовної функції $V(x)$. Таким чином, у розглядуваному випадку рівняння (5.2) із знаковизначеною функцією $U(x)$ неможливо задовольнити ніякою функцією $V(x)$.

Проте за умови існування власного значення матриці A з додатною дійсною частиною існує функція Ляпунова, яка задовольняє умови четвертої теореми Ляпунова (теореми 2.4).

Теорема 5.5. Якщо серед власних значень $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то для довільної знаковизначеної форми $U(x)$ порядку m знайдуться форма $V(x)$ порядку m і додатне число α такі, що

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + U(x),$$

і при цьому форма V не буде знакосталою, знаку протилежного знаку U.

Доведення. Нехай $U(x)$- знаковизначена форма порядку m. Розглянемо рівняння

$$\left\langle gradV(x), \left(A - \frac{\alpha}{m} E \right) x \right\rangle = U(x), \tag{5.15}$$

де α - деяке додатне число.

Неважко помітити, що власні числа λ_j матриці A і власні числа μ_j матриці $A - \frac{\alpha}{m} E$ пов’язані між собою співвідношенням

$$\mu_j = \lambda_j - \frac{\alpha}{m}.$$

Виберемо число $\alpha > 0$ настільки малим, щоб при $re\lambda_j > 0$ було $re\mu_j > 0$, і щоб при цьому

$$m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + ...m_n\mu_n \neq 0$$

при будь-якому наборі цілих невід'ємних чисел $m_1, m_2, ..., m_n$, таких , що $\sum_{j=1}^{n} m_j = m$.

Згідно з теоремою 5.4 існує єдина форма $V(x)$ порядку m, яка задовольняє рівняння (5.15) і яка не є знакосталою, знаку протилежного знаку форми U.

З (5.15) одержуємо:

$$\langle gradV(x), Ax \rangle = \frac{\alpha}{m}\langle gradV(x), x \rangle + U(x). \tag{5.16}$$

Оскільки $V(x)$- однорідна функція степеня m, то за теоремою Ейлера про однорідні функції

$$\langle gradV(x), x \rangle = mV(x).$$

Враховуючи це, з (5.16) дістаємо

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + U(x) \quad .$$

Теорему доведено.

6. Стійкість за першим наближенням

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{6.1}$$

де $f \in C^2(J_h)$, $f(0) = 0$.

Подамо систему (6.1) в околі початку координат у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x), \tag{6.2}$$

де $A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ - матриця Якобі , $g(x)$ - вектор-функція, $\|g(x)\| \leq C\|x\|^2$.

Лінійна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{6.3}$$

зі сталою матрицею A називається системою першого наближення для системи (6.2).

Задачу про стійкість розв'язків системи (6.3) повністю розв'язано. У деяких випадках з характеру поведінки розв'язків системи (6.3) можна зробити висновок про поведінку розв'язків нелінійної системи (6.2).

Теорема 6.1. Якщо тривіальний розв'язок системи першого наближення (6.3) асимптотично стійкий , то асимптотично стійким є тривіальний розв'язок нелінійної системи (6.2).

Доведення. Для доведення теореми досить довести існування для системи (6.2) функції, яка задовольняє умови другої теореми Ляпунова.

Оскільки за припущенням теореми тривіальний розв'язок системи (6.3) асимптотично стійкий, то дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні. Тоді, згідно з теоремою 5.3, для від'ємно визначеної форми $U(x) = -\langle x, x \rangle$ існує додатно визначена квадратична форма $V(x)$, яка задовольняє рівняння $\langle gradV, Ax \rangle = -\langle x, x \rangle$. Розглянемо похідну функції $V(x)$ в силу системи (6.2):

$$\dot{V}(x) = \langle gradV(x), f(x) \rangle = \langle gradV(x), Ax + g(x) \rangle,$$

або

$$\dot{V}(x) = -\langle x, x \rangle + \langle gradV(x), g(x) \rangle . \tag{6.4}$$

Враховуючи властивості функції $g(x)$ та твердження леми 1.1, приходимо до висновку, що права частина (6.4) у досить малому околі початку координат – від'ємно визначена. Отже, для системи (6.2) у деякому околі початку координат $x = 0$ існує додатно визначена функція V, похідна $\dot{V}(x)$ якої в силу системи (6.2) є функцією від'ємно визначеною. В силу другої теореми Ляпунова тривіальний розв'язок нелінійної системи (6.2) асимптотично стійкий. Теорему доведено.

Формулювання теореми 6.1, очевидно, можна подати у такому варіанті: якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A системи першого наближення для системи (6.2) від'ємні, то тривіальний розв'язок системи (6.2) асимптотично стійкий.

Теорема 6.2. Якщо серед власних значень матриці A системи (6.3) є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок нелінійної системи (6.2) нестійкий.

Доведення. Доведемо, що для системи (6.2) існує функція, яка задовольняє умови четвертої теореми Ляпунова.

