

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І.О. Парасюк

**ВСТУП ДО ЯКІСНОЇ ТЕОРІЇ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2005

Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь/ І.О. Парасюк– К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с.

Запропонований посібник знайомить читача з основами якісної теорії диференціальних рівнянь. Ця теорія була створена для того, щоб описувати властивості розв'язків, не знаходячи їхнього явного вигляду. У наш час вона широко застосовується при дослідженні багатьох диференціальних моделей реальних процесів і явищ, які є предметом вивчення таких наук, як фізика, хімія, біологія, медицина, економіка, техніка . . .

При написанні посібника використано конспект лекцій семестрового спеціального курсу, який автор впродовж кількох років читав на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів, науково-педагогічних працівників.

Рецензенти

Доктор фіз.-мат. наук В.І. Ткаченко

Доктор фіз.-мат. наук О.М. Станжицький

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
11 жовтня 2004 р.

Зміст

1. Непродовжувані розв'язки систем диференціальних рівнянь	4
2. Диференціальні нерівності та теореми єдиності	6
2.1. Диференціальна нерівність	6
2.2. Теорема єдиності	7
2.3. Інтегральні нерівності	9
3. Автономні системи, векторні поля, потоки	11
3.1. Основні поняття	11
3.2. Дія дифеоморфізмів на векторні поля. Спряження потоків	14
3.3. Випрямлення траєкторій в околі звичайної точки	16
4. Топологічна еквівалентність потоків	19
4.1. Топологічна еквівалентність і функції Ляпунова	19
4.2. Топологічна орбітальна еквівалентність	26
5. Окіл особливої точки двовимірної системи	27
5.1. Загальна теорія	28
5.2. Випадок невідродженої лінійної частини	33
6. Індекс Пуанкаре	42
6.1. Індекс векторного поля відносно замкненої кривої	42
6.2. Індекс Пуанкаре ізольованої особливої точки	46
6.3. Обчислення індексу основних типів особливих точок	48
7. Граничні множини траєкторій	50
7.1. Цикли. Періодичні точки потоку	52
7.2. Теорія Пуанкаре – Бендіксона	54
7.3. Граничні цикли	59
7.4. Збурення граничних циклів	61
7.5. Структурно-стійкі системи	63
7.6. Топологічний портрет системи на площині	63
8. Окіл циклу автономної системи	65
8.1. Метод перерізу Пуанкаре	66
8.2. Лінеаризація відображення Пуанкаре	67
8.3. Уведення локальних координат в околі циклу	71
8.4. Системи Морса – Смейла	74
9. Теорія збурень періодичних розв'язків	76
9.1. Постановка задачі Пуанкаре	76
9.2. Задача Пуанкаре в некритичному випадку	77
9.3. Періодичні розв'язки неавтономних періодичних систем	78
9.4. Періодичні розв'язки лінійних періодичних систем	79
9.5. Задача Пуанкаре для періодичних систем	83

1. Непродовжувані розв'язки систем диференціальних рівнянь

В області $D \subseteq \mathbf{R}^{1+n}$ розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C(D \mapsto \mathbf{R}^n). \quad (1.1)$$

Теорема Пеано [10, с. 384] встановлює умови існування хоча б одного локального розв'язку системи (1.1), графік якого проходить через задану точку області D . Теорема Пікара [10, с. 392] гарантує не лише існування, але й єдиність такого розв'язку.

Означення 1.1. Розв'язок $x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ системи, називається *продовжуваним вправо*, якщо існує розв'язок $\tilde{x}(t)$, $t \in (\alpha, \tilde{\beta})$, де $\tilde{\beta} > \beta$, який збігається з $x(t)$ на інтервалі (α, β) . При цьому $\tilde{x}(t)$ називається *продовженням розв'язку $x(t)$ вправо* на інтервал $(\alpha, \tilde{\beta})$. Розв'язок, для якого не існує жодного продовження вправо, називається *непродовжуваним вправо*.

Аналогічно можна дати означення продовження розв'язку вліво та непродовжуваного розв'язку вліво.

Означення 1.2. Розв'язок, який не має продовження ані вправо, ані вліво, називається *непродовжуваним*.

При побудові продовження розв'язку вправо або вліво використовується операція «приклеювання» [10, с. 73, твердження 1.6].

Твердження 1.1. Для того, щоб розв'язок $x(t)$, визначений на інтервалі (α, β) , був продовжуваним вправо, необхідно й досить, щоб для довільного (хоча б для одного) $t_0 \in (\alpha, \beta)$ існував компакт $K \subset D$ такий, що $(t, x(t)) \in K$ для всіх $t \in [t_0, \beta)$.

Доведення.

Необхідність. Якщо $x(t)$ продовжуваний вправо, то його можна до-визначити до неперервної функції на відрізку $[t_0, \beta]$, де t_0 — довільна точка інтервалу (α, β) . Графік неперервної на відрізку функції сам є компактом.

Достатність. Якщо виконується умова теореми, то існує границя зліва $\lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t) := x_*$, причому $(\beta, x_*) \in K$. Справді, оскільки

$$\begin{aligned} \|x(t') - x(t'')\| &\leq \max_{t \in [t', t'']} \|\dot{x}(t)\| |t' - t''| \leq \\ &\leq \max_{(t, x) \in K} \|f(t, x)\| |t' - t''|, \quad \forall t', t'' \in [t_0, \beta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

то відображення $x(t)$ кожному збіжну, а отже, фундаментальну послідовність переводить у фундаментальну, а тому й збіжну послідовність.

Оскільки $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \beta-0} f(t, x(t)) = f(\beta, x_*)$, то розв'язок $x(t)$ має ліву похідну в точці β . Зрозуміло, що тепер його можна довизначити до розв'язку на $(\alpha, \beta]$, після чого «приклеїти» до нього розв'язок задачі Коші з початковими даними (β, x_*) , визначений при досить малому $h > 0$ на $[\beta, \beta + h]$ \square

Сформулюємо дві основні теореми про продовження розв'язку задачі Коші (див. [10, с. 290, с. 291]).

Теорема 1.1. Для довільної точки $(t_0, x_0) \in D$ і довільного компакта $K \subset D$ існують числа $t_- < t_0$, $t_+ > t_0$ і розв'язок $x(t)$, визначений на $[t_-, t_+]$, такі, що $x(t_0) = x_0$, $(t_{\pm}, x(t_{\pm})) \notin K$.

Теорема 1.2. Для довільної точки $(t_0, x_0) \in D$ існує непродовжуваний розв'язок системи (1.1), який задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$.

Теорема, що наводиться нижче, стверджує, що графік непродовжуваного розв'язку не може безліч разів перетинати межу будь-якого компакта.

Теорема 1.3. Нехай $x(t), t \in I$, — непродовжуваний розв'язок. Тоді для довільного компакта $K \subset D$ існують такі числа $t_- \in I$, $t_+ \in I$, $t_+ > t_-$, що $(t, x(t)) \in D \setminus K$ для всіх $t \in I \setminus [t_-, t_+]$.

Доведення. Нехай $T_+ = \sup\{t \in I\}$. Доведемо існування числа t_+ . Якщо $T_+ = \infty$, то цей факт очевидний, оскільки точки $(t, x(t))$ не лежать у K при всіх досить великих t . Отже, вважаємо, що $T_+ < \infty$. Припустимо, навпаки, що потрібного числа t_+ не існує. Тоді для довільного $\delta > 0$ знайдеться момент $t_\delta \in I$ такий, що

$$T_+ - t_\delta < \delta \quad \text{і} \quad (t_\delta, x(t_\delta)) \in K. \quad (1.3)$$

Покладемо $\Pi_\epsilon(t_0, x_0) = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{1+n} : |t - t_0| \leq \epsilon, \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$ і виберемо $\epsilon > 0$ настільки малим, щоб

$$K_\epsilon := \overline{\bigcup_{(t_0, x_0) \in K} \Pi_\epsilon(t_0, x_0)} \subset D.$$

Згідно з твердженням 1.1 графік непродовжуваного розв'язку не може міститися в компактi, а тому знайдеться таке $t_* \in (t_\delta, T_+)$, що $x(t) \in \Pi_\epsilon(t_\delta, x(t_\delta))$ при $t \in [t_\delta, t_*]$ і $(t_*, x(t_*)) \in \partial \Pi_\epsilon(t_\delta, x(t_\delta))$ (за t_* можна взяти перший після t_δ момент виходу графіка розв'язку на межу компакта $\Pi_\epsilon(t_\delta, x(t_\delta))$). Можемо вважати, що $\delta < \epsilon$. Тоді $t_* - t_\delta < T_+ - t_\delta < \epsilon$, а тому

$$\|x(t_*) - x(t_\delta)\| = \epsilon. \quad (1.4)$$

З іншого боку, з (1.2), (1.3) випливає нерівність

$$\|x(t_*) - x(t_\delta)\| \leq M(K_\epsilon)\delta, \quad \text{де} \quad M(K_\epsilon) = \max_{(t,x) \in K_\epsilon} \|f(t, x)\|.$$

Припустивши додатково, що $\delta < \min(\epsilon, \epsilon/M(K_\epsilon))$, отримаємо протиріччя з (1.4). Отже, t_+ існує. Існування t_- доводимо аналогічно \square

Наслідок 1.1. Нехай $x(t)$, $t \in (T_-, T_+)$ — непродовжуваний розв'язок системи (1.1). Якщо D — обмежена область, то $(t, x(t)) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow T_{\pm}$. Якщо $D = \mathbf{R}^{1+n}$ і $T_+ < \infty$ ($T_- > -\infty$), то $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_+$ (при $t \rightarrow T_-$).

2. Диференціальні нерівності та теореми єдиності

2.1. Диференціальна нерівність

При дослідженні якісних характеристик розв'язків диференціальних рівнянь досить часто доводиться мати справу з диференціальними нерівностями.

Твердження 2.1. Нехай D — область у \mathbf{R}^2 , $\varphi(t, x) \in C(D \mapsto \mathbf{R})$, а $x(\cdot) : J \mapsto \mathbf{R}$ — диференційовна на інтервалі J функція, така що $(t, x(t)) \in D$ для всіх $t \in J$ і

$$\dot{x}(t) < \varphi(t, x(t)), \quad \forall t \in J. \quad (2.1)$$

Нехай далі $y(t)$, $t \in I$, — непродовжуваний розв'язок задачі Коші

$$\dot{y} = \varphi(t, y), \quad y(t_0) = x(t_0) =: x_0, \quad (2.2)$$

де $t_0 \in J$. Тоді

$$x(t) > y(t), \quad \forall t \in I \cap J \cap \{t < t_0\}, \quad (2.3)$$

$$x(t) < y(t), \quad \forall t \in I \cap J \cap \{t > t_0\}. \quad (2.4)$$

Доведення. Покажемо, що виконується нерівність (2.3). Оскільки $\dot{x}(t_0) < \varphi(t_0, x_0) = \dot{y}(t_0)$, то з формул

$$x(t) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0), \quad t \rightarrow t_0,$$

$$y(t) = x_0 + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0), \quad t \rightarrow t_0,$$

впливає, що для досить малого $\delta > 0$ нерівність $x(t) > y(t)$ справджується принаймні на інтервалі $(t_0 - \delta, t_0) \subset I \cap J$, якщо $\delta > 0$ вибрати досить малим. Припустивши, що нерівність (2.3) неправильна, знайдемо таке $t_* \in I \cap J$, $t_* \leq t_0 - \delta$, що $x(t) > y(t)$ для всіх $t \in (t_*, t_0)$, але $x(t_*) = y(t_*) =: x_*$. Оскільки з (2.1) впливає нерівність $\dot{x}(t_*) < \dot{y}(t_*)$, то існує таке досить мале $\sigma > 0$, що $x(t) < y(t)$ для всіх $t \in (t_*, t_* + \sigma)$. Це, однак, неможливо з огляду на те, як було визначено t_* . Нерівність (2.4) доводиться аналогічно \square

Твердження 2.2. Припустимо, що в умовах попереднього твердження замість строгої нерівності (2.1) виконується нестрога:

$$\dot{x}(t) \leq \varphi(t, x(t)), \quad \forall t \in J.$$

Тоді для довільного $t_0 \in J$ існує непродовжуваний розв'язок $y(t)$, $t \in I$, задачі Коші (2.2), який задовольняє нерівності

$$x(t) \geq y(t), \quad t \in I \cap J \cap \{t < t_0\}, \quad (2.5)$$

$$x(t) \leq y(t), \quad t \in I \cap J \cap \{t > t_0\}. \quad (2.6)$$

Доведення. Вибравши числа $a > 0$, $b > 0$ досить малими, впишемо в область D прямокутник $\Pi := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. За теоремою Пеано кожна задача Коші

$$\dot{y} = \varphi(t, y) + 1/n, \quad y(t_0) = x_0,$$

де $n \in \mathbf{N}$, має розв'язок

$$y_n(t), \quad t \in [t_0 - h_n, t_0 + h_n], \quad h := \min(a, b/(M+1/n)), \quad M := \max_{(t,x) \in \Pi} \|\varphi(t, x)\|.$$

Послідовність функцій $\{y_n(t)\}$ визначена, однотайно неперервна й рівномірно обмежена на відрізку $\bar{I}_1 := [t_0 - h_1, t_0 + h_1]$. За твердженням 2.1 кожна функція $y_n(t)$ задовольняє нерівності (2.3), (2.4), якщо в них замінити $y(t)$ на $y_n(t)$, а I на \bar{I}_1 . Виділимо з послідовності $\{y_n(t)\}$ підпослідовність, рівномірно збіжну до деякої функції $y(t)$, $t \in \bar{I}_1$. Остання буде розв'язком задачі Коші (2.2) (доведіть!), який задовольняє нерівності (2.5), (2.6), якщо в них замінити I на \bar{I}_1 .

Зрозуміло, що розв'язок $y(t)$ тепер можна продовжувати як вправо, так і вліво, слідкуючи за тим, щоб він задовольняв потрібні нерівності відносно функції $x(t)$ \square

2.2. Теорема єдиності

Нехай $a(t), b(t) \in C([t_0, t_1] \mapsto \mathbf{R})$ — такі функції, що $b(t) > a(t)$ для всіх $t \in (t_0, t_1)$. Покладемо

$$D := \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t \in (t_0, t_1), a(t) < x < b(t)\},$$

$$\Delta := \{(t, u) \in \mathbf{R}^2 : t \in (t_0, t_1), 0 \leq u < b(t) - a(t)\}.$$

Нехай $f : D \mapsto \mathbf{R}$. Нас цікавитимуть умови, що гарантують єдиність розв'язку рівняння

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.7)$$

графік якого при $t \rightarrow t_0 + 0$ входить у точку $(t_0, x_0) \in \partial D$ під гострим кутом до осі абсцис.

Теорема 2.1. *Нехай функція $f(t, x) \in C(D \mapsto \mathbf{R})$ для кожної пари точок $(t, x_1), (t, x_2) \in D$ задовольняє нерівність*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \omega(t, |x_1 - x_2|),$$

у якій $\omega(t, u) \in C(\Delta \mapsto \mathbf{R}_+)$, $\omega(t, 0) \equiv 0$. Припустимо, що додатково виконується

Умова Ω : єдиним розв'язком $u(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, рівняння $\dot{u} = \omega(t, u)$, який має властивості

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{u(t)}{t - t_0} = 0,$$

є лише тривіальний розв'язок $u \equiv 0$.

