Київський національний університет імені Тараса Шевченка

механіко-математичний факультет

О. Н. Нестеренко

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

У ЗАДАЧАХ І ПРИКЛАДАХ

Київ
2013

Рецензенти:

Шевчук І.О., завідуючий кафедрою математичного аналізу Київського університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, професор;

Дзюбенко Г.А., старший науковий співробітник Міжнародного математичного центру ім. Ю.О. Митропольського, кандидат фізико-математичних наук.

Рекомендовано до друку Вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 1 від 16.09.2013 р.).

ЗМІСТ

Передмова 4
Список скорочень 5
Список позначень 6

Розділ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

§ 1.1. Властивості функціонала (величини) найкращого наближення 8
§ 1.2. Проблема існування елемента найкращого наближення 9
§ 1.3. Опуклі множини, опуклі оболонки. Функціонал Мінковського 9
§ 1.4. Теореми відокремлення 12
§ 1.5. Проблема єдиності елемента найкращого наближення. Строго нормовані простори 13
§ 1.6. Чебишовські множини. Оператор найкращого наближення 15

Розділ 2. РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

§ 2.1. Теореми Чебишова та Валле-Пуссена у випадку наближення алгебраїчними многочленами 16
§ 2.2. Многочлени Чебишова I роду 17
§ 2.3 Деякі екстремальні властивості многочленів Чебишова I роду 18
§ 2.4. Чебишовські системи функцій (системи Гаара) 19
§ 2.5. Теореми Чебишова та Валле-Пуссена у випадку наближення тригонометричними поліномами 21

Розділ 3. ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ

§ 3.1. Теорема Стоуна 22
§ 3.2. Четвертий наслідок з теореми Гана-Банаха. Теорема Мюнца 24
§ 3.3. Теорема Мергеляна 25
§ 3.4. Теорема Коровкіна і многочлени Бернштейна 26

Розділ 4 НАБЛИЖЕННЯ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

§ 4.1. Існування, єдиність і характеризація елемента найкращого наближення 29
§ 4.2. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Поняття про ортогональні многочлени 30
§ 4.3. Наближення соболєвських класів в $\tilde{L}_2$ тригонометричними поліномами 33

Розділ 5 НАБЛИЖЕННЯ В L_p

§ 5.1. Загальні питання наближення в L_p 36
§ 5.2. Теорема Маркова та наслідки з неї 36
§ 5.3. Многочлени Чебишова II роду 38

Вказівки 39
Література 53

ПЕРЕДМОВА

Нормативний курс «Теорія наближень» читається на механіко-математичному факультеті КНУ ім. Тараса Шевченка на першому курсі магістратури для студентів-математиків. Згідно з діючим навчальним планом проведення практичних (семінарських) занять з цього курсу не передбачено. Однак загальновідомо, що вивчення будь-якого математичного предмета неможливе без систематичного самостійного розв'язання задач, бо саме процес активного обмірковування матеріалу при спробі розв'язати задачу допомагає виробити правильні інтуїтивні уявлення про відповідні математичні поняття і є найважливішим засобом опанування матеріалу. Пропонований навчальний посібник покликаний задовольнити потребу у джерелі задач для тих, хто вивчає або викладає теорію наближень.

Цей посібник є, фактично, збірником задач з теорії наближень. Його основу становлять приклади, що розглядались на лекціях з теорії наближень, які автор читав магістрам-математикам, а також вправи, котрі пропонувались студентам для самостійного розв'язання; наведено також задачі з колоквіумів та екзаменів. Однак структура посібника має певні особливості, які, за задумом автора, уможливлять користування ним не тільки слухачам своїх лекцій, а й усім зацікавленим особам, а також забезпечать можливість самостійного вивчення деяких розділів курсу без звернення до інших джерел.

У цьому виданні не дотримано традиційного для збірників задач поділу параграфа на «теорію» та задачі. Основною особливістю посібника є викладення «теорії» (там, де доведення не є громіздкими) у формі задач, при цьому нові поняття означаються безпосередньо перед тією задачею, в якій вперше використовуються. Однак щодо деяких ключових теорем з досить громіздкими доведеннями цього принципу не дотримано (навряд чи доцільно спонукати початківця «перевідкривати» ці теореми самостійно). У таких випадках наведено формулювання відповідних теорем, а з їх доведеннями читач може ознайомитись за допомогою іншої літератури. Для того, щоб виділити основні факти, які, власне, складають зміст даної теорії і використовуються при розв'язанні інших задач, та звернути увагу читача на ці факти, окрім уміщення назв теорем, біля номера відповідної задачі зроблено помітку (**т**). До таких задач в окремому розділі подано більш-менш детальні вказівки, які відображають ідеї доведення та можливі специфічні технічні прийоми. Інколи такі вказівки є практично повними доведеннями. До деяких інших задач також подано вказівки до їх розв'язання. Біля номера задачі, до якої є вказівка, зроблено помітку (**в**). Задачі, які, на думку автора, є досить складними, відмічені зірочкою. Звичайно, перед тим, як звернутись до вказівки до якоїсь задачі, бажано зробити спробу розв'язати цю задачу самостійно. Однак використання вказівки і обов'язкове відновлення за її допомогою повного розв'язку задачі теж цілком прийнятне (особливо, для не дуже «сильних» студентів, коли йдеться про задачі з поміткою (**т**), до того ж з зірочкою) і принесе тільки користь.

Ще однією особливістю даного посібника є важлива роль, яку інколи відіграє в ньому порядок розташування задач: для розв'язання деяких задач часто потрібно знати факти, викладені в попередніх задачах даного параграфа, особливо в задачах, відмічених зірочкою. Окремі задачі містять по кілька пунктів. Це зроблено у випадках, коли або пропонуються однотипні стандартні алгоритмічні задачі, або наводяться різні властивості одного і того ж об'єкта, але не тільки: в деяких задачах в перших (або кількох перших) пунктах пропонується довести деякі допоміжні твердження, потрібні для доведення основного факту, який вимагається довести в одному з наступних пунктів; при цьому допоміжні факти можуть безпосередньо і не стосуватись теорії наближень.

Нарешті, останньою особливістю, про яку, напевно, слід попередити читача, є використання в посібнику логічних знаків і певних скорочень для найбільш поширених термінів (див розділи «Скорочення» і «Позначення»). Це зроблено з метою уникнення зайвого багатослів'я.

У зв'язку з тим, що курс теорії наближень у Київському університеті читається студентам, які вже мають освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавра математики, пропонований посібник розраховано на осіб, котрі володіють методами математичного аналізу, знайомі з основними поняттями алгебри, аналітичної геометрії, теорії міри, функціонального і комплексного аналізу. Разом з тим, збірник містить достатню кількість простих задач, теорія, що викладається у формі задач, має елементарний характер, а вказівки до таких задач часто досить детальні. Розділ 2 доступний студентам молодших курсів. Тому автор сподівається, що цей посібник виявиться придатним і корисним для початкового знайомства з теорією наближень.

Більшість задач запозичена з відомої навчальної літератури, деяка частина – з журнальних статей, однак, можливо, окремі задачі виявляться новими.

На структуру і тематику цього посібника великий вплив справили лекції з теорії наближень доцента Г.С. Смирнова, які автору пощастило прослухати, будучи студентом.

Автор висловлює щиру подяку професору І. О. Шевчуку за постійну увагу, різнобічну допомогу і підтримку в роботі.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

ЛП – лінійний простір;
ЛНП – лінійний нормований простір;
ЛНФ – лінійний неперервний функціонал;
енн – елемент найкращого наближення (див. § 1.1);
пнн – поліном найкращого наближення (енн, який є поліномом);
МІ – множина існування (див. § 1.2);
МЄ – множина єдиності (див. § 1.5);
ЧМ – чебишовська множина, тобто МІ та МЄ одночасно (див. § 1.6);
ЧС – чебишовська система (див. § 2.4);
п. – пункт;
ОНС – ортонормована система;
ОНБ – ортонормований базис.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;
$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;
$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;
$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;
$\mathbf{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbb{C}$;
$\overline{z}$ – число, спряжене до комплексного числа z;
$\exists$ – квантор існування (читається «існує»);
$\forall$ – квантор загальності (читається «для всіх», «для кожного»);
$\exists!$ – «існує рівно один»;
$\Rightarrow$ – «випливає»;
$\Leftrightarrow$ – «рівносильно», «тоді і тільки тоді»;
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – «за означенням»;
: – читається «виконується», «має місце»;
$B(x, r)$ – відкрита куля (в метричному просторі) з центром в точці x і радіусом $r > 0$;
$\overline{B}(x, r)$ – замкнена куля (в метричному просторі) з центром в точці x і радіусом $r > 0$;
$S(x, r)$ – сфера (в метричному просторі) з центром в точці x і радіусом $r > 0$;
$\overline{F}$ – замикання множини F;
F° – множина внутрішніх точок множини F;
$\overline{0}$ – нульовий елемент (вектор) лінійного простору;
$\|\cdot\|_X$ – норма в ЛНП X;
л.о.(M) – лінійна оболонка множини M;
з.л.о.(M) – замкнена лінійна оболонка множини M;
$E(x, F)$ – величина найкращого наближення елемента x множиною F (див. § 1.1);
$Ker\ f$ – ядро ЛНФ f (див. задачу 1.2.5);
X^* – спряжений простір до ЛНП X;
$[x, y]$ – відрізок в ЛНП з кінцями в точках x та y (див. § 1.3);
$co(F)$ – опукла оболонка множини M (див. § 1.3);
$\overline{co}(F)$ – замкнена оболонка множини M (див. § 1.3);
$C(X, Y)$ – множина неперервних відображень, що діють з X в Y;
$C(A)$ – множина функцій $x : A \to \mathbf{K}$, неперервних на множині A; так позначається і ЛНП з рівномірною нормою;
$C[a, b]$ – простір неперервних на $[a, b]$ функцій $x : [a, b] \to \mathbf{K}$ з рівномірною нормою: $\|x\| := \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t)|$;
$\tilde{C}$ – простір 2π-періодичних функцій $x : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$, неперервних на $\mathbb{R}$, з рівномірною нормою: $\|x\| := \max\limits_{t \in [0, 2\pi]} |x(t)| = \max\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$;

$L_p(T, F, \mu) = L_p(T, \mu) = L_p(T)$ – простір F- вимірних функцій $x : T \to \mathbf{K}$, модуль яких інтегровний у p-ому степені на T відносно міри μ, з нормою $\|x\| := \|x\|_p := \left(\int_T |x|^p \, d\mu \right)^{1/p}$, де $1 \le p < +\infty$; при цьому функції, рівні на T майже скрізь відносно міри μ, вважаються рівними в цьому просторі;

$L_p[a, b]$ – простір борельових функцій $x : [a, b] \to \mathbf{K}$, модуль яких інтегровний у p-ому степені на $[a, b]$ відносно міри Лебега, з нормою $\|x\| := \|x\|_p := \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$, де $1 \le p < +\infty$; при цьому функції, рівні на $[a, b]$ майже скрізь відносно міри Лебега, вважаються рівними в цьому просторі;

$\tilde{L}_p$ – простір 2π-періодичних борельових функцій $x : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$, модуль яких інтегровний у p-ому степені на $[0, 2\pi]$ відносно міри Лебега, з нормою $\|x\| := \|x\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$, де $1 \le p < +\infty$; при цьому функції, рівні на $\mathbb{R}$ майже скрізь відносно міри Лебега, вважаються рівними в цьому просторі;

$\mathbf{P}_n$ – множина алгебраїчних многочленів степеня не вище $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbf{P}$ – множина алгебраїчних многочленів;

$\mathbf{T}_n$ – множина тригонометричних поліномів порядку не вище $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тобто множина функцій виду $T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, $t \in \mathbb{R}$, де $\{a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbf{K}$ – сталі;

$\mathbf{T}$ – множина тригонометричних поліномів;

$BV[a, b]$ – множина функцій обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$;

$V(g, [a, b])$ – варіація функції g на відрізку $[a, b]$;

$M^{\perp}$ – анулятор множини M (див. § 1.3)

(x, y) – скалярний добуток елементів x та y;

$x \perp y$ – ортогональність елементів x та y (у просторі зі скалярним добутком);

$x \perp F$ – ортогональність елемента x множині F;

$l_p := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in \mathbf{K}, n \ge 1, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$ – ЛНП з нормою $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$, де $1 \le p < +\infty$;

$c := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in \mathbf{K}, n \ge 1, \exists \lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbf{K} \right\}$ – ЛНП з нормою $\|x\| = \sup_{n \ge 1} |x_n|$.

§ 1.1. Властивості функціонала (величини) найкращого наближення

Нехай X *– ЛНП над полем* $\mathbf{K}$ *(*$\mathbf{K}=\mathbb{R}$ *або* $\mathbf{K}=\mathbb{C}$*),* $F\subset X$, $F\neq\varnothing$, $x\in X$. *Число* $E(x,F):=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|$ *називається* ***величиною найкращого наближення*** *елемента* $x\in X$ *множиною* F. *Якщо існує такий елемент* $y^*\in F$, *що* $E(x,F)=\|x-y^*\|$, *то* y^* *називається* ***елементом найкращого наближення*** *(скорочено –* ***енн****) елемента* $x\in X$ *множиною* F. *Функція* $X\ni x\mapsto E(x,F)$ *називається* ***функціоналом найкращого наближення*** *множиною* F.

Зауваження. Іншими словами, $E(x,F)$ – це відстань від точки x до множини F. Точка $y^*\in X$ є енн для $x\in X$ в F $\Leftrightarrow$ $y^*\in F$ і $\forall\, y\in F$: $\|x-y\|\geq\|x-y^*\|$.

1.1.1. (**т, в**) (**Основні властивості функціонала найкращого наближення**) Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, $F\subset X$, $F\neq\varnothing$. Довести, що: а) $\forall\, x_1,x_2\in X$: $\left|E(x_1,F)-E(x_2,F)\right|\leq\|x_1-x_2\|$;

б) $E(\,\cdot\,,F)$ – рівномірно неперервна функція на X;

в) якщо $\overline{0}\in F$, то $E(x,F)\leq\|x\|$, $x\in X$;

г) $\forall\, x\in X$: $E(x,F)\geq 0$, причому $E(x,F)=0\ \Leftrightarrow\ x\in\overline{F}$, де $\overline{F}$ – замикання множини F;

д) якщо F – лінійна множина (зокрема, F – підпростір), то функціонал $E(\,\cdot\,,F)$ є: 1) ***півадитивним***, тобто $\forall\, x_1,x_2\in X$: $E(x_1+x_2,F)\leq E(x_1,F)+E(x_2,F)$; 2) ***додатно однорідним*** (за іншою термінологією – ***однорідним***), тобто $\forall\, x\in X\ \ \forall\,\alpha\in\mathbf{K}$: $E(\alpha x,F)=|\alpha|E(x,F)$;

е) якщо F – опукла множина (див. § 1.3), то $E(\,\cdot\,,F)$ – ***опуклий вниз функціонал***, тобто

$$\forall\, x_1,x_2\in X\ \ \forall\,\alpha\in[0,1]: E(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,F)\leq\alpha E(x_1,F)+(1-\alpha)E(x_2,F).$$

Зауваження. З задачі 1.1.1.г) і д) випливає, що якщо F – підпростір ЛНП X, то $E(\,\cdot\,,F)$ – півнорма на X.

1.1.2. Навести приклад ЛНП X та множини $F\subset X$ таких, що функціонал найкращого наближення $E(\,\cdot\,,F)$ не є: а) адитивним; б) півадитивним; в) додатно однорідним.

1.1.3. Нехай $\overline{F}$ – замикання множини F в ЛНП X. Довести, що $\forall\ x\in X$: $E(x,F)=E(x,\overline{F})$.

1.1.4. Нехай X – ЛНП. Знайти необхідну і достатню умову на множини $F_1\subset X$ і $F_2\subset X$, за якої $\forall\ x\in X$: $E(x,F_1)=E(x,F_2)$.

1.1.5. Знайти $E(x,F)$ в $C[a,b]$ і з'ясувати, чи є енн для x в F єдиним, якщо:

а) $F=\left\{\alpha t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$, $x(t)=\cos t$, $t\in[a,b]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

б) $F=\left\{\alpha(t-1)^2,\ t\in[-1,1]\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$, $x(t)=1-t^2$, $t\in[a,b]=[-1,1]$.

1.1.6. Нехай $\{x_1,\dots,x_n\}$ – лінійно незалежна система елементів у ЛНП X, $F_k:=\text{л.о.}\left(\{x_1,\dots,x_n\}\setminus\{x_k\}\right)$, $1\leq k\leq n$, $d:=\min\limits_{1\leq k\leq n}E(x_k,F_k)$, $\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathbf{K}$. Довести, що $|c_k|\leq\frac{1}{d}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i\right\|$, $1\leq k\leq n$.

1.1.7. Нехай F – підпростір ЛНП X, $x \in X \setminus F$. Довести, що $y^* \in F$ – енн для x в F $\Leftrightarrow$ $\exists f \in X^*$ такий, що: 1) $\|f\| = 1$; 2) $f(x) = \|x - y^*\|$; 3) $f(y) = 0$, $y \in F$.

1.1.8. (**Перша теорема двоїстості**) Нехай F – підпростір ЛНП X, $x \in X$. Довести, що

$$E(x, F) = \sup\left\{ f(x) \mid f \in X^*, \|f\| \le 1, f(y) = 0, y \in F \right\},$$

причому супремум у правій частині досягається на деякому функціоналі $f_0 \in X^*$, $\|f_0\| = 1$.

§ 1.2. Проблема існування елемента найкращого наближення

Множина F в ЛНП X називається ***множиною існування*** *(скорочено –* ***МІ****), якщо для кожного елемента $x \in X$ існує енн для x в F.*

1.2.1. Навести приклад підмножини в $\mathbb{R}$, яка: а) є МІ; б) не є МІ.

1.2.2. (**т, в**)(**Необхідна умова МІ**)Довести, що коли F – МІ в ЛНП X, то F – замкнена множина в X.

1.2.3. Навести приклад ЛНП і замкненої множини в ньому таких, що дана множина не є МІ.

Множина $F \subset X$ в ЛНП X називається ***локально компактною****, якщо з кожної обмеженої послідовності елементів з F можна виділити підпослідовність, збіжну до елемента з X.*

1.2.4. (**т, в**) Нехай X – ЛНП, $F \subset X$. Довести, що якщо: а)* F – замкнена локально компактна множина в X, то F – МІ (**перша достатня умова МІ**); б) F – скінченновимірний підпростір в X, то F – МІ (**теорема Бореля**).

Зауваження. Ще достатні умови МІ дає задача 1.4.7.

1.2.5. (**т, в**) (**Лема про зв'язок гіперпідпросторів з ЛНФ**) Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$. Підпростір $F \subset X$ називається ***гіперпідпростором***, якщо $\exists\, y \in X \setminus F$: л.о.$\left(F \bigcup \{y\}\right) = X$. Довести, що: а) коли $f : X \to \mathbf{K}$ – лінійний функціонал, $Ker\, f := \left\{x \in X \mid f(x) = 0\right\}$, $y \in X \setminus Ker\, f$, то $\forall x \in X$ $\exists!\, z \in Ker\, f$ $\exists!\, \alpha \in \mathbf{K}$: $x = z + \alpha y$; б) $F \subset X$ – гіперпідпростір $\Leftrightarrow$ $\exists f \in X^* \setminus \{\overline{0}\}$: $F = Ker\, f$.

1.2.6. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, $f \in X^*$. Довести, що:

а)* (**т, в**) $\forall\, x \in X$: $\left|f(x)\right| = \|f\| \cdot E(x, Ker\, f)$;

б)* якщо $a \in \mathbf{K}$, $F = \left\{x \in X \mid f(x) = a\right\}$, то $E(x, F) = \dfrac{\left|f(x) - a\right|}{\|f\|}$;

в)* (**т, в**) (**твердження про гіперпідпростір як МІ**) $Ker\, f$ – МІ $\Leftrightarrow$ $\left|f(\,\cdot\,)\right|$ досягає на свого найбільшого значення на $S(\overline{0},1)$ ($S(\overline{0},1)$ – одинична сфера простору X з центром в $\overline{0}$);

г) якщо $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in X$, $f(x_0) f(y_0) < 0$, то $\|x_0 - y_0\| \ge E(x_0, Ker\, f) + E(y_0, Ker\, f)$; дати геометричне тлумачення.

Зауваження. З 1.2.6.б) випливають формули відстані від точки до прямої і до площини, відомі з аналітичної геометрії.

1.2.7. а) Довести, що якщо X – рефлексивний ЛНП, то $\forall\, f \in X^*$: $\left|f(\,\cdot\,)\right|$ досягає свого найбільшого значення на $S(\overline{0},1)$; б) Побудувати гіперпідпростір в деякому ЛНП, який не є МІ.

Зауваження. Теорема Джеймса стверджує, що справджується твердження, обернене до твердження 1.2.7.а), тобто якщо $\forall\, f \in X^*$: $\left|f(\,\cdot\,)\right|$ досягає свого найбільшого значення на $S(\overline{0},1)$, то простір X рефлексивний.

§ 1.3. Опуклі множини, опуклі оболонки. Функціонал Мінковського

Нехай X – ЛП над полем $\mathbf{K}$, $x, y \in X$. Множина $[x, y] := \left\{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0, 1]\right\}$ називається ***відрізком*** *з кінцями в точках x та y; відрізок $[x, y]$ називається* ***невиродженим****, якщо*

*$x \neq y$. Множина $F \subset X$ називається **опуклою**, якщо $\forall\, x, y \in F$: $[x, y] \subset F$, тобто $\forall\, x, y \in F$ $\forall\, \alpha \in [0, 1]$: $\alpha x + (1-\alpha) x \in F$. $\varnothing$ опукла за означенням.*

1.3.1. Нехай X – ЛП, $x,\ y \in X$. Довести, що $[x, y] = [y, x]$.

1.3.2. Довести, що замкнена і відкрита кулі в ЛНП є опуклими множинами.

1.3.3. Нехай X – ЛНП, $F \subset X$, $x \in X$, F_x – множина елементів найкращого наближення елемента x множиною F (можливо, $F_x = \varnothing$). Довести, що: а) множина F_x замкнена і обмежена; б) (**т, в**) (**теорема про опуклість множини енн**) F – опукла $\Rightarrow$ F_x – опукла.

Зауваження. Теорему про опуклість множини енн часто застосовують так: якщо $F \subset X$ – опукла множина, y_0, y_1 – енн в F для елемента $x \in X$, то $\frac{1}{2}(y_0 + y_1)$ теж є енн в F для x.

***Опуклою оболонкою** множини $F \subset X$ в ЛП X називається множина*

$$co(F) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \mid y_k \in F, \alpha_k \geq 0, 1 \leq k \leq n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, n \in \mathbb{N} \right\};$$

*при цьому елемент $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in co(F)$ називається **опуклою комбінацією** елементів $y_1, \ldots, y_n$.*

*Якщо X – ЛНП, то замикання множини $co(F)$ в X називається **замкненою опуклою оболонкою** множини F і позначається $\overline{co}(F)$. Завжди $F \subset co(F) \subset \overline{co}(F)$.*

1.3.4. Довести, що якщо $\{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^2$, то $co(\{x, y, z\})$ – трикутник з вершинами x, y, z.

1.3.5. (**т**) (**Властивості опуклих множин в ЛП**) Нехай X – ЛП, $F \subset X$, $G \subset X$. Довести, що:
а) $co(F)$ – опукла множина; б) $F \subset G \Rightarrow co(F) \subset co(G)$;
в) (**в**) множина F опукла $\Leftrightarrow$ $co(F) = F$;
г) $co(F) = \bigcap M$, де перетин береться по всіх опуклих множинах $M \subset X$ таких, що $F \subset M$;
д) лінійна множина (зокрема, підпростір в ЛНП) є опуклою;
е) множина $F + G := \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ опукла.

1.3.6. (**т**) (**Властивості опуклих множин в ЛНП**) Нехай X – ЛНП, $F \subset X$ – опукла множина. Довести, що: а) $\overline{F}$ – опукла множина; б) (**в**) якщо $x_0 \in F^\circ$, $x_1 \in F$, то $[x_0, x_1] \setminus \{x_1\} \subset F^\circ$; в) F° – опукла множина; г) (**в**) якщо $F^\circ \neq \varnothing$, то F° скрізь щільна в F.

1.3.7*. (**в**) (**Теорема Каратеодорі**) Довести, що якщо $F \subset \mathbb{R}^m$, то кожна точка з $co(F)$ є опуклою комбінацією не більш, ніж $(m+1)$-єї точки з F.

Зауваження. Якщо $x \in co(F)$, то $\exists n \in \mathbb{N}$ таке, що $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, де $x_k \in F$, $\alpha_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Теорема Каратеодорі каже, що можна взяти таке n, щоб $n \leq m+1$.

1.3.8. (**Наслідки з теореми Каратеодорі**) Довести, що якщо: а) $F \subset \mathbb{C}^m$, то кожна точка з $co(F)$ є опуклою комбінацією не більш, ніж $(2m+1)$-єї точки з F; б) F – компакт в $\mathbb{R}^m$, то $co(F)$ – компакт в $\mathbb{R}^m$.

*Нехай X – ЛП над полем $\mathbf{K}$. Функція $p: X \to \mathbb{R}$ називається **невід'ємним функціоналом**, якщо $\forall\, x \in X$: $p(x) \geq 0$. Функція $p: X \to \mathbb{R}$ називається **опуклим функціоналом**, якщо: 1) $\forall\, x, y \in X$: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (**півадитивність**); 2) $\forall\, x \in X$ $\forall\, \alpha \geq 0$: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (**додатна однорідність**). Опуклий функціонал p називається **півнормою**, якщо $\forall\, x \in X$ $\forall\, \alpha \in \mathbf{K}$:*

$p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$ *(**однорідність**). Кожна норма на X буде півнормою. Півнорма p буде нормою, якщо* $\forall x \in X:\ p(x)=0 \Rightarrow x=\overline{0}$.