Виберемо додатно визначену форму $U(x) = \langle x, x \rangle$. За теоремою 5.5 у випадку, коли матриця A має власне значення з додатною дійсною частиною, для форми $U(x)$ існують форма $V(x)$, яка не є від'ємно сталою, і додатне число α такі, що

$$\langle gradV(x), Ax \rangle = \alpha V(x) + \langle x, x \rangle \ .$$

Розглянемо похідну $\dot{V}(x)$ функції $V(x)$ в силу нелінійної системи (6.2):

$$\dot{V}(x) = \langle gradV(x), f(x) \rangle = \langle gradV(x), Ax + g(x) \rangle ,$$

або

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + W(x), \tag{6.5}$$

де

$$W(x) = \langle x, x \rangle + \langle gradV(x), g(x) \rangle .$$

Очевидно, що у досить малому околі початку координат $x = 0$ функція $W(x)$ є додатно визначеною (лема 1.1). Таким чином, із співвідношення (6.5) випливає, що для системи (6.2) у околі точки $x = 0$ існує функція $V(x)$, яка задовольняє умови четвертої теореми Ляпунова. Отже, тривіальний розв'язок системи (6.2) нестійкий.

Приклад 6.1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = e^{(-4x+y)} - 1 + \sin y , \quad \frac{dy}{dt} = -4y + \ln(1+y) + \cos(x-y) - 1 . \tag{6.6}$$

Перейдемо від заданої системи до лінеаризованої системи. Матриця Якобі правої частини системи (6.6) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -4e^{(-4x+y)} & e^{(-4x+y)}+\cos y \\ -\sin(x-y) & -4+\dfrac{1}{1+y}+\sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

Матриця A лінеаризованої системи має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

тобто системою першого наближення у розглядуваному прикладі є система

$$\frac{dx}{dt}=-4x+2y\,,\ \frac{dy}{dt}=-3y\,.$$

Тривіальний розв’язок $x=0, y=0$ останньої системи асимптотично стійкий. Отже, за теоремою 6.1 тривіальний розв’язок системи (6.6) є асимптотично стійким.

Приклад 6.2. Дослідити на стійкість тривіальний розв’язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=\sin 4x+\sqrt{1+x}-2+\cos y\,,\ \frac{dy}{dt}=e^{-4y}+x^2+y^2-1\,. \tag{6.7}$$

Матрицею Якобі правої частини системи (6.7) є матриця

$$\begin{pmatrix} 4\cos 4x+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & -\sin y \\ 2x & -4e^{-4y}+2y \end{pmatrix};$$

системою першого наближення для (6.7) є система

$$\frac{dx}{dt}=\frac{9}{2}x\,,\ \frac{dy}{dt}=-4y\,;$$

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Оскільки серед власних чисел матриці A є додатне число, то за теоремою 6.2 тривіальний розв’язок системи (6.7) нестійкий.

Випадки, коли серед власних чисел матриці A системи (6.3) є числа з нульовою дійсною частиною і немає власних значень з додатною дійсною частиною, називаються *критичними випадками.* У цих випадках стійкість або нестійкість системи першого наближення (6.3) не дозволяє зробити висновок про відповідні властивості тривіального розв'язку нелінійної системи (6.1). Покажемо це на наступному прикладі.

*Приклад 6.3.*Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x^m, \ \frac{dy}{dt} = -x + \beta y^n, \tag{6.8}$$

де α, β - деякі дійсні числа, а m, n -деякі натуральні числа, $m, n \geq 2$.

Системою першого наближення для (6.8) є система

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x, \tag{6.9}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Власними значеннями матриці A є числа $\lambda_{1,2} = \pm i$. Система (6.9) стійка. Проте ця її властивість не дозволяє зробити однозначний висновок щодо стійкості тривіального розв'язку системи (6.8), загальний для довільних$\alpha, \beta, m.n$.

Дійсно, візьмемо функцію Ляпунова $V(x,y) = x^2 + y^2$. Її похідна $\dot{V}(x,y)$, складена в силу системи (6.8), має вигляд

$$\dot{V}(x,y) = 2\left(\alpha x^{m+1} + \beta y^{n+1}\right).$$

Припустимо, що m, n - непарні.

Якщо $\alpha \leq 0, \beta \leq 0$, то тривіальний розв'язок системи (6.8) стійкий за першою теоремою Ляпунова.

Якщо $\alpha < 0, \beta \leq 0$ або $\alpha \leq 0, \beta < 0$, то тривіальний розв'язок розглядуваної нелінійної системи асимптотично стійкий. Дійсно, розглянемо, наприклад, випадок $\alpha < 0, \beta \leq 0$: існує додатно визначена функція $V(x,y)$, похідна якої в силу системи (6.8) від'ємно визначена ($\alpha < 0, \beta < 0$) або від'ємно стала ($\alpha < 0, \beta = 0$). При цьому, якщо $\beta = 0$, рівність $\dot{V}(x,y) = 0$ можлива лише на прямій $x = 0$. Проте на прямій $x = 0$ немає цілих траєкторій системи (6.8), крім точки (0;0). Отже, за теоремою 3.2 тривіальний розв'язок системи (6.8) асимптотично стійкий.