Тоді для кожного $\tau \in (t_0, t_1)$ і кожного $\xi_0 \in \mathbf{R}$ рівняння (2.7) має не більше одного розв'язку $x(t)$, $t \in (t_0, \tau]$, для якого існують границі

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \xi_0, \quad (2.8)$$

Доведення. Нехай для деякого $\tau \in (t_0, t_1)$ існує пара розв'язків $x_i(t)$, $t \in (t_0, \tau]$, $i = 1, 2$, з властивістю (2.8), причому $x_2(\tau) > x_1(\tau)$. Тоді можна вважати, що $x_2(t) \geq x_1(t)$ для всіх $t \in (t_0, \tau]$ (поясніть, чому). Поклавши $x(t) := x_2(t) - x_1(t)$, маємо

$$\dot{x}(t) \equiv f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t)) \leq \omega(t, x(t)), \quad t \in (t_0, \tau).$$

Згідно з твердженням 2.2, розв'язок $u(t)$ задачі Коші

$$\dot{u} = \omega(t, u), \quad u(\tau) = x(\tau)$$

можна продовжувати вліво із збереженням нерівності $u(t) \leq x(t)$. При цьому, якщо б знайшлося таке $\tau_0 > t_0$, що $u(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \tau_0 + 0$, то ми б продовжили $u(t)$ на $(t_0, \tau_0]$ тотожним нулем і дістали б протиріччя з умовами теореми. Отже, у процесі продовження $u(t)$ вліво весь час повинна виконуватися нерівність $0 < u(t) \leq x(t)$. Однак у такому разі $u(t)$ можна продовжити на $(t_0, \tau]$, і тоді

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0+0} u(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0+0} (x_2(t) - x_1(t)) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{u(t)}{t - t_0} &\leq \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{x(t)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{x_2(t) - x_0}{t - t_0} - \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{x_1(t) - x_0}{t - t_0} = 0. \end{aligned}$$

Знову отримали протиріччя з умовами теореми \square

Зауваження 2.1. Якщо $a(t_0) < b(t_0)$ і функція $f(t, x)$ неперервна в замкненні $\bar{D} := D \cup \partial D$, то для кожного $x_0 \in [a(t_0), b(t_0)]$ на деякому проміжку $(t_0, \tau) \subseteq (t_0, t_1)$ існує розв'язок рівняння (2.7), який задовольняє першу умову (2.8). Для кожного такого розв'язку друга умова (2.8) виконується автоматично, причому $\xi_0 = f(t_0, x_0)$ визначається однозначно. У цьому випадку теорема 2.1 збігається з теоремою єдиності Камке.

Задача. Показати, що умову Ω задовольняють функції: 1) $\omega(t, u) = u/t$ (критерій Нагумо); 2) $\omega(t, u) = \varphi(t)\psi(u)$, де функції $\varphi(t) \in C((t_0, t_1) \mapsto (0, \infty))$ та $\psi(u) \in C([0, \beta] \mapsto [0, \infty))$ (тут $\beta := b(t_1) - a(t_1)$) мають

властивості

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) dt < \infty, \quad \int_0^{\beta} \frac{du}{\psi(u)} = \infty$$

(критерій Осгуда).

Зауваження 2.2. З теоремами єдиності для систем диференціальних рівнянь можна познайомитися в [11].

2.3. Інтегральні нерівності

Нехай в області $D \subset \mathbf{R}^{(1+n)}$ задано дві системи диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = F(t, y) \quad (2.9)$$

та

$$\dot{z} = F(t, z) + \varphi(t, z), \quad (2.10)$$

де $F, \varphi \in C(D \mapsto \mathbf{R}^n)$. Другу з цих систем будемо трактувати як збурення першої. У багатьох випадках важливо вміти оцінювати відхилення між їхніми розв'язками.

Нехай $y(t), t \in [t_0, T]$, — розв'язок системи (2.9), а $z(t), t \in [t_0, T]$, — системи (2.10). Тоді, поклавши $y_0 := y(t_0), z_0 := z(t_0)$, матимемо

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds,$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t [F(s, z(s)) + \varphi(s, z(s))] ds.$$

Віднімемо від першої рівності другу. Тоді для норми різниці зазначених розв'язків дістанемо нерівність

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|\varphi(s, z(s))\| ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \|F(s, y(s)) - F(s, z(s))\| ds. \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що знайдуться функції $a(t) \in C([t_0, T] \mapsto \mathbf{R}_+)$, $g(t) \in C([t_0, T] \mapsto \mathbf{R}_+)$ такі, що

$$\begin{aligned} \|F(t, y) - F(t, z)\| &\leq a(t)\|y - z\| \quad \forall (t, y), (t, z) \in D, \\ \|\varphi(t, z)\| &\leq g(t) \quad \forall (t, z) \in D. \end{aligned}$$

Тоді

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t g(s) ds + \int_{t_0}^t a(s)\|y(s) - z(s)\| ds. \quad (2.11)$$

Дістали так звану інтегральну нерівність відносно невідомої функції $\|y(t) - z(t)\|$.

Таким чином, природно виникає задача: знайти оцінку зверху для невідомої функції $u(t) \in C([t_0, T] \mapsto \mathbf{R})$, коли відомо, що остання задовольняє інтегральну нерівність

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds, \quad t \in [t_0, T], \quad (2.12)$$

у якій $a(t) \in C([t_0, T] \mapsto \mathbf{R}_+)$, $f(t) \in C([t_0, T] \mapsto \mathbf{R})$.

Аби оцінити функцію $u(t)$, застосуємо твердження 2.2. Поклавши $x(t) := \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds$ і домноживши нерівність (2.12) на $a(t)$, дістанемо

$$\dot{x}(t) \leq a(t)f(t) + a(t)x(t).$$

Оскільки $x(t_0) = 0$, то на основі твердження 2.2 дістаємо нерівність $x(t) \leq v(t)$, де $v(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{v} = a(t)v + a(t)f(t), \quad v(t_0) = 0.$$

Знайшовши $v(t)$, матимемо

$$x(t) \leq e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} a(\tau)f(\tau) d\tau,$$

а оскільки $u(t) \leq f(t) + x(t)$, то

$$u(t) \leq f(t) + e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} a(\tau)f(\tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Висновок: при зроблених вище припущеннях з нерівності (2.12) випливає нерівність (2.13).

Припустимо додатково, що $f(t) \in C^1([t_0, T] \mapsto \mathbf{R})$. Тоді інтегруванням за частинами дістанемо

$$u(t) \leq f(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} \dot{f}(\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Зокрема, у випадку, коли $f(t) = c \equiv \text{const}$, маємо відому нерівність

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Нарешті, з (2.11) та (2.14) дістаємо шукану оцінку для відхилення розв'язків систем (2.9) та (2.10):

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} g(\tau) d\tau.$$

Інтегральні нерівності є важливим інструментом встановлення різноманітних апріорних оцінок для розв'язків систем диференціальних рівнянь.

3. Автономні системи, векторні поля, потоки

3.1. Основні поняття

Нехай D — область в просторі \mathbf{R}^n .

Означення 3.1. Відповідність, яка кожній точці $x \in D$ зіставляє вектор $f(x)$, прикладений (віднесений) до цієї точки, називається *векторним полем* в області D .

Як аналітичний об'єкт, векторне поле в D цілком визначається відображенням $f : D \mapsto \mathbf{R}^n$. Якщо $f \in C^r(D \mapsto \mathbf{R}^n)$, то кажуть, що f є векторним полем класу C^r .

Векторне поле f природно породжує в області D автономну систему

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.1)$$

Усюди надалі без додаткових застережень будемо вважати, що f — векторне поле класу C^r , $r \geq 1$. Це припущення гарантує як існування, так і властивість єдиності розв'язку будь-якої задачі Коші для системи (3.1).

З кінематичного погляду розв'язок $x = x(t)$, $t \in I$, системи (3.1) визначає закон руху точки в області D , який має таку характеристичну властивість: у кожен момент часу $t \in I$ вектор миттєвої швидкості $v(t) := \dot{x}(t)$ збігається з вектором, наперед заданим у точці $x(t)$ векторним полем, тобто з вектором $f(x(t))$.

З геометричного погляду розв'язок $x = x(t)$, $t \in I$, системи (3.1) визначає криву Γ . У кожній точці $x \in \Gamma$ відповідний вектор векторного поля $f(x)$ дотикається до цієї кривої.

Для кожного $x_0 \in D$ позначимо через $\chi(t, x_0)$ розв'язок системи (3.1), який задовольняє початкову умову $\chi(0, x_0) = x_0$. Будемо вважати, що $\chi(t, x_0)$ — це непродовжуваний розв'язок, визначений на інтервалі $I(x_0) := (T_-(x_0), T_+(x_0))$, де $0 < T_+(x_0) \leq \infty$, $-\infty \leq T_-(x_0) < 0$.

Означення 3.2. Множини

$$\Gamma(x_0) := \bigcup_{t \in I(x_0)} \chi(t, x_0),$$

$$\Gamma_+(x_0) := \bigcup_{t \in [0, T_+(x_0))} \chi(t, x_0), \quad \Gamma_-(x_0) := \bigcup_{t \in (T_-(x_0), 0]} \chi(t, x_0)$$

називаються відповідно *траєкторією* точки x_0 (фазовою кривою), *додатною півтраєкторією* точки x_0 , *від'ємною півтраєкторією* точки x_0 .

На кожній нетривіальній траєкторії існує природна орієнтація, яка визначається вектором векторного поля в довільній точці цієї траєкторії.

Корисно розглядати $\chi(t, x)$ як функцію сукупності змінних (t, x) . Як відомо, (див., наприклад, [10]), природною областю визначення цієї функції є відкрита зв'язна множина

$$\mathcal{E} := \{(t, x) : x \in D, t \in I(x)\},$$

і при цьому $\chi(t, x) \in C^r(\mathcal{E} \mapsto D)$, якщо f — векторне поле класу C^r .

Означення 3.3. Векторне поле f називається повним, якщо $I(x) = \mathbf{R}$ для кожного $x \in D$.

Зрозуміло, що у випадку повного векторного поля $\mathcal{E} = \mathbf{R} \times D$.

Припустимо, що векторне поле f повне. Коли нас цікавить поведінка індивідуального розв'язку, ми фіксуємо аргумент $x = x_0$ і досліджуємо відображення $\chi(\cdot, x_0) : \mathbf{R} \mapsto D$. Однак, вивчаючи кожен окремо взятий розв'язок, важко отримати загальне уявлення про властивості системи (3.1). Найбільш повну інформацію про цю систему містить у собі сім'я відображень вигляду

$$\chi(t, \cdot) =: g^t : D \mapsto D, \quad (3.2)$$

«занумерованих» дійсними числами $t \in \mathbf{R}$.

Означення 3.4. Сім'я відображень $\{g^t : D \mapsto D\}_{t \in \mathbf{R}}$, визначених формулою (3.2), називається потоком, породженим векторним полем f (системою (3.1)). Сама область D називається при цьому фазовим простором потоку (відповідної автономної системи).

Перелічимо властивості потоку $\{g^t\}$, породженого векторним полем f класу C^r (див. [1]).

1. Відображення $\mathbf{R} \times D \ni (t, x) \mapsto g^t x$ належить класу $C^r(\mathbf{R} \times D \mapsto D)$.
2. Сім'я відображень $\{g^t\}$ утворює однопараметричну абельову групу відносно операції суперпозиції, а саме:
 - a) $g^t \circ g^s = g^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbf{R};$
 - b) $g^0 = \text{Id}.$
3. Для кожного $t \in \mathbf{R}$ відображення $g^t : D \mapsto D$ — дифеоморфізм класу C^r .
4. Для всіх $(t, x) \in \mathbf{R} \times D$ виконується рівність $\frac{\partial}{\partial t} g^t x = f(g^t x)$.

Означення 3.5. Для фіксованого $x \in D$ відображення $\mathbf{R} \ni t \mapsto g^t x \in D$ називається рухом точки x під дією потоку $\{g^t\}$.

Означення 3.6. Точка $x_* \in D$, яка задовольняє умову

$$g^t x_* = x_* \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

називається *нерухомою (стаціонарною) точкою потоку або положенням рівноваги* системи (3.1).

Означення 3.7. Точка x_* , для якої $f(x_*) = 0$, називається *особливою точкою* векторного поля.

Легко бачити, що деяка точка області D є положенням рівноваги системи (3.1) тоді й тільки тоді, коли вона є особливою точкою векторного поля.

Означення 3.8. Додатна (від'ємна) півтраєкторія точки x_0 називається асимптотичною, якщо існує границя $\lim_{t \rightarrow +\infty} g^t x_0$ (існує границя $\lim_{t \rightarrow -\infty} g^t x_0$).

Твердження 3.1. Якщо $x_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} g^t x_0$, то x_* — положення рівноваги.

Доведення. Для довільного t маємо

$$g^t x_* = g^t \lim_{s \rightarrow \infty} g^s x_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} g^{(t+s)} x_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} g^s x_0 = x_* \quad \square$$

Зауваження 3.1. У випадку, коли векторне поле не повне, функція $\chi(t, x)$ визначає *локальний потік*. А саме: для кожної обмеженої області $U \subset \mathbf{R}^n$, замикання якої належить D , існує інтервал $J(U) \ni 0$ такий, що функція $\chi(\cdot, x)$ визначена на $J(U)$ для кожного $x \in U$; таким чином, дістаємо сім'ю відображень $\{g^t\}_{t \in J(U)}$, де $g^t := \chi(t, \cdot)$. Ця сім'я має такі властивості:

1. Відображення $J(U) \times U \ni (t, x) \mapsto g^t x$ належить класу C^r .
2. Сім'я відображень $\{g^t\}$ утворює локальну абельову групу відносно операції суперпозиції, а саме:
 - a) $g^t \circ g^s = g^{t+s} \quad \forall t, s \in J(U) : t + s \in J(U);$ b) $g^0 = \text{Id}$.
3. Для кожного $t \in J(U)$ відображення $g^t : U \mapsto D$ — дифеоморфізм класу C^r .
4. Для всіх $(t, x) \in J(U) \times U$ виконується рівність $\frac{\partial}{\partial t} g^t x = f(g^t x)$.

Нехай \mathcal{U} — множина всіх обмежених областей у \mathbf{R}^n , замикання кожної з яких належить D . Сім'я відображень $\{g^t : U \mapsto D\}_{t \in J(U), U \in \mathcal{U}}$ й утворює локальний потік.

Особливий інтерес з погляду застосування становить випадок, коли векторне поле, можливо, є неповним, але $T_+(x_0) = \infty$ для всіх $x_0 \in D$. Адже в більшості прикладних задач, як правило, цікавляться «майбутнім» еволюційної системи, яка моделюється векторним рівнянням (3.1).

Означення 3.9. Якщо $T_+(x_0) = \infty$ для всіх $x_0 \in D$, то сім'я відображень $\{g^t : D \mapsto D\}_{t \geq 0}$ називається *півпоток*ом.

Зрозуміло, що відображення з півпоток

Зауваження 3.2. Припустимо, що векторне поле f в області D не повне, але ставиться задача дослідити поведінку траєкторій (півтраєкторій) автономної системи в деякому компакт $K \subset D$. Позначимо через $K + \epsilon$ об'єднання ϵ -околів усіх точок множини K . Skorистаємося тим, що для досить малого $\epsilon > 0$ має місце включення $K + 2\epsilon \subset D$ та існує функція $\varphi(x) \in C^\infty(D \rightarrow \mathbf{R})$ з такими властивостями: 1) $\varphi(x)$ тотожно-рівна одиниці на $K + \epsilon$; 2) $\varphi(x)$ тотожно-рівна 0 в $D \setminus (K + 2\epsilon)$. Тоді модифіковане векторне поле $\varphi \cdot f$ — повне в D , а локальні потоки полів f та $\varphi \cdot f$ у $K + \epsilon$ збігаються. Отже надалі, досліджуючи поведінку автономної системи в компакт, без обмеження загальності міркувань будемо припускати, що ця система породжує потік.