1.3.9. (**в**) Навести приклад: а) опуклого функціонала на $\mathbb{R}$, який не є півнормою; б) півнорми на $\mathbb{R}^2$, яка не є нормою.

1.3.10. (**в**) Нехай X – ЛП, $p: X \to \mathbb{R}$. Довести, що якщо: а) p – опуклий функціонал, то $p(\overline{0})=0$; б) p – півнорма, то функціонал p невід'ємний; в) p – додатно однорідний функціонал, то p – опуклий функціонал тоді і тільки тоді, коли p – опукла вниз функція, тобто

$$\forall\, x, y \in X \ \ \forall \alpha \in [0,1]: p(\alpha x+(1-\alpha) y) \leq \alpha p(x)+(1-\alpha) p(y).$$

*Множина $A \subset X$ в ЛП X називається: 1) **поглинаючою**, якщо* $\forall x \in X \ \ \exists \alpha>0: \ \dfrac{x}{\alpha} \in A$ *(тобто $x \in \alpha A:=\{\alpha y \mid y \in A\}$); 2) **врівноваженою**, якщо* $\forall x \in A \ \ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ |\lambda| \leq 1:\ \lambda x \in A$*; 3) **алгебраїчно обмеженою**, якщо* $\forall x \neq \overline{0}\ \ \exists \alpha>0: \alpha x \notin A$ *(тобто $\forall x \neq \overline{0}$ промінь $\{\alpha x \mid \alpha>0\} \not\subset A$).*

1.3.11. Нехай X – ЛНП. Довести, що: а) множина $A=B(\overline{0}, 1)$ поглинаюча; б) якщо множина $A \subset X$ поглинаюча, то $\overline{0} \in A$; в) якщо $A \subset X$, $\overline{0} \in A^{\circ}$, то множина A поглинаюча; г) якщо $X=\mathbb{R}^2$, A – «яблучко з хвостиком»:

$$A=\left\{(x, y) \mid (|x|-1)^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\} \cup\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 4,\ y<0\right\} \cup(\{0\} \times[0,1]),$$

то множина A поглинаюча, але $\overline{0} \notin A^{\circ}$.

1.3.12. Нехай X – дійсний ЛНП. Довести, що: а) множина $A \subset X$ врівноважена $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$: $[-x, x] \subset A$; б) якщо множина $A \subset X$ опукла, то A – врівноважена $\Leftrightarrow$ A – **симетрична** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in A: -x \in A$.

*Нехай X – ЛП над полем $\mathbf{K}$, $A \subset X$, $\overline{0} \in A$. **Функціоналом Мінковського** множини A називається функція* $p_A(x):=\inf \{\lambda>0: x \in \lambda A\}$, $x \in X$ *(тут $\inf \varnothing:=+\infty$).*

1.3.13. Довести, що якщо: а) $X=\mathbb{R}$, $A=[0,1]$, то $p_A(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ +\infty, & x<0; \end{cases}$ б) X – ЛНП, $r>0$, $A=B(\overline{0}, r)$, то $p_A(x)=\frac{1}{r}\|x\|$, $x \in X$.

1.3.14. (**т, в**) (**Властивості функціонала Мінковського**) Нехай X – ЛП, $\overline{0} \in A \subset X$. Довести, що:

а) $p_A(\overline{0})=0$ і $\forall x \in X: 0 \leq p_A(x) \leq+\infty$; б) множина A поглинаюча $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X:\ p_A(x)<+\infty$;

в)функціонал p_A додатно однорідний, тобто $\forall x \in X \ \ \forall \alpha \geq 0:\ p_A(\alpha x)=\alpha p_A(x)$ (тут $0 \cdot+\infty:=0$);

г) A – опукла $\Rightarrow$ $B_{p_A}:=\{x \in X \mid p_A(x)<1\} \subset A \subset\{x \in X \mid p_A(x) \leq 1\}=: \overline{B}_p$;

д) X – ЛНП, множина A опукла і відкрита (замкнена) $\Rightarrow$ $A=B_{p_A}$ (відповідно, $A=\overline{B}_{p_A}$);

е) A – опукла $\Rightarrow$ p_A півадитивний, тобто $\forall x, y \in X:\ p_A(x+y) \leq p_A(x)+p_A(y)$;

є) A – опукла, поглинаюча $\Rightarrow$ p_A – невід'ємний опуклий функціонал;

ж) A – опукла, врівноважена, поглинаюча $\Rightarrow$ p_A – півнорма;

з) A – опукла, врівноважена, поглинаюча, алгебраїчно обмежена $\Rightarrow$ p_A – норма.

1.3.15. Нехай X – ЛП, $p : X \to \mathbb{R}$ – опуклий функціонал. Довести, що: а) множини $B_p := \left\{ x \in X \mid p(x) < 1 \right\}$ і $\overline{B}_p := \left\{ x \in X \mid p(x) \le 1 \right\}$ опуклі та поглинаючі; б) $p_{B_p} = p_{\overline{B}_p} = p$; в) якщо p – півнорма, то B_p і $\overline{B}_p$ врівноважені; г) якщо p – норма, то B_p і $\overline{B}_p$ алгебраїчно обмежені.

1.3.16. Нехай X – ЛНП, множина $A \subset X$ опукла. Довести, що $B_{p_A} = A^\circ$ і $\overline{B}_{p_A} = \overline{A}$.

1.3.17. Навести приклад множини: а) $A \subset \mathbb{R}$ такої, що p_A – опуклий функціонал, але не півнорма; б) $A \subset \mathbb{R}^2$ такої, що p_A – півнорма, але не норма.

1.3.18. Нехай $p(x) = 0,\ x < 0$ $\ p(x) = x,\ x \ge 0$. Чи є функція p на $\mathbb{R}$ опуклим функціоналом? півнормою? Чи існує множина $A \subset \mathbb{R}$ така, що $p = p_A$?

1.3.19. (**в**) Нехай X – дійсний ЛНП, $A \subset X$. Множина A називається ***симетричним тілом,*** якщо A – симетрична, опукла, замкнена, обмежена множина і $A^\circ \ne \varnothing$. Довести, що для того, щоб $A = \overline{B}_p := \left\{ x \in X \mid p(x) \le 1 \right\}$ для деякої норми p, достатньо, а якщо $\dim X < +\infty$, то й необхідно, щоб A була симетричним тілом; при цьому $p = p_A$.

1.3.20. Нехай X – ЛП. Кажуть, що множина $A \subset X$ ***відкрита (замкнена) по променях***, якщо для кожного $x \in X$ множина $\left\{ \lambda > 0 : x \in \lambda A \right\}$ відкрита (відповідно, замкнена) у метричному просторі $\left((0, +\infty), \rho \right)$, де $\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Довести, що якщо $A \subset X$ – опукла множина, $\overline{0} \in A$, A – відкрита (замкнена) по променях, то $B_{p_A} = A$ (відповідно, $\overline{B}_{p_A} = A$).

§ 1.4. Теореми відокремлення

1.4.1. (**т**) (**Твердження про зв'язок гіперплощин з ЛНФ**) Нехай X – дійсний ЛНП. Множина $L \subset X$ називається ***гіперплощиною***, якщо $\exists M$ – гіперпідпростір в X $\ \exists u \in X$: $L = M + u :=$ $:= \left\{ x + u \mid x \in M \right\}$. Довести, що L – гіперплощина в X $\Leftrightarrow$ $\exists f \in X^* \setminus \left\{ \overline{0} \right\}$ $\ \exists c \in \mathbb{R}$: $L = \left\{ x \in X \mid f(x) = c \right\}$ (тобто L – лінія рівня деякого ЛНФ на X).

Теорема (перша теорема відокремлення). *Нехай A, B – непорожні опуклі множини в дійсному ЛНП X, $A^\circ \ne \varnothing$, $A^\circ \cap B = \varnothing$. Тоді $\exists f \in X^*$ $\ \exists c \in \mathbb{R}$ $\ \forall x \in A,\ \forall y \in B$: $f(x) \le c \le f(y)$, причому $f(x) < c$, $x \in A^\circ$.*

Теорема (друга теорема відокремлення). *Нехай A, B – непорожні опуклі замкнені множини в дійсному ЛНП X, A – компакт, $A \cap B = \varnothing$. Тоді $\exists f \in X^*$ $\ \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\ \forall x \in A,\ \forall y \in B$: $f(x) \le c_1 < c_2 \le f(y)$.*

Зауваження.1. Перша теорема відокремлення стверджує, що $\sup\limits_{x \in A} f(x) \le \inf\limits_{y \in B} f(y)$; у цьому випадку кажуть, що ***функціонал*** f ***розділяє множини*** A і B. Геометрично це означає, що множини A і B лежать «по різні боки» від деякої гіперплощини $\left\{ x \in X \mid f(x) = c \right\}$. Друга теорема відокремлення стверджує, що $\sup\limits_{x \in A} f(x) < \inf\limits_{y \in B} f(y)$; у цьому випадку кажуть, що ***функціонал*** f ***строго*** (або ***сильно***) ***розділяє множини*** A і B.

2. Ці теореми залишаються справедливими і в комплексному ЛНП, якщо в їх формулюваннях $f(x)$ та $f(y)$ замінити на $\operatorname{Re} f(x)$ та $\operatorname{Re} f(y)$ відповідно.

3. Задача 1.4.2 показує, що в другій теоремі відокремлення умова компактності хоч однієї з множин істотна. Задача 1.4.3 показує, що в першій теоремі відокремлення умова наявності внутрішніх точок хоч в однієї з множин, а в другій теоремі відокремлення умова замкненості обох множин, істотні.

1.4.2. У ЛНП $\mathbb{R}^2$ розглядаються множини $A:=\{(x, y) \mid xy \ge 1, x \ge 1\}$ і $B:=\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Довести, що A і B – опуклі замкнені неперетинні множини, які не можна строго розділити прямою, більш того, $\nexists f \in (\mathbb{R}^2)^*$, для якого $\exists c \in \mathbb{R}: f(x) < c < f(y)$, $x \in A$, $y \in B$.

1.4.3. У ЛНП l_2 розглядаються множини $A:=\left\{x \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \le 1\right\}$ і $B:=\{t y^* \mid t > 0\}$, де $y^* = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in l_2$. Довести, що: а) A – опуклий компакт; б) B – опукла множина; в) $A \bigcap B = \varnothing$; г) не існує такого $f \in l_2^*$, що розділяє множини A і B.

1.4.4. Переконатись, що частинним випадком другої теореми відокремлення є такий наслідок з теореми Гана-Банаха: якщо $x, y \in X$, $x \ne y$, то $\exists f \in X^*: f(x) \ne f(y)$.

1.4.5. Навести приклад ЛНП і опуклої множини в ньому, яка не має внутрішніх точок.

1.4.6. Довести, що якщо A – опукла множина в ЛНП, $A^\circ \ne \varnothing$, то $A^\circ = (\overline{A})^\circ$.

1.4.7*. (**т**) Множина F в ЛНП X називається **слабко компактною**, якщо з довільної послідовності елементів з F можна виділити підпослідовність, слабко збіжну до елемента з F. Довести, що: а) слабко компактна множина в ЛНП є МІ (**друга достатня умова МІ**); б) замкнена опукла множина в рефлексивному просторі є МІ.

§ 1.5. Проблема єдиності елемента найкращого наближення. Строго нормовані простори

Множина F в ЛНП X називається ***множиною єдиності*** *(скорочено –* ***МЄ****), якщо для кожного елемента $x \in X$ існує не більше одного енн для x в F.*

1.5.1. (**в**) Навести в $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ приклади підпростору F і елемента x, для якого: а) $\exists!$ енн в F; б) енн в F не єдиний.

1.5.2. Нехай $X = C[-1, 1]$, $F = \{\alpha t, t \in [-1, 1] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – одновимірний підпростір. Довести, що F не є МЄ, переконавшись, що $y_0(t) = 0$, $y_1(t) = t$, $t \in [-1, 1]$, – енн для $x_0(t) = 1 - |t|$, $t \in [-1, 1]$.

1.5.3. Нехай X – ЛНП, $F_1 \subset F_2 \subset X$, F_2 – МЄ, $x \in X$, $E(x, F_1) = E(x, F_2)$, $\exists y_i \in F_i$ – енн для x в F_i, $i = 1, 2$. Довести, що $y_1 = y_2$.

1.5.4. Нехай X – ЛНП, $F \subset X$. Чи правильно, що: а) $\overline{F}$ МЄ $\Rightarrow$ F МЄ? б)* F МЄ $\Rightarrow$ $\overline{F}$ МЄ?

1.5.5. (**т, в**) (**Лема про властивості сфери в ЛНП**) Нехай X – ЛНП, $r > 0$. Довести, що якщо $x, y \in S(\overline{0}, r)$, то або $[x, y] \subset S(\overline{0}, r)$, або $[x, y] \setminus \{x, y\} \subset B(\overline{0}, r)$.

ЛНП X називається ***строго нормованим****, а норма в X –* ***строго опуклою****, якщо $\forall x, y \in S(\overline{0}, 1)$, $x \ne y$, $\forall \alpha \in (0, 1)$: $\|\alpha x + (1-\alpha) y\| < 1$, тобто сфера $S(\overline{0}, 1)$ не містить невироджених відрізків.*

1.5.6. (**т, в**) (**Твердження про еквівалентні умови строгої нормованості**) Довести, що у ЛНП X наступні умови рівносильні: 1) $\|\cdot\|$ – строго опукла; 2) $\forall x, y \in S(\overline{0}, 1)$: $x \ne y \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$; 3) $\forall x, y \in X$: $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \Rightarrow x = y$; 4) якщо $x, y \in X \setminus \{\overline{0}\}$, то $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists c > 0: x = cy$; 5) якщо $x, y \in X \setminus \{\overline{0}\}$ і $\forall c > 0: x \ne cy$, то $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

Зауваження. У задачі 1.5.6.4) «$\Leftarrow$» виконується для довільного ЛНП.

1.5.7. Довести, що: а) простір $C[a, b]$ не є строго нормованим; б) якщо (X,ρ) – метричний простір і множина X має принаймні дві точки, то простір $C(X)$ не є строго нормованим; в) простір $L_1[a, b]$ не є строго нормованим; г) (**т, в**) гільбертів простір строго нормований.

1.5.8. Навести приклад строго опуклої норми на $C[a, b]$, яка буде еквівалентною рівномірній нормі.

1.5.9*. (**т, в**) (**Нерівність Гельдера і умови рівності в ній**) Нехай $1 < p < +\infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $x \in L_p(T, \mu)$, $y \in L_q(T, \mu)$. Довести, що: а) $\int\limits_T |xy| d\mu \le \|x\|_p \|y\|_q$, причому тут буде «$=$» $\Leftrightarrow$ $y = \overline{0}$ або $\exists c \ge 0$: $|x(t)|^p = c|y(t)|^q$ $(\operatorname{mod}\mu)$ на T; б) якщо $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, то $\int\limits_T xyd\mu \le \|x\|_p \|y\|_q$, причому тут буде «$=$» $\Leftrightarrow$ $x = \overline{0}$, або $y = \overline{0}$, або $\exists c > 0$: $|x(t)|^p = c|y(t)|^q$ $(\operatorname{mod}\mu)$ на T і $sign\ x(t) = sign\ y(t)$ $(\operatorname{mod}\mu)$ на T.

Зауваження. У задачі 1.5.9 стала $c = \|x\|_p^p \|y\|_q^{-q}$.

1.5.10*. (**т, в**) (**Нерівність Мінковського і умови рівності в ній**)Нехай $1 \le p < +\infty$, $x, y \in L_p(T, \mu)$. Довести нерівність $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$, причому якщо: 1) $1 < p < +\infty$, то тут «$=$» $\Leftrightarrow$ $y = \overline{0}$ або $\exists c \ge 0$: $x(t) = cy(t)$ $(\operatorname{mod}\mu)$ на T; 2) $p = 1$, то тут «$=$» $\Leftrightarrow$ $x(t)\overline{y(t)} \ge 0$ $(\operatorname{mod}\mu)$ на T.

Зауваження. У задачі 1.5.10 ми вважаємо, що якщо $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, то $\overline{c} = \alpha - i\beta$, а якщо $c \ge 0$ для $c \in \mathbb{C}$, то $c \in \mathbb{R}$.

1.5.11. (**т**) Довести, що якщо $1 < p < +\infty$, то простір $L_p(T, \mu)$ строго нормований.

1.5.12. Нехай $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^m$ – вимірні за Лебегом множини, λ – міра Лебега на $\mathbb{R}^m$, $1 < p < +\infty$, $\Delta_s := \Delta + s := \{ t + s \mid t \in \Delta \}$, $s \in \mathbb{R}^m$,

$$X := \left\{ x : G \to \mathbb{R} \mid x - \text{вимірна за Лебегом}, \ \|x\|^{\Delta} := \sup_{s \in \mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\Delta_s \cap G} |x|^p \, d\lambda \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Довести, що: а) $\|\cdot\|^{\Delta}$ – норма на X; б) якщо $m = 1$, $G = \mathbb{R}$, $\Delta = [a, b]$, то простір $\left(X, \|\cdot\|^{\Delta}\right)$ не є строго нормованим; в)* якщо $G \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена , то в означенні норми $\|\cdot\|^{\Delta}$ «$\sup$» можна замінити на «$\max$» і простір $\left(X, \|\cdot\|^{\Delta}\right)$ є строго нормованим.

Зауваження. Норма з задачі 1.5.12 виникає в задачах навігації за геофізичними полями.

1.5.13. Нехай $BV[a, b]$ множина функцій обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$, $V(x, [a, b])$ – варіація функції x на відрізку $[a, b]$. Чи є простір $BV[a, b]$ з нормою $\|x\| = |x(a)| + V(x, [a, b])$ строго нормованим?

1.5.14. (**т, в**) (**Критерій того, що кожна опукла множина є МЄ**) Довести, що ЛНП є строго нормованим тоді і тільки тоді, коли кожна його опукла підмножина є МЄ.

1.5.15.Чи правильно, що ЛНП є строго нормованим тоді і тільки тоді, коли кожен його підпростір є МЄ?

1.5.16*. (**Твердження про гіперпідпростір як МЄ**). Нехай X – ЛНП, $f \in X^* \setminus \{\overline{0}\}$. Довести, що $Ker\, f$ – МЄ тоді і тільки тоді, коли існує не більше одного $u_0 \in S(\overline{0},1)$ такого, що $f(u_0) = \|f\|$.

1.5.17*. Чи правильно, що ЛНП X є строго нормованим тоді і тільки тоді, коли $\forall f \in X^* \setminus \{\overline{0}\}$ існує не більше одного $u_0 \in S(\overline{0},1)$ такого, що $f(u_0) = \|f\|$?

1.5.18. ЛНП X називається ***рівномірно опуклим***, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta : \|x - y\| < \varepsilon$. Довести, що:

а) гільбертів простір рівномірно опуклий; б) рівномірно опуклий простір є строго нормованим; в) скінченновимірний строго нормований простір є рівномірно опуклим;

г)* $(1+t)^p + (1-t)^p \le \begin{cases} 2(1+t^p), 1 \le p \le 2, \\ 2^{p-1}(1+t^p), \ p > 2, \end{cases}$ $t \in [0, 1]$; звідси отримати нерівності Кларксона:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_p^p \le \frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2}, \ p > 2, \qquad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_p^q \le \frac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p \right)^{\frac{1}{p-1}}, \ 1 < p \le 2,$$

$p^{-1} + q^{-1} = 1, \ x, \ y \in L_p(T)$; д) простір $L_p(T)$ при $1 < p < +\infty$ є рівномірно опуклим.

§ 1.6. Чебишовські множини. Оператор найкращого наближення

Множина F в ЛНП X називається ***чебишовською множиною*** *(скорочено –* ***ЧМ****), якщо для кожного елемента $x \in X$ існує рівно один енн для x в F, тобто коли F є МІ та МЄ. Відображення $P : X \to F$ таке, що $P(x) = y^*$, де y^* – енн для $x \in X$ в F, називається* ***оператором найкращого наближення*** *на F.*

1.6.1. Нехай $X = \mathbb{R}^2$ з нормою $\|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p \right)^{1/p}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \le p < +\infty$, $F = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$. Довести, що $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\left\| x^0 - (\alpha, 0) \right\|_p \ge |x_2^0|$. При яких $\alpha \in \mathbb{R}$ в цій нерівності буде рівність? Зробити звідси такі висновки: а) $y^* = (x_1^0, 0)$ – єдиний енн для x^0 в F; б) F – ЧМ; в) $P(x) = (x_1, 0)$, $x \in \mathbb{R}^2$, – оператор найкращого наближення.

1.6.2. Нехай $X = L_p[-1, 1]$, $1 \le p < +\infty$, $F = \{ y \in L_p[-1, 1] \mid y(t) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \lambda) \text{ на } [-1, 0] \}$, де λ – міра Лебега на $\mathbb{R}$. Довести, що F – ЧМ, і знайти P – оператор найкращого наближення на F. Довести, що оператор P є лінійним і неперервним.

1.6.3. З'ясувати, чи є множина M чебишовською в ЛНП X, якщо: а) $X = L_2[-2, 2]$, $M = \left\{ x \in L_2[-2, 2] \mid \int_{-2}^{2} t^2 x(t)\, dt \le 0 \right\}$; б) $X = L_4[0, 2]$, $M = \left\{ x \in L_4[0, 2] \mid \int_0^2 |x(t)|^2\, dt \le 3 \right\}$.

1.6.4. (**т, в**) (**Теорема про властивості оператора найкращого наближення**) Нехай F – ЧМ в ЛНП X, $P : X \to F$ – оператор найкращого наближення на F. Довести, що якщо: а) F – підпростір, то P – однорідний оператор, тобто $\forall x \in X \ \forall \alpha \in \mathbf{K}$: $P(\alpha x) = \alpha P(x)$; б)* F – локально компактна множина, то оператор P є неперервним на X.

1.6.5. Нехай X – ЛНП, F – скінченновимірний підпростір в X, який є ЧМ, $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ – базис в F, P – оператор найкращого наближення на F. Довести, що $P(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k$, $x \in X$, де $\{ c_1, \ldots, c_n \} \subset X^*$.

1.6.6. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$, $Ker\, f$ – ЧМ, P – оператор найкращого наближення на $Ker\, f$. Довести, що оператор P є лінійним і неперервним.

1.6.7*. Нехай X – ЛНП, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$, $F := \bigcap_{k=1}^{n} Ker\, f_k$ – ЧМ, P – оператор найкращого наближення на F. Чи є оператор P є лінійним і неперервним?
1.6.8*. Нехай X – рефлексивний ЛНП, $F \subset X$ – опукла множина, яка є ЧМ, P – оператор найкращого наближення на F. Довести, що оператор P є неперервним на X.
1.6.9. Нехай X – рівномірно опуклий банахів простір (див. задачу 1.5.18), $F \subset X$ – замкнена опукла множина. Довести, що: а)* (**в**) F є ЧМ; б) функція $f(x) = \|x\|$, $x \in X$, досягає свого мінімуму на F рівно один раз; в)** якщо P – оператор найкращого наближення на F, то P – рівномірно неперервна функція на довільній обмеженій підмножині X.
1.6.10. Нехай X – сепарабельний ЛНП, лінійна множина L скрізь щільна в X. Довести, що існує послідовність неперервних операторів $A_n : X \to L$, $n \ge 1$, така, що $\forall x \in X: \ A_n x \to x$, $n \to \infty$, якщо: а) X – строго нормований простір; б)* (**в**) X – довільний сепарабельний ЛНП.

Розділ 2. РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

У §§ 2.1-2.3 і 2.5 розглядаються дійснозначні функції.

§ 2.1. Теореми Чебишова та Валле-Пуссена у випадку наближення алгебраїчними многочленами

Теорема (Чебишова про альтернанс у випадку наближення алгебраїчними многочленами). *Нехай* $x \in C[a, b]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \notin \mathbf{P}_n$, $p_n^* \in \mathbf{P}_n$. *Тоді* p_n^* *– пнн для* x *в* $\mathbf{P}_n$ $\Leftrightarrow$ *існують точки* $\{t_1, \dots, t_{n+2}\} \subset [a, b]$, $a \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n+2} \le b$, *які задовольняють такі умови:*
1) $\left|x(t_j) - p_n^*(t_j)\right| = \|x - p_n^*\|$, $j = \overline{1, n+2}$; *2)* $x(t_j) - p_n^*(t_j) = -\left(x(t_{j+1}) - p_n^*(t_{j+1})\right)$, $j = \overline{1, n+1}$.

Точки $t_1, \dots, t_{n+2}$ *називаються* ***точками альтернансу***.

2.1.1. (**т, в**) (**Найкраща стала**) Знайти пнн $p_0^* \in \mathbf{P}_0$ для функції $x \in C[a, b]$ у просторі $C[a, b]$.

2.1.2. (**в**) Для функції $x(t) = t^2$, $t \in [-1, 1]$, і кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ знайти пнн $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ в $C[-1, 1]$.

2.1.3*. (**т, в**) (**Найкраща лінійна функція**) Обґрунтувати такий алгоритм знаходження пнн $p_1^* \in \mathbf{P}_1$ для опуклої функції $x \in C^2[a, b]$: 1) проводимо січну L_1 через точки $(a, x(a))$ та $(b, x(b))$; 2) проводимо дотичну L_2 до графіка функції x, паралельну L_1; 3) якщо l_1 та l_2 – функції, для яких прямі L_1 та L_2 – графіки, то $p_1^* = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$.