У випадку, коли $\alpha > 0, \beta > 0$, тривіальний розв'язок системи (6.8) нестійкий за третьою теоремою Ляпунова.

Ми переконалися у справедливості наступного твердження:

Якщо серед власних значень матриці A системи (6.3) є числа з нульовими дійсними частинами і немає чисел з додатними дійсними частинами, то в залежності від функції $g(x)$ може мати місце як стійкість (асимптотична стійкість), так і нестійкість тривіального розв'язку системи (6.2).

7. Стійкість розв'язків неавтономних систем

У пп. 2-6 було розглянуто основні результати другого методу Ляпунова для систем диференціальних рівнянь, праві частини яких не залежали явно від змінної t, - для автономних систем. Наведені вище теореми поширюються (з певними уточненнями) на неавтономні системи. У даному пункті ми розглянемо теореми Ляпунова для неавтономних систем. Оскільки загальні схеми доведення теорем для випадку неавтономних систем близькі до викладених у пп.2-6, ми наведемо лише формулювання теорем і деякі означення. Як і раніше, мова буде йти про стійкість тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{7.1}$$

де функція $f(t,x)$ визначена і неперервна на множині

$$\Omega = \{(t,x) : t \geq t_0, x \in J_h\} \tag{7.2}$$

і

$$f(t,0) = 0, \ t \geq t_0.$$

Будемо вважати, що система (7.1) має властивість єдиності розв'язку задачі Коші.

Для дослідження стійкості тривіального розв'язку системи (7.1) застосовується допоміжна функція $V(t,x)$ -скалярна функція змінних t, x, визначена і неперервно диференційовна на множині $\Omega_0 = \left\{ (t, x) : t \geq t_0, x \in J_{h_0} \right\}$, $V(t, 0) \equiv 0,\ t \geq t_0$ (див. для порівняння п .1).

Функція $V(t,x)$ називається *додатно сталою (від'ємно сталою)* на множині Ω_0, якщо

$$V(t,x) \geq 0 \text{ (або } V(t,x) \leq 0\text{)}, \ (t,x) \in \Omega_0 .$$

Функція $V(t,x)$ називається *додатно визначеною* на множині Ω_0, якщо існує скалярна функція $W(x)$, визначена і неперервна на множині J_{h_0}, така, що

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$V(t,0) = W(0) = 0 .$$

Функція $V(t,x)$ називається *від'ємно визначеною* на множині Ω_0, якщо існує скалярна функція $W(x)$, визначена і неперервна на множині J_{h_0}, така, що

$$V(t,x) \leq -W(x) < 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$V(t,0) = W(0) = 0 .$$

Додатно визначені і від'ємно визначені функції називаються *знаковизначеними* функціями.

Дамо геометричну інтерпретацію знаковизначеної функції $V(t,x)$. Нехай $V(t,x)$- додатно визначена функція, $V(t,x) \geq W(x) > 0$, $x \neq 0$. Як ми знаємо, поверхні рівня $W(x) = c$ ($c \geq 0$), для достатньо малих значень c є замкненими поверхнями, що охоплюють початок координат $x = 0$.

Виберемо деяке $c_1 > 0$ і розглянемо поверхню $W(x) = c_1$, а також сім'ю поверхонь $V(t,x) = c_1$, вважаючи, що t- параметр. При кожному фіксованому t поверхня рівня $V = c_1$ є замкненою, охоплючою початок координат $x = 0$ поверхнею. Для додатно визначеної функції $V(t,x)$ кожна поверхня $V(t,x) = c_1$ при довільному значення параметра t міститься всередині поверхні $W(x) = c_1$.

Прикладом додатно визначеної функції є функція $V(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha xy \cos t$ при $|\alpha| < 1$; при $|\alpha| = 1$ ця функція є лише додатно сталою. Неважко переконатися в тому, що додатно стала функція $V(t,x_1,x_2)=e^{-t}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)$ не є додатно визначеною ні при якому виборі околу J_{h_0} початку координат у просторі R^2.

Функція $\dot{V}(t,x)$:

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x)$$

називається *похідною за часом функції* $V(t,x)$ *в силу системи (7.1).*

Будемо говорити, що функція $V(t,x)$ має *нескінченно малу вищу границю (при* $x\to 0$*),* якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що

$$\left|V(t,x)\right|<\varepsilon$$

при $\|x\|<\delta$ і $\forall t\ge t_0$, тобто якщо функція $V(t,x)$ прямує до нуля при $\|x\|\to 0$ рівномірно відносно t.