Зауваження 3.3. Дослідження властивостей траєкторій автономних систем як геометричних об'єктів — завдання *якісної теорії диференціальних рівнянь*. Властивості потоків і рухів переважно вивчає *теорія динамічних систем*. Динамічна система в широкому розумінні — це пара $(M, \{F_g\}_{g \in \mathcal{G}})$, де M — деяка множина (фазовий простір), \mathcal{G} — група (або навіть півгрупа), кожному елементу g якої поставлено у відповідність відображення $F_g : M \mapsto M$ так, що $F_{g_1 \cdot g_2} = F_{g_1} \circ F_{g_2}$ для будь-яких $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. Зрозуміло, що потік є частинним випадком динамічної системи. Значний інтерес становлять так звані *топологічні динамічні системи*.

Важливим окремим випадком топологічної динамічної системи є *топологічний (неперервний) потік* $\{g^t : W \mapsto W\}_{t \in \mathbf{R}}$, де W — топологічний простір, $\mathbf{R} \times W \ni (t, x) \mapsto g^t x \in W$ — неперервне відображення таке, що $\mathbf{R} \ni t \mapsto g^t$ — гомоморфізм групи \mathbf{R} (відносно операції додавання) у групу гомеоморфізмів простору W (відносно операції суперпозиції).

3.2. Дія дифеоморфізмів на векторні поля. Спряження потоків

Нехай в області D задано векторне поле f . Дифеоморфізм $\varphi : D \mapsto G =: \varphi(D)$ за допомогою своєї похідної φ' відображає кожен вектор $f(x)$, $x \in D$, у вектор $\varphi'(x)f(x)$, прикладений до точки $\varphi(x)$. Оскільки будь-яку точку $y \in G$ можна подати у вигляді $y = \varphi(x)$, то виникає відповідність

$$G \ni y \mapsto \varphi'(\varphi^{-1}(y))f(\varphi^{-1}(y)),$$

яка визначає векторне поле в області G .

Означення 3.10. Векторне поле, яке кожній точці $y \in G$ зіставляє вектор $\varphi'(\varphi^{-1}(y))f(\varphi^{-1}(y))$, прикладений до цієї точки, називається обра-

зом векторного поля f при дії дифеоморфізму φ і скорочено позначається через $\varphi'f$.

Диференціальна топологія класифікує свої об'єкти дослідження з точністю до диференційовної еквівалентності; при цьому два об'єкти вважаються диференційовно-еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм, який переводить один з них в інший. На основі цих міркувань маємо таке означення.

Означення 3.11. Векторні поля f_1 у D_1 і f_2 в D_2 називаються C^r -еквівалентними, якщо існує такий дифеоморфізм $\varphi : D_1 \mapsto D_2$ класу C^r , що $f_2 = \varphi'f_1$.

Опишемо тепер конструкцію породження нового векторного поля за допомогою *локального дифеоморфізму*. Нехай $F : G \mapsto D$ — локальний дифеоморфізм області G на область D . Характеристична властивість цього відображення — невиродженість його похідної $F'(y)$ у кожній точці $y \in D$.

Виконаємо в системі (3.1) локально взаємно однозначну заміну змінних

$$x = F(y). \quad (3.3)$$

Дістанемо

$$\frac{d}{dt}F(y) = f(F(y)) \Leftrightarrow F'(y)\dot{y} = f(F(y)),$$

звідки

$$\dot{y} = [F'(y)]^{-1}f(F(y)). \quad (3.4)$$

Таким чином, локальний дифеоморфізм F породжує в області G векторне поле, задане відповідністю

$$y \mapsto [F'(y)]^{-1}f(F(y)).$$

Зауважимо, що коли F — дифеоморфізм, то $F^{-1}(F(y)) = y$, звідки $(F^{-1}(z))'|_{z=F(y)} F'(y) = \text{Id}$, і

$$(F^{-1}(z))'|_{z=F(y)} = [F'(y)]^{-1}.$$

Тепер зрозуміло, що в цьому випадку векторне поле $[F'(y)]^{-1}f(F(y))$ можна трактувати як образ $(F^{-1})'f$ поля f при дії дифеоморфізму $\varphi = F^{-1}$.

Одночасно ми дістали закон, відповідно до якого відбувається перетворення векторного поля при переході до нових координат за формулою (3.3), а саме:

$$f(x) \mapsto \tilde{f}(y) := [F'(y)]^{-1}f(F(y)).$$

Як пов'язані між собою потоки $\{g^t\}$ та $\{\tilde{g}^t\}$ векторних полів f та $\tilde{f}(y)$? Очевидно, що

$$F \circ \tilde{g}^t = g^t \circ F,$$

тобто маємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{F} & D \\
 \tilde{g}^t \downarrow & & \downarrow g^t \\
 G & \xrightarrow{F} & D.
 \end{array}$$

Зокрема, якщо $F : G \mapsto D$ — дифеоморфізм, то

$$\tilde{g}^t = F^{-1} \circ g^t \circ F. \quad (3.5)$$

Означення 3.12. Потік $\{\tilde{g}^t := F^{-1} \circ g^t \circ F\}$ називають спряженим до потоку $\{g^t\}$ за допомогою дифеоморфізму F . Якщо F — C^r -дифеоморфізм, то спряжені за його допомогою потоки називаються C^r -еквівалентними.

Зауваження 3.4. У топологічній динаміці спряження потоків здійснюють за допомогою гомеоморфізмів, тобто у формулі (3.5) для спряженого потоку відображення F — гомеоморфізм. Спряжені за допомогою гомеоморфізму потоки називаються *топологічно еквівалентними*.

Задача. Перевірити, що коли $F : G \mapsto D$ — гомеоморфізм, то сім'я відображень $\{\tilde{g}^t\}$, задана формулою (3.5), дійсно є топологічним потоком.

Один з найбільш ефективних підходів у теорії автономних систем використовує таку ідею: замість безпосереднього дослідження автономної системи (3.1) шукають (локальний) дифеоморфізм $F : G \mapsto D$, так щоб перетворена система (3.4) мала в певному сенсі максимально простий вигляд.

3.3. Випрямлення траєкторій в околі звичайної точки

Проаналізуємо поведінку траєкторій автономної системи

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) \in C^r(D \mapsto \mathbf{R}^n) \quad (3.6)$$

в околі звичайної (не особливої) точки $x_0 \in D$ векторного поля f .

Зрозуміло, що в досить близьких точках x', x'' вектори $f(x')$ та $f(x'')$ мало відрізняються один від одного як за напрямом, так і за нормою. Отже, природно висловити припущення, що існує дифеоморфізм досить малого околу точки x_0 , який локально перетворює векторне поле f на так зване *випрямлене векторне поле*. Останнє характеризується тим, що будь-які два його вектори паралельні й мають однакову довжину.

Обґрунтуємо висловлене припущення.

Теорема 3.1. Нехай $x_0 \in D$ — звичайна точка векторного поля f . Тоді існує окіл $B(0)$ точки 0 у \mathbf{R}^n і дифеоморфізм $F : B \mapsto D$ з такими властивостями: 1) $F(0) = x_0$; 2) після заміни змінних $x = F(y)$, де $y = (y_1, \dots, y_n)$, система (3.6) набуває вигляду

$$\dot{y} = e,$$

де e — сталий вектор одиничної довжини.

Доведення. Викладемо спочатку ідею побудови дифеоморфізму F . Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що $x_0 = 0$. Нехай вектори a_2, \dots, a_n доповнюють вектор $a_1 := f(0)$ до базису в \mathbf{R}^n . Покладемо $\xi(y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=2}^n y_i a_i$. Тоді $x = \xi(y_2, \dots, y_n)$ — параметричне рівняння гіперплощини Π , натягнутої на вектори a_2, \dots, a_n . Інтуїтивно зрозуміло, що кожному x з досить малого околу початку координат можна з'єднати ділянкою фазової кривої $\Gamma(x)$ системи (3.6) з певною точкою гіперплощини Π (рис. 3.1). Однак тоді в зазначеному околі можна ввести криволінійні координати $y = (y_1, \dots, y_n)$ так, щоб набір $y_2(x), \dots, y_n(x)$ визначав точку гіперплощини Π , в яку «проекується» точка x уздовж $\Gamma(x)$, а відповідне значення першої координати $y_1(x)$ дорівнювало часу, за який з гіперплощини можна потрапити в x уздовж $\Gamma(x)$. Неважко здогадатись, що коли точка рухається вдовж фазової кривої під дією потоку системи (3.6), то її координати y_2, \dots, y_n змінюватись не будуть, а швидкість зміни координати y_1 буде дорівнювати 1.

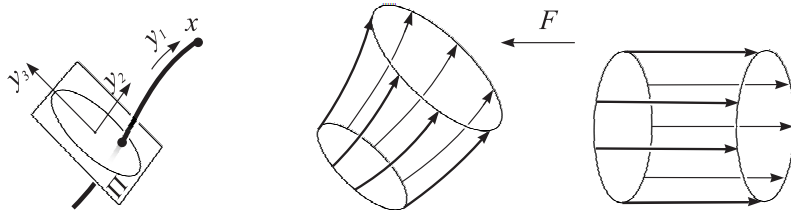


Рис. 3.1.

Формалізуємо тепер наведені вище міркування. Уведемо відображення

$$F(y) := g^{y_1} \xi(y_2, \dots, y_n).$$

Його область визначення містить деякий окіл $B(0)$ точки $y = 0$, причому $F(0) = 0$. Крім того, $F(y) \in C^r(B(0) \mapsto D)$. Покажемо, що матриця Якобі цього відображення в точці 0 не вироджена. Дійсно, оскільки

$$F'_{y_1}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t 0 = f(0), \quad F'_{y_i}(0) = \xi'_{y_i}(0) = a_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

то стовпцями зазначеної матриці є лінійно незалежні вектори a_1, \dots, a_n . Отже, $F(y)$ дифеоморфно відображає деякий окіл $B(0)$ точки 0 на окіл точки $x = 0$.

Тепер зробимо в системі (3.6) заміну змінних $x = F(y)$, $y \in B(0)$. Маємо

$$F'(y)\dot{y} = f(F(y)) \quad \Leftrightarrow \quad f(F(y))\dot{y}_1 + \sum_{i=2}^n F'_{y_i}(y)\dot{y}_i = f(F(y)).$$

Будемо розглядати останнє співвідношення як лінійну неоднорідну систему відносно компонент похідної \dot{y} . Оскільки $\det F'(y) \neq 0$, то ця система має

єдиний очевидний розв'язок

$$\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = 0, \dots, \dot{y}_n = 0.$$

Отже, $e = (1, 0, \dots, 0)$ \square

Зауваження 3.5. У доведенні теореми 3.1 замість гіперплощини Π можна було взяти довільну гіперповерхню, яка проходить через точку x_0 і не дотикається в цій точці вектора $f(x_0)$. Таку гіперповерхню можна задати рівнянням $x = \xi(y_2, \dots, y_n)$, в якому вектор-функція ξ — неперервно диференційовна в деякому околі початку координат простору \mathbf{R}^{n-1} , $\xi(0) = x_0$, а вектори $\xi'_{y_2}(0), \dots, \xi'_{y_n}(0)$ разом із $f(x_0)$ утворюють базис простору \mathbf{R}^n .

Спираючись на це зауваження, можна одержати нелокальне узагальнення теореми 3.1.

Означення 3.13. Гіперповерхня $S \subset D$ називається *січною* для векторного поля f , якщо в кожній точці $x \in S$ вектор $f(x)$ не дотикається до S .

Теорема 3.2. Нехай для векторного поля f існує січна S , задана в параметричному вигляді

$$S: x = \xi(u), \quad u := (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U,$$

де U — область у \mathbf{R}^{n-1} , $\xi(u) \in C^r(U \mapsto D)$ — взаємно однозначне відображення, таке що $\text{rank}[\xi'_{u_1}(u), \dots, \xi'_{u_{n-1}}(u)] \equiv n - 1$. Припустимо також, що серед фазових кривих системи (3.6), які перетинають S , немає замкнених і кожна з цих кривих перетинає S лише в одній точці. Тоді існує область $G \subset \mathbf{R}^n$ і дифеоморфізм $F: G \mapsto D$ з такими властивостями: 1) область значень цього дифеоморфізму $F(G)$ збігається з об'єднанням усіх фазових кривих, що проходять через S ; 2) після заміни змінних $x = F(y)$, $y \in G$, система (3.6) набуває вигляду

$$\dot{y} = e,$$

де e — сталий вектор одиничної довжини.

Доведення. Для компонент вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ уведемо позначення $y_1 = s$, $y_i = u_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$, і покладемо

$$F(y) := g^s \xi(u).$$

Через G позначимо природну область визначення $F(y)$, а саме:

$$G = \{(s, u) \in \mathbf{R}^n : u \in U, s \in I(\xi(u))\},$$

де $I(x)$ — максимальний інтервал продовжуваності розв'язку $g^t x$. Покажемо, що похідна $F'(y)$ не вироджена в кожній точці $y \in G$.

Оскільки $\text{rank}(g^s x)'_x = n$ (адже $g^s: D \mapsto D$ — дифеоморфізм), а вектори

$$f(\xi(u)), \xi'_{u_1}(u), \dots, \xi'_{u_{n-1}}(u)$$

— лінійно незалежні¹, то таку ж властивість будуть мати й вектори

$$(g^s \xi(u))'_s = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^{s+t} \xi(u) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^s \circ g^t \xi(u) = (g^s x)'_x \Big|_{x=\xi(u)} f(\xi(u)),$$

$$(g^s \xi(u))'_{u_i} = (g^s x)'_x \Big|_{x=\xi(u)} \xi'_{u_i}(u), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

які є стовпцями матриці Якобі відображення F . Звідси випливає, що F — локальний дифеоморфізм.

Покажемо, що це відображення взаємно однозначне. Припустимо, що існують точки $y' = (s', u')$, $y'' = (s'', u'')$ такі, що $F(y') = F(y'')$, тобто $g^{s'} \xi(u') = g^{s''} \xi(u'')$. Тоді $g^{s'-s''} \xi(u') = \xi(u'')$. Оскільки за умовою з $g^t x \in S$, $x \in S$ випливає $t = 0$, то $s' = s''$, а тоді $u' = u''$, оскільки відображення ξ взаємно однозначне. Таким чином, доведено, що F — дифеоморфізм класу C^r .

Властивість 2) відображення F доводиться так само, як і в теоремі 3.1□

4. Топологічна еквівалентність потоків

Нагадаємо означення топологічної еквівалентності потоків.

Означення 4.1. Два потоки $\{g_i^t : W_i \mapsto W_i\}_{t \in \mathbf{R}}$, $i = 1, 2$, де W_1, W_2 — пара топологічних просторів, називаються топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $h : W_1 \mapsto W_2$ такий, що

$$g_1^t = h^{-1} \circ g_2^t \circ h.$$

Проблема топологічної класифікації потоків автономних систем у загальному випадку є дуже складною. Знайомство з методами її розв'язання природно розпочати із систем, які характеризуються досить простою поведінкою траєкторій. Показовими з цього погляду є лінійні системи, а також системи з єдиним положенням рівноваги, яке притягує до себе всі інші траєкторії, коли $t \rightarrow \infty$ або коли $t \rightarrow -\infty$. Важливим інструментом аналізу таких систем є додатно-визначені функції.