2.1.4. Знайти пнн $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ для x в $C[a, b]$, якщо: а) (**в**) $x(t) = t^2$, $t \in [0, 2] = [a, b]$, $n = 1$;
б) $x(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi] = [a, b]$, $n = 0$;
в) $x(t) = \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] = [a, b]$, $n = 1$; г) $x(t) = 1 + \sin 4t$, $t \in [0, 2\pi] = [a, b]$, $n = 2$;
д) $x(t) = t^2$, $t \in [1, 3] = [a, b]$, $n = 1$; е) $x(t) = \sqrt[3]{t}$, $t \in [0, 1] = [a, b]$, $n = 1$;
є) $x(t) = \cos^2 t$, $t \in [0, 10\pi] = [a, b]$, $n \in \{0, 1, \dots, 19\}$.

2.1.5. Довести, що $p^*(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, – пнн для $x(t) = \sin \pi t$, $t \in [0, 5]$, в $\mathbf{P}_n$ у просторі $C[0, 5]$ при $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ і не є пнн для x при $n \ge 4$.

2.1.6. Навести приклад функції $x \in C[0, 1]$, для якої графік її пнн $p_1^* \in \mathbf{P}_1$ не буде паралельний січній, що проходить через точки $(0, x(0))$ та $(1, x(1))$.

2.1.7. Довести, що для непарної (парної) функції $x \in C[-a, a]$ її пнн $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ теж непарний (парний).

2.1.8. Знайти пнн $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ для $x(t) = t^3$, $t \in [-1, 1]$, в $C[-1, 1]$, якщо: а) $n = 0$; б) $n = 1$; в) $n = 2$.

2.1.9. (**в**) а) Довести, що якщо $\{A, B\} \subset \mathbb{R}$, $|A| < |B|$, то $sign(B - A) = sign\, B$; б) Довести достатність в теоремі Чебишова про альтернанс.

2.1.10. (**т, в**) (**Теорема про єдність пнн**) Довести, що $\forall n \geq 0\ \ \forall x \in C[a, b]\ \ \exists!\, p_n^* \in \mathbf{P}_n$ – пнн для x в $\mathbf{P}_n$, тобто $\mathbf{P}_n$ – ЧМ.

2.1.11. (**т, в**) (**Теорема Валле-Пуссена**) Нехай $x \in C[a, b]$, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $a \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+2} \leq b$, $p_n^* \in \mathbf{P}_n$, $sign\left(x(t_j) - p_n^*(t_j)\right) = -sign\left(x(t_{j+1}) - p_n^*(t_{j+1})\right)$, $j = \overline{1, n+1}$. Довести, що $E(x, \mathbf{P}_n) \geq \min\limits_{1 \leq j \leq n+2} \left|x(t_j) - p_n^*(t_j)\right|$.

Зауваження. Одним з основних моментів при розв'язанні задач 2.1.9 – 2.1.11 є використання такого наслідку з основної теореми алгебри: многочлен $p \in \mathbf{P}_n$, не всі коефіцієнти якого рівні нулю, має на довільному відрізку не більше n коренів. Виявляється, що аналоги цих тверджень справедливі у випадку будь-якої системи неперервних функцій, яка має подібну властивість (точні формулювання див. у § 2.4).

2.1.12. Нехай $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, функції $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in C[-1, 1]$ лінійні на відрізках $[-1, -\varepsilon]$, $[-\varepsilon, 0]$, $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, 1]$, а в точках $0, \pm\varepsilon, \pm 1$ визначені так: $x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t = \pm 1, \\ 1, & t = \pm\varepsilon, \\ -1, & t = 0, \end{cases}$ $\quad y_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t = \pm 1, \\ 1 \pm \varepsilon, & t = \pm\varepsilon, \\ -1, & t = 0, \end{cases}$

$P : C[-1, 1] \to \mathbf{P}_1$ – оператор найкращого наближення на $\mathbf{P}_1$. Побудувати графіки функцій x_ε, y_ε та знайти $P(x_\varepsilon)$, $P(y_\varepsilon)$, $\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|_{C[-1, 1]}$, $\|P(x_\varepsilon) - P(y_\varepsilon)\|_{C[-1, 1]}$. Зробити звідси висновок, що функція P не є рівномірно неперервною на деякій кулі у просторі $C[-1, 1]$.

2.1.13*. (**в**) Довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ оператор найкращого наближення $P : C[0, 1] \to \mathbf{P}_n$ не лінійний.

2.1.14. Нехай $x \in C[a, b]$ – монотонно неспадна функція, $n \geq 1$. Довести, що монотонно незростаюча функція $p_n \in \mathbf{P}_n$, для якої $p_n(a) > p_n(b)$, не є пнн для x в $\mathbf{P}_n$.

2.1.15*. Навести приклад відрізка $[a, b]$, монотонно неспадної функції $x \in C[a, b]$ і числа $n \in \mathbb{N}$ таких, що пнн $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ функції x не є монотонною функцією на $[a, b]$.

§ 2.2. Многочлени Чебишова І роду

2.2.1. (**т, в**) Нехай $T_n(t) = \cos n \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, $n \geq 0$. Довести, що: а) (**рекурентна формула для** T_n) $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$, $t \in [-1, 1]$, $n \geq 1$; б) $\forall n \geq 0$: T_n співпадає на $[-1, 1]$ з алгебраїчним многочленом степеня n.

Зауваження. З задачі 2.2.1.б) і основної теореми алгебри випливає коректність наступного означення.

Многочленом Чебишова І роду *степеня* $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ *називається такий алгебраїчний многочлен* $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *що* $T_n(t) = \cos n \arccos t$, $t \in [-1, 1]$.

2.2.2. (**т, в**) Довести, що $\forall n \ge 1$: а) старший коефіцієнт T_n рівний 2^{n-1}; б) $\left\|T_n\right\|_{C[-1,\,1]} = 1$; $\left|T_n(t)\right| = 1$ на $[-1,\,1] \;\Leftrightarrow\; t = \cos\dfrac{\pi k}{n} =: t_k$, $k = \overline{0,\,n}$; $-1 = t_n < t_{n-1} < \ldots < t_1 < t_0 = 1$ і $T(t_k) = (-1)^k$, $k = \overline{0,\,n}$.

2.2.3. (**т, в**) (**Основна екстремальна властивість многочленів Чебишова І роду**) Довести, що $\forall n \ge 1$: а) $\tilde p_{n-1}(t) = t^n - 2^{1-n} T_{n-1}(t)$, $t \in [-1,\,1]$, – пнн для функції $x(t) = t^n$, $t \in [-1,\,1]$, в $\mathbf{P}_{n-1}$ у просторі $C[-1,\,1]$; б) $p_n^*(t) = 2^{1-n} T_n(t)$, $t \in [-1,\,1]$, – многочлен з найменшою нормою в $C[-1,\,1]$ серед алгебраїчних многочленів степеня n з одиничним старшим коефіцієнтом.

2.2.4. Знайти: а) T_2, T_3, T_4, T_5 в явному вигляді; б) нулі T_n, $n \ge 1$.

2.2.5. Довести, що: а) T_n – парна функція при парних n і непарна при непарних n;

б) (**диференціальне рівняння для** T_n) $\left(1-t^2\right)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 0$;

в) (**т**) (**співвідношення ортогональності**) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$, $n \ne m$, $n,\, m \ge 0$;

г) $\left|T_n(t)\right| \le 2^{n-1}|t|^n$, $|t| > 1$, $n \ge 1$, причому при $n > 1$ нерівність строга;

д) $\left|T_n'(t)\right| \le n^2$, $t \in [-1,\,1]$, $n \ge 0$;   е) $T_n'(1) = n^2$, $n \ge 0$;

є) $2(t+1)T_n(t) = T_{n-1}(t) + 2T_n(t) + T_{n+1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$;

ж) $4t^2 T_n(t) = T_{n-2}(t) + 2T_n(t) + T_{n+2}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 2$;

з) (**в**) $T_n(t) = \dfrac{1}{2}\left(\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^n + \left(t - \sqrt{t^2-1}\right)^n\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[n/2\right]} C_n^{2k} t^{n-2k}\left(t^2-1\right)^k$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 0$ (тут $\sqrt{u} > 0$ при $u > 0$);   и) $T_n(t) = (sign\; t)^n\, ch\; n\, Arch|\,t\,|$, $|\,t\,| \ge 1$, $n \ge 0$;

і) $T_n(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left(\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}\right)^{2n} + \left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}\right)^{2n}\right)$, $t \ge 1$, $n \ge 0$;

ї)* (**в**) (**явний вигляд** T_n) $T_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[n/2\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} 2^{n-2k-1} t^{n-2k}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$.

2.2.6. Довести, що серед алгебраїчних многочленів p степеня $n \in \mathbb{N}$ зі старшим коефіцієнтом 1 найменшу норму в просторі $C[a,\,b]$ має многочлен $p(t) = 2\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)$, $x \in [a,\,b]$.

2.2.7. Нехай $x \in C[-1,\,1]$, $n \ge 0$, $q(t) = a_{n+1}t^{n+1} + a_n t^n + \ldots + a_0$, – заданий многочлен. Довести, що у просторі $C[-1,\,1]$ має місце нерівність $E\left(x,\, \mathbf{P}_n\right) \ge \dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{2^n} - \|x - q\|$.

§ 2.3 Деякі екстремальні властивості многочленів Чебишова І роду

2.3.1. (**т**) Нехай $\left\{t_k : k = \overline{0,\,n}\right\} \subset \mathbb{R}$ – різні точки, $n \in \mathbb{N}$. Многочлен

$$L_k(t) := L_k\left(t;\, t_0, \ldots, t_n\right) := \prod_{\substack{i=0,\\ i \ne k}}^{n} \frac{t - t_i}{t_k - t_i},\quad t \in \mathbb{R},\quad 0 \le k \le n,$$

називається ***фундаментальним многочленом Лагранжа***; при цьому точки t_k, $0 \le k \le n$, називаються ***вузлами інтерполяції***. Довести, що: а) $\forall\, p \in \mathbf{P}_n \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$: $p(t) = \sum_{k=0}^{n} p(t_k) L_k(t)$; б) якщо $t_k = \cos\dfrac{\pi k}{n}$, $0 \le k \le n$, – ***чебишовські вузли інтерполяції***, $F : \mathbf{P}_n \to \mathbb{R}$ – лінійний функціонал такий, що $sign\, F(L_k) = (-1)^k \varepsilon$, $0 \le k \le n$, де $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon = const$, то $\|F\| = \sum_{k=0}^{n} |F(L_k)| = |F(T_n)|$.

2.3.2. (**т, в**) Знайти многочлен з найменшою нормою в $C[-1, 1]$ серед многочленів $p \in \mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, таких, що: а) $p(a) = 1$, де $a \notin [-1, 1]$ – довільне фіксоване; б) $p'(1) = 1$.

2.3.3. Знайти многочлен $p^* \in \mathbf{P}_n$ такий, що: а) $|p^*(a)| = \max\left\{ |p(a)| \mid p \in \mathbf{P}_n, \|p\|_{C[-1,1]} \le 1 \right\}$, де $a \notin [-1, 1]$ – довільне фіксоване; б) $\left|(p^*)'(1)\right| = \max\left\{ |p'(1)| \mid p \in \mathbf{P}_n, \|p\|_{C[-1,1]} \le 1 \right\}$.

2.3.4. Серед алгебраїчних многочленів p степеня $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\|p\|_{C[-1,1]} \le 1$, знайти многочлен з найбільшим старшим коефіцієнтом.

§ 2.4. Чебишовські системи функцій (системи Гаара)

*Нехай (X, ρ) – метричний простір, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, множина $A \subset X$ має принаймні $n+1$ точку, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset C(A) = C(A, \mathbf{K})$, $H :=$ л.о.$(\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\})$. Функції з H називаються **узагальненими поліномами** по системі $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Система функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset C(A)$ називається **чебишовською системою** (скорочено – **ЧС**), або **системою Гаара, на множині A порядку n**, якщо кожен узагальнений поліном з $H \setminus \{0\}$ має не більше, ніж n нулів на A.*

Зауваження. 1. Запис $p \in H \setminus \{0\} \;\Leftrightarrow\; p = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, де $\{c_0, c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbf{K}$ – деякі числа, причому $\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$; при цьому узагальнений поліном p називається ***нетривіальним***.

2. Поняття ЧС важливе, зокрема, тим, що в цих термінах дається вичерпна відповідь на питання, коли скінченновимірний підпростір простору неперервних на компакті функцій є МЄ (див. наведену нижче теорему Гаара); загальна теорія (див. задачу 1.5.14) на дане питання відповіді не дає, бо простір $C(X)$ не є строго нормованим (див. задачу 1.5.7.б)). Нагадаємо, що за теоремою Бореля (задача 1.2.4.б)) скінченновимірний підпростір завжди є МІ.

3. Важливі приклади ЧС наведені в задачах 2.4.1, 2.4.2, 2.4.5 – 2.4.9.

Теорема (Гаара). *Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Q – метричний компакт, який має принаймні $n+2$ точки, $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset C(A)$, $H :=$ л.о.$(\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\})$. Тоді H – ЧМ в $C(Q)$ $\Leftrightarrow$ $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – ЧС на Q порядку n.*

2.4.1. (**т, в**) Нехай $n \ge 0$. Довести, що: а) $1, t, t^2, \dots, t^n$ – дійснозначна ЧС порядку n на $[a, b]$; б) $1, z, z^2, \dots, z^n$ – комплекснозначна ЧС порядку n на $A \subset \mathbb{C}$, де A має принаймні $n+1$ точку.

*Точка $t_0 \in (a, b)$ називається **нулем кратності** $k \in \mathbb{N}$ функції $f \in C^k((a, b))$, якщо $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(k-1)}(t_0) = 0$, але $f^{(k)}(t_0) \ne 0$.*

2.4.2. (**т, в**) Нехай $T\in\mathbf{T}_n$, $n\ge 0$. Довести, що: а) $\exists P\in\mathbf{P}_{2n}\ \ \forall t\in\mathbb{R}:\ P\left(e^{it}\right)=e^{itn}T(t)$; б) якщо P – многочлен з п. а), то $\forall k\in\mathbb{N}\ \ \forall t\in\mathbb{R}:\ P^{(k)}\left(e^{it}\right)=\sum_{j=0}^{k}F_{kj}(t)T^{(j)}(t)$, де $F_{jk}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $0\le j\le k$, – деякі функції; в) (**лема про нулі тригонометричного полінома**) якщо $T\in\mathbf{T}_n$ – нетривіальний поліном, то він має не більше $2n$ коренів на кожному півінтервалі довжини 2π (тобто на множинах $\left[a,\,a+2\pi\right)$ і $\left(a,\,a+2\pi\right]$, де $a\in\mathbb{R}$ – довільне фіксоване число), навіть з урахуванням кратності; г) 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$, …, $\cos nt$, $\sin nt$ – ЧС порядку $2n$ на всіх півінтервалах довжини 2π.

2.4.3. Довести, що: а) $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$ – ЧС на A тоді і тільки тоді, коли $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$ – лінійно незалежна система функцій на кожній $(n+1)$-точковій підмножині множини A; б) ЧС на A є лінійно незалежною системою функцій на A.

2.4.4. Навести приклад лінійно незалежної системи з трьох функцій, яка не ЧС порядку 2 на $[-1,\,1]$.

2.4.5. (**в**) Довести, що 1, $\cos t$, $\cos 2t$, …, $\cos nt$ – ЧС порядку n на: а) $[0,\,\pi)$; б)* $[0,\,\pi]$.

2.4.6. Довести, що система $\sin t$, $\sin 2t$, …, $\sin nt$ на $(0,\,\pi)$ є ЧС порядку $n-1$, а на $[0,\,\pi)$ не є.

2.4.7. (**в**) Нехай $-\infty<a_1<a_2<\ldots<a_n<+\infty$. Довести, що $e^{a_1 t}$, …, $e^{a_n t}$ – ЧС порядку $n-1$ на $[a,\,b]$.

2.4.8. Нехай $-\infty<a_1<a_2<\ldots<a_n<+\infty$, $0<a<b<+\infty$. Довести, що t^{a_1}, …, t^{a_n} – ЧС порядку $n-1$ на $[a,\,b]$.

2.4.9. (**в**) Нехай $n\in\mathbb{N}$, $f\in C^n[a,\,b]$, $f^{(n)}(t)>0$, $t\in(a,\,b)$. Довести, що 1, t, …, t^{n-1}, $f(t)$ – ЧС порядку n на $[a,\,b]$.

2.4.10. Довести, що система функцій $\varphi_0(t)=t^2-t$, $\varphi_1(t)=t^2+t$, $\varphi_2(t)=t^2+1$ є ЧС порядку 2 на $\mathbb{R}$, але жодна з систем $\left\{\varphi_i,\,\varphi_j\right\}$, $i,\ j\in\{0,\,1,\,2\}$, $i\ne j$, не є ЧС порядку 1 на $\mathbb{R}$.

2.4.11. Нехай $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$ – дійснозначна ЧС порядку n на колі (в $\mathbb{R}^2$). Довести, що n – парне.

2.4.12. Нехай $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}\subset C(A)$. Довести, що: а) (**критерій того, що система є ЧС**) $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$ – ЧС на A $\Leftrightarrow$ $\forall\left\{t_0,\,t_1,\,\dots,\,t_n\right\}\subset A$ – різних точок:

$$\Delta_n:=\begin{vmatrix}\varphi_0(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_0(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n)\end{vmatrix}\ne 0;$$

б) (**інтерполяційна теорема для ЧС**) $\left\{\varphi_0,\,\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$ – ЧС на A $\Leftrightarrow$ $\forall\left\{t_0,\,t_1,\,\dots,\,t_n\right\}\subset A$ – різних точок $\forall\left\{y_0,\,y_1,\,\dots,\,y_n\right\}\subset\mathbf{K}$ $\exists!\,p\in$ л.о.$\left\{\varphi_0,\,\dots,\,\varphi_n\right\}$: $p(t_k)=y_k$, $k=\overline{0,\,n}$; при цьому

$$p(t)=-\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix}0 & \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t)\\ y_0 & \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n & \varphi_0(t_n) & \varphi_1(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n)\end{vmatrix}.$$

2.4.13. (**в**) Довести, що на $A=[0,1]^2$ в $\mathbb{R}^2$: а) існує ЧС комплекснозначних функцій порядку $n\ge 0$; б)* не існує ЧС дійснозначних функцій порядку $n\ge 1$.

Зауваження. Повну характеристику компактів, на яких існують дійснозначні ЧС, дає **теорема Мерх'юбера**: якщо на метричному компакті A існує дійснозначна ЧС порядку $n\ge 1$, то A гомеоморфний колу або його частині.

2.4.14. Знайти необхідну і достатню умову на $[a,b]$, щоб у просторі $C[a,b]$: а) F була МЄ; б) для $x(t)=1,\ t\in[a,b]$, $\exists!$ енн в F, якщо: 1) $F=\{\alpha t^2 \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$; 2) $F=\{\alpha t^3 \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.

2.4.15. Довести, що: а) для кожного $n\ge 1$ і кожного $T\in\mathbf{T}_n$ такого, що $t-\pi\le T_n(t)\le t+\pi$, $t\in[0,2\pi)$, поліном T є пнн для $x(t)=t,\ t\in[0,2\pi)$, в $\mathbf{T}_n$; б) $\mathbf{T}_n$ не є ЧМ в $C[0,2\pi)$. Чи не суперечить це теоремі Гаара, адже 1, $\cos t$, $\sin t$, … , $\cos nt$, $\sin nt$ – ЧС на $[0,2\pi)$?

Зауваження. Теорема Чебишова про альтернанс залишиться справедливою і в тому випадку, коли в ній $\mathbf{P}_n$ замінити на $H:=\text{л.о.}(\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n\})$, де $\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ – ЧС на відрізку $[a,b]$ порядку $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

2.4.16. (**в**) Довести достатність в теоремі Чебишова про альтернанс для ЧС на відрізку.

2.4.17. Нехай $Q=[0,1]$, $H=\text{л.о.}\{t,t^2,\dots,t^{n+1}\}$, $x(t):=1,\ t\in[0,1]$. Довести, що $E(x,H)=1$, $p^*(t)=t$, – пнн для x в H, $M(x-p^*):=\left\{t\in[0,1] \mid |x(t)-p^*(t)|=\|x-p^*\|_\infty\right\}$ має одну точку (тобто не існує альтернансу). Чи не суперечить це теоремі Чебишова про альтернанс? Чи є пнн для x в H єдиним? Чому?

§ 2.5. Теореми Чебишова та Валле-Пуссена у випадку наближення тригонометричними поліномами

Теорема (Чебишова про альтернанс у випадку наближення тригонометричними поліномами). *Нехай $x\in\tilde{C}$, $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $x\notin\mathbf{T}_n$, $T_n^*\in\mathbf{T}_n$. Тоді T_n^* – пнн для x в $\mathbf{T}_n$ $\Leftrightarrow$ існують точки $\{t_1,\dots,t_{2n+2}\}\subset[0,2\pi)$, $0\le t_1<t_2<\dots<t_{n+2}<2\pi$, які задовольняють такі умови:*

1) $\left|x(t_j)-T_n^*(t_j)\right|=\|x-T_n^*\|$, $j=\overline{1,2n+2}$;

2) $x(t_j)-T_n^*(t_j)=-\left(x(t_{j+1})-T_n^*(t_{j+1})\right)$, $j=\overline{1,2n+1}$.

*Точки $t_1,\dots,t_{2n+2}$ називаються **точками альтернансу**.*

2.5.1. Знайти $T_0^*\in\mathbf{T}_0$ – пнн для непарної функції $x\in\tilde{C}$ в $\mathbf{T}_0$.

2.5.2. Для кожного $n\ge 0$ у просторі $\tilde{C}$ знайти $T_n^*\in\mathbf{T}_n$ – пнн для функції: а) (**в**) $x(t)=\sin^2 t,\ t\in\mathbb{R}$; б) $x(t)=\sin^4 t,\ t\in\mathbb{R}$.

2.5.3. Довести, що якщо $x\in\tilde{C}$ – непарна (парна) функція, то пнн для x в $\mathbf{T}_n$, $n\ge 1$, має вигляд $T_n^*(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kt$ (відповідно, $T_n^*(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kt$), $t\in\mathbb{R}$.

2.5.4. (**в**) Нехай $a_k\ge 0$, $n_k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{n_{k+1}}{n_k}=2p_k+1$, де $p_k\in\mathbb{N}$, $k\ge 0$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ збігається, $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos(n_k t),\ t\in\mathbb{R}$. Довести, що: а) $x\in\tilde{C}$; б) $\forall n\ge 1$: $T_n^*(t)=\sum_{k=0}^{m}a_k\cos(n_k t),\ t\in\mathbb{R}$, – пнн для x в $\mathbf{T}_n$, де $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ таке, що $n_m\le n<n_{m+1}$.

Зауваження. Функція з задачі 2.5.4 при $a_k = a^k$ і $n_k = b^k$, $k \ge 0$, де $a \in (0,1)$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – непарне, називається ***функцією Вейєрштрасса***. Вона цікава тим, що $\forall t \in \mathbb{R} : \nexists x'(t) \in \mathbb{R}$ при $ab > 1$ (це довів Вейєрштрасс у 1872 р. при $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ і Гарді у 1909 р. при $ab > 1$).

2.5.5. (**в**) Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – фіксовані. Знайти поліном T_n^* з найменшою нормою в $\tilde{C}$ серед поліномів виду

$$T_n(t) = \alpha \cos nt + \beta \sin nt + a_{n-1} \cos(n-1)t + b_{n-1} \sin(n-1)t + \ldots + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_0 .$$

2.5.6. (**в**) Довести достатність в теоремі Чебишова про альтернанс у випадку наближення тригонометричними поліномами.

2.5.7. (**т**) (**Лема про компактифікацію півінтервала**) Нехай $\rho(t, s) := \min\{|t-s|, 2\pi - |t-s|\}$, $t, s \in Q := [0, 2\pi)$. Довести, що: а) (Q, ρ) – компактний метричний простір;

б) $C(Q) = \left\{ x \in C([0, 2\pi)) \mid \exists \lim\limits_{t \to 2\pi-} x(t) = x(0) \right\} =: M$; зробити звідси висновок, що простори $\tilde{C}$, $\{x \in C[0, 2\pi] \mid x(2\pi) = x(0)\}$, M і $C(Q)$ ізометрично ізоморфні (а отже, їх «можна ототожнити»).

Зауваження. З задачі 2.5.7.а) випливає, що існує ізометрія між метричними просторами (Q, ρ) і одиничним колом в $\mathbb{R}^2$, відстань між точками якого рівна довжині меншої з двох його дуг, що з'єднують ці точки (а отже, ці метричні простори «можна ототожнити»).

2.5.8. (**т, в**) (**Теорема про єдиність пнн**) Довести, що $\forall n \ge 0 \ \forall x \in C[a, b] \ \exists! T_n^* \in \mathbf{T}_n$ – пнн для x в $\mathbf{T}_n$, тобто $\mathbf{T}_n$ – ЧМ.

2.5.9. (**т, в**) (**Теорема Валле-Пуссена**) Нехай $x \in C[a, b]$, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+2} \le b$, $p_n^* \in \mathbf{P}_n$, $sign\left(x(t_j) - p_n^*(t_j)\right) = -sign\left(x(t_{j+1}) - p_n^*(t_{j+1})\right)$, $j = \overline{1, n+1}$. Довести, що $E(x, \mathbf{P}_n) \ge \min\limits_{1 \le j \le n+2} \left| x(t_j) - p_n^*(t_j) \right|$.