Неважко побачити, що, наприклад, функція $V(t,x_1,x_2)=e^{t}\left(x_1^2+x_2^2\right)$ не має нескінченно малої вищої границі при $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to 0$.

Очевидно, що неперервна функція $V(x)$ (яка не залежить від t), така, що $V(0)=0$, має нескінченно малу вищу границю при $x\to 0$.

Наведемо формулювання теорем Ляпунова про стійкість для системи (7.1).

Теорема 7.1 (перша теорема Ляпунова). Якщо для системи (7.1) існує знаковизначена функція $V(t,x)\in C_{tx}^{1,1}(\Omega)$, така, що її похідна $\dot{V}(t,x)$ в силу системи (7.1) є знакосталою функцією знаку, протилежного знаку $V(t,x)$, або тотожно рівною нулю, то тривіальний розв’язок системи (7.1) є стійким.

Теорема 7.2 (друга теорема Ляпунова). Нехай для системи (7.1) існує знаковизначена функція $V(t,x)\in C_{tx}^{1,1}(\Omega)$, яка має нескінченно малу вищу границю при $x\to 0$, і така, що похідна $\dot{V}(t,x)$ цієї функції в силу системи (7.1) є знаковизначеною функцією, знаку, протилежного знаку $V(t,x)$. Тоді тривіальний розв’язок системи (7.1) асимптотично стійкий.

Теорема 7.3 (третя теорема Ляпунова). Нехай для системи (7.1) існує функція $V(t,x) \in C_{tx}^{1,1}(\Omega)$, яка має нескінченно малу вищу границю при $x \to 0$, похідна якої $\dot{V}(t,x)$ в силу системи (7.1) є знаковизначеною функцією. Якщо при цьому сама функція $V(t,x)$ у будь-якій підобласті (7.2) може приймати значення того ж знаку, що й похідна $\dot{V}(t,x)$, то тривіальний розв'язок системи (7.1) нестійкий.

Теорема 7.4 (четверта теорема Ляпунова). Нехай існує обмежена функція $V(t,x) \in C_{tx}^{1,1}(\Omega)$ така, що похідна її $\dot{V}(t,x)$ в силу системи (7.1), має вигляд

$$\dot{V}(t,x) = \lambda V(t,x) + W(t,x),$$

де λ - додатна стала, а $W(t,x)$ - або тотожно дорівнює нулю, або є знакосталою функцією, і при цьому в останньому випадку сама функція $V(t,x)$ у будь-якій підобласті (7.2) може приймати значення того ж знаку, що й $W(t,x)$. Тоді тривіальний розв'язок системи (7.1) нестійкий.

8. Обмеженість розв'язків. Дисипативні системи

Метод допоміжних функцій дозволяє досліджувати не тільки стійкість за Ляпуновим, а й деякі інші властивості розв'язків систем диференціальних рівнянь, зокрема, різні види обмеженості розв'язків.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{8.1}$$

де $f(t,x) \in C_{t,x}^{(0,1)}\left((a,\infty)\times R^n\right)$.

Розв'язок $x(t,t_0,x_0)\,(t_0 \in (a,\infty))$ системи (8.1) називається *стійким за Лагранжем*, якщо він існує для всіх $t \in [t_0,\infty)$ і є обмеженим на $[t_0,\infty)$ ($\|x(t,t_0,x_0)\| \le K, t \ge t_0$).

Система (8.1) називається *стійкою за Лагранжем,* якщо кожний її розв'язок $x(t,t_0,x_0)$, де $t_0 \in (a,\infty)$, існує для всіх $t \in [t_0,\infty)$ і є обмеженим на $[t_0,\infty)$ ($\|x(t,t_0,x_0)\| \le K, t \ge t_0$).

Теорема 8.1. Для того, щоб система (8.1) була стійкою за Лагранжем, необхідно і достатньо, щоб існувала функція $V(t,x)$, визначена на множині $(a,\infty)\times R^n$, яка задовольняє умови:

1) $V(t,x) \ge W(x)$, де $W(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$;

2) для будь-якого розв'язку $x(t,t_0x_0)$системи (8.1) функція $V(t,(x(t,t_0x_0)))$ є незростаючою функцією змінної t.

Доведення. Необхідність. Нехай система (8.1) – стійка за Лагранжем, тобто кожний її розв'язок $x(t,t_0,x_0)$ існує для всіх $t \in [t_0,\infty)$ і є обмеженим на $[t_0,\infty)$.

Введемо до розгляду функцію

$$V(t,x) = \sup_{\tau \ge 0} \|x(t+\tau,t,x)\|^2, \; t > a \quad . \tag{8.3}$$

Ця функція задовольняє умови 1), 2) доводжуваної теореми. Дійсно, очевидно, що

$$V(t,x) \ge \|x(t,t,x)\|^2 = \|x\|^2 = W(x),$$

і $W(x) \to \infty, \|x\| \to \infty$.