4.1. Топологічна еквівалентність і функції Ляпунова

Нехай $D \subseteq \mathbf{R}^n$ — область у \mathbf{R}^n , яка містить початок координат, r — таке число, що $B_r(0) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < r\} \subset D$.

Означення 4.2. Функцію $V(x) \in C(D \mapsto \mathbf{R}_+)$ будемо називати додатно-визначеною в D , якщо $V(0) = 0$ і $\inf_{x \in D \setminus B_\delta(0)} V(x) > 0$ для кожного $\delta \in (0, r)$.

¹Вектори $\xi'_{u_1}(u), \dots, \xi'_{u_{n-1}}(u)$ утворюють базис дотичної гіперплощини до S у точці $\xi(u)$.

Наведене означення дещо відрізняється від загальноприйнятого в теорії стійкості.

Означення 4.3. Похідною функції $V(x) \in C^1(D \mapsto \mathbf{R})$ згідно із системою

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

де $f(x) \in C(D \mapsto \mathbf{R}^n)$, називається функція

$$\dot{V}(x) := \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle.$$

Справджується таке важливе допоміжне твердження.

Лема 4.1. Нехай система (4.1), де $f(x) \in C^1(D \mapsto \mathbf{R}^n)$, породжує потік $\{g^t\}$ та існує додатно-визначена функція $V(x) \in C^1(D \mapsto \mathbf{R}_+)$, похідна якої згідно із системою (4.1) теж додатно-визначена. Уведемо множину

$$\mathcal{M} := \{x \in D : V(x) = 1\}.$$

Стверджується, що відображення

$$F : \mathbf{R} \times \mathcal{M} \ni (s, y) \mapsto g^s y \in D$$

визначає дифеоморфізм $\mathbf{R} \times \mathcal{M}$ на $D \setminus \{0\}$, а обернене відображення має вигляд

$$F^{-1} : D \setminus \{0\} \mapsto \mathbf{R} \times \mathcal{M} : x \mapsto (-s(x), g^{s(x)}x),$$

причому функція $s(x) \in C^1(D \setminus \{0\} \mapsto \mathbf{R})$ має такі властивості:

$$s(g^t x) = s(x) - t, \quad \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \infty.$$

Доведення. Доведемо, що $\mathcal{M} \neq \emptyset$, а F — взаємно однозначно відображає $\mathbf{R} \times \mathcal{M}$ на $D \setminus \{0\}$.

Для кожного фіксованого $x \in D$ розглянемо функцію $v(t) := V(g^t x)$. Оскільки

$$\dot{v}(t) = \langle \text{grad } V(g^t x), f(g^t x) \rangle = \dot{V}(g^t x) \geq 0,$$

то $v(t)$ неспадна. Звідси, зокрема, одразу випливає, що початок координат — нерухома точка потоку $\{g^t\}$, або, що те саме, $f(0) = 0$. Справді, оскільки $V(g^0 0) = 0$, і $V(g^t 0)$ не спадає, то

$$V(g^t 0) \equiv 0 \quad \forall t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g^t 0 = 0 \quad \forall t \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{d}{dt} g^t 0 = \lim_{t \rightarrow -0} f(g^t 0) = f(0) = 0.$$

Нехай тепер $x \neq 0$. Тоді $g^t x \neq 0$ для всіх t , а функція $v(t)$ строго монотонно зростає. Покажемо, що вона відображає дійсну пряму на піввісь $(0, \infty)$.

Існують границі

$$\alpha := \lim_{t \rightarrow -\infty} v(t), \quad \omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t).$$

Якщо припустити, що $\alpha > 0$, то скориставшись додатною визначеністю $V(x)$ і виходячи із супротивного, легко довести існування такого числа

$\beta > 0$, що $\|g^t x\| > \beta$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Однак тоді для деякого додатного $\gamma > 0$ виконується нерівність $\dot{v}(t) > \gamma$, зінтегрувавши яку дістанемо

$$v(0) - v(t) > -\gamma t \quad \forall t < 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) < \gamma t + v(0) \quad \forall t < 0,$$

а це суперечить припущенню про додатність α . Таким чином, $\alpha = 0$. З наведених міркувань одночасно випливає, що $\omega = \infty$.

Тепер можна стверджувати, що для кожного $x \in D \setminus \{0\}$ область значень функції $t \rightarrow V(g^t x)$, яка строго зростає, є піввісь $(0, \infty)$. Тому існує єдине значення $t = s(x)$ таке, що $V(g^{s(x)} x) = 1$. Це означає, що $y(x) := g^{s(x)} x \in \mathcal{M} \neq \emptyset$. Однак тоді $g^{-s(x)} \circ y(x) = x$, тобто $F(-s(x), y(x)) = x$. Отже, областю значень відображення $F \in D \setminus \{0\}$, а точка $(-s(x), g^{s(x)} x)$ належить прообразу точки x .

Далі, припустивши, що існують точки $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in \mathbf{R} \times \mathcal{M}$ такі, що $F(s_1, y_1) = F(s_2, y_2)$, будемо мати

$$g^{s_1 - s_2} y_1 = y_2 \quad \Rightarrow \quad V(g^{s_1 - s_2} y_1) = V(y_2) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$s_1 = s_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2.$$

Отже, відображення F — взаємно однозначне, причому $F^{-1}(x) = (-s(x), g^{s(x)} x)$.

З додатної визначеності $\dot{V}(x)$ випливає, що в точках множини \mathcal{M} градієнт $V(x)$ не обертається в нуль. Тому ця множина є гіперповерхнею в \mathbf{R}^n . Переконаємося, що відображення F має невідроджену похідну. Для цього зауважимо, що кожен вектор (\dot{s}, \dot{y}) , дотичний до $\mathbf{R} \times \mathcal{M}$ у точці (s, y) , похідна відображення F переводить у вектор

$$\begin{aligned} F'_s(s, y)\dot{s} + F'_y(s, y)\dot{y} &= \frac{\partial}{\partial s} g^s y \dot{s} + \frac{\partial}{\partial y} g^s y \dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g^{s+t} x \dot{s} + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=y} g^s x \dot{y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g^s g^t y \dot{s} + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=y} g^s x \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} g^s x \Big|_{x=y} (f(y)\dot{s} + \dot{y}). \end{aligned}$$

Цей вектор ненульовий, якщо (\dot{s}, \dot{y}) ненульовий. Справді, оскільки $\langle \text{grad } V(y), f(y) \rangle > 0$, то вектор $f(y)$ не дотикається до \mathcal{M} . Тому вектори $f(y)$ та \dot{y} — лінійно незалежні, і як наслідок, $f(y)\dot{s} + \dot{y} \neq 0$, якщо $(\dot{s}, \dot{y}) \neq 0$. Це означає, що відображення F має невідроджену похідну. Оскільки F взаємно однозначне, то воно — дифеоморфізм.

Зауважимо, що для точки $g^t x$ значення $s(g^t x)$ однозначно визначається умовою $g^{s(g^t x)} \circ g^t x \in \mathcal{M}$. Проте і $g^{s(x)-t} \circ g^t x = g^{s(x)} x \in \mathcal{M}$. Тому $s(g^t x) = s(x) - t$.

Нарешті, доведемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \infty$. Оскільки для всіх досить малих за нормою x маємо $V(x) < 1$, а $V(g^{s(x)} x) = 1$, то для таких x $s(x) > 0$. Припустимо, навпаки, що існує послідовність $x_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для якої послідовність $s(x_k)$ обмежена зверху. Існує збіжна підпослідовність $s(x_{k_j}) \rightarrow s_* \in (0, \infty)$. Однак тоді, з одного боку, $V(g^{s_*} 0) = V(0) = 0$, а з

іншого, $1 = \lim_{j \rightarrow \infty} V(g^{s(x_{k_j})} x_{k_j}) = V(g^{s^*} 0)$. Отримали протиріччя \square

Таким чином, якщо автономна система задовольняє умови леми 4.1, то вона має єдине положення рівноваги $x = 0$ і між її нетривіальними траєкторіями та точками множини \mathcal{M} існує взаємно однозначна відповідність (кажуть, що точки множини \mathcal{M} «нумерують» нетривіальні траєкторії системи). Скориставшись цим фактом, доведемо таке твердження.

Теорема 4.1. Нехай у D задано дві системи

$$\dot{x} = f_1(x), \quad \dot{x} = f_2(x),$$

які породжують, відповідно, потоки $\{g_1^t\}$, $\{g_2^t\}$ і для яких існує додатно-визначена функція $V \in C^1(D \mapsto \mathbf{R}_+)$ така, що кожна з функцій $\dot{V}_i(x) := \langle \text{grad } V(x), f_i(x) \rangle$, $i = 1, 2$, — додатно-визначена. Тоді ці дві системи топологічно еквівалентні.

Доведення. Скористаємось лемою 4.1 для побудови дифеоморфізму $h : D \setminus \{0\} \mapsto D \setminus \{0\}$, який траєкторії першої системи переводить у траєкторії другої.

Відповідно до цієї леми для першої системи визначимо відображення $F_1^{-1}(x) = (-s(x), g_1^{s(x)} x)$. Довільна точка $x \in D \setminus \{0\}$ за час $s(x)$ під дією потоку першої системи переходить у точку $y(x) = g_1^{s(x)} x \in \mathcal{M}$. Точку, у яку $y(x)$ переводить потік другої системи за час $-s(x)$, ми й візьмемо за $h(x)$ (рис. 4.1). Таким чином,

$$h(x) := g_2^{-s(x)} \circ g_1^{s(x)} x = F_2 \circ F_1^{-1}(x).$$

Це відображення є дифеоморфізмом і має властивість

$$\begin{aligned} h \circ g_1^t &= g_2^{-s \circ g_1^t} \circ g_1^{s \circ g_1^t} \circ g_1^t = g_2^{t-s} \circ g_1^{s-t} \circ g_1^t = \\ &= g_2^t \circ g_2^{-s} \circ g_1^s \circ g_1^{-t} \circ g_1^t = g_2^t \circ h \end{aligned}$$

для кожного $t \in \mathbf{R}$. Звідси $g_1^t = h^{-1} \circ g_2^t \circ h$ усюди в $D \setminus \{0\}$.

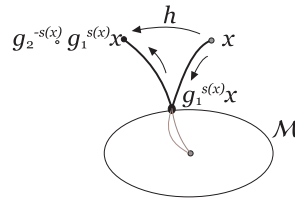


Рис. 4.1.

Тепер покладемо за означенням $h(0) = 0$ і покажемо, що $h(x)$ неперервне в точці 0, тобто, що $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Дійсно, у протилежному випадку

з урахуванням компактності \mathcal{M} знайдеться послідовність $x_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для якої виконується нерівність $V(h(x_k)) = V(g_2^{-s(x_k)} \circ y(x_k)) > \delta$ з деяким додатним δ і при цьому послідовність $y(x_k) := g_1^{s_1(x_k)} x_k \in \mathcal{M}$ збігається до деякої точки $y_* \in \mathcal{M}$. Оскільки $s(x_k) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, то для довільного $T > 0$ існує таке $K = K(T)$, що $s(x_k) > T$ для всіх $k > K$. Однак тоді $V(g_2^{-T} \circ y(x_k)) > V(g_2^{-s(x_k)} \circ y(x_k)) > \delta$, $k > K$. Спрямувавши k до нескінченності, дістанемо нерівність $V(g_2^{-T} y_*) > \delta$, яка повинна виконуватись для всіх $T > 0$. Це, однак, неможливо, оскільки, як було показано в доведенні леми 4.1, $V(g_2^t y_*) \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$ \square

Покажемо, що коли всі власні числа сталої матриці A мають лише додатні дійсні частини, то для лінійної системи

$$\dot{x} = Ax \quad (4.2)$$

завжди існує функція $V(x)$, яка задовольняє умови леми 4.1.

Лема 4.2. Нехай $\operatorname{Re} \lambda(A) > \alpha > 0$. Тоді для кожного $\rho \in (0, 2\alpha)$ існує така додатно-визначена квадратична форма $V(x)$, що

$$\langle \operatorname{grad} V(x), Ax \rangle = \rho V(x) + \|x\|^2. \quad (4.3)$$

Доведення. У лівій частині рівності (4.3) стоїть похідна функції $V(x)$ згідно із системою $\dot{x} = Ax$. З огляду на цей факт подамо (4.3) у вигляді

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} V(e^{As} x) = [\rho V(e^{As} x) + \|e^{As} x\|^2]_{s=0}.$$

Ця рівність має виконуватись для всіх $x \in \mathbf{R}^n$. Оскільки матриця e^{At} невідроджена, то ми прийдемо до еквівалентної рівності, якщо виконаємо заміну $x \mapsto e^{At} x$. Унаслідок цієї дії дістанемо

$$\frac{d}{dt} V(e^{At} x) = \rho V(e^{At} x) + \|e^{At} x\|^2.$$

Тепер зрозуміло, що функція $V(e^{At} x)$ має бути розв'язком рівняння

$$\dot{v} = \rho v + a_x(t), \quad (4.4)$$

де $a_x(t) = \|e^{At} x\|^2$.

З умови теореми випливає, що існує стала $K > 0$ така, що

$$0 < a_x(t) \leq \|e^{At}\|^2 \|x\|^2 \leq K e^{2\alpha t} \|x\|^2 \quad \forall t \leq 0.$$

Покажемо, що для кожного досить малого $\rho > 0$ рівняння (4.4) має розв'язок $v_x(t)$, який прямує до нуля, коли $t \rightarrow -\infty$.

Розв'язок цього рівняння, який при $t = t_0$ обертається у v_0 , визначає формула

$$v = v_0 e^{\rho(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\rho(t-s)} a_x(s) ds.$$

Якщо $\rho \in (0, 2\alpha)$, то в цій формулі можна покласти $t_0 = -\infty$, $v_0 = 0$. Справді, з урахуванням оцінки для $a_x(t)$ при $t_0 < t \leq 0$ маємо

$$\begin{aligned} 0 < \int_{t_0}^t e^{\rho(t-s)} a_x(s) ds &\leq K e^{\rho t} \|x\|^2 \int_{t_0}^t e^{(2\alpha-\rho)s} ds = \\ &= \frac{K}{(2\alpha-\rho)} e^{\rho t} (e^{(2\alpha-\rho)t} - e^{(2\alpha-\rho)t_0}) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Тепер покладемо

$$v_x(t) = \int_{-\infty}^t e^{\rho(t-s)} a_x(s) ds. \quad (4.5)$$

Тоді

$$0 < v_x(t) \leq \frac{K}{(2\alpha-\rho)} e^{2\alpha t} \|x\|^2 \quad \forall t \leq 0.$$

Отже, (4.5) — шуканий розв'язок.

Покажемо тепер, що функція

$$V(x) := v_x(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-\rho s} \|e^{As} x\|^2 ds$$

має всі потрібні властивості.

По-перше, очевидно, що вона є додатно-визначеною квадратичною формою. По-друге, оскільки

$$V(e^{At} x) = \int_{-\infty}^0 e^{-\rho s} \|e^{A(t+s)} x\|^2 ds,$$

то зробивши заміну змінної інтегрування $s \rightarrow s - t$, дістанемо

$$V(e^{At} x) = \int_{-\infty}^t e^{\rho(t-s)} \|e^{As} x\|^2 ds = v_x(t).$$

З урахуванням (4.4) додатно-визначена квадратична форма $V(x)$ задовольняє рівність (4.3) \square

З теореми, яка наводиться нижче, зокрема, випливає, що всі асимптотично стійкі автономні лінійні однорідні системи топологічно еквівалентні.