Розділ 3. ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ

§ 3.1. Теорема Стоуна

3.1.1*. Довести, що наступні твердження рівносильні: 1) $\forall x \in C[a, b] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbf{P}$: $\|x - p\|_{C[a,b]} < \varepsilon$; 2) $\forall x \in \tilde{C} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists T \in \mathbf{T}$: $\|x - T\|_{\tilde{C}} < \varepsilon$.

Зауваження. Задача 3.1.1. показує, що перша теорема Вейєрштрасса (про рівномірне наближення неперервної на відрізку функції алгебраїчними многочленами) рівносильна другій теоремі Вейєрштрасса (про рівномірне наближення 2π-періодичної неперервної на осі функції тригонометричними поліномами).

*Нехай (Q, ρ) – компактний метричний простір, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, $C(Q)$ – простір неперервних $\mathbf{K}$-значних функцій з нормою $\|x\| := \|x\|_{C(Q)} := \max\limits_{t \in Q} |x(t)|$, $x \in C(Q)$. Множина $A \subset C(Q)$ називається **алгеброю**, якщо $\forall x, y \in A \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$: $\alpha x + \beta y \in A$ (тобто A – лінійний простір) і $xy \in A$. Кажуть, що алгебра A **розділяє точки** Q, якщо $\forall t_1, t_2 \in Q$, $t_1 \ne t_2$, $\exists x \in A$: $x(t_1) \ne x(t_2)$. Кажуть, що алгебра A **ніде не зникає** на Q, якщо $\forall t \in Q \ \exists x \in A$: $x(t) \ne 0$.*

Теорема (Стоуна). *Нехай* (Q, ρ) *– компактний метричний простір,* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. *Тоді для того, що алгебра* $A \subset C(Q)$ *була скрізь щільною в ЛНП* $C(Q)$ *необхідно і достатньо, щоб алгебра* A *розділяла точки* Q *і ніде не зникала на* Q.

3.1.2. Нехай (Q, ρ) – компактний метричний простір. Довести, що: а) $C(Q)$ – алгебра, що розділяє точки Q і ніде не зникає на Q; б) множина сталих функцій – алгебра, що не розділяє точок Q, але ніде не зникає на Q; в) якщо функція $x(t) = 1,\ t \in Q$, належить алгебрі A, то вона ніде не зникає на Q.

3.1.3. Довести необхідність у теоремі Стоуна, тобто довести, що якщо Q – метричний компакт і алгебра $A \subset C(Q)$ є скрізь щільною у просторі $C(Q)$, то A розділяє точки Q і ніде не зникає на Q.

3.1.4. Нехай $0 \le a < b < +\infty$. Застосувати теорему Стоуна у просторі $C[a, b]$ до множини функцій виду $p(t) = a_n t^{2n} + a_{n-1} t^{2n-2} + \ldots + a_0,\ t \in [a, b]$, де $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Вивести звідси, що $\forall\, x \in C[-b, b]$ – парної функції $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbf{P}$ – парний многочлен: $\|x - p\|_{C[-b,b]} < \varepsilon$.

3.1.5. Довести, що $\forall\, x \in C[-b, b]$ – непарної (парної) функції $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbf{P}$ – непарний (парний) многочлен: $\|x - p\|_{C[-b,b]} < \varepsilon$.

Зауваження. Твердження задачі 3.1.5 у випадку непарної функції можна довести за допомогою задачі 3.1.6 і останнього твердження задачі 3.1.4, а можна отримати й з інших міркувань.

3.1.6. Нехай множина M скрізь щільна у просторі $C[0, 1]$. Довести, що $\forall\, x \in C[0, 1],\ x(0) = 0$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in M\ \ \forall\, t \in [0, 1]$: $|x(t) - t y(t)| < \varepsilon$.

3.1.7. Довести, що множина $\{t^{5n},\ t \in [0, 2] : n \ge 0\}$ тотальна в $C[0, 2]$. Чи є тотальною в $C[0, 2]$ множина $\{t^{5n},\ t \in [0, 2] : n \ge 1\}$? Чому?

3.1.8. Нехай $0 < a < b < +\infty$. Довести, що наступні множини тотальні в $C[a, b]$: а) $\{t^{5n},\ t \in [a, b] : n \ge 1\}$; б) $\{t^{n+5},\ t \in [a, b] : n \ge 0\}$; в) $\{(\ln t)^n,\ t \in [a, b] : n \ge 0\}$.

3.1.9. (**т**) Довести такі **наслідки з теореми Стоуна**:

1) (**перша теорема Вейєрштрасса в** $\mathbb{R}^m$) Нехай $m \in \mathbb{N}$, $Q \subset \mathbb{R}^m$ – компакт, $x \in C(Q)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists p$ – многочлен m змінних виду $p(\bar{t}) = \sum\limits_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum\limits_{k_m=0}^{n_m} c_{k_1 \ldots k_m} t_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot t_m^{k_m},\ \bar{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in Q$, де $\{n_1, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{c_{k_1 \ldots k_m} \mid 0 \le k_i \le n_i,\ i = \overline{1, m}\} \subset \mathbb{R}$, – сталі, такий, що $\|x - p\|_{C(Q)} < \varepsilon$;

2) (**в**) (**друга теорема Вейєрштрасса в** $\mathbb{R}$) $\forall\, x \in \tilde{C}\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, T \in \mathbf{T}$: $\|x - T\|_{\tilde{C}} < \varepsilon$;

3) (**друга теорема Вейєрштрасса в** $\mathbb{R}^2$) Нехай функція $x \in C(\mathbb{R}^2)$ є 2π-періодичною по кожній змінній при всіх фіксованих значеннях іншої змінної. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists T$ – тригонометричний поліном двох змінних виду

$$T(\bar{t}) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \left(a_{k_1 k_2} \cos k_1 t \cos k_2 t + b_{k_1 k_2} \cos k_1 t \sin k_2 t + \right.$$

$$\left. + c_{k_1 k_2} \sin k_1 t \cos k_2 t + d_{k_1 k_2} \sin k_1 t \sin k_2 t \right),\quad \bar{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

такий, що $\forall\, \bar{t} \in \mathbb{R}^2$: $|x(\bar{t}) - T(\bar{t})| < \varepsilon$;

4) Нехай $R := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{P},\, q \in \mathbf{P},\, \deg p \le \deg q,\, \forall t \in \mathbb{R} : q(t) \ne 0 \right\}$ – множина раціональних функцій, де $\deg p$ – степінь многочлена p. Тоді $\forall x \in C[a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r \in R : \|x - r\|_{C[a,b]} < \varepsilon$;

5) (**в**) Нехай $C_\infty := \left\{ x \in C(\mathbb{R}) \mid \exists \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} x(t) \in \mathbb{R} \right\}$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді $x \in C_\infty \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists r \in R\ \ \forall t \in \mathbb{R} : |x(t) - r(t)| < \varepsilon$.

3.1.10. Нехай $1 \le p < +\infty$, R – множина раціональних функцій з задачі 3.1.9.4). Довести, що множина $R \cap L_p(\mathbb{R})$ скрізь щільна в $L_p(\mathbb{R})$.

3.1.11. Нехай $\{x_n : n \ge 1\} \subset C[a, b]$ – послідовність функцій, яка розділяє точки $[a, b]$. Довести, що $\forall x \in C[a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists y \in C(\mathbb{R}^m)\ \forall t \in [a, b] : \left| x(t) - y\big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big) \right| < \varepsilon$.

3.1.12. Нехай $\varphi \in C[a, b]$. Довести, що $\forall x \in C[a, b]\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \exists \{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ $\forall t \in [a, b] : \left| x(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(t) \right| < \varepsilon$ тоді і тільки тоді, коли φ строго монотонна на $[a, b]$ функція.

3.1.13. Нехай (T_i, d_i), $i = 1, 2$, – компактні метричні простори, $T_1 \times T_2$ – їх декартів добуток з метрикою $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Довести, що $\forall x \in C(T_1 \times T_2)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \{y_{i1}, \ldots, y_{in}\} \subset C(T_i)$, $i = 1, 2$, $\forall (t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 : \left| x(t_1, t_2) - \sum\limits_{k=1}^{n} y_{1k}(t_1)\, y_{2k}(t_2) \right| < \varepsilon$.

3.1.14. (**в**) Нехай $Q = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \}$, $\mathbf{P}$ – множина алгебраїчних многочленів з комплексними коефіцієнтами. Довести, що: а) Q – компакт, $\mathbf{P}$ – алгебра, що розділяє точки і ніде не зникає на Q; б) функції з множини $\overline{\mathbf{P}}$ аналітичні на $Q^\circ = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$. Зробити звідси висновок, що $\overline{\mathbf{P}} \ne C(Q)$, а отже, теорема Стоуна для дійснозначних функцій є хибною у випадку комплекснозначних функцій.

3.1.15. (**т**) (**Теорема Стоуна для комплекснозначних функцій**) Нехай Q – метричний компакт, $A \subset C(Q) = C(Q, \mathbb{C})$ – алгебра, що розділяє точки і ніде не зникає на Q, а також $\forall x \in A$: комплексноспряжена функція $\overline{x} \in A$. Довести, що множина A скрізь щільна в $C(Q)$.

§ 3.2. Четвертий наслідок з теореми Гана-Банаха. Теорема Мюнца

Нехай X *– ЛНП,* $M \subset X$. *Множина* $M^\perp := \{ f \in X^* \mid f(x) = 0,\ x \in M \}$ *називається* ***анулятором*** *множини* M.

3.2.1. Довести, що: а) $M^\perp$ – підпростір в X^*; б) $M^\perp = \big(\text{з.л.о.}(M)\big)^\perp$. Що являє собою $M^\perp$, якщо X – гільбертів простір?

3.2.2. (**т, в**) (**Четвертий наслідок з теореми Гана-Банаха**) Нехай X – ЛНП, $M \subset X$. Довести, що M тотальна в X $\Leftrightarrow$ $M^\perp = \{0\}$.

Зауваження. Задача 3.2.2. стверджує рівносильність умов: 1) M тотальна в X; 2) $\forall f \in X^* :\ f = 0$ на M $\Rightarrow$ $f = 0$ на X.

3.2.3. Довести, що множина $\{ t^{4n+1},\ t \in [0, 1] : n \ge 10 \}$ тотальна в $L_p[0, 1]$, $1 \le p < +\infty$.

3.2.4*. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$.

1) Довести, що $\{ x \in X \mid f(x) = 0,\ f \in M^\perp \} = \text{з.л.о.}(M)$;

2) Довести, що якщо X – рефлексивний простір, M – підпростір, то $M^{\perp\perp} = M$ (точніше, $M^{\perp\perp} = \varphi(M)$, де $\varphi : X \to X^{**}$ – оператор канонічного вкладення);

3) Чи справедливе твердження п. 2) для не рефлексивного простору X ?

4) Довести, що $M^{\perp\perp} \bigcap X = \text{з.л.о.}(M)$ (точніше, $M^{\perp\perp} \bigcap \varphi(X) = \varphi(\text{з.л.о.}(M))$).

3.2.5*. Нехай X – бананів простір, $M \subset X^*$. Розглянемо такі твердження: а) M тотальна множина в X^*; б) якщо $x \in X$ таке, що $f(x) = 0$ для будь-якого $f \in M$, то $x = \overline{0}$. Довести, що: 1) а) $\Rightarrow$ б); 2) якщо X – рефлексивний простір, то б) $\Rightarrow$ а); 3) умова рефлективності в п. 2) істотна; 4) якщо X є спряженим до деякого бананового простору і б) $\Rightarrow$ а), то простір X рефлексивний.

3.2.6*. (**в**) Нехай X – ЛНП Чи правильно, що для довільного підпростору $L \subset X^*$ існує підпростір $M \subset X$, такий, що $L = M^{\perp}$?

3.2.7. Нехай $0 < a < b < +\infty$, послідовність $\{\lambda_n : n \ge 1\} \subset \mathbb{C}$ має граничну точку в $\mathbb{C}$, $M := \{t^{\lambda_n},\ t \in [a, b] : n \ge 1\}$. Довести, що:

а) $\forall z_0 \in \mathbb{C}$: $\dfrac{t^{z_0+z} - t^{z_0}}{z} \to t^{z_0} \ln t$, $z \to 0$, рівномірно по t на $[a, b]$;

б) (**в**) якщо $f \in M^{\perp}$, $u(t, z) := t^z$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in [a, b]$, а також $g(z) := f(u(\,\cdot\,, z))$, $z \in \mathbb{C}$, то g є аналітичною функцією на $\mathbb{C}$, $g \equiv 0$ на $\mathbb{C}$, зокрема, $f(u(\,\cdot\,, n)) = 0$, $n \ge 0$;

в) (**в**) M – тотальна множина в комплексному просторі $C[a, b]$ (**частинний випадок теореми Мюнца**).

Теорема (Мюнца). *Якщо* $0 \le a < b < +\infty$, $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset (0, +\infty)$, *то множина узагальнених поліномів виду* $p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{\alpha_k}$, $t \in [a, b]$, *є скрізь щільною в* $C[a, b]$, *тоді і тільки тоді, коли ряд* $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\alpha_k}$ *розбігається.*

3.2.8. Навести приклад послідовності $\{\alpha_n : k \ge 1\}$, для якої множина узагальнених поліномів виду $p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{\alpha_k}$, $t \in [a, b]$, скрізь щільна в $C[a, b]$, але не задовольняє умови теореми Стоуна.

§ 3.3. Теорема Мергеляна

Нехай $M \subset \mathbb{C}$. *Кажуть, що функція* $f : M \to \mathbb{C}$ *належить* ***класу*** $A(M)$, *якщо* f *неперервна на* M *і аналітична на множині* M° *внутрішніх точок множини* M.

3.3.1. (**т, в**) Довести, що коли $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ і $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbf{P}\ \forall z \in M : |f(z) - p(z)| < \varepsilon$, то $f \in A(M)$.

3.3.2*. (**т, в**) Довести, що коли множина $M \subset \mathbb{C}$ така, що $\forall f \in A(M)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbf{P}\ \forall z \in M$: $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$, то: 1) M – замкнена в $\mathbb{C}$; 2) M – обмежена в $\mathbb{C}$; 3) $\mathbb{C} \setminus M$ – зв'язна в $\mathbb{C}$.

Зауваження. Теорема Мергеляна стверджує, що справджується твердження, обернене до твердження задачі 3.3.2., а саме якщо множина M задовольняє умови 1) – 3), то кожну функцію з $A(M)$ можна як завгодно добре рівномірно наблизити на M алгебраїчними многочленами.

§ 3.4. Теорема Коровкіна і многочлени Бернштейна

У цьому параграфі вважаємо, що $C[a,b]$ *– дійсний ЛНП,* $\forall f, g \in C[a,b]$*:* $f \geq 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} f(t) \geq 0$*,* $t \in [a,b]$*, і* $f \geq g \overset{def}{\Leftrightarrow} f - g \geq 0$*. Лінійний функціонал* $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ *називається* ***додатним****, якщо* $\forall f \in C[a,b]$*:* $f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0$*. Лінійний оператор* $U : C[a,b] \to C[a,b]$ *називається* ***додатним****, якщо* $\forall f \in C[a,b]$*:* $f \geq 0 \Rightarrow U(f) \geq 0$.

3.4.1. Знайти необхідну і достатню умову на: а) числа $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, за якої функціонал $\Phi(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f(t_k)$, $f \in C[a,b]$, де $n \in \mathbb{N}$, $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ – сталі, є додатним; б) функцію p, за якої функціонал $\Phi(f) = \int_a^b p(t) f(t)\,dt$, $f \in C[a,b]$, є додатним, якщо: 1) $p \in C[a,b]$; 2)* $p \in L_1[a,b]$; в) функцію $g \in BV[a,b]$, g неперервна справа на (a,b), за якої функціонал $\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dg(t)$, $f \in C[a,b]$, є додатним.

3.4.2. Навести приклад лінійного оператора в $C[a,b]$, який: а) є додатним; б) не є додатним.

3.4.3. Нехай Φ – додатний функціонал на $C[a,b]$. Довести, що:

а) (**монотонність**) $\forall f, g \in C[a,b]$: $f \geq g \Rightarrow \Phi(f) \geq \Phi(g)$;

б) $\forall f \in C[a,b]$: $|\Phi(f)| \leq \Phi(|f|)$; в) $\Phi \in (C[a,b])^*$ і $\|\Phi\| = \Phi(e_0)$, де $e_0(t) = 1$, $t \in [a,b]$;

г) (**нерівність Коші-Буняковського**) $\forall f, g \in C[a,b]$: $(\Phi(f \cdot g))^2 \leq \Phi(f^2)\Phi(g^2)$.

Отримати з п. г) нерівність Коші-Буняковського для сум та інтегралів.

3.4.4. Довести, що якщо для функціонала $\Phi \in (C[a,b])^*$ норма $\|\Phi\| = \Phi(e_0)$, де $e_0(t) = 1$, $t \in [a,b]$, то Φ – додатний функціонал.

3.4.5. Нехай $e_k(t) := t^k$, $t \in [a,b]$, $k = 0, 1, 2$, $c \in [a,b]$ – довільне фіксоване число, $h(t) := (t - c)^2$, $t \in [a,b]$, $\Phi(f) := f(c)$, $f \in C[a,b]$. Нехай також $\{\Phi_n : n \geq 1\}$ – послідовність додатних функціоналів на $C[a,b]$. Довести, що:

а) (**в**) $\forall f \in C[a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall t \in [a,b]$: $-\varepsilon - \dfrac{2}{\delta^2}\|f\| h(t) \leq f(t) - f(c) \leq \dfrac{2}{\delta^2}\|f\| h(t) + \varepsilon$, де число $\delta = \delta(f, \varepsilon) > 0$ таке, що $\forall t \in [a,b]$, $|t - c| < \delta$: $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$;

б) (**теорема Коровкіна для функціоналів**) $\forall f \in C[a,b]$: $\Phi_n(f) \to \Phi(f)$, $n \to \infty$, тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов: 1) $\Phi_n(e_0) \to \Phi(e_0)$, $\Phi_n(h) \to \Phi(h)$, $n \to \infty$; 2) $\Phi_n(e_k) \to \Phi(e_k)$, $n \to \infty$, $k = 0, 1, 2$.

3.4.6. Нехай функціонали $\Phi, \Phi_n \in (C[a,b])^*$ такі, що $\Phi_n(e_k) \to \Phi(e_k)$, $n \to \infty$, $k = 0, 1, 2$, де $e_0(t) := t^k$, $t \in [a,b]$, $k = 0, 1, 2$, а також для кожного $n \in \mathbb{N}$ функціонал $\Phi_n - \Phi$ додатний. Довести, що $\forall f \in C[a,b]$: $\Phi_n(f) \to \Phi(f)$, $n \to \infty$.

3.4.7. (**т**) Нехай U – додатний оператор в $C[a, b]$. Довести, що: а) (**монотонність**) $\forall f, g \in C[a, b]$: $f \ge g \Rightarrow U(f) \ge U(g)$; б) $\forall f \in C[a, b]$: $|U(f)| \le U(|f|)$; в) U – ЛНО в $C[a, b]$ і $\|U\| = \|Ue_0\|_{C[a, b]}$, де $e_0(t) = 1$, $t \in [a, b]$.

3.4.8*. (**т, в**) (**Теорема Коровкіна для операторів**) Нехай $\{U_n : n \ge 1\}$ – послідовність додатних операторів на $C[a, b]$, а також $U_n(e_k) \to e_k$, $n \to \infty$, де $e_k(t) := t^k$, $t \in [a, b]$, $k = 0, 1, 2$. Довести, що $U_n \xrightarrow{s} I$, $n \to \infty$, в $C[a, b]$, тобто $\forall f \in C[a, b]$: $U_n(f) \to f$, $n \to \infty$, в $C[a, b]$.

Зауваження. Теореми Коровкіна для функціоналів і операторів (3.4.5.б) та 3.4.8) мають місце і у просторі $\tilde{C}$, якщо замість e_0, e_1, e_2 взяти $\tilde{e}_0(t) = 1$, $\tilde{e}_1(t) = \cos t$, $\tilde{e}_2(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Теореми Коровкіна для функціоналів і операторів (3.4.5.б) та 3.4.8) залишаються справедливими і якщо в них $\{e_0, e_1, e_2\}$ – довільна ЧС порядку 2 на $[a, b]$. Задача 3.4.9. показує, що останню умову не можна замінити умовою лінійної незалежності системи e_0, e_1, e_2.

3.4.9. Нехай $\{e_0, e_1, e_2\} \subset C[a, b]$ лінійно незалежна система, яка не є ЧС на $[a, b]$.

а) Нехай $\{t_0, t_1, t_2\} \subset [a, b]$ – різні нулі деякого нетривіального полінома $\sum_{i=0}^{2} a_i e_i$. Довести, що система рівнянь $\sum_{k=0}^{2} x_k e_i(t_k) = 0$, $i = 0, 1, 2$, має такий нетривіальний розв'язок $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, що $|\lambda_k| < 1$, $k = 0, 1, 2$, і принаймні два з трьох чисел $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ невід'ємні;

б) Нехай $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ – розв'язок системи з п. а), причому для визначеності вважаємо, що $-1 < \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 \ge 0$. Оператор $U : C[a, b] \to C[a, b]$ визначимо так:

$$(Uf)(t) := \begin{cases} f(t), \ t \in [a, b] \setminus \{t_0\}, \\ (1 + \lambda_0) f(t_0) + \lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2), \ t = t_0, \end{cases} \qquad f \in C[a, b].$$

Довести, що U – додатний оператор в $C[a, b]$, $Ue_i = e_i$, $i = 0, 1, 2$, але $\exists f \in C[a, b]$: $Uf \ne f$.

3.4.10. Нехай $\{\Phi_n : n \ge 1\}$ – послідовність додатних функціоналів на $C[a, b]$, $e_0(t) := 1$, $t \in [a, b]$, $h \in C[a, b]$, $h \ge 0$ на $[a, b]$, $\Phi_n(e_0) \to 1$, $\Phi_n(h) \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що: а) функція h має нулі на $[a, b]$; б)* якщо $c \in [a, b]$, $h(c) = 0$, $f \in C[a, b]$ і множина коренів рівняння $f(x) = f(c)$ містить усі нулі функції h на $[a, b]$, то $\Phi_n(f) \to f(c)$, $n \to \infty$.

Многочлен $B_n(f, t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$, $t \in [0, 1]$, $f \in C[0, 1]$, *називається* ***многочленом С. Н. Бернштейна****, а оператор* $C[0, 1] \ni f \overset{B_n}{\mapsto} B_n(f, \cdot) \in C[0, 1]$ – ***оператором С. Н. Бернштейна*** *порядку* $n \ge 1$.

3.4.11. (**т**) Нехай $e_k(t) := t^k$, $t \in [0, 1]$, $k = 0, 1, 2$. Довести, що $B_n e_k = e_k$, $k = 0, 1$, $(B_n e_2)(t) = e_2(t) + \frac{t(1-t)}{n}, t \in [0, 1]$, $n \ge 1$. За допомогою теореми Коровкіна довести, що $\forall f \in C[0, 1]$: $B_n(f) \to f$, $n \to \infty$, в $C[0, 1]$ (**теорема С. Н. Бернштейна**).

3.4.12. Нехай $X = C[0, 1]$ або $X = L_p[0, 1]$, $1 \le p \le +\infty$. Многочлен

$$K_n\left(f,\,t\right):=\sum_{k=0}^{n} f_{kn}C_n^k t^k\left(1-t\right)^{n-k},\ t\in\left[0,\,1\right],\ \text{де } f_{kn}:=\left(n+1\right)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f\left(u\right)du,\ 0\le k\le n,\ f\in X,$$

називається ***многочленом Л. В. Канторовича***, а оператор $X\ni f\overset{K_n}{\mapsto}K_n\left(f,\,\cdot\,\right)\in X$ – ***оператором Л. В. Канторовича*** порядку $n\ge 0$. Довести, що $\forall\, f\in X:\ K_n\left(f\right)\to f,\ n\to\infty$, в X, якщо: а) $X=C\left[0,\,1\right]$; б)** $X=L_p\left[0,\,1\right],\ 1\le p\le+\infty$.

3.4.13. (**т**) Довести, що: а) (**в**) (**лема про похідну від многочлена С. Н. Бернштейна**) $\forall\, f\in C\left[0,\,1\right]$ $\forall\, n\ge 1\ \forall\, t\in\left[0,\,1\right]$: $B_n'\left(f\right)\left(t\right):=\left(B_nf\right)'\left(t\right)=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)C_{n-1}^k t^k\left(1-t\right)^{n-k-1}$;

б) $\forall\, n\ge 1\ \forall\, f\in C\left[0,\,1\right]$: $f\uparrow$ на $\left[0,\,1\right]\ \Rightarrow\ B_n\left(f\right)\uparrow$ на $\left[0,\,1\right]$;

в) $\forall\, f\in C\left[0,\,1\right],\ f\uparrow$ на $\left[0,\,1\right]$ $\exists\left\{p_n:\,n\ge 1\right\}\subset\mathbf{P},\ p_n\uparrow$ на $\left[0,\,1\right],\ n\ge 1$: $p_n\to f,\ n\to\infty$, в $C\left[0,\,1\right]$;

г) (**в**) $\forall\, f\in C^1\left[0,\,1\right]$: $B_n\left(f\right)\to f,\ n\to\infty$, і $B_n'\left(f\right)\to f',\ n\to\infty$, в $C\left[0,\,1\right]$;

д) (**в**) $\forall\, f\in C\left[0,\,1\right]\ \ \forall\, n\ge 1$: $V\left(B_n\left(f\right),\left[0,\,1\right]\right)\le V\left(f,\left[0,\,1\right]\right)$, де $V\left(g,\left[a,\,b\right]\right)$ – варіація функції g на відрізку $\left[a,\,b\right]$.