Покажемо, що вздовж кожного розв'язку $x(t,t_0,x_0)$ системи (8.1) функція $V(t,x)$ є незростаючою функцією змінної t. Нехай $a < t_1 < t_2$; виходячи з (8.3) та враховуючи той факт, що для системи (8.1) має місце властивість єдиності розв'язків, дістаємо співвідношення:

$$V(t_1,x(t_1,t_0,x_0)) = \sup_{\tau \ge 0}\|x(t_1+\tau,t_{1,},x(t_1,t_0,x_0))\|^2 \ge \sup_{\tau \ge 0}\|x(t_2+\tau,t_2,x(t_2,t_0,x_0))\|^2 = V(t_2,x(t_2,t_0,x_0)).$$

Необхідність умов теореми доведено.

Достатність. Припустимо, що існує функція $V(t,x)$, яка задовольняє умови теореми. Нехай $x(t,t_0,x_0)$ ($t_0 > a, \|x_0\| < \infty$) – довільний розв'язок системи (8.1). Згідно з умовою 2) доводжуваної теореми

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \le V(t_0,x_0), \; t \ge t_0.$$

В силу умови 1) з останнього співвідношення дістаємо нерівність

$$W(x(t,t_0,x_0)) \le V(t,x(t,t_0,x_0)) \le V(t_0,x_0), \qquad (8.4)$$

$t \ge t_0$, з якої випливає обмеженість розв'язку $x(t,t_0,x_0)$. Дійсно, якщо припустити супротивне, то можна прийти до висновку, що існує деяка послідовність $\{t_k\}$, $k = 1,2,\ldots$, $t_k \ge t_0$, $t_k \to \infty$, для якої $W(x(t_k,t_0,x_0)) \to \infty$, $k \to \infty$, що суперечить (8.4). Таким чином, $\sup\limits_t \|x(t,t_0,x_0)\| < \infty$, $t \ge t_0$. Теорему доведено.

Система (8.1) називається *дисипативною*, якщо всі її розв'язки $x(t,t_0,x_0)$ нескінченно продовжувані вправо і існує таке число $r > 0$, що

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|x(t,t_0 x_0)\| < r, \qquad (8.5)$$

тобто для кожного розв'язку $x(t,t_0,x_0)$ існує момент часу $\tau = t_0 + T(t_0,x_0) \ge t_0$, такий, що

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le r \text{ при } \tau \le t < \infty .$$

Якщо число T можна вибрати незалежним від t_0, то система (8.1) називається *рівномірно дисипативною* відносно початкового моменту t_0.

Розв'язки дисипативної (рівномірно дисипативної) системи називаються *гранично обмеженими* (*рівномірно гранично обмеженими*).

Теорема 8.2 (теорема Йошизави). Припустимо, що для системи (8.1) існує функція $V(t,x) \in C^{(1,1)}_{t,x}(Z^c)$, де $Z^c = \{t \in (a,\infty)\} \times \{x \in S^c_p\}$, $S^c_p = \{\|x\| \ge \rho > 0\}$, яка задовольняє умови:

1) $V(t,x) \le a(\|x\|)$, де $a(r)$ $(r \ge 0)$ - деяка додатна неперервна зростаюча функція;

2) $V(t,x) \ge b(\|x\|)$, де $b(r)$ $(r \ge 0)$ - деяка неперервна неспадна функція, така, що $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

3) $\dot{V}(t,x) \le -c(\|x\|)$, де $c(r)$ ($r \ge 0$) - деяка додатна неперервна функція, $\dot{V}(t,x)$ - похідна за змінною t функції $V(t,x)$ в силу системи (8.1).

Тоді система (8.1) є рівномірно дисипативною щодо моменту t_0.

Доведення. Очевидно, що не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати функцію $V(t,x)$ додатною Z^c (див. умову 2) теореми).

Покажемо, що існує таке число $R > 0$, що для довільного розв'язку системи (8.1) $x(t) = x(t,t_0,x_0)$, $t_0 \in (a,\infty)$, $\|x_0\| \le \rho$, буде виконуватися нерівність $\|x(t)\| < R$, $t \ge t_0$.

Дійсно, представимо проміжок існування $[t_0,\omega)$ розв'язку $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ як об'єднання множин T_1 і T_2, вважаючи, що $t \in T_1$, якщо $\|x(t)\| \le \rho$, і $t \in T_2$, якщо $\|x(t)\| > \rho$. Якщо множина T_2 порожня, то існування числа R є очевидним. Припустимо, що множина T_2 не порожня. Тоді цю множину можна представити як суму (скінченну або нескінченну) інтервалів (t_α, t_β), причому $x(t_\alpha) = \rho$. Розглянемо функцію $V(t,x(t))$, $t \in (t_\alpha, t_\beta)$. Враховуючи припущення 1)-3) теореми, матимемо співвідношення:

$$b(\|x(t)\|) \le V(t,x(t)) \le V(t_\alpha, x(t_\alpha)) \le a(\|x(t_\alpha)\|) = a(\rho). \qquad (8.3)$$