Теорема 4.2. Якщо $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$ ($\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$), то система (4.2) топологічно еквівалентна системі

$$\dot{x} = x \quad (4.6)$$

(системі $\dot{x} = -x$).

Доведення. Нехай $V(x) = \langle Sx, x \rangle$ — квадратична форма для системи (4.2), існування якої гарантує лема 4.2. Похідна цієї форми згідно із системою $\dot{x} = x$ дорівнює $2\langle Sx, x \rangle = 2V(x)$. Тому системи (4.2) та (4.6) топологічно еквівалентні за теоремою 4.1.

Випадок, коли $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$, зводиться до щойно проаналізованого заміною часу $t \rightarrow -t$ \square

Теорема 4.3. Нехай серед власних чисел $(n \times n)$ -матриці A міститься p чисел з додатною дійсною частиною і $n - p$ — з від'ємною. Тоді система (4.2) топологічно еквівалентна прямому добутку двох систем

$$\begin{cases} \dot{u} = u, \\ \dot{v} = -v, \end{cases}$$

де $\dim u = p$, $\dim v = n - p$.

Доведення. Існує дійсна невідроджена матриця T така, що $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(A_+, A_-)$, де A_+ — $(p \times p)$ -матриця, усі власні числа якої мають лише додатні дійсні частини, а власні числа матриці A_- — лише від'ємні.

Заміна змінних $x = Ty$ перетворює систему (4.2) на прямий добуток двох лінійних систем з матрицями A_+ та A_- відповідно. Тепер до кожної з цих систем можна застосувати теорему 4.2 і побудувати відповідні гомеоморфізми $h_+ : \mathbf{R}^p \mapsto \mathbf{R}^p$, $h_- : \mathbf{R}^{n-p} \mapsto \mathbf{R}^{n-p}$. Тоді, ототожнивши \mathbf{R}^n із $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$, шуканий гомеоморфізм можна подати у вигляді $h = T \circ (h_+ \times h_-)$ \square

У [7] доведено більш загальну теорему.

Теорема 4.4. Дві лінійні системи $\dot{x} = A_j x$, $j = 1, 2$, у просторі \mathbf{R}^n топологічно еквівалентні тоді й тільки тоді, коли матриці A_1 та A_2 мають однако-ву кількість власних чисел з від'ємними дійсними частинами, а обмеження операторів $A_j : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$, $j = 1, 2$, на їхні інваріантні підпростори, які від-повідають суто уявним та нульовим власним числам, лінійно еквівалентні.

Тепер покажемо, що в досить малому околі положення рівноваги непер-рвно диференційовна автономна система топологічно еквівалентна ліне-аризованій системі, якщо остання асимптотично стійка.

Теорема 4.5. Нехай $f(x) \in C^1(B_r(0) \mapsto \mathbf{R}^n)$, $f(0) = 0$ і дійсні частини всіх власних чисел матриці $A := f'(0)$ додатні (від'ємні). Тоді для досить малого $\delta > 0$ система (4.1) в околі $B_\delta(0)$ топологічно еквівалентна системі (4.2), тобто існує гомеоморфізм $h : B_\delta(0) \mapsto h(B_\delta(0))$ такий, що $h(0) = 0$ і сім'я відображень $\{h^{-1} \circ e^{At} \circ h\}$, залежна від параметра t , задає локальний потік системи (4.1) у $B_\delta(0)$.

Доведення. Подамо систему (4.1) у вигляді

$$\dot{x} = Ax + F(x),$$

де $F(x) = f(x) - Ax = o(\|x\|)$, $x \rightarrow 0$. Нехай $V(x)$ — квадратична форма, побудована для системи (4.2) за лемою 4.2. Тоді для деякого $\gamma > 0$ маємо $\langle \text{grad } V(x), Ax \rangle > 2\gamma\|x\|^2$. Тоді число $\delta \in (0, r/2)$ можна вибрати так, щоб при всіх $x \in B_{2\delta}(0)$ виконувалася нерівність $\langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle > \gamma\|x\|^2$.

Уведемо функцію $\eta(\cdot) \in C^1([0, \infty) \mapsto [0, \infty))$ з такими властивостями: 1) $\eta(r) \equiv 1$, коли $r \in [0, \delta]$; 2) $\eta(r)$ монотонно спадає від 1 до нуля на інтервалі $(\delta, 2\delta)$; 3) $\eta(r) \equiv 0$, коли $r \geq 2\delta$. Тепер розглянемо модифіковану систему

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) := Ax + \eta(\|x\|)F(x).$$

Легко переконатися в тому, що $\langle \text{grad } V(x), \tilde{f}(x) \rangle > \gamma\|x\|^2$ для всіх $x \in \mathbf{R}^n$. За теоремою (4.1) модифікована система топологічно еквівалентна лінійній системі (4.2). Залишилося зауважити, що у $B_\delta(0)$ модифікована система збігається із системою (4.1) \square

Теорема 4.5 допускає узагальнення на випадок, коли матриця A не має власних чисел з нульовою дійсною частиною (у такому разі положення рівноваги $x = 0$ називається *гіперболічним*). Однак доведення цього факту значно складніше (див. [11]).

Зауважимо, що у випадку $n > 2$ з топологічної еквівалентності ще не впливає диференційовна еквівалентність, навіть якщо поле f — гладке.

Відзначимо також, що топологічна еквівалентність — це досить грубе відношення еквівалентності. Наприклад, у двовимірному випадку пара лінійних автономних систем з фазовими портретами типу «вузол» і «фокус» відповідно виявляються топологічно еквівалентними. Ця неприємна обставина пов'язана з тим, що гомеоморфізм, який не є дифеоморфізмом, «не відрізняє» ті асимптотичні півтраєкторії, які закінчуються в особливій точці з певним напрямком, від тих, що намотуються на нього у вигляді спіралі.

4.2. Топологічна орбітальна еквівалентність

При математичному моделюванні того чи іншого реального процесу доводиться нехтувати низкою другорядних факторів, які впливають на його перебіг. Тому якщо результатом такого моделювання є деяка автономна система (4.1), то природно поцікавитись питанням: чи можна стверджувати, що якісна поведінка її траєкторій мало зміниться при малому збуренні правої частини $f(x)$. Звичайно, перш ніж намагатися відповісти на поставлене питання, слід математично формалізувати поняття «мала зміна якісної поведінки траєкторій».

Означення 4.4. Дві автономні системи називаються топологічно орбітально-еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм фазового простору першої з них на фазовий простір другої, який кожному природно орієнтовану траєкторію першої системи відображає на природно орієнтовану траєкторію другої.

Зрозуміло, що топологічно еквівалентні системи будуть топологічно орбітально-еквівалентними. Обернене твердження в загальному випадку хибне. Наприклад, системи $\dot{x} = Ax$ та $\dot{x} = \alpha(x)Ax$ у \mathbf{R}^n , де $A : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ — лінійний оператор, а $\alpha(\cdot) \in C^r(\mathbf{R}^n \mapsto (0, \infty))$ — скалярна функція, будуть топологічно орбітально-еквівалентними (відповідний гомеоморфізм — тотожне відображення), однак друга система може взагалі не породжувати глобальний потік.

Означення 4.5. Система (4.1) називається структурно-стійкою або грубою, якщо для кожного $\epsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного збурення $\varphi(x) \in C^1(D \mapsto \mathbf{R}^n)$, яке задовольняє умову

$$\|\varphi(x)\| + \|\varphi'(x)\| < \delta \quad \forall x \in D,$$

системи $\dot{x} = f(x) + \varphi(x)$ та (4.1) топологічно орбітально-еквівалентні, причому гомеоморфізм $h : D \mapsto D$, про який ідеться в означенні 4.4, відрізняється від тотожного менш ніж на ϵ , тобто

$$\|x - h(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in D.$$

Зауважимо, що в сучасній літературі зустрічаються також і дещо інші означення структурної стійкості. Класи структурно-стійких систем буде описано пізніше.

5. Окіл особливої точки двовимірної системи

Нехай (x, y) — координати на площині. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (5.1)$$

для якої початок координат є положенням рівноваги, тобто $P(0, 0) = Q(0, 0)$. За певних додаткових припущень щодо функцій P, Q проаналізуємо поведінку траєкторій системи (5.1) в околі точки $(0, 0)$. У першу чергу нас цікавитиме питання існування асимптотичних півтраєкторій та напрямки їх входження в особливу точку. Буде показано, що у двовимірному випадку саме ці півтраєкторії локально (в околі особливої точки) визначають характер фазового портрету відповідної системи.

5.1. Загальна теорія

Припустимо, що праві частини системи (5.1) задовольняють такі умови:

H1: функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервно диференційовні в околі точки $(0, 0)$;

H2: функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ можна подати у вигляді

$$P(x, y) = H(x, y) + F(x, y), \quad Q(x, y) = K(x, y) + G(x, y),$$

де H та K — однорідні поліноми степеня $m \geq 1$, а F та G задовольняють умови малізми

$$F(x, y) = o(r^m), \quad G(x, y) = o(r^m), \quad \text{коли } r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

При вивченні поведінки півтраєкторій системи (5.1) в околі початку координат зручно користуватися полярними координатами $(\varphi \mid \text{mod } 2\pi, r)$, уведеними за формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Підставивши ці вирази в (5.1), дістанемо

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{pmatrix},$$

звідки, скориставшись тим, що $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, дістанемо

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\ Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести функції

$$\Phi(\varphi) := [xH(x, y) + yK(x, y)]_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi},$$

$$\Psi(\varphi) := [-yH(x, y) + xK(x, y)]_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi},$$

то перетворена система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = r^{m-1}(\Psi(\varphi) + \eta(\varphi, r)), \\ \dot{r} = r^m(\Phi(\varphi) + \xi(\varphi, r)). \end{cases} \quad (5.2)$$

Неважко виписати явний вигляд функцій $\xi(\varphi, r)$, $\eta(\varphi, r)$ і переконатися, що вони:

- 1) неперервно диференційовні на множині $\mathbf{R} \times (0, R)$, де R — деяке додатне число;
- 2) періодичні щодо φ з періодом 2π ;
- 3) прямують до нуля рівномірно щодо $\varphi \in \mathbf{R}$, коли $r \rightarrow +0$.

Надалі вважаємо виконаним ще й таке припущення:

H3: $\Psi(\varphi) \neq 0$.

Лема 5.1. Функція $\Psi(\varphi)$ на відрізку $[0, 2\pi]$ має не більш ніж скінченне число нулів.

Доведення. Будь-який нуль функції $\Psi(\varphi)$, відмінний від $\pi/2$ і $3\pi/2$, є коренем рівняння

$$-H(1, \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi + K(1, \operatorname{tg} \varphi) = 0.$$

Залишилось зауважити, що в лівій частині маємо поліном степеня $m + 1$ відносно $\operatorname{tg} \varphi$ \square

Припустимо, що система (5.1) має асимптотичну півтраєкторію γ , яка закінчується в положенні рівноваги $(0, 0)$. Для визначеності вважаємо, що γ — додатна півтраєкторія. Нехай $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$ — рівняння цієї півтраєкторії в полярних координатах. Зрозуміло, що тоді $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Проаналізуємо у цій ситуації можливі випадки поведінки функції $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

1. Існує скінченна границя $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi_*$. Тоді півтраєкторія γ входить у точку $(0, 0)$ під кутом φ_* (який відкладається від додатної півосі абсцис проти ходу годинникової стрілки).

2. Існує нескінченна границя $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. Тоді γ навивається на початок координат у вигляді спіралі.

3. Функція $\varphi(t)$ не має границі, коли $t \rightarrow \infty$.

Покажемо, що випадок 3 неможливий. Міркуємо від супротивного. Нехай існують принаймні дві необмежені згори монотонні послідовності $\{t_{i,k}\}_{k=1,2,\dots}$, $i = 1, 2$ такі, що $\varphi_1 := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{1,k}) < \varphi_2 := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{2,k})$. Тоді з огляду на лему 5.1 між точками φ_1 і φ_2 знайдеться точка φ_0 , у якій $\Psi(\varphi_0) \neq 0$. Нехай для визначеності $\psi := \Psi(\varphi_0) > 0$. Укажемо тоді таке $T > 0$, що $\varphi(t) > \varphi_0$ для всіх $t > T$. Зрозуміло, така властивість функції $\varphi(t)$ унеможливує існування $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{1,k})$.

Виберемо r_* настільки малим, щоб $|\eta(\varphi, r)| < \psi/2$ для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in (0, r_*)$. Після цього виберемо $T_* > 0$ так, щоб $r(t) < r_*$ для всіх $t > T_*$. Оскільки $\varphi_2 > \varphi_0$, то знайдеться таке $k_* \in \mathbf{N}$, що $\varphi(t_{2,k}) > \varphi_0$ і $t_{2,k} \geq T_*$ для всіх $k \geq k_*$. Покладемо $T = t_{2,k_*}$. Оскільки в точках інтервалу (AB) з кінцями в точках $A(\varphi_0, 0)$, $B(\varphi_0, r_*)$ (рис. 5.1) справджується нерівність $\dot{\varphi} = r^{m-1}(\Psi(\varphi_0) + \eta(r, \varphi_0)) > r^{m-1}\psi/2 > 0$, то рухома точка $(\varphi(t), r(t))$, яка в момент $t = T$ лежить у смугі

$$S^+ := \{(\varphi, r) \in \mathbf{R}^2 : \varphi > \varphi_0, r \in (0, r_*)\},$$

буде знаходитись у ній при всіх $t \geq T$.

Наші міркування можна формалізувати в загальному випадку у вигляді такої конструкції. Нехай f — векторне поле класу C^r в області $D \subset \mathbf{R}^n$, $\{g^t\}$ — породжений цим векторним полем (локальний) потік, $G \subset D$ — підобласть.

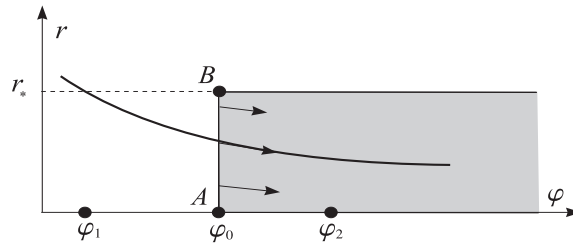


Рис. 5.1.

Означення 5.1. Точка $x_0 \in \partial G$ називається точкою строгого входу в область G відносно векторного поля f (автономної системи $\dot{x} = f(x)$), якщо знайдеться таке $\epsilon > 0$, що $g^t x_0 \in G$ для всіх $t \in (0, \epsilon)$. Кажуть, що в точці строгого входу векторне поле направлено всередину області G . Точка строгого входу відносно векторного поля $(-f)$ називається точкою строгого виходу з області G відносно векторного поля f .

Нехай у деякому околі U точки $x_0 \in \partial G$ межу ∂G можна задати рівнянням $F(x) = 0$, де $F(x) \in C^r(D \mapsto \mathbf{R})$, причому $\{x \in U : F(x) > 0\} \subset G$. Якщо при цьому $\langle \text{grad} F(x_0), f(x_0) \rangle > 0$ (тобто вектор $f(x_0)$ утворює гострий кут з вектором внутрішньої нормалі до ∂G у точці x_0), то x_0 — точка строгого входу.

Легко бачити, що інтервал (AB) складається з точок строгого входу відносно системи (5.2).