3.4.14. Довести, що $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, p\in\mathbf{P}$: $\left\|f-p\right\|_{C[a,b]}+V\left(f-p,\left[a,\,b\right]\right)<\varepsilon$, якщо: а) $f\in C^1\left[0,\,1\right]$; б)* $f\in C\left[0,\,1\right]\bigcap BV\left[0,\,1\right]$.

3.4.15. Довести, що: а) $\forall\, f\in C\left[0,\,1\right]\ \forall\, n\ge 1\ \ \forall\, t\in\left[0,\,1\right]$:

$$B_n''\left(f\right)\left(t\right):=\left(B_nf\right)''\left(t\right)=n\left(n-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)C_{n-2}^k t^k\left(1-t\right)^{n-k-2};$$

б) $\forall\, n\ge 1\ \forall\, f\in C\left[0,\,1\right]$: f – опукла вниз на $\left[0,\,1\right]\ \Rightarrow\ B_n\left(f\right)$ – опуклий вниз на $\left[0,\,1\right]$;

в) $\forall\, f\in C\left[0,\,1\right],\ f$ – опукла вниз на $\left[0,\,1\right]$ $\exists\left\{p_n:\,n\ge 1\right\}\subset\mathbf{P},\ p_n$ – опуклий вниз на $\left[0,\,1\right]$, $n\ge 1$: $p_n\to f,\ n\to\infty$, в $C\left[0,\,1\right]$;

г) $\forall\, f\in C^2\left[0,\,1\right]$: $B_n\left(f\right)\to f,\ B_n'\left(f\right)\to f'$, і $B_n''\left(f\right)\to f'',\ n\to\infty$, в $C\left[0,\,1\right]$.

3.4.16. Нехай $\left\{l,\,u\right\}\in C\left[0,\,1\right]$ l – опукла вниз на $\left[0,\,1\right]$, u – опукла вгору на $\left[0,\,1\right]$, $l\left(t\right)<u\left(t\right)$, $t\in\left[0,\,1\right]$, $\Omega:=\left\{f\in C\left[0,\,1\right]\,\middle|\,l\left(t\right)\le f\left(t\right)\le u\left(t\right),\ t\in\left[0,\,1\right]\right\}$. Довести, що $\forall\, n\ge 1\ \ \forall\, f\in\Omega$: $B_n\left(f\right)\in\Omega$.

3.4.17. Довести, що $\forall\, n\ge 1\ \forall\, f\in C^n\left[0,\,1\right]\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\, p\in\mathbf{P}$: $\max\limits_{0\le k\le n}\max\limits_{x\in\left[a,\,b\right]}\left|f^{(k)}\left(x\right)-p_n^{(k)}\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

3.4.18. Нехай $P_n\left(f;\,x,\,y\right):=\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(\dfrac{k}{n},\,y\right)C_n^k x^k\left(1-x\right)^{n-k}$, $t\in\left[0,\,1\right]$, $f\in C\left[0,\,1\right]$, $n\ge 1$. Довести, що $\max\limits_{(x,\,y)\in\left[0,\,1\right]^2}\left|f\left(x,\,y\right)-P_n\left(f;\,x,\,y\right)\right|\to 0,\ n\to\infty$.

3.4.19. Нехай X, Y – банахові простори, $\left\{A,\,A_n:\,n\ge 1\right\}\subset L\left(X,\,Y\right)$, $\forall\, x\in X$: $A_nx\to Ax,\ n\to\infty$, в X, $\left(F,\,\rho\right)$ – компактний метричний простір, $f\in C\left(F,\,X\right)$. Довести, що $\max\limits_{t\in F}\left|\left(A_nf\right)\left(t\right)-\left(Af\right)\left(t\right)\right|\to 0,\ n\to\infty$.

Зауваження. Задача 3.4.18 випливає з задачі 3.4.19, якщо врахувати, що $C[a, b]\times[c, d]=C([a, b], C[c, d])$.

3.4.20*. Довести, що $\forall f\in C[0, 1]\ \forall t\in(0, 1)$: $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^k C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$, $n\to\infty$.

3.4.21*. Нехай функція $f:[0, 1]\to\mathbb{R}$ така, що $\exists\alpha\in(0, 1]\ \exists L>0\ \forall t', t''\in[0, 1]$: $\left|f(t')-f(t'')\right|\le L\left|t'-t''\right|^{\alpha}$. Довести, що $\forall n\ge 1\ \forall t\in[0, 1]$: $\left|f(t)-B_n(f; t)\right|\le L\left(\frac{t(1-t)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Розділ 4 НАБЛИЖЕННЯ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

§ 4.1. Існування, єдиність і характеризація енн

4.1.1. (**т, в**) Довести, що опукла замкнена множина в гільбертовому просторі є ЧМ.

Зауваження. Досі невідома відповідь на таке питання: чи кожна ЧМ в нескінченновимірному гільбертовому просторі буде опуклою? Відомо, що відповідь позитивна, коли простір скінченновимірний.

4.1.2*. (**т, в**) Нехай H – гільбертів простір, $x\in H$. Довести, що якщо: а) (**критерій енн опуклою замкненою підмножиною**) $F\subset H$ – замкнена опукла множина, то $x^*\in F$ – енн для x в F $\Leftrightarrow$ $\forall y\in F$: $\operatorname{Re}\left(y-x^*, x-x^*\right)\le 0$; б) (**критерій енн підпростором**) $F\subset H$ – підпростір, то $x^*\in F$ – енн для x в F $\Leftrightarrow$ $x-x^*\perp F$. Дати геометричне тлумачення для випадку $H=\mathbb{R}^2$.

4.1.3. (**т, в**) (**Властивості оператора найкращого наближення**) Нехай $F\subset H$ – ЧМ в гільбертовому просторі H, $P:H\to F$ – оператор найкращого наближення на F. Довести, що якщо: а) F – підпростір, то P – лінійний неперервний оператор; б)* F – замкнена опукла множина, то оператор P задовольняє умову Ліпшиця: $\|Px-Py\|\le\|x-y\|$, $x, y\in H$.

4.1.4. (**т, в**) (**Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є**) Нехай H – гільбертів простір, $n\in\mathbb{N}$, $\{e_1, \dots, e_n\}\subset H$ – ОНС, $L:=$ л.о.$\left(\{e_1, \dots, e_n\}\right)$, $x\in H$, x^* – енн для x в L. Довести, що $x^*=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, де $c_k=(x, e_k)$, $1\le k\le n$, – коефіцієнти Фур'є елемента x, причому

$$E(x, L)=\left\|x-x^*\right\|=\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2\right)^{1/2}.$$

Зауваження. Твердження задач 4.1.2 і 4.1.4 залишаються справедливим і в просторі зі скалярним добутком.

4.1.5. Узагальнити твердження задачі 4.1.4 на випадок підпростору $L:=$ з.л.о.$\left(\{e_n : n\ge 1\}\right)$, де $\{e_n : n\ge 1\}$ – ОНС в гільбертовому просторі H.

4.1.6. Знайти пнн $p_1^*\in\mathbf{P}_1$ для x в $L_2[a, b]$, якщо: а) (**в**) $x(t)=t^2$, $t\in[a, b]=[0, 2]$; б) $x(t)=t^2$, $t\in[a, b]=[1, 3]$; в) $x(t)=\sqrt[3]{t}$, $t\in[a, b]=[0, 1]$.

4.1.7. Знайти енн $x^*\in F$ для x в $L_2[a, b]$, якщо: а) $F:=$ л.о.$\left(\{\sin t, \sin 3t\}\right)$, $x(t)=t$, $t\in[a, b]=[0, 2\pi]$; б) $F:=$ л.о.$\left(\{\sin t, \sin 5t\}\right)$, $x(t)=\cos 3t$, $t\in[a, b]=[0, 2\pi]$.

4.1.8. Нехай H – гільбертів простір, $x_0\in H$, $r>0$, $x\in H$. Знайти енн для x на сфері $S(x_0, r)$.

4.1.9. Нехай H – гільбертів простір, $a \in H \setminus \left\{\overline{0}\right\}$, $L = \text{л.о.}\left(\left\{a\right\}\right)$, $L^{\perp}$ – ортогональне доповнення до L, $x \in H$. Знайти $E\left(x, L\right)$, $E\left(x, L^{\perp}\right)$, а також енн для x в L та в $L^{\perp}$.

4.1.10. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \left\{x \in l_2 \mid \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$, $x_0 = \left(1, 0, 0, \ldots\right)$. Знайти $E\left(x_0, M_n\right)$ в l_2.

4.1.11. (**Обернена задача наближення у випадку гільбертового простору**) Нехай H – гільбертів простір. Довести, що для будь-якої монотонно не зростаючої, збіжної до нуля числової послідовності $\left\{\alpha_n : n \geq 1\right\} \subset \left[0, +\infty\right)$ існує елемент $x \in H$, для якого

$$E\left(x, H_n\right) = \alpha_n, \quad n \geq 1, \tag{*}$$

де: а) $H_0 = \left\{\overline{0}\right\}$, $H_n := \text{л.о.}\left(\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}\right)$, $n \geq 1$, і $\left\{e_n : n \geq 1\right\}$ – ортонормований базис (далі – ОНБ) в H; б) $\left\{H_n : n \geq 1\right\}$ – довільна послідовність підпросторів простору H така, що $H_0 = \left\{\overline{0}\right\}$, $H_n \subset H_{n+1}$, $H_n \neq H_{n+1}$, $n \geq 1$, і множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ скрізь щільна в H. Показати, що у кожному з випадків а) і б) умови, накладені на послідовність $\left\{\alpha_n : n \geq 1\right\}$, є також і необхідними для існування елемента $x \in H$, що задовольняє рівності (*).

§ 4.2. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Поняття про ортогональні многочлени

4.2.1. (**т**) Нехай H – гільбертів простір. Довести, що: а) якщо $\left\{e_n : n \geq 1\right\} \subset H$ – ОНС, то $\left\{e_n : n \geq 1\right\}$ – лінійно незалежна система (тобто $\forall n \geq 1$: $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}$ – лінійно незалежна система); б) (**критерій лінійної незалежності**) система $\left\{g_1, \ldots, g_n\right\} \subset H$ лінійно незалежна $\Leftrightarrow$ її визначник Грама

$$G_n := \begin{vmatrix} \left(g_1, g_1\right) & \cdots & \left(g_1, g_n\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(g_n, g_1\right) & \cdots & \left(g_n, g_n\right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.2.2. (**т, в**) (**Теорема про ортогоналізацію**) Нехай H – гільбертів простір, $\left\{g_n : n \geq 1\right\}$ – лінійно незалежна система. Довести, що $\exists \left\{e_n : n \geq 1\right\} \subset H$ – така ОНС, що

$$\forall n \geq 1: \quad \text{л.о.}\left(\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}\right) = \text{л.о.}\left(\left\{g_1, \ldots, g_n\right\}\right); \tag{1}$$

зокрема,

$$\forall n \geq 1 \quad \exists \left\{c_{1n}, \ldots, c_{nn}\right\} \subset \mathbf{K}: \quad e_n = c_{nn} g_n + \ldots + c_{1n} g_1, \tag{2}$$

причому можна досягти того, що $c_{nn} > 0$. Цю ОНС можна побудувати принаймні двома способами:

<u>I спосіб:</u> за індукцією; $\tilde{e}_1 := g_1$, $e_1 := \dfrac{\tilde{e}_1}{\left\|\tilde{e}_1\right\|}$; якщо $e_1, \ldots, e_n$ уже побудовані, то

$$\tilde{e}_{n+1} := g_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \left(g_{n+1}, e_k\right) e_k \quad \text{і} \quad e_{n+1} := \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\left\|\tilde{e}_{n+1}\right\|};$$

<u>II спосіб:</u> якщо $G_0 := 1$, G_n – визначник Грама з задачі 4.2.1, то

$$e_n := \frac{1}{\sqrt{G_{n-1}G_n}} \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & \cdots & (g_1, g_{n-1}) & g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (g_n, g_1) & \cdots & (g_n, g_{n-1}) & g_n \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

де останній визначник треба розуміти як суму добутків елементів останнього стовпчика на відповідні алгебраїчні доповнення. Довести також, що ОНС $\{e_n : n \geq 1\}$, що задовольняє умови (2) і $c_{nn} > 0$, $n \geq 1$, єдина.

Зауваження. 1. Кажуть, що ОНС $\{e_n : n \geq 1\}$ з задачі 4.2.2 отримана в результаті ***процесу ортогоналізації*** (точніше, ***ортонормалізації***) системи $\{g_n : n \geq 1\}$. І спосіб побудови такої ОНС, описаний в задачі 4.2.2, називається ***процесом ортогоналізації Грама-Шмідта.***

2. Система елементів $\{x_n : n \geq 1\}$ гільбертового простору H тотальна $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ з.л.о.$(\{x_n : n \geq 1\}) = H$ $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ система $\{x_n : n \geq 1\}$ повна $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ якщо $x \in H$ таке, що $(x, x_n) = 0$, $n \geq 1$, то $x = \overline{0}$. Еквівалентність (*) відома з функціонального аналізу. Четвертий наслідок з теореми Гана-Банаха є узагальненням даного твердження на випадок банахового простору.

4.2.3. Довести, що за умов задачі 4.2.2 система $\{g_n : n \geq 1\}$ тотальна в H $\Leftrightarrow$ система $\{g_n : n \geq 1\}$ тотальна в H.

4.2.4. (**т**) (**Критерій належності елемента ортонормованій системі**) Нехай H – гільбертів простір, $N \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$, $\{g_n : 1 \leq n \leq N\} \subset H$ – лінійно незалежна система, $\{e_n : 1 \leq n \leq N\}$ – відповідна ОНС, $n \in \{2, \ldots, N\}$, $e = c_n g_n + \ldots + c_1 g_1$, де $c_n > 0$, $\{c_1, \ldots, c_{n-1}\} \subset \mathbf{K}$, $\|e\| = 1$. Довести, що $e = e_n \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : e \perp g_k$.

Далі нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, λ_1 *– міра Лебега на* $\mathbb{R}$. *Якщо* $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, *то вважаємо, що* $L_p(a, b) = L_p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$.

Функція $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ *називається* ***ваговою*** *(або* ***вагою****), якщо* $h \in L_1(a, b)$, $h \geq 0 \pmod{\lambda_1}$ *на* (a, b), $h \neq \overline{0}$ *в* $L_1(a, b)$, *а також* $\forall n \geq 0 : \exists \int\limits_{(a, b)} t^n h(t) d\lambda_1(t) \in \mathbb{R}$, *тобто існують степеневі моменти функції* h. *Остання умова виконується для* $\forall h \in L_1(a, b)$, *коли* $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. *Якщо* $B((a, b))$ *–* σ*-алгебра борельових підмножин* (a, b), h *– вага, то функція* $\mu(A) := \int\limits_A h d\lambda_1$, $A \in B((a, b))$, *є мірою на* $B((a, b))$. *При цьому простір* $L_2((a, b), B(a, b), \mu)$ *позначається* $L_{2, h} = L_{2, h}(a, b)$, *а з формули заміни міри випливає, що* $(x, y) = \int\limits_{(a, b)} x\overline{y} d\mu = \int\limits_{(a, b)} x\overline{y} h d\lambda_1$, $x, y \in L_{2, h}$, *– скалярний добуток в* $L_{2, h}$, *а* $\|x\| = \left(\int\limits_{(a, b)} |x|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{(a, b)} |x|^2 h d\lambda_1 \right)^{1/2}$, $x \in L_{2, h}$, *– норма в* $L_{2, h}$.

4.2.5. (**т**) Нехай $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\delta > 0$ і $\forall \alpha \in (-\delta, \delta)$: $e^{\alpha t}\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Довести, що функція $g(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{itz} dt$, $z \in S$, – аналітичне продовження перетворення Фур'є $\hat{\varphi}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функції φ в смугу $S_\delta := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\delta, \delta)\}$.

Зауваження. Задача 4.2.5 – одне з тверджень, що встановлює зв'язок між швидкістю спадання функції φ і гладкістю її перетворення Фур'є. В курсі математичного (та функціонального) аналізу було доведено, що якщо $\{\varphi, x\varphi(x), \ldots, x^n\varphi(x)\} \subset L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{\varphi} \in C^n(\mathbb{R})$, тобто коли функція φ, грубо кажучи, спадає швидше, ніж деякий степінь аргумента, то її перетворення Фур'є є відповідну кількість разів неперервно диференційовною функцією. Задача 4.2.5 стверджує, що коли функція φ спадає ще швидше, ніж у попередньому випадку, а саме, швидше деякої експоненти, то її перетворення Фур'є є не тільки нескінченно диференційовною функцією на $\mathbb{R}$, а навіть допускає аналітичне продовження в деяку смугу комплексної площини, віссю симетрії котрої є дійсна вісь. Твердження задачі 4.2.5 використовується при розв'язанні задачі 4.2.6.

4.2.6. (**т, в**) (**Теорема про лінійну незалежність та повноту системи степеневих функцій у ваговому просторі**) Нехай h – вага на (a, b). Розглянемо систему функцій

$$1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots, \quad t \in (a, b). \tag{4}$$

Довести, що: а) система (4) є лінійно незалежною на (a, b); б) якщо $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, то система (4) є тотальною в $L_{2,h}(a, b)$; в)* якщо $\{a, b\} \not\subset \mathbb{R}$ і $\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$: $|h(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$, $x \in (a, b)$, то система (4) є тотальною в $L_{2,h}(a, b)$; г)* якщо $\{a, b\} \not\subset \mathbb{R}$ і $\exists \delta > 0$ $\exists C > 0$: $|h(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$, $x \in (a, b)$, то система $\{t^n h(t), t \in (a, b) : n \ge 0\}$ є тотальною в $L_2(a, b)$.

Якщо до системи (4) застосувати процес ортогоналізації Грама-Шмідта у просторі $L_{2,h}$, *то отримаємо ОНС з алгебраїчних многочленів* $\{P_n : n \ge 0\}$, *які називаються* ***ортогональними многочленами з вагою*** h. *З формули (3) можна отримати явний вигляд* P_n. *Важливі частинні випадки:*

1) $h(t) = e^{-t^2}$, $t \in (a, b) = \mathbb{R}$*; відповідні ортогональні многочлени називаються* ***многочленами Ерміта*** *і позначаються* H_n, $n \ge 0$*;*

2) $h(t) = t^\alpha e^{-t}$, $t \in (a, b) = (0, +\infty)$, *де* $\alpha > -1$ *– стала; отримуємо* ***многочлени Лагерра****, що позначаються* $L_n = L_n^{(\alpha)}$, $n \ge 0$*;*

3) $h(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, $t \in (a, b) = (-1, 1)$, *де* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *– сталі; отримуємо* ***многочлени Якобі****, що позначаються* $J_n^{(\alpha, \beta)}$, $n \ge 0$*;*

4) якщо в п. 3) $\alpha = \beta = 0$, *то* $h(t) = 1$, $t \in (-1, 1)$, *і отримуємо* ***многочлени Лежандра*** $X_n = J_n^{(0, 0)}$, $n \ge 0$, *– ортогональні многочлени в* $L_2[-1, 1]$*;*

5) якщо в п. 3) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, *то* $h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in (-1, 1)$, *і отримуємо* ***многочлени Чебишова І роду****, що позначаються* T_n, $n \ge 0$*;*

6) якщо в п. 3) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, *то* $h(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in (-1, 1)$, *і отримуємо* ***многочлени Чебишова ІІ роду****, що позначаються* U_n, $n \ge 0$.

Многочлени з п.п. 1) – 6) називаються ***класичними ортогональними многочленами.***

Зауваження. 1. З задач 4.2.6 і 4.2.3 випливає, що класичні ортогональні многочлени утворюють ОНБ в $L_{2,\,h}$, де h – відповідна вага.

2. Крім формули (3), існують й інші зображення для класичних ортогональних многочленів. Кілька таких різних формул для многочленів Чебишова I роду було наведено у розділі 2. Задача 4.2.7 дає ще одне зображення для класичних ортогональних многочленів.

4.2.7*. **(т, в)** (**Формули Родріга для класичних ортогональних многочленів**) Довести, що:

1) $H_n(t)=c_n e^{t^2}\left(e^{-t^2}\right)^{(n)}$, $t\in\mathbb{R}$; 2) $L_n(t)=c_n t^{-\alpha}e^{t}\left(t^{\alpha+n}e^{-t}\right)^{(n)}$, $t>0$;

3) $J_n^{(\alpha,\,\beta)}(t)=c_n(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\left((1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}\right)^{(n)}$, $t\in(-1,1)$;

4) $X_n(t)=c_n\left(\left(1-t^2\right)^n\right)^{(n)}$, $t\in(-1,1)$;

причому коефіцієнт $c_n\in\mathbb{R}$ вибрати так, щоб у полінома старший коефіцієнт був додатним і його норма дорівнювала 1 у відповідному просторі $L_{2,\,h}$. Записати формули Родріга для многочленів Чебишова I і II роду.

Зауваження. Сталу c_n у формулах Родріга (див. задачу 4.2.7) інколи вибирають інакше.

4.2.8. Довести, що: а) система функцій $\hat{T}_0(t)=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$, $\hat{T}_n(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos n\arccos t$, $t\in[-1,1]$, є ОНБ у просторі $L_{2,\,h}[-1,1]$, якщо $h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $t\in(-1,1)$; б) для довільного алгебраїчного многочлена p степеня $n\in\mathbb{N}$ зі старшим коефіцієнтом 1 має місце нерівність $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{p^2(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\ge\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$, причому тут «$=$» $\Leftrightarrow$ $p(t)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos t$, $t\in[-1,1]$.

4.2.9*. Знайти $\min\|p\|_{L_{2,\,h}[-1,\,1]}$, де мінімум береться по всіх многочленах p степеня $n\in\mathbb{N}$ зі старшим коефіцієнтом 1, якщо: а) $h(t)=1$, $t\in[-1,1]$; б) $h(t)=\sqrt{1-t^2}$, $t\in[-1,1]$.

§ 4.3. Наближення соболєвських класів в $\tilde{L}_2$ тригонометричними поліномами

Нехай $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ *або* $\mathbf{K}=\mathbb{C}$, $H=\tilde{L}_2$ *– гільбертів простір* 2π*-періодичних функцій* $x:\mathbb{R}\to\mathbf{K}$ *таких, що* $\int\limits_0^{2\pi}|x(t)|^2\,dt<+\infty$, *зі скалярним добутком* $(x,\,y):=(x,\,y)_{\tilde{L}_2}:=\int\limits_0^{2\pi}x(t)\overline{y(t)}\,dt$, $x,\,y\in\tilde{L}_2$; *породжена норма* $\|x\|:=\|x\|_{\tilde{L}_2}:=\left(\int\limits_0^{2\pi}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$, $x\in\tilde{L}_2$ *при цьому рівні майже скрізь на* $\mathbb{R}$ *функції вважаються рівними в цьому просторі. Нехай* $r\in\mathbb{N}$. *Множина тих* $x\in\tilde{L}_2$, *які мають абсолютно неперервну* $(r-1)$*-у похідну на* $\mathbb{R}$ *і їх* r*-а похідна* $x^{(r)}\in\tilde{L}_2$, *позначається* $\tilde{L}_2^r$ *і називається* ***соболєвським простором***. *Множина* $\tilde{W}_2^r:=\left\{x\in\tilde{L}_2^r \mid \left\|x^{(r)}\right\|\le 1\right\}$ *називається* ***соболєвським класом***.

Позначення: $\tilde{L}_2^{0,\,0} := \left\{ x \in \tilde{L}_2 \mid \int\limits_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0 \right\}$; $\tilde{L}_2^{r,\,0} := \tilde{L}_2^r \bigcap \tilde{L}_2^{0,\,0}$; $\tilde{W}_2^{r,\,0} := \tilde{W}_2^r \bigcap \tilde{L}_2^{0,\,0}$. *Функція* $D_r(t) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \cos\left(kt - \frac{\pi r}{2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$, *називається* ***функцією Бернуллі***.

4.3.1. Довести, що коли: а) $y \in \tilde{W}_2^r$, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_o^{2\pi} y(t)\,dt$ – коефіцієнт Фур'є функції y, то $x := y - \frac{a_0}{2} \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$; б) $x \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$, $c \in \mathbf{K}$, то $y := c + x \in \tilde{W}_2^r$ і при цьому $c = \frac{a_0}{2}$.

4.3.2. Довести, що: а) (**в**) $D_1(t) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2}, \; t \in (0,\, 2\pi), \\ 0, \qquad\; t = 0, \end{cases}$ $D_1 \in \tilde{L}_2$ і ряд, яким задано D_1, збігається в $\tilde{L}_2$; б) якщо $r \geq 2$, то ряд, що задає D_r, збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ і в $\tilde{L}_2$, а функція $D_r \in C(\mathbb{R}) \bigcap \tilde{L}_2$.

4.3.3*. (**т, в**) (**Лема про зображення функцій з** $\tilde{W}_2^{r,\,0}$) Нехай $B := \left\{ x \in \tilde{L}_2^{0,\,0} \mid \|x\| \leq 1 \right\}$, $\varphi_{2k-1}(t) := \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2k}(t) := \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Довести, що наступні умови рівносильні:

1) $y \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$;

2) $$y(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k^r} \Big((x,\, \varphi_{2k-1}) \varphi_{2k-1}(t) + (x,\, \varphi_{2k}) \varphi_{2k}(t) \Big), \quad r = 2l,\, l \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{k^r} \Big((x,\, \varphi_{2k-1}) \varphi_{2k}(t) - (x,\, \varphi_{2k}) \varphi_{2k-1}(t) \Big), \; r = 2l-1,\, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

де $x \in B$ – деяка функція;

3) $y(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} D_r(t-u)\, x(u)\, du =: (D_r * x)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – згортка D_r з деякою функцією $x \in B$. При цьому в п.п. 2) і 3) можна взяти $x := y^{(r)}$. Довести, що ряди в п. 2) збігаються абсолютно і рівномірно на $\mathbb{R}$.