Оскільки за умовою 2) $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, то на підставі (8.3) можна прийти до висновку, що існує число $R > \rho$ таке, що

$$\|x(t)\| < R, \ t \in T_2,$$

і одночасно, що будь-який розв'язок $x(t) = x(t,t_0,x_0)$, $t_0 \in (a,\infty)$, $\|x_0\| \le \rho$, задовольняє умову

$$\|x(t)\| < R, \ t \in [t_0,\omega).$$

Звідси випливає нескінченна продовжуваність розв'язку вправо ($\omega = \infty$). Зауважимо, що R залежить лише від ρ.

Розглянемо тепер розв'язок системи (8.1) $x(t)=x(t,t_0,x_0)$, $t_0\in(a,\infty)$, $\|x_0\|>\rho$. Якщо припустити, що для цього розв'язку в деякий момент часу $t_1>t_0$ виконується нерівність $\|x(t_1)\|\le\rho$, то з урахуванням викладеної вище частини доведення неважко прийти до висновку, що $\|x(t,t_0,x_0)\|<R$ при $t\ge t_1$ (оскільки завдяки властивості єдиності розв'язків маємо $x(t,t_0,x_0)\equiv x(t,t_1,x(t_1,t_0,x_0))$). Якщо ж припустити, що для всіх $t\ge t_0$ буде виконуватись нерівність $\|x(t)\|>\rho$, то дістанемо суперечність. Дійсно, при такому припущенні з умов 1), 2), 3) випливають нерівності:

$$b(\|x(t)\|)\le V(t,x(t))\le V(t_0,x(t_0))\le a(\|x_0\|)\ \ (t\ge t_0),$$

і, таким чином, з урахуванням властивостей функцій $a(r)$ і $b(r)$ можна стверджувати, що існує число $R_1\ge R$ таке, що $\|x(t)\|<R_1$, $t\ge t_0$. Отже для розв'язку $x(t)$ маємо:

$$\rho<\|x(t)\|<R_1,\ t\ge t_0.$$

На підставі умови 2) при цьому для похідної за змінною t функції $V(t,x(t))$ виконується нерівність

$$\dot V(t,x(t))\le-\gamma,\ t\ge t_0, \tag{8.4}$$

де $\gamma=\inf\limits_{\rho\le r\le R_1}c(r)>0$.

З (8.4) одержуємо:

$$V(t,x(t))\le V(t_0,x_0)-\gamma(t-t_0),\ t\ge t_0. \tag{8.5}$$

З нерівності (8.5) випливає, що при достатньо великих t функція $V(t,x(t))$ стає від'ємною, що неможливо. Таким чином, одержано суперечність, до якої призвело припущення про те, що $\|x(t)\|>\rho$ для всіх $t\ge t_0$. Отже, існує $t_1>t_0$, таке, що $\|x(t_1)\|=\rho$. Дисипативність системи (8.1) доведено.

Припустимо, що $\rho < \|x(t)\| < R_1$. Виходячи із співвідношення (8.5), можна оцінити величину t_1:

$$t_1 \le t_0 + \sup_{t \ge t_0} \frac{V(t_0, x_0) - V(t, x(t))}{\gamma}. \tag{8.6}$$

Враховуючи умови 1) і 2) теореми, маємо:

$$V(t_0, x_0) \le a(\|x_0\|) < a(R_1),$$

$$V(t, x(t)) \ge b(\|x(t)\|) \ge b(\rho).$$

З (8.6) одержуємо:

$$t_1 \le t_0 + T(x_0),$$

де

$$T(x_0) < \frac{a(R_1) - b(\rho)}{\gamma} \text{ і } R_1 = R_1(x_0).$$

Отже, система (8.1) дисипативна рівномірно щодо t_0. Теорему доведено.

9. Конвергентні системи

Система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{9.1}$$

де $f(t,x) \in C_{t,x}^{(0,1)}(R \times R^n)$, називається *конвергентною*, якщо вона має такі властивості:

1) кожний її розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ визначений при $t \ge t_0$;

2) система має єдиний обмежений при $-\infty < t < +\infty$ розв'язок $\eta(t)$;

3) розв'язок $\eta(t)$ є асимптотично стійким у цілому.

Очевидно, що якщо система (9.1) конвергента, то можна вказати число $r > 0$ таке, що для кожного розв'язку $x(t, t_0, x_0)$ існує момент часу $\tau = t_0 + T(t_0, x_0)$, $\tau \ge t_0$, після якого $x(t, t_0, x_0)$ залишається у множині $\|x\| < r$ (системи з такою властивістю називаються дисипативними, див. п.8).

Встановимо достатні умови конвергентності лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь зі сталою матрицею (теорема 9.1), а також нелінійної системи (теорема 9.2).