Таким чином, доведено таке твердження.

Твердження 5.1. Нехай система (5.1) має асимптотичну півтраєкторію γ , що закінчується в положенні рівноваги $(0, 0)$. Тоді ця півтраєкторія або входить у точку $(0, 0)$ з певним напрямом, або навивається на неї у вигляді спіралі.

На основі міркувань, наведених вище, легко отримати такий результат.

Твердження 5.2. Система (5.1) не має спіральних асимптотичних півтраєкторій, що навиваються на точку $(0, 0)$, якщо функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак на відрізьку $[0, 2\pi]$.

Доведення. Нехай $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$ — рівняння спіральної асимптотичної траєкторії, причому для визначеності вважаємо, що $\varphi(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Якщо б існувало значення $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, для якого $\Psi(\varphi_0) < 0$, то, скориставшись періодичністю функцій $\Psi(\varphi)$ та $\eta(\varphi, r)$ щодо змінної φ , ми б побудували послідовність смуг

$$S_k^- := \{(\varphi, r) \in \mathbf{R}^2 : \varphi < \varphi_0 + 2\pi k, r \in (0, r_*)\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

для кожної з яких інтервал $I_k := \{\varphi_0 + 2\pi k\} \times \{r \in (0, r_*)\} \subset \partial S_k$ складався б з точок строгого входу в S_k . У цій ситуації функція $\varphi(t)$ була б обмеженою зверху \square

Неважко зрозуміти, що існування хоча б однієї траєкторії, яка входить до початку координат з певним напрямом, виключає існування спіральної асимптотичної траєкторії в околі $(0, 0)$.

Покажемо тепер, що можливі напрямки входження асимптотичної півтраєкторії в початок координат визначаються нулями функції $\Psi(\varphi)$.

Твердження 5.3. *Якщо деяка асимптотична півтраєкторія входить у початок координат під кутом φ_* , то $\Psi(\varphi_*) = 0$.*

Доведення. Нехай $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$ — рівняння в полярних координатах півтраєкторії, для якої $\varphi(t) \rightarrow \varphi_*$, $t \rightarrow \infty$ і $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. У вихідних декартових координатах вона задається рівняннями

$$x = x(t) := r(t) \cos \varphi(t), \quad y = y(t) := r(t) \sin \varphi(t).$$

Припустимо спочатку, що

$$[|H(x, y)| + |K(x, y)|]_{x=\cos \varphi_*, y=\sin \varphi_*} \neq 0.$$

Нехай, для визначеності, $|H(x, y)|_{x=\cos \varphi_*, y=\sin \varphi_*} \neq 0$. Тоді за правилом Лопітала існує границя

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K + G}{H + F} \Big|_{x=x(t), y=y(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{H} \Big|_{x=\cos \varphi(t), y=\sin \varphi(t)} = \frac{K(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*)}{H(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*)}. \end{aligned}$$

Однак, з іншого боку, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)/x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin \varphi(t)/\cos \varphi(t) = \frac{\sin \varphi_*}{\cos \varphi_*}$, і, таким чином,

$$\frac{K(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*)}{H(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*)} = \frac{\sin \varphi_*}{\cos \varphi_*} \Rightarrow \Psi(\varphi_*) = 0.$$

Якщо тепер $[|H(x, y)| + |K(x, y)|]_{x=\cos \varphi_*, y=\sin \varphi_*} = 0$, то рівність $\Psi(\varphi_*) = 0$ є очевидною \square

Наслідок 5.1. *Якщо $\Psi(\varphi)$ не має нулів на відрізку $[0, 2\pi]$, то кожна асимптотична півтраєкторія системи (5.1) навівається на початок координат у вигляді спіралі.*

Наведемо достатню умову існування асимптотичних півтраєкторій.

Теорема 5.1. *Якщо для системи (5.1) $\Phi(\varphi) < 0$ для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$, то знайдеться околі початку координат, у кожній точці якого починається достатня асимптотична півтраєкторія цієї системи.*

Доведення. Перейдемо від системи (5.1) до системи (5.2). Нехай $\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \Phi(\varphi) =: -\mu$. Виберемо $r_* > 0$ настільки малим, щоб $|\xi(\varphi, r)| < \mu/2$ для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in (0, r_*)$. Тоді для цих значень φ , r виконується нерівність $\dot{r} = r^m(\Phi(\varphi) + \xi(\varphi, r)) < -r^m\mu/2$. Звідси випливає, що пряма $r = r_*$ складається з точок строгого входу в смугу $\{\varphi \in \mathbf{R}\} \times \{0 < r < r_*\}$. Зокрема, якщо $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$ — розв'язок системи (5.2), для якого $r(0) \in (0, r_*)$, то $r(t) \leq r_*$ для всіх $t \geq 0$, а тоді $\dot{r}(t) \leq -r^m(t)\mu/2$, якщо $t \geq 0$. Отже, додатна функція $r(t)$ монотонно спадає і тому існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \rho \geq 0$. Залишається довести, що $\rho = 0$.

Припустивши, що $\rho > 0$, ми б мали

$$\dot{r}(t) \leq -\rho^m\mu/2, \quad t \geq 0, \quad \Rightarrow \quad r(t) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

а це неможливо \square

Укажемо достатні умови існування асимптотичної півтраєкторії, яка входить у початок координат під кутом φ_* .

Теорема 5.2. Нехай існує таке $\varphi_* \in [0, 2\pi]$, що $\Psi(\varphi_*) = 0$ і $\Phi(\varphi_*) < 0$. Якщо в точці φ_* функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «+» на «-», то система (5.1) має безліч додатних асимптотичних півтраєкторій, які входять у початок координат під кутом φ_* . Якщо ж у точці φ_* функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «-» на «+», то система (5.1) має хоча б одну таку півтраєкторію.

Доведення. Якщо в точці φ_* функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «+» на «-», то можна побудувати прямокутник $ABCD$, для якого множина $\partial ABCD \setminus [AD]$ складається з точок строгого входу в нього (рис. 5.2 а), причому $\dot{r} \leq r^m\Phi(\varphi_*)/2$ в $ABCD$ і на відрізку $[AD]$ немає нулів функції $\Psi(\varphi)$. Прямокутник $ABCD$ містить у собі всі додатні півтраєкторії системи (5.2), які починаються в ньому. Нехай $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$ — рівняння однієї з таких півтраєкторій. Як і при доведенні теореми 5.1, покажемо, що $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Тоді згідно з твердженнями 5.1–5.3 існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi_*$.

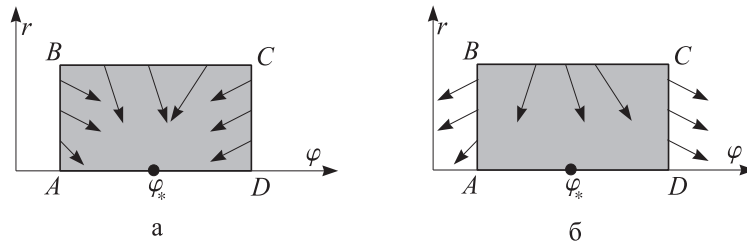


Рис. 5.2.

Якщо в точці φ_* функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «-» на «+», то аналогічно можна побудувати прямокутник $ABCD$, для якого інтервал (BC)

складається з точок строгого входу, а інтервали (AB) і (CD) — з точок строгого виходу. При цьому $\dot{r} \leq r^m \Phi(\varphi_*)/2$ в $ABCD$, а на $[AD]$ немає нулів функції $\Psi(\varphi)$ (рис. 5.2 б).

Нехай підмножина $M_{AB} \subset (BC)$ складається з точок, які під дією (локального) потоку системи (5.2) вперше залишають прямокутник $ABCD$ через інтервал (AB) . Аналогічно визначаємо множину M_{CD} . З теореми про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних випливає, що обидві ці множини непорожні та відкриті. Очевидно, що вони не перетинаються. Оскільки будь-які дві різні траєкторії системи (5.2) не перетинаються, то для кожної точки $P \in M_{AB}$ інтервал (BP) не містить жодної точки множини M_{CD} (тобто множина M_{AB} лежить лівіше від множини M_{CD}). Зрозуміло, що тоді $M_* := (BC) \setminus (M_{AB} \cup M_{CD}) \neq \emptyset$. Кожна додатна півтраєкторія системи (5.2) з початком у M_* не виходить з прямокутника $ABCD$. Як і вище, легко показати, що така півтраєкторія закінчується в точці $(\varphi, r) = (\varphi_*, 0)$ \square

Наслідок 5.2. Якщо в точці φ_* функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «+» на «-» і $\Phi(\varphi_*) < 0$, то в досить малому околі початку координат додатні асимптотичні півтраєкторії системи (5.1), які входять у початок координат під кутом φ_* , заповнюють деякий сектор, що містить інтервал $\{x = r \cos \varphi_*, y = r \sin \varphi_*\}_{r \in (0, r_*)}$ і має вершину в точці $(0, 0)$.

Задача 1. Сформулювати аналог теореми 5.2 у випадку, коли $\Phi(\varphi_*) > 0$.

5.2. Випадок невідродженої лінійної частини

Розглянемо систему (5.1) у випадку, коли $m = 1$. Тоді

$$H(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad K(x, y) = \gamma x + \delta y.$$

Позначимо

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

і надалі припускатимемо, що $\det A \neq 0$ і

$$F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = G'_x(0, 0) = G'_y(0, 0) = 0.$$

Типи фазових портретів лінеаризованої системи при невідродженій матриці A добре відомі. Ними є вузол, дикритичний вузол, вироджений вузол,

сідло, фокус, центр. Наша мета полягає в тому, щоб показати, що в усіх випадках, крім центра, поведінка траєкторій нелінійної системи в малому околі точки $(0, 0)$ нагадує поведінку траєкторій відповідної лінеаризованої системи.

5.2.1. Вузол

Нехай матриця A має пару дійсних різних власних чисел одного знаку. Для визначеності розглянемо випадок, коли ці числа від'ємні. Позначимо їх $\lambda_1 := -\mu$, $\lambda_2 := -\nu$. Нехай

$$\nu > \mu.$$

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $A = \text{diag}(-\mu, -\nu)$. Тоді

$$\Phi(\varphi) = -\mu \cos^2 \varphi - \nu \sin^2 \varphi = -\mu - (\nu - \mu) \sin^2 \varphi \leq -\mu;$$

$$\Psi(\varphi) = (\mu - \nu) \cos \varphi \sin \varphi = \frac{\mu - \nu}{2} \sin 2\varphi.$$

Згідно з теоремою 5.1 існує окіл початку координат, у кожній точці якого починається додатна асимптотична півтраєкторія системи.

Функція $\Psi(\varphi)$ на відрізку $[0, 2\pi]$ має чотири нулі: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = 3\pi/2$. У точках φ_1 та φ_3 функція $\Psi(\varphi)$ змінює знак з «+» на «-», а в точках φ_2 і φ_4 — навпаки, з «-» на «+». Тому існує безліч додатних півтраєкторій, які входять у початок координат як під кутом φ_1 , так і під кутом φ_3 . Існує принаймні по одній траєкторії, які входять у початок координат відповідно під кутами φ_2 і φ_4 .

Повторюючи міркування з доведення теореми 5.2, можна показати дещо більше: для як завгодно великого $k > 0$ знайдеться таке $r_* > 0$, що кожен секторіальний окіл

$$K_- := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2, 0 < |y| < -kx\},$$

$$K_+ := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2, 0 < |y| < kx\}$$

заповнюють додатні півтраєкторії, які входять у початок координат і дотикаються в ньому до осі абсцис, а в кожному секторіальному околі

$$K^- := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2, 0 < |x| < -y/k\},$$

$$K^+ := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2, 0 < |x| < y/k\}$$

знайдеться принаймні по одній додатній півтраєкторії, що входить у початок координат і дотикається в ньому до осі ординат (рис. 5.3).

Задача 2. Показати, що в кожному секторіальному околі K^- і K^+ існує лише по одній додатній півтраєкторії, що входить у початок координат і дотикається в ньому до осі ординат.

Вказівка. Уздовж асимптотичної півтраєкторії $(x(t), y(t)) \in K^+$ маємо $G(x(t), y(t))/y(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Тому для всіх великих t виконується $\dot{y}(t) = -\nu y(t) + G(x(t), y(t)) < 0$, а отже, $y(t)$ строго монотонно спадає.

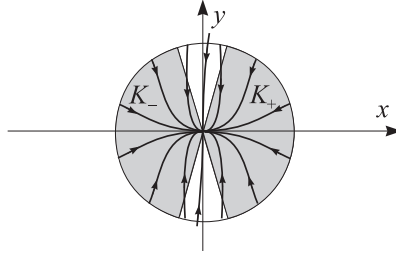


Рис. 5.3.

Така півтраєкторія тоді описується розв'язком $x = \chi(y)$ рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\mu x - F(x, y)}{\nu y - G(x, y)} =: g(x, y),$$

який визначений для всіх $y \in (0, \epsilon)$ (ϵ — досить мале) і має властивість

$$\chi(y) \rightarrow 0, y \rightarrow +0; \quad \chi'(y) \rightarrow 0, y \rightarrow +0.$$

Для доведення єдиності такого розв'язку слід скористатися теоремою єдиності з п. 2. Для цього слід показати, що при досить великому $k > 0$ і досить малому $\epsilon > 0$ функція $g(x, y)$ в області $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < |x| \leq y/k, y \in (0, \epsilon)\}$ неперервно диференційовна і, з урахуванням нерівності $\mu < \nu$, задовольняє в цій області умову $|g_x(x, y)| \leq 1/y$. Тому можна покласти $\omega(y, u) := u/y$ (див. задачу з п. 2) (роль незалежної змінної замість t відіграє y).

5.2.2. Дикритичний вузол

Нехай характеристичне рівняння матриці A має кратний корінь $\lambda = -\mu < 0$. Тоді $\text{rank}(A + \mu E) = 0$ може набувати лише двох значень 0 і 1.

Розглянемо перший випадок. Очевидно, що в цьому випадку $A = -\mu E$. Отже, фазовим портретом лінеаризованої системи є дикритичний вузол. Легко бачити, що

$$\Phi(\varphi) = -\mu, \quad \Psi(\varphi) = 0.$$

Отже, за теоремою 5.1 усі додатні півтраєкторії системи (5.1), які починаються в досить малому околі початку координат, закінчуються в ньому. Виникає питання: чи для кожного $\varphi_* \in [0, 2\pi)$ існує додатна півтраєкторія, яка входить у точку $(0, 0)$ під кутом φ_* ? Виявляється, для позитивної відповіді на поставлене питання необхідно накласти певні додаткові умови на швидкість прямування функції $\eta(\varphi, r)$ до нуля. Надалі припустимо, що цю функцію можна подати у вигляді

$$\eta(\varphi, r) = r^\alpha \eta_1(\varphi, r), \tag{5.3}$$

де $\eta_1(\varphi, r) \in C(\mathbf{R} \times [0, R) \mapsto \mathbf{R})$, $\alpha \in (0, 1)$. Покажемо, що у цій ситуації відповідь на поставлене вище запитання — позитивна.