Зауваження. З задач 4.3.1 і 4.3.3 випливає, що $\forall\, y \in \tilde{W}_2^r$: $y = \frac{a_0}{2} + D_r * y^{(r)}$.

4.3.4*. Довести, що $\tilde{L}_2^r$ – гільбертів простір відносно скалярного добутку $(x,\, y)_{\tilde{L}_2^r} := (x,\, y)_{\tilde{L}_2} + \left(x^{(r)},\, y^{(r)} \right)_{\tilde{L}_2}$, $x,\, y \in \tilde{L}_2^r$.

Величиною найкращого наближення множини $M \subset X$ ***множиною*** $F \subset X$ *в ЛНП* X *називається величина* $E(M,\, F) := \sup\limits_{x \in M} E(x,\, F) = \sup\limits_{x \in M} \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$, $0 \leq E(M,\, F) \leq +\infty$.

4.3.5*. Нехай H – гільбертів простір, $N \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \bigcup \{+\infty\}$, $\left\{ e_n : 0 \leq n \leq N \right\}$, $\left\{ g_n : 0 \leq n \leq N \right\}$ – дві ОНС в H, $\left\{ \lambda_n : 0 \leq n \leq N \right\} \subset \mathbf{K}$, $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \ldots$ і якщо $N = +\infty$, то $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, $B := \overline{B}\left(\overline{0},\, 1\right)$, а також оператор $A : H \to H$ зображається у вигляді:

$$Ax = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \left(x, e_k \right) g_k , \quad x \in H . \tag{*}$$

Довести, що: а) A – лінійний неперервний компактний оператор, а якщо $e_n = g_n$, $0 \le n \le N$, то A самоспряжений;

б) (**т, в**) (**лема про найкраще наближення еліпсоїда**) якщо $\Phi_n :=$ л.о.$\left(\left\{ g_0, \dots, g_n \right\}\right)$, то $E\left(A(B), \Phi_n \right) := \sup\limits_{y \in A(B)} E\left(y, \Phi_n \right) = \left| \lambda_{n+1} \right|$, $0 \le n < N$;

в) (**в**) $A(B) = \left\{ y \in \text{з.л.о.}\left(\left\{ g_n \mid 0 \le n \le N \right\} \right) \mid \sum\limits_{\substack{k : \lambda_k \ne 0, \\ 0 \le k \le N}} \dfrac{\left| \left(y, g_k \right) \right|^2}{\left| \lambda_k \right|^2} \le 1 \right\} =: M$.

Дати геометричне тлумачення твердження п. б) для $N = 1$ і $N = 2$.

Зауваження. З функціонального аналізу відомо, що кожен компактний оператор в гільбертовому просторі зображається у вигляді (*) , причому якщо ще оператор самоспряжений, то $e_n = g_n$, $0 \le n \le N$. Множина M з п. б) задачі 4.3.5 називається ***еліпсоїдом***.

4.3.6. (**т, в**) Довести, що: а) $\forall\, r, n \in \mathbb{N}$: $E\left(\tilde{W}_2^r , \mathbf{T}_{n-1} \right) = \dfrac{1}{n^r}$ (**теорема про наближення соболєвського класу тригонометричними поліномами**); б) $\forall\, x \in \tilde{L}_2^r$: $E\left(x, \mathbf{T}_{n-1} \right) \le \dfrac{1}{n^r} \left\| x^{(r)} \right\|_{\tilde{L}_2}$.

Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – симетрична множина (тобто $\forall\, x \in M : -x \in M$), $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\dim X \ge n$. Величина $d_n\left(M, X \right) := \inf\limits_{F_n} E\left(M, F_n \right)$, де інфімум береться по всіх підпросторах $F_n \subset X$ розмірності n, називається ***поперечником за Колмогоровим*** *розмірності n множини M. Якщо існує підпростір, на якому досягається інфімум в означенні величини $d_n\left(M, X \right)$, то цей підпростір називається* ***екстремальним***.

4.3.7. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – симетрична множина. Довести, що: а) $\forall\, n \ge 1$ $\forall\, F \subset X$ – підпростору, $\dim F = n$: $d_n\left(M, X \right) \le E\left(M, F \right)$; б) $\forall\, n \ge 0$: $d_{n+1}\left(M, X \right) \le d_n\left(M, X \right)$.

4.3.8. (**в**) Нехай X – ЛНП, $n \in \mathbb{N}$, $\dim X > n$. Довести, що: а) якщо $F \subset X$ – підпростір, $\dim F = n$, то $\exists\, y_0 \in X$, $\left\| y_0 \right\| = 1$: $E\left(y_0, F \right) = 1$; б) (**слабкий варіант теореми про поперечник кулі**) $d_n\left(\overline{B}\left(\overline{0}, 1 \right), X \right) = 1$.

4.3.9. Нехай $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} – підпростір гільбертового простору H розмірності $n+1$, $B_{n+1} := \left\{ x \in M_{n+1} \mid \left\| x \right\| \le 1 \right\}$. Довести, що: а) (**в**) якщо F – підпростір H розмірності n, $P : H \to F$ – оператор найкращого наближення, то $\exists\, z \in S_n := \left\{ x \in M_{n+1} \mid \left\| x \right\| = 1 \right\}$: $Pz = 0$, а також $E\left(B_{n+1}, F \right) \ge 1$; б) (**т**) (**теорема про поперечник кулі**) $d_n\left(B_{n+1}, H \right) = 1$.

Зауваження. Твердження задачі 3.4.9 (теорема про поперечник кулі) залишається справедливою в довільному ЛНП, однак перша частина твердження п. а) доводиться нетривіально і є частинним випадком топологічної ***теореми Борсука про антиподи***: якщо X_{n+1} і Y_n – ЛНП розмірності $n+1$ і n відповідно, $S_n := \left\{ x \in X_{n+1} \mid \left\| x \right\| = 1 \right\}$, $n \ge 1$, відображення $P : S_n \to Y_n$ неперервне і непарне (тобто $\forall\, x \in S_n$: $P(-x) = -P(x)$), то $\exists\, x_0 \in S_n$: $P\left(x_0 \right) = 0$.

4.3.10. (**т**) (**Наслідок з теореми про поперечник кулі**) Нехай X – ЛНП, симетрична множина $M \subset X$ містить кулю $B_{n+1}\left(\overline{0}, \gamma \right)$ радіуса $\gamma > 0$ деякого $(n+1)$-вимірного підпростору простору X. Користуючись зауваженням до задачі 3.4.9, довести, що $d_n\left(M, X \right) \ge \gamma$.

4.3.11*. (**т, в**) (**Теорема про поперечник еліпсоїда**) За умов задачі 4.3.5 довести, що $\forall n \in \{1, \dots, N\}$: $d_n(A(B), H) = |\lambda_n|$, при цьому $\Phi_{n-1} :=$ л.о.$(\{g_0, \dots, g_{n-1}\})$ – екстремальний підпростір.

4.3.12. (**т, в**) (**Теорема про поперечник соболєвських класів**) Довести, що $\forall r, n \in \mathbb{N}$:

$$d_{2n-1}\left(\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right) = d_{2n}\left(\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right) = E\left(\tilde{W}_2^r, \mathbf{T}_{n-1}\right) = \frac{1}{n^r}.$$

Зауваження. Задача 4.3.12 показує, що для диференційовних функцій (точніше, соболєвських класів) тригонометричні поліноми у періодичному випадку є найкращим (точніше, одним з найкращих) апаратом наближення (в сенсі швидкості) серед усіх скінченновимірних підпросторів в $\tilde{L}_2$. Аналогічні результати справедливі в $\tilde{C}$ та багатьох інших просторах. Тому так багато уваги приділяють наближенню періодичних функцій тригонометричними поліномами.

4.3.13. (**т, в**) (**Наслідок з теореми про поперечник соболєвських класів**) Для числа $K > 0$ покладемо $K\tilde{W}_2^r := \left\{x \in \tilde{L}_2^r \mid \left\|x^{(r)}\right\| \le K\right\}$; якщо $K = 1$, то $K\tilde{W}_2^r = \tilde{W}_2^r$. Довести, що $\forall K > 0\ \forall r, n \in \mathbb{N}$:

$$d_{2n-1}\left(K\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right) = d_{2n}\left(K\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right) = E\left(K\tilde{W}_2^r, \mathbf{T}_{n-1}\right) = \frac{K}{n^r}.$$

4.3.14*. Нехай H – гільбертів простір, $K \subset H$ – симетрична множина, $n \in \mathbb{N}$, $d_n(K, H) = E(K, F_n) = A$, де F_n – екстремальний підпростір $(\dim F_n = n)$, $e \in H$, $e \perp K$, $e \perp F_n$, $M := K \oplus$ л.о.$\{e\}$, $G_{n+1} := F_n \oplus$ л.о.$\{e\}$. Довести, що $d_{n+1}(M, H) = E(M, G_{n+1}) = A$, тобто G_{n+1} – екстремальний підпростір.

Розділ 5 НАБЛИЖЕННЯ В L_p

§ 5.1. Загальні питання наближення в L_p

5.1.1. Нехай $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{2}{3}, \\ 0, & \frac{2}{3} < t \le 1, \end{cases}$ $y_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{1}{3} < t \le 1, \end{cases}$ $F =$ л.о.$(\{y_0\})$ – одновимірний підпростір в $L_1[0, 1]$. Довести, що $E(x, F) = \frac{2}{3}$ і існує безліч енн для x в F.

5.1.2. Підпростір ЛНП називається ***нетривіальним***, якщо він ненульовий і не збігається з усім простором. Навести приклад нетривіального скінченновимірного підпростору в деякому просторі $L_1(T, \mu)$, який є МЄ.

Зауваження. Теорема Крейна стверджує, що жоден нетривіальний скінченновимірний підпростір у просторі $L_1[a, b]$ не є МЄ. Разом з тим, має місце **теорема Джексона-Крейна**, яка стверджує, що коли підпростір в $L_1[a, b]$ є лінійною оболонкою ЧС на відрізку $[a, b]$, то для $\forall x \in C[a, b]$ існує єдиний енн цим підпростором у просторі $L_1[a, b]$.

5.1.3*. Нехай $x \in C[a, b]$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – фіксоване число, $P_q \in \mathbf{P}_m$ – пнн для x у просторі $L_q[a, b]$, $1 \le q \le +\infty$ (зокрема, $P_\infty \in \mathbf{P}_m$ – пнн для x в $C[a, b]$). Довести, що $P_q \to P_\infty$, $q \to +\infty$, в $C[a, b]$.

§ 5.2. Теорема Маркова та наслідки з неї

Теорема (критерій енн в $L_1(T, \mu)$***).*** *Нехай* (T, F, μ) *– простір з* σ*- скінченною мірою,* U *– підпростір в* $L_1(T, \mu)$*,* $x \in L_1(T, \mu)$*,* $x \notin U$*,* $y^* \in U$*,* $Z := \{t \in T \mid x(t) = y^*(t)\}$*. Тоді* y^* *– енн для* x *в* U $\Leftrightarrow$ $\forall y \in U: \int\limits_T y\, sign(x - y^*)\, d\mu \le \int\limits_Z |y|\, d\mu$.

5.2.1. (**т**) (**Наслідок з критерію енн в** $L_1(T,\mu)$) Довести, що за умов критерію **енн в** $L_1(T,\mu)$ для того, щоб елемент y^* був енн для x в U достатньо, а у випадку, коли $\mu(Z)=0$, і необхідно, щоб $\forall\, y\in U:\ \int\limits_T y\,sign\left(x-y^*\right)d\mu=0$.

Нехай $r\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\{t_0,\ldots,t_r\}\subset(a,b)$ *– різні точки,* $\omega(t):=(t-t_0)\cdot\ldots\cdot(t-t_r)$, $t\in[a,b]$, λ_1 *– міра Лебега на* $\mathbb{R}$. *Кажуть, що* ***точки*** $t_0,\ldots,t_r$ ***– це всі точки зміни знаку функції*** $g\in L_1[a,b]$, *якщо* $sign\ g=sign\ \omega\ \left(\operatorname{mod}\lambda_1\right)$ *на* $[a,b]$ *або* $sign\ g=-sign\ \omega\ \left(\operatorname{mod}\lambda_1\right)$ *на* $[a,b]$.

5.2.2*. (**т, в**) (**Теорема Маркова**) Нехай U – підпростір в $L_1[a,b]$, $g\in L_1[a,b]$ і виконуються умови: 1) $\{t_0,\ldots,t_r\}\subset(a,b)$ – це всі точки зміни знаку функції g, де $r\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$; 2) $\forall\, y\in U$: $\int\limits_a^b y\,sign\,g\,d\lambda_1=0$. Нехай також $x\in L_1[a,b]$, $x\notin U$, а елемент $y^*\in U$ такий, що точки $t_0,\ldots,t_r$ – це всі точки зміни знаку функції $x-y^*$. Довести, що y^* – енн для x в U і $E(x,U)=\left|\int\limits_a^b x\,sign\,g\,d\lambda_1\right|$.

Зауваження. 1. Якщо $U=\text{л.о.}\left(\{y_1,\ldots,y_n\}\right)$, то умова 2) $\Leftrightarrow$ $\forall\, k\in\{1,\ldots,n\}:\ \int\limits_a^b y\,sign\,g\,d\lambda_1=0$.

2. Функція g залежить від підпростору U і не залежить від x. У задачах 5.2.3 і 5.2.7 вказано відповідні функції g для $\mathbf{T}_n$ і $\mathbf{P}_n$, $n\ge 0$.

5.2.3*. (**т, в**) Нехай $g\in\tilde{C}$, $g(u+\pi)=-g(u)$, $u\in\mathbb{R}$ (наприклад, $g(u)=\sin u$, $u\in\mathbb{R}$), а також $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\nu\in\mathbb{Z}$ і $\forall\, k\in\mathbb{Z}$: $\nu\ne(2k+1)(n+1)$. Довести, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\nu u\ sign\,g\left((n+1)u\right)du=0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\nu u\ sign\,g\left((n+1)u\right)du=0$, а також $\forall\, T_n\in\mathbf{T}_n$: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}T_n(u)\ sign\,g\left((n+1)u\right)du=0$.

5.2.4. (**т, в**) (**Наслідок 1 з теореми Маркова**) Нехай $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $x\in\tilde{L}_1\setminus\mathbf{T}_n$, поліном $T_n^*\in\mathbf{T}_n$ такий, що $t_k=\dfrac{k\pi}{n+1}$, $0\le k\le 2n+1$, – це усі точки зміни знаку функції $x-T_n^*$ на інтервалі $(-\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, де $\varepsilon\in(0,t_1)$ – деяке число. Довести, що T_n^* – пнн для x в $\mathbf{T}_n$ у просторі $\tilde{L}_1$ і $E(x,\mathbf{T}_n)=\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}x(t)\ sign\sin(n+1)t\,dt\right|$.

5.2.5. Довести, що при фіксованому $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ серед тригонометричних поліномів виду: а) (**в**) $T(t)=\sin(n+1)t+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)$ найменшу норму в $\tilde{L}_1$ (або, що те саме, в $L_1[a,2\pi+a]$, де $a\in\mathbb{R}$ – довільне число) має поліном $\tilde{T}(t)=\sin(n+1)t$; б) $T(t)=\cos(n+1)t+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)$ найменшу норму в $\tilde{L}_1$ має поліном $\tilde{T}(t)=\cos(n+1)t$.

5.2.6. Сформулювати і довести аналог твердження задачі 5.2.5 у просторі $\tilde{L}_p$, $1 < p < +\infty$.

5.2.7. (**т, в**) Довести, що $\forall n \geq 1 \ \forall p \in \mathbf{P}_{n-1}: \int\limits_{-1}^{1} p(t) sign \sin(n+1)\arccos t \, dt = 0$.

5.2.8. (**т, в**) (**Наслідок 2 з теореми Маркова**) Нехай $n \in \mathbb{N}$, $x \in L_1[-1, 1]$, $x \notin \mathbf{P}_{n-1}$, многочлен $p^* \in \mathbf{P}_{n-1}$ такий, що точки $t_k = \cos\frac{\pi k}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$, – це усі точки зміни знаку функції $x - p^*$ на $(-1, 1)$. Довести, що p^* – пнн для x в $\mathbf{P}_{n-1}$ у просторі $L_1[-1, 1]$ і $E(x, \mathbf{P}_{n-1}) = \left| \int\limits_{-1}^{1} x(t) \, sign \sin(n+1)\arccos t \, dt \right|$.

5.2.9. (**т, в**) (**Наслідок 3 з теореми Маркова**) Нехай $n \in \mathbb{N}$, $x \in C^{n-1}[-1, 1]$, $\exists x^{(n)}$ на $(-1, 1)$, $x^{(n)}(t) \neq 0$, $t \in (-1, 1)$, многочлен $p^* \in \mathbf{P}_{n-1}$ інтерполює функцію x в точках $t_k = \cos\frac{\pi k}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$. Довести, що p^* – пнн для x в $\mathbf{P}_{n-1}$ у просторі $L_1[-1, 1]$ і $E(x, \mathbf{P}_{n-1}) = \left| \int\limits_{-1}^{1} x(t) \, sign\left(x(t) - p^*(t)\right) dt \right|$.

5.2.10. Знайти пнн в $\mathbf{P}_1$ для функції $x(t) = (t+1)^2$, $t \in [-1, 1]$, у просторі $L_1[-1, 1]$.

§ 5.3. Многочлени Чебишова II роду

5.3.1.(**т**) Нехай $U_n(t) := \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in (-1, 1)$, $n \geq 0$. Довести, що: а) $U_n(t) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(t)$, $t \in (-1, 1)$, де T_{n+1} – відповідний многочлен Чебишова I роду, $n \geq 0$; б) $\forall n \geq 0$: U_n співпадає на $(-1, 1)$ з алгебраїчним многочленом степеня n зі старшим коефіцієнтом 2^n.

Зауваження. З задачі 5.3.1.б) і основної теореми алгебри випливає коректність наступного означення.

Многочленом Чебишова II роду *степеня* $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ *називається такий алгебраїчний многочлен* $U_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *що* $U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in (-1, 1)$.

5.3.2. (**т**) Знайти нулі U_n на $(-1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

5.3.3*. (**т, в**) Довести, що: а) серед алгебраїчних многочленів степеня $n \in \mathbb{N}$ зі старшим коефіцієнтом 2^n поліном Чебишова II роду U_n має найменшу норму у просторі $L_1[-1, 1]$; б) $\|U_n\|_1 = 2$, $n \geq 0$.

5.3.4. Знайти: а) U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 в явному вигляді; б) $U'_n(\pm 1)$, $n \geq 0$.

5.3.5. Довести, що:

а)(**рекурентне співвідношення для** U_n)$U_0(t) = 1$, $U_1(t) = 2t$, $U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$;

б) U_n – парна функція при парних n і непарна при непарних n;

в) (**співвідношення ортогональності**) $\int\limits_{-1}^{1} U_n(t) U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0$, $n \neq m$, $n, m \geq 0$;

г) (**диференціальне рівняння для** U_n) $(1-t^2)U''_n(t) - 3tU'_n(t) + n(n+2)U_n(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

5.3.6. Серед алгебраїчних многочленів степеня $n \in \mathbb{N}$ зі старшим коефіцієнтом 1 знайти многочлен з найменшою нормою у просторі: а) $L_1[-1,1]$; б) $L_1[a,b]$.

5.3.7. Сформулювати і довести аналог твердження з задачі 2.2.7 для простору $L_1[-1,1]$.

5.3.8. Довести, що: а)* якщо $x^2+y^2=1$, то $T_{2n}(y)=(-1)^n T_{2n}(x)$, $T_{2n+1}(y)=(-1)^n yU_{2n}(x)$, $n \ge 0$.

б) $T_m(T_n)=T_{mn}$, $U_{m-1}(T_n)\cdot U_{n-1}=U_{mn-1}$, $n, m \ge 1$;

в)* $T_n(t)=\frac{1}{2}\left(U_n(t)-U_{n-2}(t)\right)$, $T_n(t)=U_n(t)-tU_{n-1}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $n\ge 2$;

г)* $T_n(t)=\begin{vmatrix} t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2t \end{vmatrix}$, $U_n(t)=\begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2t \end{vmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, $n\ge 1$

(тут визначники мають розмір $n\times n$).

ВКАЗІВКИ

§1.1. 1.1.1. а) За означенням інфімума і нерівністю трикутника $\forall y\in F$: $E(x_1,F)\le\|x_1-y\|\le\|x_1-x_2\|+\|x_2-y\|$, звідки $E(x_1,F)-\|x_1-x_2\|\le\|x_2-y\|$; з отриманої нерівності за означенням інфімума маємо, що $E(x_1,F)-\|x_1-x_2\|\le E(x_2,F)$, звідки $E(x_1,F)-E(x_2,F)\le\|x_1-x_2\|$. Аналогічно (або помінявши в останній нерівності місцями x_1 та x_2), отримуємо, що $E(x_2,F)-E(x_1,F)\le\|x_1-x_2\|$. З двох останніх нерівностей і випливає доводжувана нерівність. б) Випливає з п. а). в) $E(x,F)=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|\le\|x-\overline{0}\|=\|x\|$.

г) $E(x,F)=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|=0 \Leftrightarrow \exists\{y_n : n\ge1\}\subset F : \|x-y_n\|\to 0$, $n\to\infty$, $\Leftrightarrow$ $x\in\overline{F}$.

д) 1) Для $\forall y_1, y_2\in F$: $y_1+y_2\in F$, тому за означенням інфімума і нерівністю трикутника $E(x_1+x_2,F)\le\|x_1+x_2-(y_1+y_2)\|\le\|x_1-y_1\|+\|x_2-y_2\|$; звідси, аналогічно до міркувань п. а), отримуємо доводжувану нерівність. 2) Якщо $\alpha\ne0$, то скористатись рівностями $\|\alpha x-y\|=|\alpha|\left\|x-\dfrac{y}{\alpha}\right\|$, $y\in F$, та $F=\left\{\dfrac{y}{\alpha}\mid y\in F\right\}$. Якщо $\alpha=0$, то $E(\overline{0},F)=0$ за п. г), бо $\overline{0}\in F$, оскільки F – лінійна множина.

е) Міркування аналогічні доведенню п. д) 1).

§ 1.2. 1.2.2. Якщо x – гранична точка множини F, то за задачею 1.1.1.г) $E(x,F)=0$. Оскільки F – МІ, то такий $y\in F$, що $\|x-y\|=0$, звідки $x=y\in F$.

1.2.4. а) За означенням інфімума $\forall x \in X \;\; \exists \left\{ y_n : n \ge 1 \right\} \subset F : \left\| x - y_n \right\| \to E\left(x, F \right),\; n \to \infty$. Оскільки $\forall n \ge 1$: $\left\| y_n \right\| \le \left\| y_n - x \right\| + \left\| x \right\| \to E\left(x, F \right) + \left\| x \right\|,\; n \to \infty$, то послідовність $\left\{ y_n : n \ge 1 \right\}$ обмежена, тому за умовою існує її підпослідовність $\left\{ y_{n_k} : k \ge 1 \right\}$, існує елемент $y_0 \in X$ такі, що $y_{n_k} \to y_0,\; k \to \infty$, причому за умовою $y_0 \in F$. Маємо, що $\left\| x - y_0 \right\| = \lim\limits_{k \to \infty} \left\| x - y_{n_k} \right\| = E\left(x, F \right)$, тобто y_0 – енн для x в F; б) Скористатись критерієм компактності в скінченновимірному просторі і п. а).

1.2.5. а) $\alpha = \dfrac{f\left(x \right)}{f\left(y \right)},\; z = x - \alpha y$.

б) $\left(\Leftarrow \right)$ наслідок п. а); $\left(\Rightarrow \right)$ Застосувати перший наслідок з теореми Гана-Банаха.

1.2.6. а) $\left\| f \right\| \cdot E\left(x, Ker\, f \right) = \inf\limits_{y \in F} \left\| x - y \right\| \left\| f \right\| \ge \inf\limits_{y \in F} \left| f\left(x - y \right) \right| = \left| f\left(x \right) \right|$. Навпаки, якщо $x \notin Ker\, f$, то за задачею 1.2.5.а) $\forall z \in X$: $z = y + \alpha x$, де $y \in Ker\, f$, $\alpha \in \mathbf{K}$, тому за лінійністю функціонала f і означенням величини найкращого наближення $\dfrac{\left| f\left(z \right) \right|}{\left\| z \right\|} \le \dfrac{\left| f\left(x \right) \right|}{E\left(x, Ker\, f \right)}$, звідки $\left\| f \right\| \le \dfrac{\left| f\left(x \right) \right|}{E\left(x, Ker\, f \right)}$.

в) $\left(\Rightarrow \right)$ Якщо $x_0 \in X \setminus F$, y_0 – енн для x_0 в F, то покласти $u_0 := \dfrac{x_0 - y_0}{\left\| x_0 - y_0 \right\|}$ і скористатись п. а).