Теорема 9.1. Нехай задано лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),$$

де A - стала $n \times n$ матриця, $f(t) \in C(R)$, і

$$\|f(t)\| \le K < \infty, \; t \in R \quad . \tag{9.2}$$

Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то система (9.1) є конвергентною. При цьому єдиним обмеженим при $t \in R$ розв'язком системи (9.1) є функція

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau . \tag{9.3}$$

Доведення. У тому, що $\eta(t)$є розв'язком системи (9.1) неважко переконатися, виконуючи диференціювання за параметром t у (9.3):

$$\frac{d\eta}{dt} = A\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + f(t) = A\eta(t) + f(t).$$

Оскільки за умовою теореми дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то існують такі додатні числа N і α, що

$$\left\| e^{At} \right\| \le Ne^{-\alpha t}, \; t \ge 0 .$$

Враховуючи це, неважко прийти до висновку щодо обмеженості функції $\eta(t)$:

$$\|\eta(t)\| \le \frac{KN}{\alpha} < \infty, \; t \in R .$$

Для доведення теореми залишилося довести єдиність обмеженого на всій осі R розв'язку системи (9.1) і його асимптотичну стійкість в цілому.

Припустимо, що $\eta_1(t)$- інший обмежений при $t \in R$ розв'язок системи (9.1). Як відомо, різниця довільних двох розв'язків лінійної неоднорідної системи (9.1) є розв'язком однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{9.4}$$

Різниця $\eta(t) - \eta_1(t)$ двох обмежених на всій осі R розв'язків системи (9.1) має бути обмеженим на R розв'язком системи (9.4). Але єдиним обмеженим на R розв'язком (9.4) є тривіальний розв'язок. Отже,

$$\eta(t) \equiv \eta_1(t).$$

Переконаємося у асимптотичній стійкості в цілому обмеженого на R розв'язку $\eta(t)$. Нехай $x(t)$ - довільний розв'язок системи (9.1). Оскільки $x(t) - \eta(t)$ - розв'язок системи (9.4), то

$$(x(t) - \eta(t)) = e^{A(t-t_0)}(x(t_0) - \eta(t_0)).\ (t_0 \in R).$$

Враховуючи умову леми щодо власних значень матриці A, при $t \ge t_0$ дістаємо

$$\|x(t) - \eta(t)\| \le Ne^{-\alpha(t-t_0)}\|x(t_0) - \eta(t_0)\|.$$

З останньої нерівності випливає асимптотична стійкість в цілому розв'язку $\eta(t)$. Теорему доведено.

Теорема 9.2. Нехай для системи (9.1), де $f(t,x) \in C^{0,1}(R, R^n)$, виконуються умови:

1) $\|f(t,0)\| \le K < \infty$, $t \in R$;

2) власні значення $\lambda(t,x)$ матриці $J(t,x) = \frac{1}{2}\{\Phi(t,x) + \Phi^T(t,x)\}$,

де $\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, задовольняють умову

$$\lambda(t,x) \le -\alpha < 0, \ t \in R, x \in R^n.$$

Тоді система (9.1) конвергентна.

Для доведення теореми 9.2 встановимо справедливість наступного твердження.

Лема 9.1. Нехай задано систему (9.1), де $f(t,x) \in C^{0,1}(R,R^n)$. Якщо у просторі R^{n+1} можна вказати такий циліндр $Z = \{(t,x): t \in R, \|x\| \le r, r > 0\}$, що всі розв'язки $x(t,t_0,x_0)$ системи (9.1), які починаються на поверхні циліндра Z ($t_0 \in R$, $\|x_0\| = r$), із зростанням t входять всередину циліндра (тобто $\left.\frac{d}{dt}\left(\|x(t)\|^2\right)\right|_{\|x\|=r} < 0$), то система має обмежений на R розв'язок.

Доведення леми 9.1. Позначимо через S_0 переріз циліндра Z площиною $t = 0$. Розглянемо послідовність множин T_p (трубок розв'язків): $T_p = \{x(t,-p,x_0), x_0 \in S_0\}$, $p = 0,1,2,...$ З умови леми про те, що всі розв'язки, які починаються на поверхні циліндра, із зростанням t входять всередину циліндра і залишаються в ньому, випливає нескінченна продовжуваність вправо розв'язків $x(t,-p,x_0)$. Нехай S_p, $p = 0,1,2,...$,- послідовність перерізів трубок T_p площиною $t = 0$: $S_p = \{x(0,-p,x_0), x_0 \in S_0\}$. Очевидно, що S_p, $p = 0,1,2,...$- замкнені множини. Неважко також переконатися в тому, що $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset ...$(враховуючи властивість єдиності розв'язків) .Застосовуючи теорему про вкладені кулі , приходимо до висновку, що $\bigcap_{p=0}^{\infty} S_p \ne \varnothing$. Нехай точка $x^* \in \bigcap_{p=0}^{\infty} S_p$. Розв'язок $x(t,0,x^*)$- обмежений при всіх $t \in R$. Дійсно, оскільки $x^* \in S_p$ для кожного p, то для кожного p існує точка x_p^* ($\|x_p^*\| \le r$) і, відповідно, розв'язок $x(t,-p,x_p^*)$ $(t \ge -p)$, такий, що