Задача 3. Показати, що умова (5.3) виконується, якщо

$$|F(x, y)| + |G(x, y)| = O(r^{1+\alpha}), \quad r \rightarrow 0.$$

Виключивши у системі (5.2) час, одержимо рівняння

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^{\alpha-1}\eta_1(\varphi, r)}{-\mu + \xi(\varphi, r)}.$$

Аби позбавитися множника $r^{\alpha-1}$ у правій частині, зробимо тут заміну змінної $r = s^\beta$, де s — нова незалежна змінна, β — поки що невідоме додатне число. Дістанемо

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\beta s^{\alpha\beta-1}\eta_1(\varphi, s^\beta)}{-\mu + \xi(\varphi, s^\beta)}.$$

Поклавши тепер $\beta = 1/\alpha$, бачимо, що це рівняння має вигляд

$$\frac{d\varphi}{ds} = E(s, \varphi),$$

де $E(s, \varphi) \in C([0, \sigma] \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R})$, σ — досить мале додатне число. За теоремою Пеано для довільного $\varphi_* \in [0, 2\pi]$ існують $h > 0$ і розв'язок $\varphi = \tilde{\varphi}(s)$, $s \in [0, h]$ такий, що $\tilde{\varphi}(0) = \varphi_*$ (укажіть, яким можна вибрати число h).

Отже, шукана півтраєкторія в полярних координатах задається рівнянням $\varphi = \tilde{\varphi}(r^\alpha)$.

Задача 4. Користуючись цим рівнянням, знайти розв'язок системи (5.1), який має властивості

$$|x(t)| + |y(t)| \rightarrow 0, \quad \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \operatorname{tg}\varphi_*, \quad t \rightarrow \infty.$$

5.2.3. Вироджений вузол

Нехай характеристичне рівняння матриці A має кратний корінь $\lambda = -\mu < 0$ і $\operatorname{rank}(A + \mu E) = 1$. Тоді без обмеження загальності можна вважати, що матрицю A зведено до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & -\mu \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Вигляд такої матриці дещо відрізняється від канонічної форми Жордана. З теорії матриць відомо, що коли матриця A має єдине власне число $\lambda = -\mu$ і одновимірний підпростір власних векторів, то існує базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ у \mathbf{R}^2 такий, що

$$A\mathbf{a}_1 = -\mu\mathbf{a}_1, \quad A\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 - \mu\mathbf{a}_2.$$

Тоді, вважаючи, що базисними векторами декартової системи координат є $\{-\mu\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, матимемо потрібний вигляд матриці A .

Перейшовши до полярних координат, дістанемо систему (5.2), у якій

$$\Phi(\varphi) = -\mu\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \leq -\frac{\mu}{2}, \quad \Psi(\varphi) = \mu \sin^2 \varphi.$$

Отже, за теоремою 5.1 усі додатні півтраєкторії системи (5.1), які починаються в досить малому околі початку координат, закінчуються в ньому.

Функція $\Psi(\varphi)$ на проміжку $[0, 2\pi)$ має два нулі: $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = \pi$. Проте оскільки вона додатна на $[0, 2\pi) \setminus \{0, \pi\}$, то апіорі не можна стверджувати, що система (5.1) має додатну півтраєкторію, яка входить у початок координат під кутом φ_1 або φ_2 . Покажемо, що такі траєкторії існують, якщо функція $\eta(\varphi, r)$ допускає зображення (5.3).

Розглянемо на площині φOr криволінійний трикутник ABO , обмежений віссю $r = 0$, прямою $\varphi = -\epsilon$, де $\epsilon > 0$, і кривою $r = |\varphi|^{3/\alpha}$ (рис. 5.4 а). Покажемо, що для системи (5.2) інтервал (AB) та дуга $[BO)$ складаються з точок строгого входу в ABO . Справді, на (AB) при всіх досить малих $\epsilon > 0$ маємо $r \in (0, \epsilon^{3/\alpha})$ і

$$\dot{\varphi} = \mu \sin^2 \epsilon + \eta(r, -\epsilon) \geq \mu \sin^2 \epsilon - K\epsilon^3 > 0,$$

де K — максимум функції $|\eta_1(\varphi, r)|$ у смугі $0 \leq r \leq R/2$. Тому всі точки інтервалу (AB) є точками строгого входу у трикутник ABO .

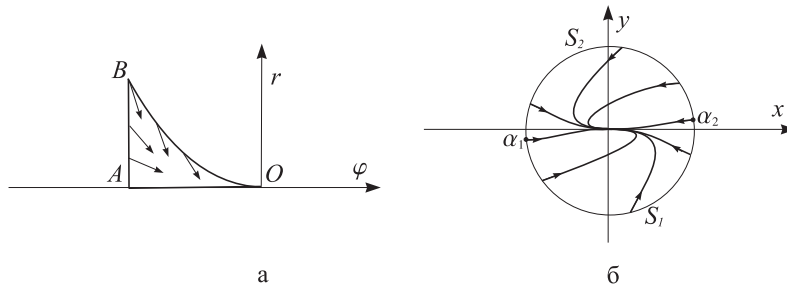


Рис. 5.4.

Далі, у точці $(\varphi, |\varphi|^{3/\alpha})$ дуги $[AO)$ кутовий коефіцієнт дотичної до цієї дуги дорівнює

$$k(\varphi) := -\frac{3}{\alpha}|\varphi|^{3/\alpha-1},$$

а кутовий коефіцієнт дотичної до траєкторії системи (5.2) обчислюється за формулою

$$\kappa(\varphi) = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r(\Phi(\varphi) + \xi(\varphi, r))}{\Psi(\varphi) + \eta(\varphi, r)} \Big|_{r=|\varphi|^{3/\alpha}}.$$

Легко бачити, що $\kappa(\varphi) = -|\varphi|^{3/\alpha-2}(1 + o(1))$ при $\varphi \rightarrow 0$. Однак тоді $k(\varphi)/\kappa(\varphi) \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0$. З урахуванням від'ємності функції $\Phi(\varphi)$ це означає, що при досить малому $\epsilon > 0$ дуга $[BO)$ складається з точок строгого входу в ABO .

Таким чином, кожна додатна півтраєкторія системи (5.2), яка починається в трикутнику ABO , не виходить з нього і закінчується в точці $(0, 0)$. Зрозуміло, що таким півтраєкторіям системи (5.2) у декартових координатах відповідають півтраєкторії системи (5.1), які входять у початок координат під кутом φ_1 .

Так само можна обґрунтувати існування додатних півтраєкторій системи (5.1), які входять у початок координат під кутом φ_2 .

Загальний висновок з наведених міркувань такий: коло досить малого радіусу і з центром у початку координат є об'єднанням двох напіввідкритих дуг S_1 і S_2 , які відповідно визначаються кутами $\alpha_1 < \varphi \leq \alpha_2$, $\alpha_2 < \varphi \leq \alpha_1 + 2\pi$ ($\alpha_1 < 0$) і мають таку властивість: на дузі S_j починаються додатні півтраєкторії, що входять у початок координат під кутом φ_j , $j = 1, 2$ (рис. 5.4 б).

5.2.4. Сідло

Нехай матриця A має власні числа різних знаків $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = -\nu$, де $\mu, \nu > 0$. Можна вважати, що $A = \text{diag}(-\mu, \nu)$. Тоді

$$\Phi(\varphi) = \mu \cos^2 \varphi - \nu \sin^2(\varphi), \quad \Psi(\varphi) = -(\mu + \nu) \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{\mu + \nu}{2} \sin 2\varphi.$$

На проміжку $[0, 2\pi)$ функція $\Psi(\varphi)$ має чотири нулі: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = 3\pi/2$, причому в точках φ_1 і φ_3 вона змінює знак з «+» на «-», а в точках φ_2 і φ_4 — навпаки.

Обчислимо значення функції $\Psi(\varphi)$ у цих точках:

$$\Phi(0) = \mu, \quad \Phi(\pi/2) = -\nu, \quad \Phi(\pi) = \mu, \quad \Phi(3\pi/2) = -\nu.$$

На основі теореми 5.2, задачі 1 робимо висновок: існує принаймні по одній від'ємній півтраєкторії, які виходять з початку координат під кутами φ_1 і φ_3 ; існує принаймні по одній додатній півтраєкторії, які входять у початок координат під кутами φ_2 і φ_4 .

Доведемо єдиність півтраєкторії, яка виходить з початку координат під кутом $\varphi_1 = 0$. Така півтраєкторія описується розв'язком $y = v(x)$ рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\nu y - G(x, y)}{\mu x + F(x, y)} =: f(x, y), \quad (5.4)$$

який визначений для всіх $x \in (0, \epsilon)$ (ϵ — досить мале) і має властивості

$$v(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +0; \quad v'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +0$$

(відповідні пояснення див. у вказівці до задачі 2).

Припустимо тепер, що такі ж властивості має ще один розв'язок $y = \tilde{v}(x)$ рівняння (5.4). Зрозуміло, що для як завгодно малого $\sigma > 0$ існує таке $x_0 > 0$, що графіки обох функцій $v(x)$ та $\tilde{v}(x)$ при $x \in (0, x_0]$ лежатимуть у секторі

$$K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (0, x_0], |y| < \sigma x\}.$$

Неважко переконатися, що за умови достатньої малості σ справджуватиметься нерівність $f'_y(x, y) < 0$ для всіх $(x, y) \in K$. Для визначеності будемо

вважати, що $\tilde{v}(x_0) > v(x_0)$. Зробимо заміну змінної $y = v(x) + u$ у рівнянні (5.4). Дістанемо

$$u' = f(x, v(x) + u) - f(x, v(x)) := u \int_0^1 f'_y(x, v(x) + su) ds.$$

Оскільки тривіальний розв'язок цього рівняння має властивість єдиності, то розв'язок $u = u(x) := \tilde{v}(x) - v(x)$ набуває лише додатних значень на $(0, x_0]$. Однак тоді $u'(x) < 0$ для всіх $x \in (0, x_0]$, а отже, $\lim_{x \rightarrow +0} u(x) > 0$. Отримали протиріччя.

Аналогічно доводиться єдиність інших асимптотичних півтраєкторій.

Нарешті, проаналізуємо поведінку неасимптотичних траєкторій в околі початку координат. Покажемо, що локально такі траєкторії поводять себе так само, як і в лінійному випадку. Асимптотичні півтраєкторії ділять круг малого радіуса з центром у початку координат на чотири сектори. Так, на рис. 5.5 а дуга $[AO]$ додатної асимптотичної півтраєкторії, дуга (OD) від'ємної асимптотичної півтраєкторії та дуга кола (AD) виділяють сектор AOD . Для кожного $k > 0$ на будь-якому відрізку прямої $y = kx$, що лежить усередині круга досить малого радіуса, маємо:

$$\dot{x} = \mu x + F(x, kx) = \mu x + o(x) > \mu x/2,$$

$$\dot{y} = -\nu y + G(y/k, y) = -\nu y + o(y) < -\nu y/2.$$

Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ — рівняння траєкторії, яка в деякий момент t_0 перетинає сегмент (OB) , то

$$x(t) > x(t_0)e^{\mu(t-t_0)/2}, \quad y(t) < y(t_0)e^{-\mu(t-t_0)/2}$$

для всіх $t > t_0$, поки рухома точка $(x(t), y(t))$ знаходиться в секторі BOC . Легко бачити, що тоді ця точка в деякий момент t_* повинна потрапити або на дугу (BC) , або на сегмент (OC) .

Далі, якщо точка B досить близька до точки A , а точка C — до точки D , то дуга $[AB]$ складається з точок входу в сектор AOB , а дуга $[CD]$ — з точок виходу із сектора COD . У полярних координатах сектору AOB на рис. 5.5 б відповідає затінений прямокутник. З урахуванням єдиності додатної півтраєкторії, яка входить у початок координат під кутом $\pi/2$, так само, як і при доведенні теореми 5.2, показуємо, що півтраєкторія, яка починається на дузі (AB) , обов'язково перетне сегмент OB . Якщо точка B розташована досить близько до точки A , то, перетнувши сектор BOC , така траєкторія потрапить у сектор COD і вийде з нього через дугу CD .

5.2.5. Фокус

Розглянемо випадок, коли матриця A має пару комплексно-спряжених власних чисел $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $\beta > 0$. Нехай $\mathbf{a} = \mathbf{b} + i\mathbf{c}$ — власний вектор, що відповідає числу λ_1 . Оскільки $A(\mathbf{b} + i\mathbf{c}) = (\alpha + \beta i)(\mathbf{b} + i\mathbf{c})$, то

$$A\mathbf{b} = \alpha\mathbf{b} + \beta(-\mathbf{c}), \quad A(-\mathbf{c}) = -\beta\mathbf{b} + \alpha(-\mathbf{c}).$$

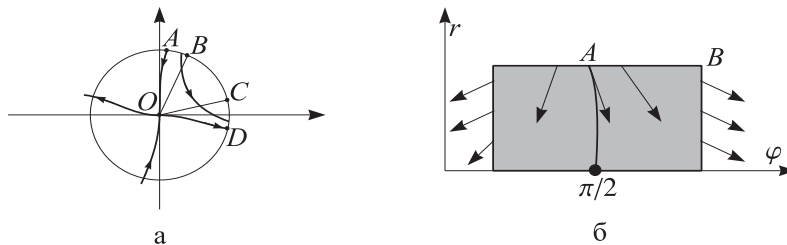


Рис. 5.5.

Вважаючи, що базисними векторами декартової системи координат уже вибрано вектори \mathbf{b} та $(-\mathbf{c})$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\Phi(\varphi) = \alpha, \quad \Psi(\varphi) = \beta.$$

Припустивши для визначеності, що $\alpha < 0$, на основі теореми 5.1 та наслідку 5.1 робимо такий висновок: *знайдеться околі початку координат, у кожній точці якого починається додатна півтраєкторія, яка навивається на точку $(0, 0)$ у вигляді спіралі. Отже, початок координат — положення рівноваги типу фокус.*

5.2.6. Проблема центра й фокуса

Нехай матриця A має суто уявні власні числа $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Тоді

$$\Phi(\varphi) = 0, \quad \Psi(\varphi) = \beta.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку не існує півтраєкторій, які входять у початок координат або виходять з нього з певним напрямком, а за допомогою лише функції $\Phi(\varphi)$ не можна зробити висновок, чи взагалі існують асимптотичні півтраєкторії (якщо такі траєкторії існують, то вони є спіралями). У полярних координатах отримуємо систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \beta + \eta(\varphi, r), \\ \dot{r} = r\xi(\varphi, r). \end{cases} \quad (5.5)$$

У лінійному випадку, коли $\xi = 0$, початок координат є центром. Якщо ж $\xi \neq 0$, то початок може бути й фокусом (як стійким, так і нестійким), і центром, і навіть центро-фокусом (останній випадок матиме місце, наприклад, коли $\xi(\varphi, r) = r^2 \sin(1/r)$, $\eta(\varphi, r) \equiv 0$). З'ясування типу поведінки траєкторій у малому околі початку координат за цих обставин становить суть *проблеми центра й фокуса*.

Систему (5.5) будемо вивчати за припущення, що $\xi(\varphi, r) \in C^m(\mathbf{R} \times$

$[0, R] \mapsto \mathbf{R}$), де $n \geq 1$, і знайдеться таке $k \in \{2, \dots, n+1\}$, що

$$\frac{\partial^j \xi(\varphi, 0)}{\partial r^j} \equiv 0, \text{ для } 0 \leq j < k-1, \text{ але } \frac{\partial^{k-1} \xi(\varphi, 0)}{\partial r^{k-1}} \neq 0.$$

Зваживши, що $\xi(\varphi, 0) \equiv 0$, перепишемо систему (5.5) у вигляді

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \beta + \eta(\varphi, r), \\ \dot{r} = a_k(\varphi)r^k + \xi_k(\varphi, r), \end{cases} \quad (5.6)$$

де $a_k(\varphi) := \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \xi(\varphi, 0)}{\partial r^{k-1}}$, $\xi_k(\varphi, r) = o(r^k)$, $r \rightarrow 0$.