$\left(\Leftarrow \right)$ Якщо $u_0 \in S\left(\overline{0}, 1 \right)$: $\left| f\left(u_0 \right) \right| = \left\| f \right\|$, то $\forall x_0 \in X$: $x_0 = y_0 + \alpha u_0$, де $y_0 \in Ker\, f$, $\alpha \in \mathbf{K}$. Тоді $\left\| x_0 - y_0 \right\| = \left| \alpha \right|$, а також

$$\forall y \in Ker\, f: \quad \left\| x_0 - y \right\| \ge \frac{\left| f\left(x_0 - y \right) \right|}{\left\| f \right\|} = \frac{\left| f\left(x_0 \right) \right|}{\left\| f \right\|} = \frac{\left| \alpha \right| \left| f\left(u_0 \right) \right|}{\left\| f \right\|} = \left| \alpha \right|,$$

звідки $E\left(x_0, Ker\, f \right) = \left| \alpha \right| = \left\| x_0 - y_0 \right\|$, тобто y_0 – енн для x_0 в $Ker\, f$.

1.2.7. а) Показати, що $\left\| y \right\| = \max\left\{ \left| f\left(y \right) \right| : f \in Y^*, \left\| f \right\| \le 1 \right\},\; y \in Y$, де Y – ЛНП.

б) Див. задачі 1.2.6.в) і 1.2.7.а).

§1.3. 1.3.3. б) Скористатись рівністю $x = \alpha x + \left(1 - \alpha \right) x$, де $x \in X$, $\alpha \in \left[0, 1 \right]$.

1.3.5. в) Для доведення включення $co\left(F \right) \subset F$ скористатись методом математичної індукції та міркуваннями з доведення нерівності Ієнсена.

1.3.6. б) За умовою $\exists \varepsilon > 0$: $B\left(x_0, \varepsilon \right) \subset F$. Довести, що $B\left(x_\alpha, \left(1 - \alpha \right) \varepsilon \right) \subset F$, де $x_\alpha := \alpha x_1 + \left(1 - \alpha \right) x_0$, $\alpha \in \left(0, 1 \right)$; для цього показати, що якщо $z_\alpha \in B\left(x_\alpha, \left(1 - \alpha \right) \varepsilon \right)$, то $\exists z \in X$: $z_\alpha = \alpha x_1 + \left(1 - \alpha \right) z$ (знайти його можна з цієї рівності), при цьому $z \in B\left(x_0, \varepsilon \right) \subset F$, звідки отримати, що $z_\alpha \in F$. г) Для $\forall x_0 \in F$ розглянути $\alpha x_0 + \left(1 - \alpha \right) x_1$, де $x_1 \in F^\circ$, скористатись п. б) і спрямувати $\alpha \to 1$.

1.3.7. Якщо

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \tag{*}$$

де $x_k \in F$, $\alpha_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, $n \in \mathbb{N}$, то, викресливши нулі, можна вважати, що $\alpha_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$. Припустимо, що $n > m+1$. Тоді $\left\{x_k - x_1 \,\middle|\, 2 \leq k \leq n\right\}$ – набір з $(n-1)$-го вектора в $\mathbb{R}^m$, $n-1 > m$, тому ці вектори лінійно залежні, отже, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \overline{0}$, де $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$. Вважаємо, що $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_p \geq 0$, $\lambda_{p+1} < 0, \ldots, \lambda_n < 0$, $\dfrac{\alpha_s}{\lambda_s} := \max\left\{\dfrac{\alpha_k}{\lambda_k} \,\middle|\, p+1 \leq k \leq n\right\}$. Тоді

$$x = x - \frac{\alpha_s}{\lambda_s}\overline{0} = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k - \frac{\alpha_s}{\lambda_s}\lambda_k\right)x_k =: \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k,$$

причому тут $\beta_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$, $\beta_s = 0$. Це значить, що в (*) можна замінити n на $n-1$. Діємо аналогічно, доки не буде $n \leq m+1$.

1.3.9. а) $p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0; \end{cases}$ б) $p(x) = |x_1|$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1.3.10. а) В умові 2) означення покласти $\alpha := 0$ або $x := \overline{0}$; б) Скористатись рівністю $p(\overline{0}) = p(x + (-x))$; в) Для доведення достатності скористатись рівністю $p(x+y) = 2p\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$.

1.3.14. в) При $\alpha = 0$ це очевидно. Нехай $\alpha > 0$. Якщо $p_A(x) = +\infty$, то $\forall \lambda > 0$: $x \notin \lambda A \Rightarrow \forall \lambda > 0$: $\alpha x \notin \lambda A \Rightarrow p_A(\alpha x) = +\infty$. Якщо $p_A(x) < +\infty$, то

$$p_A(\alpha x) = \inf\left\{\alpha\frac{\lambda}{\alpha} : x \in \frac{\lambda}{\alpha}A\right\} = \alpha \inf\left\{\frac{\lambda}{\alpha} : x \in \frac{\lambda}{\alpha}A\right\} = \alpha p_A(x).$$

г) $\forall x \in A = 1 \cdot A$: $p_A(x) \leq 1 \Rightarrow A \subset \overline{B}_{p_A}$ (тут опуклість A не істотна). Якщо $p_A(x) < 1$, то $\exists \lambda \in (0,1)$: $x \in \lambda A \Rightarrow \exists y \in A$: $x = \lambda y = \lambda y + (1-\lambda)\overline{0} \in A$ (бо $\overline{0} \in A$, A опукла), тому $B_{p_A} \subset A$.

д) Якщо A – відкрита, $x \in A$, $p_A(x) \geq 1$, то $x \in A^\circ$, отже, $\exists \varepsilon > 0$: $(1+\varepsilon)x \in A$, тому за п.п. г) і в) $1 \geq p_A((1+\varepsilon)x) = (1+\varepsilon)p_A(x) > 1$, що неможливо, отже, $A \subset B_{p_A}$, звідки за п. г) $A = B_{p_A}$.

е) Нехай $p_A(x) < +\infty$ і $p_A(y) < +\infty$ (в інших випадках нерівність очевидна). Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda > 0$: $p_A(x) < \lambda < p_A(x) + \varepsilon$, $\exists \mu > 0$: $p_A(y) < \mu < p_A(y) + \varepsilon$. Оскільки $p_A\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}p_A(x) < 1$, то $\dfrac{x}{\lambda} \in A$; аналогічно, $\dfrac{y}{\mu} \in A$. Тоді $\dfrac{x+y}{\lambda+\mu} = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \dfrac{y}{\mu} \in A$ (бо A опукла) $\Rightarrow$ $x + y \in (\lambda+\mu)A \Rightarrow p_A(x+y) < \lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$, звідси, з огляду на довільність $\varepsilon > 0$, маємо доводжувану нерівність.

ж) Досить довести, що $\forall x \in X$ $\forall \alpha \in \mathbf{K}$: $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$. Оскільки $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ і A – врівноважена, то $\forall \lambda > 0$: $\dfrac{\alpha x}{\lambda} \in A \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha| x}{\lambda} = e^{-i\varphi}\dfrac{\alpha x}{\lambda} \in A$, тому

$$p_A(\alpha x)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{\alpha x}{\lambda}\in A\right\}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{|\alpha|x}{\lambda}\in A\right\}=p_A(|\alpha|x)=|\alpha|p_A(x),\ x\in X,\ \alpha\in\mathbf{K}.$$

з) Досить довести, що $p(x)=0 \Rightarrow x=\overline{0}$. Припустимо, що $\exists x\neq\overline{0}$: $p_A(x)=0$. Тоді $\forall\lambda>0$: $\frac{x}{\lambda}\in A \Leftrightarrow \forall\lambda>0$: $\lambda x\in A$, що суперечить алгебраїчній обмеженості множини A.

1.3.19. Для доведення необхідності згадати, що всі норми на скінченновимірному лінійному просторі еквівалентні, а для доведення достатності показати, що $\overline{0}\in A^{\circ}$.

§1.5. 1.5.1. $F=\{(\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$. а) довільний $x\in F$; б) $x=(0,1)$; тоді кожен елемент (α,α), де $\alpha\in[0,1]$, є енн для x в F.

1.5.5. Довести, що $[x,y]\subset\overline{B}(\overline{0},r)$, а якщо $x_\alpha:=\alpha x+(1-\alpha)y$, $\alpha\in[0,1]$, і $\exists\alpha_0\in(0,1)$: $x_{\alpha_0}\in B(\overline{0},r)$, то $\forall\alpha\in(\alpha_0,1)$: $x_\alpha\in[x_{\alpha_0},x]\setminus\{x\}\subset B(\overline{0},r)$ і $\forall\alpha\in(0,\alpha_0)$: $x_\alpha\in[y,x_{\alpha_0}]\setminus\{y\}\subset B(\overline{0},r)$.

1.5.6. 1)$\Rightarrow$5). Якщо $x,y\in X\setminus\{\overline{0}\}$ і $\forall c>0$: $x\neq cy$, то застосувати твердження п. 1) до елементів $x'=\frac{x}{\|x\|}$, $y'=\frac{y}{\|y\|}$ і числа $\varepsilon=\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$. 5)$\Rightarrow$2). Нехай $x,y\in S(\overline{0},1)$ і $x\neq y$. Методом від супротивного довести, що $\forall c>0$: $\frac{1}{2}x\neq c\frac{1}{2}y$, а потім застосувати твердження п. 5).

1.5.7. г) Скористатись рівністю паралелограма.

1.5.9. а) Довести нерівність $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$, де $a>0$ і $b>0$, причому тут буде «$=$» $\Leftrightarrow$ $a^p=b^q$.

1.5.10. Довести, що $\forall a,b\in\mathbb{C}$: $|a+b|\le|a|+|b|$, причому тут «$=$» $\Leftrightarrow$ $a\overline{b}\ge 0$ $\Leftrightarrow$ $a=0$ або $b=ka$, де $k\ge 0$.

1.5.14. Для доведення необхідності скористатись задачами 1.3.3.б) і 1.5.6.4).

§1.6. 1.6.4. а) Користуючись задачею 1.1.1.д).2), довести, що $\|\alpha x-P(\alpha x)\|=\|\alpha x-\alpha P(x)\|$, звідки зробити висновок, що $P(\alpha x)=\alpha P(x)$.

б) Припустимо, що $x_0\in X$ $\exists\{x_n:n\ge1\}\subset X$: $x_n\to x_0$, $n\to\infty$, але $y_n:=P(x_n)\not\to P(x_0)=:y_0$, $n\to\infty$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $\|y_n-y_0\|\ge d>0$, $n\ge1$. Оскільки $\|y_n\|\le\|y_n-x_n\|+\|x_n-x_0\|+\|x_0\|\to E(x_0,F)+\|x_0\|$, $n\to\infty$, то послідовність $\{y_n:n\ge1\}$ обмежена, тому за умовою існує її підпослідовність $\{y_{n_k}:k\ge1\}$, існує елемент $\tilde{y}_0\in X$ такі, що $y_{n_k}\to\tilde{y}_0$, $k\to\infty$. За задачею 1.2.2 $\tilde{y}_0\in F$. При цьому $\|\tilde{y}_0-y_0\|\ge d>0$, але $\|x_0-\tilde{y}_0\|\le\|x_0-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-y_{n_k}\|+\|y_{n_k}-\tilde{y}_0\|\to E(x_0,F)$, $k\to\infty$, тому $\|x_0-\tilde{y}_0\|\le E(x_0,F)$, звідки $\tilde{y}_0=P(x_0)=y_0$. Суперечність.

1.6.9. а) <u>I спосіб.</u> Повторити міркування з доведення аналогічного твердження, яке встановлюється в курсі функціонального аналізу для випадку наближення підпростором гільбертового простору (це може бути частиною доведення теореми про розклад гільбертового простору). <u>II спосіб.</u> Те, що F МЄ, випливає з задач 1.5.14 і 1.5.18.б), а те, що F МІ, – з задачі 1.4.7.б) і теореми про рефлексивність рівномірно опуклого банахового простору.

1.6.10. б) Скористатись задачею 1.5.8 і теоремою Банаха-Мазура про універсальність простору $C[0, 1]$, за якою кожен сепарабельний банахів простір ізометрично ізоморфний деякому підпростору $C[0, 1]$.

§2.1. 2.1.1. Якщо $x \in \mathbf{P}_0$, то $p_0^* = x$. Якщо $x \notin \mathbf{P}_0$, то $\exists \{t_*, t^*\} \subset [a, b]$: $x(t_*) = \min\limits_{[a, b]} x =: m$, $x(t^*) = \max\limits_{[a, b]} x =: M$, причому $m < M$, тоді $p_0^*(t) := \dfrac{m + M}{2}$, $t \in [a, b]$, – пнн для x в $\mathbf{P}_0$ за теоремою Чебишова про альтернанс: t_* і t^* – точки альтернансу.

2.1.2. Якщо $n = 0$, то $p_0^*(t) := \dfrac{1}{2}$, $t \in [-1, 1]$, за задачею 2.1.1 (точки альтернансу: $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ або $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, бо $\|x - p_0^*\| = \max\limits_{t \in [0, 1]} \left| t^2 - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$ і $x(-1) - p_0^*(-1) = \dfrac{1}{2}$, $x(0) - p_0^*(0) = -\dfrac{1}{2}$, $x(1) - p_0^*(1) = \dfrac{1}{2}$). Якщо $n = 1$, то $p_1^*(t) := \dfrac{1}{2}$, $t \in [-1, 1]$, за теоремою Чебишова про альтернанс: тут точки альтернансу – це $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$. Якщо $n \ge 2$, то $x \in \mathbf{P}_n$, тому $p_n^* = x$.

2.1.3. Довести, що якщо $t_* \in (a, b)$ – точка, в якій дотична паралельна L_1, то точки a, t_*, b – точки альтернансу.

2.1.4. а) Користуємось алгоритмом з задачі 2.1.3. Січна, що проходить через точки $(0, x(0)) = (0, 0)$ та $(2, x(2)) = (2, 4)$, має рівняння $y = 2t$, тобто є графіком функції $l_1(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Знайдемо точку $t_* \in (0, 2)$, в якій дотична $l_2(t) = x'(t_*)(t - t_*) + x(t_*)$ паралельна графіку l_1; має бути, що $x'(t_*) = 2$; це $\Leftrightarrow$ $2t_* = 2$ $\Leftrightarrow$ $t_* = 1$. Отже, $l_2(t) = 2(t - 1) + 1 = 2t - 1$. Тоді $p_1^*(t) = \frac{1}{2}(l_1(t) + l_2(t)) = 2t - \frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, – пнн для x в $\mathbf{P}_1$ за теоремою Чебишова про альтернанс: тут точки альтернансу – це $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, бо $x^*(t) := x(t) - p_1^*(t) = t^2 - 2t + \frac{1}{2}$, $x^*(0) = \frac{1}{2}$, $x^*(1) = -\frac{1}{2}$, $x^*(2) = \frac{1}{2}$, а також $\|x^*\| = \frac{1}{2} = |x^*(t_j)|$, $j = 1, 2, 3$.

2.1.9. а) Розглянути випадки $sign\, B = 1$, $sign\, B = -1$, $sign\, B = 0$.

б) Якщо $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ задовольняє умови 1) і 2), але $\exists\, p_n \in \mathbf{P}_n$: $\|x - p_n\| < \|x - p_n^*\|$, то до чисел $A := x(t_j) - p_n(t_j)$ і $B := x(t_j) - p_n^*(t_j)$ при кожному $j = \overline{1, n+2}$ слід застосувати п. а) і, врахувавши умову 2), отримати, що многочлен $p_n - p_n^* \in \mathbf{P}_n$ змінює знак на $[a, b]$ принаймні $n+1$ раз, тобто має на $[a, b]$ принаймні $n+1$ корінь, звідки одержати суперечність.

2.1.10. Існування випливає з задачі 1.2.4.б). Єдиність. Нехай $x \in C[a, b]$, p_n, $p_n^* \in \mathbf{P}_n$ – пнн для x в $\mathbf{P}_n$. Тоді за задачею 1.3.3.б) $\frac{1}{2}(p_n + p_n^*)$ теж пнн для x в $\mathbf{P}_n$, а тому за теоремою Чебишова існують точки $\{t_1, \dots, t_{n+2}\} \subset [a, b]$, $a \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n+2} \le b$, такі, що

$$\left| x(t_j) - p_n(t_j) + x(t_j) - p_n^*(t_j) \right| \le 2E(x, \mathbf{P}_n).$$

Оскільки у цій нерівності модуль кожної з різниць не перевищує $E(x, \mathbf{P}_n)$, то $x(t_j) - p_n(t_j) = x(t_j) - p_n^*(t_j)$, $j = \overline{1, n+2}$, і за наслідком з основної теореми алгебри $p_n = p_n^*$.

2.1.11. Припустити супротивне і повторити міркування з доведення достатності в теоремі Чебишова (див. задачу 2.1.9 б)).
2.1.13. При $n=1$ і $[a, b]=[0, 1]$ розглянути функції $x(t)=\min\left(1, 8\left|t-\frac{1}{2}\right|-1\right)$, $y(t)=1-4\left|t-\frac{1}{2}\right|$, $t\in[0, 1]$, і показати, що $P(x+y)\neq P(x)+P(y)$.

§2.2. 2.2.1. а) Скористатись формулою $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$ і покласти в ній $\theta:=\arccos t$; б) Скористатись методом математичної індукції, причому зручно використовувати цей метод у формі, коли крок індукції роблять, доводячи, що з припущення про правильність доводжуваного твердження для всіх $k\leq n$ випливає правильність цього твердження для $n+1$.
2.2.2. Скористатись методом математичної індукції і задачею 2.2.1.а).
2.2.3. а) Скористатись задачами 2.2.1.б), 2.2.2 і теоремою Чебишова про альтернанс; б) Показати, що якщо p_n^* – многочлен степеня n з одиничним старшим коефіцієнтом і найменшою нормою в $C[-1, 1]$, то $\left\|p_n^*\right\|_{C[-1, 1]}=E\left(x, \mathbf{P}_{n-1}\right)$, звідки отримати, що $p_n^*=x-\tilde{p}_{n-1}$, де $\tilde{p}_{n-1}$ – пнн для функції $x(t)=t^n$, $t\in[-1, 1]$, в $\mathbf{P}_{n-1}$ у просторі $C[-1, 1]$.
2.2.5. з) Друга рівність випливає з формули бінома Ньютона. Для доведення першої рівності можна: <u>І спосіб:</u> показати, що її права частина задовольняє те саме рекурентне співвідношення, що й T_n; <u>ІІ спосіб:</u> переконатись, що її досить довести для $t\in[-1, 1]$, а потім для цих t встановити, що $T_n(t)=\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)=\frac{1}{2}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n\right)$, де $\theta=\arccos t$.
ї) Показати, що її права частина задовольняє те саме рекурентне співвідношення, що й T_n.

§2.3. 2.3.2. Скористатись задачею 2.3.1.б), де: а) $F(p):=p(a)$, $p\in\mathbf{P}_n$; б) $F(p):=p'(1)$, $p\in\mathbf{P}_n$.

§2.4. 2.4.1. а), б) Це твердження є наслідком основної теореми алгебри.
2.4.2. а) Записати загальний вигляд тригонометричного полінома порядку не вище n і скористатись формулами Ейлера: $2\cos kt=e^{ikt}+e^{-ikt}$, $2i\sin kt=e^{ikt}-e^{-ikt}$; б) Скористатись рівністю з п. а) та індукцією по k; в) Якщо не враховувати кратність коренів, то доводжуване твердження випливає з задачі 2.4.1.б), рівності п. а) і того факту, що $z=e^{it}$ – бієкція між $[a, a+2\pi)$ (чи $(a, a+2\pi]$) та колом $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$. Якщо ж враховувати кратність коренів, то з рівності п. б) випливає, що коли t_0 – нуль полінома T кратності k, то $z_0=e^{it_0}$ – корінь P кратності не меншої, ніж k, при цьому різним нулям полінома T з $[a, a+2\pi)$ (чи $(a, a+2\pi]$) відповідають різні корені многочлена P. Однак P має не більше $2n$ коренів на $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, навіть з урахуванням їх кратності, тому й T має не більше $2n$ нулів на $[a, a+2\pi)$ (чи $(a, a+2\pi]$) з урахуванням їх кратності; г) Наслідок з п. в).
2.4.5. а) Скористатись задачею 2.4.2.в) і врахувати, що кожен поліном за даною в умові системою функцій є парним; б) Врахувати, що для полінома за даною в умові системою функцій точка $t=0$ не може бути нулем кратності 1.
2.4.7. Припустимо, що твердження виконується для n, але нетривіальний узагальнений поліном $p(t)=\sum_{k=1}^{n+1}c_k e^{a_k t}$ має на $[a, b]$ принаймні $n+1$ нуль; тоді й поліном $\tilde{p}(t):=p(t)e^{-a_1 t}$ має на $[a, b]$ принаймні $n+1$ нуль; далі слід застосувати до $\tilde{p}$ теорему Ролля і отримати суперечність.
2.4.9. Скористатись методом від супротивного і теоремою Ролля.

2.4.13. Припустимо, що на A існує ЧС дійснозначних функцій порядку $n \ge 1$, $\{t_1, t_2\} \subset A$, $t_1 \ne t_2$, – довільні точки. За задачею 2.4.12.б) існує узагальнений поліном p за цією ЧС такий, що $p(t_1) > 0$, $p(t_2) < 0$. Далі розглянути звуження полінома p на довільну криву з кінцями в точках t_1, t_2 і отримати, що p має на A безліч нулів.
2.4.16. Повторити міркування з розв'язку задачі 2.1.9.б), тільки замість наслідку з основної теореми алгебри слід користуватись означенням ЧС.

§2.5. 2.5.2. а) Якщо $n = 0$, то $T_0^*(t) = \frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, за теоремою Чебишова про альтернанс: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ – точки альтернансу (їх кількість $2 = 2n + 2$). Якщо $n = 1$, то $T_1^*(t) = \frac{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, за теоремою Чебишова про альтернанс: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ – точки альтернансу (їх кількість $4 = 2n + 2$). Якщо $n \ge 2$, то $T_n^* = x$, бо $x(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$, отже, $x \in \mathbf{T}_n$.

2.5.4. Довести, що таке m існує і єдине, $\left\| x - T_n^* \right\| = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$, $t_k = \dfrac{\pi k}{n_{m+1}}$, $0 \le k \le 2n_{m+1} - 1$, – точки альтернансу і їх кількість $\ge 2n + 2$.
2.5.5. Знайти $\tilde{T}_{n-1}$ – пнн в $\mathbf{T}_{n-1}$ для $x(t) = \alpha\cos nt + \beta\sin nt = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos(nt - \theta)$, де $\theta \in \mathbb{R}$ – стала (спочатку можна розглянути функцію $x(t) = \cos nt$, $t \in \mathbb{R}$).
2.5.6. Повторити міркування з розв'язку задачі 2.1.9.б), тільки замість наслідку з основної теореми алгебри слід користуватись лемою про нулі тригонометричного полінома (задача 2.4.2.в)).
2.5.8. Випливає з задач 2.4.2.в), 2.5.7 і теореми Гаара.
2.5.9. Див. вказівки до задач 2.1.11 і 2.5.6.

§3.1. 3.1.9. 2) Скористатись задачею 2.5.7 і перевірити, що множина $\mathbf{T} \subset C(Q)$ задовольняє умови теореми Стоуна. 5) Якщо $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $arctg\ \infty := \dfrac{\pi}{2}$, $\tilde{\rho}(t, s) := |arctg\ t - arctg\ s|$, $\rho(t, s) := \min\{\tilde{\rho}(t, s), \pi - \tilde{\rho}(t, s)\}$, $t, s \in \overline{\mathbb{R}}$, то $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ – компактний метричний простір, $t_n \to t_0$, $n \to \infty$, в $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\rho(t_n, t_0) \to 0$, $n \to \infty$, простори C_∞ і $C(\overline{\mathbb{R}})$ ізометричні (коли $x \in C_\infty$, то $x(\infty) := \lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t)$), множина $R \subset C_\infty$ задовольняє умови теореми Стоуна.
3.1.14. Для доведення аналітичності функцій з множини $\overline{\mathbf{P}}$ можна скористатись (першою) теоремою Вейєрштрасса з комплексного аналізу або теоремою Морера.

§3.2. 3.2.2. $(\Rightarrow)$ Включення $M^\perp \supset \{0\}$ справджується завжди. Нехай $f \in M^\perp$. Оскільки $\forall x \in$ л.о.(M): $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, де $\alpha_k \in \mathbf{K}$, $x_k \in M$, $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$, то за лінійністю f маємо, що $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = 0$. Оскільки $\forall x \in$ з.л.о.(M) $\exists \{x_n : n \ge 1\} \subset M$: $x_n \to x$, $n \to \infty$, то за неперервністю f і доведеним вище, маємо, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, тобто $f = 0$ в X^*.

$(\Leftarrow)$ Припустивши, що множина M не є тотальною в X, маємо, що $\exists x \in X: x \notin$ з.л.о.(M). За першим наслідком з теореми Гана-Банаха $\exists f \in M^{\perp}: f(x) = E(x, F) > 0$, тобто $f \neq 0$, що суперечить рівності $M^{\perp} = \{0\}$.

3.2.6. Розглянути $X = c$, $L = \{ y = (y_0, y_1, \ldots) \in l_1 \mid y_0 = 0 \}$ або $X = (C[0,1])^*$, $L = \varphi(C[0,1])$, де $\varphi : C[0,1] \to (C[0,1])^{**}$ – оператор канонічного вкладення.

3.2.7. б) Скористатись п. а) і теоремою єдиності для аналітичних функцій. в) Скористатись п. б) і задачею 3.2.2.

§3.3. 3.3.1. Для доведення аналітичності можна скористатись (першою) теоремою Вейєрштрасса з комплексного аналізу або теоремою Морера.