$x\left(0,-p,x_p^*\right)=x^*$. В силу єдиності розв'язків $x\left(t,0,x^*\right)\equiv x\left(t,-p,x_p^*\right)$. Таким чином, розв'язок $x\left(t,0,x^*\right)$ визначений при $-p\le t<+\infty$. Оскільки p- довільне, то одержуємо, що $x\left(t,0,x^*\right)$визначений на всій числовій осі R і $\left\|x\left(t,0,x^*\right)\right\|\le r$. Лему доведено.

Доведення теореми 9.2. Введемо до розгляду функцію $V(x)=\langle x,x\rangle$. Знайдемо похідну $\frac{dV}{dt}$ цієї функції в силу системи (9.1):

$$\frac{dV}{dt}=\langle gradV, f(t,x)\rangle=2\langle x,f(t,x)\rangle .$$

Оцінимо $\langle x,f(t,x)\rangle$, виходячи з умов теореми 9.2, а також застосовуючи лему Адамара, згідно з якою $f(t,x)-f(t,0)=\left[\int\limits_0^1\Phi(t,\xi x)d\xi\right]x$:

$$\langle x,f(t,x)\rangle=\langle x,f(t,x)-f(t,0)\rangle+\langle x,f(t,0)\rangle=\left\langle x,\left[\int\limits_0^1\Phi(t,\xi x)d\xi\right]x\right\rangle+\langle x,f(t,0)\rangle$$

$$=\int\limits_0^1\langle \Phi(t,\xi x)x,x\rangle d\xi++\langle x,f(t,0)\rangle=\int\limits_0^1\langle J(t,\xi x)x,x\rangle+\langle x,f(t,0)\rangle\le-\alpha\|x\|^2+K\|x\| .$$

Отже,

$$\frac{dV}{dt}\le-2\alpha\|x\|^2+2K\|x\| . \tag{9.5}$$

З (9.5) видно, що якщо $\|x\|>\frac{K}{\alpha}$, то $\frac{dV}{dt}<0$.

Враховуючи, що $V(x)=\|x\|^2$, помічаємо, що виконуються умови леми 9.1: можна вказати циліндр (вибираючи $r>\frac{K}{\alpha}$), про який йде мова у лемі 9.1, тобто такий, що всі розв'язки системи (9.1), які починаються на поверхні цього циліндра, входять всередину нього із зростанням t.На підставі леми 9.1 приходимо до висновку, що за умов доводжуваної теореми система (9.1) має обмежений для всіх $t\in R$ розв'язок $x^*(t)$; $\left\|x^*(t)\right\|\le r$, $t\in R$.

Доведемо асимптотичну стійкість в цілому та єдиність цього розв'язку.

Нехай $x(t)$ - довільний розв'язок системи (9.1), $x(t_0)=x_0$. Для $\left\|x(t)-x^*(t)\right\|$ неважко одержати співвідношення (аналогічно тому, як було встановлено (9.5))

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|x(t)-x^*(t)\right\|^2\right)=2\left\langle f(t,x)-f\left(t,x^*\right),x(t)-x^{*(t)}\right\rangle \le -2\alpha\left\|x(t)-x^*(t)\right\|^2,$$

на підставі якого можна дістати нерівність

$$\left\|x(t)-x^*(t)\right\| \le e^{-\alpha(t-t_0)}\left\|x(t_0)-x^*(t_0)\right\|, \quad t \ge t_0. \tag{9.6}$$

З (9.6), очевидно, випливає асимптотична стійкість в цілому розв'язку $x^*(t)$.

Нерівність (9.6) дозволяє також встановити єдиність обмеженого для всіх $t\in R$ розв'язку. Для цього достатньо припустити що $x(t)$ - інший обмежений для $t\in R$ розв'язок системи (9.1), і ,фіксуючи t, перейти у (9.6) до границі при $t_0\to-\infty$. При цьому одержимо

$$\left\|x(t)-x^*(t)\right\| \le 0.$$

З наведених міркувань випливає, що $x(t)=x^*(t)$, $t\in R$. Теорему доведено.

Література

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости.- М.: Наука.- 1967.-224 с.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. -М., Наука, 1967.- 472 с.

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения .-М., Главное изд-во физ.-мат.лит-ры, 1959, 211 с.

4. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.-М.:Мир.- 1964.-168 с.

5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения .- М., Наука, 1966. – 530 с.

6. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.-М.: Мир, 1980.- 300 с.

Зміст