3.3.2. Скористатись методом від супротивного. 1) Припустимо, що $\exists z_0 \in M' \setminus M$, де M' – множини граничних точок множнини M в $\mathbb{C}$. Застосувавши до функції $f(z) := \dfrac{1}{z - z_0}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, умову при $\varepsilon = 1$, отримаємо, що функція $f - p$ обмежена на $B(z_0, 1) \bigcap M$, однак на цій множині функція f не обмежена, а p – обмежена. Суперечність. 2) Нехай M – замкнена в $\mathbb{C}$. Припустимо, що множина M не обмежена в $\mathbb{C}$. Якщо $M = \mathbb{C}$, то скористатись теоремою Ліувілля, а якщо $M \neq \mathbb{C}$, то $\exists z_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ і слід розглянути функцію $f(z) := \dfrac{1}{z - z_0}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. 3) Нехай M – замкнена і обмежена в $\mathbb{C}$. Припустимо, що множина $\mathbb{C} \setminus M$ не є зв'язною в $\mathbb{C}$. Тоді $\mathbb{C} \setminus M$ є не більш ніж зліченним об'єднанням попарно неперетинних областей в $\mathbb{C}$, одна з яких є необмеженою і принаймні одна з яких обмежена; цю останню область позначимо G і зауважимо, що $G \subset \mathbb{C} \setminus M$ і $\partial G \subset M$. При довільному фіксованому $z_0 \in G$ для функції $f(z) := \dfrac{1}{z - z_0}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, за умовою $\exists \{p_n : n \geq 1\}$: $\sup\limits_{z \in \partial G} |p_n(z) - f(z)| \to 0$, $n \to \infty$, звідки за (другою) теоремою Вейєрштрасса з комплексного аналізу $\exists \varphi \in A(M)$: $\sup\limits_{z \in \overline{G}} |p_n(z) - \varphi(z)| \to 0$, $n \to \infty$; при цьому $\varphi(z) = f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, $z \in \partial G$, тому для функції $g(z) := (z - z_0)\varphi(z) - 1$, $z \in \overline{G}$, маємо, що $g \in A(M)$, $|g(z_0)| = 1$, $g(z) = 0$, $z \in \partial G$, а це суперечить принципу максимума модуля.

§3.3. 3.4.5. а) Розглянути випадки $|t - c| < \delta$ і $|t - c| \geq \delta$.

3.4.8. <u>І спосіб.</u> Довести, що $\forall f \in C[a, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in [a, b]$:

$$-\varepsilon - \varphi_x(t) \leq f(t) - f(x) \leq \varphi_x(t) + \varepsilon, \; t \in [a, b], \qquad (*)$$

де $\varphi_x(t) := \dfrac{2}{\delta^2} \|f\| (t - x)^2$, $t \in [a, b]$, а число $\delta = \delta(f, \varepsilon) > 0$ таке, що $\forall t, x \in [a, b]$, $|t - x| < \delta$: $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Враховуючи, що за умовою $U_n e_0 = e_0 + \alpha_n$, $U_n e_1 = e_1 + \beta_n$, $U_n e_2 = e_2 + \gamma_n$, $n \geq 1$, де $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, $\gamma_n \to 0$ в $C[a, b]$, і скориставшись рівністю

$$(U_n \varphi_x)(t) = \frac{2}{\delta^2} \|f\| \Big((U_n e_2)(t) - 2x (U_n e_1)(t) + x^2 (U_n e_0)(t) \Big), \; t \in [a, b].$$

в якій покласти $t := x$, довести, що $\max_{x \in [a, b]} \left| \left(U_n \varphi_x \right)(x) \right| \to 0$, $n \to \infty$. Далі використати це співвідношення, нерівність (*) і монотонність додатного оператора (задача 3.4.7.а)).

<u>II спосіб.</u> Припустимо, що це твердження хибне. Тоді $\exists f \in C[a, b]$ $\exists \varepsilon > 0$ $\forall k \ge 1$ $\exists n_k \in \mathbb{N}$ $\exists t_k \in [a, b]$: $\left| \left(U_{n_k} f \right)(t_k) - f(t_k) \right| \ge \varepsilon$, причому за теоремою Больцано-Вейєрштрасса можна вважати, що $t_k \to t_0 \in [a, b]$, $k \to \infty$. Далі до послідовності функціоналів $\Phi_k(f) := \left(U_{n_k} f \right)(t_k)$, $f \in C[a, b]$, $k \ge 1$, застосувати твердження задачі 3.4.5.б).

3.4.13. а) $B_n'(f)(t) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) k C_n^k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) (n-k) C_n^k t^k (1-t)^{n-k-1}$; у першій сумі покласти $i := k-1$.

г) Оскільки за теоремою С. Н. Бернштейна $B_{n-1}(f') \to f'$, $n \to \infty$, в $C[0, 1]$, то досить довести, що $B_n'(f) - B_{n-1}(f') \to 0$, $n \to \infty$, в $C[0, 1]$; для цього можна скористатись теоремами Лагранжа і Кантора.

д) Скористатись тим, що $\forall g \in C^1[0, 1]$: $V(g, [a, b]) = \int_a^b |g'(t)| dt$.

§4.1. 4.1.1. <u>I спосіб.</u> Повторити міркування з доведення аналогічного твердження, яке встановлюється в курсі функціонального аналізу для випадку наближення підпростором гільбертового простору (це може бути частиною доведення теореми про розклад гільбертового простору). <u>II спосіб.</u> Єдність енн випливає з задач 1.5.14 і 1.5.18.б), а існування – з задачі 1.4.7.б) і рефлексивності гільбертового простору.

4.1.2. а) Повторити міркування з доведення критерію Колмогорова енн в $C(Q)$. Зокрема, для доведення $(\Rightarrow)$ припустити, що $x^* \in F$ – енн для x в F, але $\exists y \in F$: $\mathrm{Re}\left(y - x^*, x - x^* \right) := \gamma > 0$ і для елементів $x_\alpha := x^* + \alpha\left(y - x^* \right) = \alpha y + (1-\alpha) x^* \in F$, $\alpha \in [0, 1]$, показати, що $\left\| x - x_\alpha \right\|^2 < \left\| x - x^* \right\|^2$ при малих $\alpha > 0$. Геометричне тлумачення полягає в тому, що для всіх $y \in F$ кут між векторами $x - x^*$ та $y - x^*$ (зручно вважати, що ці вектори мають спільний початок в точці x^* і кінці в точках x та y) тупий, тобто точки x та y лежать по різні боки від прямо, що проходить через точку x^*, перпендикулярно вектору $x - x^*$.

б) Застосувати твердження п. а) до елементів $y = x^* \pm z$, де $z \in F$.

4.1.3. а) Для доведення лінійності скористатись задачею 4.1.2 і єдиністю енн. Для доведення неперервності встановити обмеженість. б) Скористатись рівністю

$$\|Px - Py\|^2 = \left(Px - Py, Px - x - Py + y + x - y \right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(Py - Px, x - Px \right) + \mathrm{Re}\left(Px - Py, y - Py \right) + \mathrm{Re}\left(Px - Py, x - y \right),$$

задачею 4.1.2.а) і нерівністю Коші-Буняковського для оцінки останнього доданка.

4.1.4. <u>I спосіб.</u> Для $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{K}$ встановити рівність

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = (x, x) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, x \right) - \left(x, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) =$$
$$= (x, x) + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 - a_k \overline{c}_k - \overline{a}_k c_k + |c_k|^2 - |c_k|^2 \right) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 .$$

<u>II спосіб.</u> Показати, що $x-\sum_{k=1}^{n}a_k e_k \perp e_p$, $1\le p\le n$, і скористатись задачею 4.1.2.б).

4.1.6. Спочатку провести процес ортогоналізації Грама-Шмідта для системи функцій $\{1,\, t\}$ у просторі $L_2[a,\, b]$ (див. задачу 4.2.2), а потім скористатись формулою для енн з задачі 4.1.4. Відповідна ОНС: $e_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $e_2(t)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}(t-1)$, $t\in[0,\, 2]$; пнн: $p_1^*(t)=2t-\dfrac{2}{3}$, $t\in[0,\, 2]$.

§4.2. 4.2.2. Спочатку довести, що якщо ОНС $\{e_n : n\ge 1\}$ задовольняє умову (2) і $c_{nn}\ne 0$, $n\ge 1$, то вона задовольняє умову (1). <u>Існування.</u> <u>I спосіб.</u> Методом математичної індукції довести, що $\forall n\ge 1$: $\tilde{e}_n\ne\overline{0}$, $\|e_n\|=1$, $(e_n,\, e_k)=0$ при $k\in\{1,\,\dots,\,n-1\}$ і $e_k\in$ л.о.$\left(\{g_1,\,\dots,\,g_n\}\right)$ при $k\in\{1,\,\dots,\,n\}$. <u>II спосіб.</u> Якщо

$$\tilde{e}_n := \begin{vmatrix} (g_1,\, g_1) & \cdots & (g_1,\, g_{n-1}) & g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (g_n,\, g_1) & \cdots & (g_n,\, g_{n-1}) & g_n \end{vmatrix},\quad n\ge 1,$$

то $\forall n\ge 1$: $\tilde{e}_n = c_{nn}g_n+\ldots+c_{1n}g_1$ і $c_{nn}=G_{n-1}\ne 0$, а також

$$\forall g\in H:\ (\tilde{e}_n,\, g)=\begin{vmatrix} (g_1,\, g_1) & \cdots & (g_1,\, g_{n-1}) & (g_1,\, g) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (g_n,\, g_1) & \cdots & (g_n,\, g_{n-1}) & (g_n,\, g) \end{vmatrix}, \tag{*}$$

звідки $\forall k\in\{1,\,\dots,\,n-1\}$: $(\tilde{e}_n,\, g_k)=0$, а отже, $(\tilde{e}_n,\, \tilde{e}_k)=\sum_{i=1}^{k}\overline{c}_{ik}(\tilde{e}_n,\, g_i)=0$, тобто $\{\tilde{e}_n : n\ge 1\}$ – ортогональна система. З (*) також випливає, що $(\tilde{e}_n,\, g_n)=G_n\ne 0$, тому

$$0\le(\tilde{e}_n,\, \tilde{e}_n)=(\tilde{e}_n,\, c_{nn}g_n+c_{n-1,\,n}g_{n-1}+\ldots+c_{1n}g_1)=\overline{c}_{nn}(\tilde{e}_n,\, g_n)=\overline{G}_{n-1}G_n\ne 0.$$

Оскільки $G_0=1$, $G_1=(g_1,\, g_1)>0$, то методом математичної індукції маємо, що $G_n>0$, зокрема, $c_{nn}=G_{n-1}>0$, $n\ge 1$. Поклавши $e_n:=\dfrac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}$, $n\ge 1$, отримаємо, що $\{e_n : n\ge 1\}$ – шукана ОНС.

<u>Єдиність.</u> Довести, що якщо $\{e_n : n\ge 1\}$, $\{e'_n : n\ge 1\}$ – ОНС, що задовольняють умову (2) (при цьому $e'_n=c'_{nn}g_n+\ldots+c'_{1n}g_1$, $c_{nn}\ne 0$, $c'_{nn}\ne 0$), то $f:=c'_{nn}e_n-c_{nn}e'_n=0$, показавши для цього, що $f\in$ л.о.$\left(\{g_1,\,\dots,\,g_{n-1}\}\right)$, $f\perp$ л.о.$\left(\{g_1,\,\dots,\,g_{n-1}\}\right)$, $n\ge 1$. Далі довести, що якщо $c_{nn}>0$, $c'_{nn}>0$, то $e_n=e'_n$, $n\ge 1$.

4.2.6. б) Довести, що характеристичну функцію (індикатор) довільного півінтервала можна як завгодно добре наблизити в $L_{2,\,h}(a,\, b)$ функціями з $C[a,\, b]$. Далі скористатись щільністю в $L_{2,\,h}(a,\, b)$ множини східчастих функцій (тобто лінійних комбінацій індикаторів півінтервалів) і теоремою Вейєрштрасса. в) Вважаємо, що $(a,\, b)=\mathbb{R}$, продовживши, якщо треба, функцію h нулем на $\mathbb{R}$. Нехай $f\in L_{2,\,h}$ така, що $\forall n\ge 0$: $(f,\, t^n)_{L_{2,\,h}}=\int_{\mathbb{R}}t^n f(t)h(t)\,dt=0$. За нерівністю Коші-Буняковського

$\forall\alpha\in\left(-\dfrac{\delta}{2},\dfrac{\delta}{2}\right)$: $fhe^{\alpha|t|}\in L_1(\mathbb{R})$, зокрема, функція $fh\in L_1(\mathbb{R})$. Згідно з задачею 4.2.5 її перетворення Фур'є допускає аналітичне продовження g в смугу $S_{\delta/2}$, причому за припущенням $\forall n\ge 0$: $g^{(n)}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}i^n\int\limits_{\mathbb{R}}t^n f(t)h(t)dt=0$, звідки за теоремою єдиності для аналітичних функцій $g(z)=0$, $z\in S_{\delta/2}$, зокрема, $g(\lambda)=\widehat{fh}(\lambda)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Звідси отримуємо, що $fh=0\ (\operatorname{mod}\lambda_1)$ на $\mathbb{R}$; для цього можна або скористатись властивостями перетворення Фур'є в $L_1(\mathbb{R})$, або теоремою Планшереля, показавши, що $fh\in L_2(\mathbb{R})$. З отриманого випливає, що $f=\overline{0}$ в $L_{2,h}$.

4.2.7. 1) Покладемо $Q_n(t):=c_ne^{t^2}\left(e^{-t^2}\right)^{(n)}$, $t\in\mathbb{R}$, $n\ge 0$. Методом математичної індукції доводимо, що

$$\left(e^{-t^2}\right)^{(n)}=e^{-t^2}p_n(t),\quad t\in\mathbb{R},\tag{*}$$

де p_n – многочлен степеня n; звідси випливає, що Q_n – многочлен степеня n, причому його старший коефіцієнт додатний (бо так вибрали c_n), $n\ge 0$. За задачею 4.2.4 досить довести, що $\forall n\ge 1$ $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$: $Q_n\perp t^k$ в $L_{2,h}$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами k разів і враховуючи, що всі позаінтегральні члени рівні 0 (це випливає з рівності $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(e^{-t^2}\right)^{(n)}=0$, $n\ge 0$, яка є наслідком співвідношення (*)), маємо $\forall k\in\{1,\dots,n\}$:

$$\left(Q_n,t^k\right)=c_n\int\limits_{\mathbb{R}}t^k d\left(e^{-t^2}\right)^{(n-1)}=-c_nk\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{-t^2}\right)^{(n-1)}t^k dt=\ldots=c_nk!(-1)^k\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{-t^2}\right)^{(n-k)}dt.\tag{**}$$

З формули Ньютона-Лейбніца і рівності (**) (при $k>0$) маємо, що $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$: $\left(Q_n,t^k\right)=0$.

Знайдемо c_n. Якщо $k=n$, то з формули (**) отримуємо, що $\left(Q_n,t^k\right)=c_nn!(-1)^n\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-t^2}dt=c_nn!(-1)^n\sqrt{\pi}$. З (*) методом математичної індукції одержуємо, що старший коефіцієнт многочлена Q_n рівний $(-1)^n2^nc_n$. Користуючись лінійністю скалярного добутку і значеннями $\left(Q_n,t^k\right)$ при $k\in\{0,\dots,n-1\}$ і $k=n$, маємо, що

$$1=\left\|Q_n\right\|^2=\left(Q_n,Q_n\right)=(-1)^n2^nc_nc_nn!(-1)^n\sqrt{\pi}=c_n^2 2^n n!\sqrt{\pi},$$

звідки, враховуючи, що старший коефіцієнт додатний, знаходимо, що $c_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}}$, $n\ge 0$.

§4.3. 4.3.2. а) Функцію $\varphi(t)=\dfrac{\pi-t}{2}$, $t\in(0,2\pi)$, розкласти в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

4.3.3. 1)$\Rightarrow$2). Якщо $y \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$, то y розкладається в ряд Фур'є, який збігається в $\tilde{L}_2$ до y. Далі врахувати, що $a_k \cos kt + b_k \sin kt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(u)\cos k(t-u)\,du$ і застосувати r разів формулу інтегрування частинами; $y^{(r)} \in B$, бо $y \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$.

2)$\Rightarrow$3). $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} y^{(r)}(u)\cos\left(k(t-u) - \frac{\pi r}{2}\right)du = \left(D_r * y^{(r)}\right)(t)$; тут перша рівність випливає безпосередньо з умови, а друга – з лінійності і неперервності скалярного добутку за першим аргументом, бо ряд для $D_r(t-\cdot\,)$ збігається в $L_2[0,\,2\pi]$.

3)$\Rightarrow$1). Нехай $y = D_r * x$, де $x \in B$. Покладемо $x_0 := x$, $x_k(t) := \int_0^t x_{k-1}(u)\,du + c_k$, $t \in \mathbb{R}$, де $c_k \in \mathbf{K}$ вибирається так, щоб $\int_0^{2\pi} x_k(t)\,dt = 0$, $1 \le k \le r$. Тоді індукцією отримуємо, що $x_r \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$ і $x_r^{(r)} = x \pmod{\lambda_1}$ на $\mathbb{R}$. Оскільки 1)$\Rightarrow$3), то $x_r = D_r * x_r^{(r)} = D_r * x = y$, отже, $y \in \tilde{W}_2^{r,\,0}$.

4.3.5. б) Скористатись формулою для величини найкращого наближення елемента з задачі 4.1.4, рівністю Парсеваля, монотонністю послідовності $\left\{|\lambda_n| : 0 \le n \le N\right\}$ і нерівністю Бесселя.

в) Для доведення включення $M \subset A(B)$ див. вказівку до задачі 4.3.11.

4.3.6. а) Випливає з задач 4.3.1, 4.3.3.2) і 4.3.5.б), якщо $e_0(t) = g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 = 1$.

б) Врахувати п. а) і включення $\|x\|^{-1} x \in \tilde{W}_2^{r}$.

4.3.8. а) Якщо $x_0 \in X$ – довільний фіксований елемент, $u_0 \in F$, то $y_0 := \frac{x_0 - u_0}{\|x_0 - u_0\|}$ – шуканий елемент. б) Для доведення нерівності $d_n\left(\overline{B}\left(\overline{0},1\right),\,X\right) \ge 1$ скористатись п. а).

4.3.9. а) Якщо $\{e_1,\ldots,e_n\}$ – ОНБ в F, $\{g_1,\ldots,g_{n+1}\}$ – ОНБ в M_{n+1}, то шукаємо z у вигляді $z = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k g_k$, $\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k|^2 = 1$; треба, щоб $(Pz, e_j) = (z, e_j) = 0$, $1 \le j \le n$; але ця система n лінійних рівнянь з $(n+1)$-м невідомим завжди має ненульовий розв'язок, домноживши який на сталу, можна досягти того, щоб $\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k|^2 = 1$.

4.3.11. Для встановлення нерівності $d_n\left(A(B),\,H\right) \le |\lambda_n|$, скористатись задачею 4.3.5.б). Щоб довести, що $d_n\left(A(B),\,H\right) \ge |\lambda_n|$, вважаємо, що $\lambda_n \ne 0$ (інакше все очевидно), а отже, $\lambda_k \ne 0$, $0 \le k \le n$. Для $\forall\, y \in B_{n+1} := \left\{x \in \Phi_n \,\middle|\, \|x\| \le |\lambda_n|\right\}$ та $x := \sum_{j=0}^{n} \frac{(y,\,g_j)}{\lambda_j} e_j$ показати, що $Ax = y$ і $\|x\|^2 \le 1$, звідки отримати включення $B_{n+1} \subset A(B)$ і скористатись задачею 4.3.10.

4.3.12. Випливає з задач 4.3.1, 4.3.3 і 4.3.11, якщо $e_0(t) = g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 = 1$.

4.3.13. Показати, що $K\tilde{W}_2^r := \left\{ Kx \mid x \in \tilde{W}_2^r \right\}$ і $\forall n \geq 1$: $d_n\left(K\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right) = Kd_n\left(\tilde{W}_2^r, \tilde{L}_2\right)$.

§5.2. 5.2.2. З умови випливає, що $sign\, g = sign\left(x - y^*\right)$ $\left(\mathrm{mod}\,\lambda_1\right)$ на $[a, b]$ або $sign\, g = -sign\left(x - y^*\right)$ $\left(\mathrm{mod}\,\lambda_1\right)$ на $[a, b]$. Звідси й умови 2) за задачею 5.2.1 отримуємо, що y^* – енн для x в U; при цьому маємо (коментарі див. нижче)

$$E(x, U) = \left\|x - y^*\right\|_1 = \int_a^b \left(x - y^*\right) sign\left(x - y^*\right) d\lambda_1 =$$

$$= \pm \int_a^b \left(x - y^*\right) sign\, g\, d\lambda_1 = \pm \int_a^b x\, sign\, g\, d\lambda_1 = \left| \int_a^b x\, sign\, g\, d\lambda_1 \right|;$$

у передостанній рівності використано умову 2), а в останній – нерівність $E(x, U) \geq 0$.

5.2.3. Остання рівність є наслідком перших двох. Щоб їх отримати, досить довести, що $I := \int_{-\pi}^{\pi} e^{ivu} sign\, g\left((n+1)u\right) du = 0$. Для цього треба в даному інтегралі зробити заміну $u = t + \dfrac{\pi}{n+1}$, скористатись незалежністю інтеграла від періодичної функції від відрізка довжиною в період і отримати рівність $I = e^{-\frac{iv\pi}{n+1}} I$, з якої вивести , що $I = 0$.

5.2.4. Скористатись тим, що простори $\tilde{L}_1$ та $L_1[-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ізометрично ізоморфні і задачею 5.2.2, в якій взяти $g(t) := \sin(n+1)t$, $t \in [-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$; умова 2) теореми Маркова випливає з задачі 5.2.3.

5.2.5. а) За допомогою задачі 5.2.4 показати, що для функції $x(t) = \sin(n+1)t$ її пнн в $\mathbf{T}_n$ – це $T_n^*(t) = 0$.

5.2.7. Зробити заміну $u = \arccos t$, скористатись парністю підінтегральної функції і задачею 5.2.3.

5.2.8. Застосувати теорему Маркова до функції $g(t) = \sin(n+1)\arccos t$, $t \in [-1, 1]$, скориставшись задачею 5.2.7.

5.2.9. Випливає з задачі 5.2.8, бо функція $x - p^*$ має n нулів в точках t_k, $1 \leq k \leq n$, і за задачею 2.4.9 це всі її нулі, а отже, вони прості, тому точки t_k, $1 \leq k \leq n$, – це усі точки зміни знаку цієї функції і $sign\left(x(t) - p^*(t)\right) = \sigma \cdot sign \sin(n+1)\arccos t$, $t \in [-1, 1]$, де $\sigma = \pm 1$ – стала.

§5.3. 5.3.3. а) <u>І спосіб.</u> Користуючись задачами 5.3.2 і 5.2.8, показати, що для функції $x(t) = 2^n t^n$, $t \in [-1, 1]$, її пнн в $\mathbf{P}_{n-1}$ у просторі $L_1[-1, 1]$ – це $p^* := x - U_n$. <u>ІІ спосіб.</u> Для довільного многочлена $p(t) = 2^n t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ маємо, що (коментарі див. нижче)

$$\|p\|_1 \geq \int_{-1}^{1} p(t)\, sign U_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} 2^n t^n\, sign U_n(t)\, dt + \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right) sign U_n(t)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2^n t^n\, sign U_n(t)\, dt + \int_{-1}^{1} \left(U_n(t) - 2^n t^n\right) sign U_n(t)\, dt = \|U_n\|_1;$$

передостання рівність має місце, бо другий доданок її лівої частини рівний 0 за задачею 5.2.7 і другий доданок її правої частини рівний 0 за задачами 5.3.1.б) і 5.2.7; остання рівність випливає з лінійності інтеграла.

б) I спосіб. Зробити заміну $u = \arccos t$. II спосіб. $\left\| U_n \right\|_1 = \frac{1}{n+1}\int_{-1}^{1}\left| T'_{n+1}\left(t\right)\right| dt = \frac{1}{n+1} V\left(T_{n+1}, \left[-1, 1\right]\right)$; оскільки поліном T_{n+1} має на $\left[-1, 1\right]$ $n+1$ нуль і кожному його нулю відповідає проміжок монотонності, на якому поліном набуває значень від -1 до 1 (або навпаки), то таких проміжків маємо $n+1$, тому за адитивністю варіації $\left\| U_n \right\|_1 = \frac{1}{n+1} 2\left(n+1\right) = 2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.
2. К. И. Бабенко. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – Гл. 3.
3. В. И. Бердышев, Л. В. Петрак. Теория приближения, сжатие численной информации, приложения. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
4. Р. С. Гутер, Л. Д. Кудрявцев, Б. М. Левитан. Элементы теории функций / Серия Справочная математическая библиотека. – М.: ГИФМЛ, 1963. – Гл. 2.
5. И. К. Даугавет. Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
6. В. К. Дзядык. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977.
7. В. И. Иванов. Введение в теорию приближений. – Тула: ТулГУ, 1999.
8. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976.
9. Н. П. Корнейчук. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987.
10. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – К.: Наукова думка, 1992.
11. П. П. Коровкин. Теория приближений и линейные операторы. – М.: ГИФМЛ, 1959.
12. Ж.-П. Лоран. Оптимизация и аппроксимация. – М.: Мир, 1975.
13. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
14. П. К. Суетин. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976.
15. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1960.
16. В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближения. – М.: Изд-во МГУ, 1976.
17. І. О. Шевчук, А. В. Примак. Теорія наближень. Навчальний посібник. – Сайт мех.-мат. ф-ту КНУ ім. Тараса Шевченка: www.mechmat.univ.kiev.ua/u/publications.
18. И. А. Шевчук. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наукова думка, 1992.