Теорема 5.3. Нехай $\alpha_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_k(\varphi) d\varphi \neq 0$. Тоді існує таке $r_* \in (0, R)$, що для довільних $r_0 \in (0, r_*)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ розв'язок $(\varphi(t), r(t))$ системи (5.5), який задовольняє початкові умови $\varphi(0) = \varphi_0$, $r(0) = r_0$, має властивість

$$\varphi(t) \rightarrow \text{sign } \alpha_k \cdot \infty, \quad r(t) \rightarrow 0, \text{ коли } t \rightarrow \text{sign } \alpha_k \cdot \infty.$$

Доведення. Зробимо в системі (5.6) перетворення $r \mapsto r + u(\varphi)r^k$ і спробуємо дібрати 2π -періодичну функцію $u(\varphi)$ так, щоб друге рівняння набуло вигляду

$$\dot{r} = \alpha_k r^k + \tilde{\xi}_k(\varphi, r),$$

де $\tilde{\xi}_k(\varphi, r) = o(r^k)$. Дістанемо

$$\dot{r} + ku(\varphi)r^{k-1}\dot{\varphi} + u'(\varphi)\dot{\varphi}r^k = a_k(\varphi)(r + u(\varphi)r^k)^k + \xi_k(\varphi, r + u(\varphi)r^k),$$

звідки, з огляду на перше рівняння в (5.6), дістанемо

$$(\alpha_k + \beta u'(\varphi) - a_k(\varphi))r^k + (1 + ku(\varphi)r^{k-1})\tilde{\xi}_k(r, \varphi) = o(r^k).$$

Тепер зрозуміло, що за функцію $u(\varphi)$ досить узяти 2π -періодичний розв'язок рівняння

$$u' = (a_k(\varphi) - \alpha_k)/\beta.$$

Можемо, наприклад, покласти $u(\varphi) = \frac{1}{\beta} \int_0^\varphi (a_k(\psi) - \alpha_k) d\psi$. Оскільки $u(2\pi) = u(0) = 0$, то цей розв'язок 2π -періодичний ([10], с. 61). Таким чином, приходимо до системи

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \beta + \tilde{\eta}(\varphi, r), \\ \dot{r} = \alpha_k r^k + \tilde{\xi}_k(\varphi, r), \end{cases} \quad (5.7)$$

де $\tilde{\eta}(\varphi, r) = \eta(\varphi, r + u(\varphi)r^k) = o(1)$, $r \rightarrow 0$. Тепер для доведення теореми досить вибрати r_* так, щоб $|\tilde{\eta}(\varphi, r)| < \beta/2$ і $|\tilde{\xi}_k(\varphi, r)| < |\alpha_k|r^k/2$ для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in (0, r_*)$ \square

З доведеної теореми випливає, що коли $\alpha_k \neq 0$, то початок координат є фокусом, причому стійким, коли $\alpha_k < 0$, і нестійким, коли $\alpha_k > 0$. У випадку ж, коли $\alpha_k = 0$, потрібно попередні міркування застосувати до

системи (5.7). Звичайно, для цього доведеться припустити, що має місце зображення

$$\tilde{\xi}_k(\varphi, r) = a_{k+1}(\varphi)r^{k+1} + \xi_{k+1}(\varphi, r), \quad \text{де } \xi_{k+1}(\varphi, r) = o(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0.$$

5.2.7. Проблема центра для поліноміальних систем

Цікавим з математичного погляду є випадок, коли матриця A має суто уявні власні числа, а функції $F(x, y)$ та $G(x, y)$ — поліноми степеня, не вищого від n , без вільних і лінійних членів. Необхідні умови центра для таких систем задаються нескінченною системою рівностей $\alpha_k = 0$, $k = 2, 3, \dots$. Неважко зрозуміти, що з огляду на описане вище правило обчислення величин α_k ця система є нескінченною системою алгебричних рівнянь на скінченне число коефіцієнтів поліномів F та G . Занумерувавши певним чином ці коефіцієнти, утворимо з них вектор (c_1, \dots, c_m) , де $m = m(n)$ — вимірність векторного простору поліномів степеня, не вищого від n , які залежать від двох змінних і не містять вільних та лінійних членів. Отже, необхідні умови центра мають вигляд системи

$$\alpha_k(c_1, \dots, c_m) = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

Виявляється, ці умови є не лише необхідними, але й достатніми. Цей факт виявив Ляпунов, причому навіть у випадку, коли F та G зображуються збіжними в околі точки $(0, 0)$ рядами змінних x та y .

Для довільного n апіорі невідомо, чи має система (5.8) нетривіальні розв'язки. Скориставшись теоремою Гільберта про базис, можна показати, що система (5.8) еквівалентна деякій скінченній алгебричній системі. Отже, виникає задача: для заданого n указати таке найменше натуральне $N(n)$, щоб перші $N(n)$ умов забезпечували наявність центра. Якщо б виявилось, що $N(n) > m(n)$, то число рівнянь системи, якій повинні задовольняти коефіцієнти c_1, \dots, c_m , буде більшим ніж кількість цих коефіцієнтів. Така система може не мати жодного нетривіального розв'язку. Як зазначено в [3], невідомо, чи $N(n) \leq m(n)$ при всіх $n \geq 2$.

6. Індекс Пуанкаре

6.1. Індекс векторного поля відносно замкненої кривої

Важливою топологічною характеристикою векторного поля на площині є його *індекс відносно замкненого контура* — число повних обертів, які робить вектор векторного поля, коли його початок обходить задану орієнтовану замкнену криву (неперервний образ кола).

Опишемо відповідну конструкцію. Нехай в області D евклідової площини \mathbf{R}^2 задане векторне поле $\mathbf{f} \in C(D \mapsto \mathbf{R}^2)$. Припустимо, що \mathbf{f} не має особливих точок на замкненій кривій $\Gamma \subset D$, яка є образом неперервного

відображення

$$g : [0, 2\pi] \mapsto D$$

такого, що $g(0) = g(2\pi)$. При цьому орієнтація кривої Γ визначається напрямом руху точки $g(t)$ у процесі зростання параметра t .

Позначимо через $e(t)$ вектор, одержаний віднесенням одиничного вектора

$$\|f \circ g(t)\|^{-1} f \circ g(t)$$

до початку координат. Зрозуміло, що при зростанні параметра t кінець вектора $e(t)$ рухається по одиничному колу S^1 . Стандартна (права) полярна система координат на площині визначає кутову координату $\varphi \pmod{2\pi}$ на S^1 . Виникає багатовзначна функція, яка кожному $t \in [0, 2\pi]$ ставить у відповідність значення полярних кутів кінця вектора $e(t)$. Позначимо через $\varphi(t)$ однозначну неперервну гілку цієї багатовзначної функції, вважаючи для визначеності, що $\varphi(0) \in [0, 2\pi)$ (рис. 6.1).

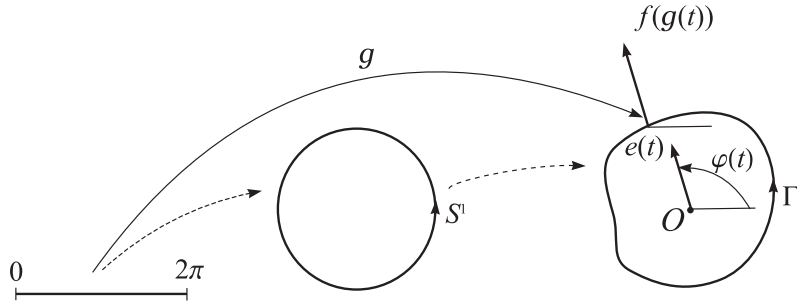


Рис. 6.1.

Означення 6.1. *Індексом векторного поля f відносно замкненої кривої Γ (або кривої Γ відносно векторного поля f) називається ціле число*

$$I(f, \Gamma) := \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi}.$$

Перелічимо деякі найважливіші властивості індексу.

Твердження 6.1. *Нехай $(-\Gamma)$ — крива, одержана із замкненої кривої Γ заміною її орієнтації на протилежну. Тоді*

$$I(f, -\Gamma) = -I(f, \Gamma).$$

Нехай $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ — неперервно залежна від параметра λ сім'я замкнених кривих, розташованих в області D . Така сім'я визначається відображенням $g(t, \lambda) \in C([0, 2\pi] \times [0, 1] \mapsto D)$ таким, що для кожного фіксованого $\lambda \in [0, 1]$ відображення $g(\cdot, \lambda) : [0, 2\pi] \mapsto D$ визначає замкнену криву Γ_λ .

Нехай $\{f_\mu\}_{\mu \in [0,1]}$ — неперервно залежна від параметра μ сім'я векторних полів в області D .

Твердження 6.2. Якщо для всіх $(\lambda, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1]$ векторне поле f_λ не має особливих точок на кривій Γ_μ , то

$$I(f_0, \Gamma_0) = I(f_\mu, \Gamma_\mu) \quad \forall (\lambda, \mu) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Це твердження означає, що індекс векторного поля є *гомотопічним інваріантом*.

Нагадаємо, що (неперервною, гладкою) *гомотопією* відображення $F : D \mapsto G$ називається (неперервне, гладке) відображення

$$\Phi : D \times [0, 1] \mapsto G$$

таке, що $\Phi(\cdot, 0) = F(\cdot)$. Відомо, що неперервне відображення апроксимуються близьким гомотопним гладким відображенням. Тому домовимося, що надалі всі наші міркування стосуватимуться *гладких* об'єктів (векторних полів, кривих, диференціальних форм тощо).

Ототожнимо площину $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$ з множиною комплексних чисел $\mathbf{C} = \{z = x + iy : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$. Тоді векторне поле f з компонентами $(P(x, y), Q(x, y))$ можна ототожнити з комплекснозначною функцією

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

а замкнути криву Γ — задати рівнянням

$$z = g(t) := u(t) + iv(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

де $g(t) \in C^\infty([0, 2\pi] \mapsto \mathbf{C})$ і $g(0) = g(2\pi)$.

Легко бачити, що введена вище функція $\varphi(t)$ задовольняє рівність

$$f(u(t), v(t)) = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad \text{де } r(t) := |f(u(t), v(t))|.$$

Звідси $\ln f(u(t), v(t)) = \ln r(t) + i\varphi(t)$, і

$$\varphi(t) = \text{Im} \ln f(u(t), v(t)),$$

а тоді

$$d\varphi(t) = \text{Im} \frac{dP + idQ}{P + iQ} \Big|_{x=u(t), y=v(t)} = \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} \Big|_{x=u(t), y=v(t)}.$$

Таким чином, в області D' , яка одержується вилученням з D особливих точок векторного поля f , виникає замкнена (локально-точна) диференціальна форма

$$\omega := \text{Im} \frac{df}{f} = \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

Цю форму природно називати диференціалом полярного кута.

Теорема 6.1. Індекс векторного поля $f = (P, Q)$ відносно орієнтованої замкнутої кривої Γ виражається формулою

$$I(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \omega.$$

Приклад 1. Нехай $D = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{f} = (x, y)$, $\Gamma = S^1 := \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t\}$. Тоді $I(\mathbf{f}, \Gamma) = 1$.

Справді, $f = z$, $g(t) = e^{it}$, а тому $\varphi(t) = t$, звідки й маємо потрібну рівність. Одночасно, як наслідок, одержуємо формулу

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 1,$$

де Γ — будь-яка замкнена крива, одержана гомотопією по області $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ з кола S^1 .

Приклад 2. Нехай $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $\Gamma = S^1$, а \mathbf{f} таке, що $f = z^n$, де n — ціле. Тоді $I(\mathbf{f}, \Gamma) = n$.

Справді, досить зауважити, що в цьому випадку $\varphi(t) = nt$.

Досі орієнтація на кривій Γ була прив'язана до її параметризації. Однак для кожної жорданової кривої — гомеоморфного образу кола — існує природна орієнтація, визначена незалежно від параметризації. Як відомо, кожна жорданова крива Γ є межею деякої обмеженої області G . Домовляються додатним напрямом на Γ вважати такий, при якому область G у процесі обходу цієї кривої «залишається зліва».

Цим словам можна (і необхідно, якщо крива Γ не диференційовна) надати більш точний зміст. У випадку кола $|z - z_0| = 1$, наведене вище означення додатного напрямку цілком коректне. Відповідне додатно орієнтоване коло позначимо $S^1(z_0)$. З урахуванням прикладу 1 маємо $I(\mathbf{f}, S^1(z_0)) = 1$, де $f = z - z_0$. Нехай тепер z_0 — внутрішня точка області G . Візьмемо до уваги такий відомий факт: існує гомотопія (у класі замкнених кривих), яка криву Γ , не виводячи із $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$, деформує в $S^1(z_0)$. Тепер, за означенням, додатну орієнтацію на Γ вибираємо так, щоб $I(\mathbf{f}, \Gamma) = 1$ для $f = z - z_0$.

Надалі домовимось жорданову криву Γ , орієнтовану згідно з правилом, описаним вище, позначати через $+\Gamma$, а криву, яка одержується з $+\Gamma$ заміною орієнтації на протилежну — через $-\Gamma$.

За допомогою індекса можна доводити існування розв'язків системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Теорема 6.2. Нехай \mathbf{f} — векторне поле в D , $\Gamma \subset D$ — така жорданова крива, що область G , обмежена цією кривою, лежить у D . Тоді, якщо \mathbf{f} не має особливих точок у $G \cup \Gamma$, то $I(\mathbf{f}, \Gamma) = 0$.

Доведення. Якщо \mathbf{f} не обертається в 0 у $G \cup \Gamma$, то за теоремою Стокса (формулою Гріна)

$$\oint_{+\Gamma} \omega = \iint_G d\omega = 0,$$

оскільки з урахуванням замкненості форми ω виконується рівність $d\omega = 0$ \square

Нагадаємо, що в координатах (x, y) формула Гріна для форми $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ записується у вигляді

$$\oint_{+\Gamma} M(x, y)dx + N(x, y)dy = \iint_G (N'_x(x, y) - M'_y(x, y)) dx dy.$$

Зауваження 6.1. У наведеному вище доведенні теореми 6.2 неявно вимагається диференційовність коефіцієнтів форми ω . У випадку неперервного поля f досить, наприклад, скористатись тим, що криву Γ можна по області G неперервно стягнути в точку.

Наслідок 6.1. Нехай $\Gamma \subset D$ — жорданова крива, на якій немає особливих точок векторного поля f , і область G , обмежена цією кривою, належить D . Тоді, якщо $I(f, \Gamma) \neq 0$, то G містить принаймні одну особливу точку цього векторного поля.

Як приклад застосування наслідку 6.1, наведемо доведення основної теореми алгебри.

Теорема. Кожен поліном $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ степеня $n > 0$ має принаймні один комплексний корінь.

Доведення Виберемо число $R > 0$ настільки великим, щоб

$$f_\lambda(z) := z^n + \lambda(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) \neq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \forall z : |z| = R.$$

Досить, наприклад, вибрати $R > 0$ так, щоб

$$R^n > |a_1|R^{n-1} + \dots + |a_n| \Leftrightarrow |a_1|R^{-1} + \dots + |a_n|R^{-n} < 1.$$

Нехай S_R^1 — коло радіуса R із центром у 0. Згідно з твердженням 6.2 та з урахуванням прикладу 2, маємо

$$I(f_\lambda, +S_R^1) = I(f_0, +S_R^1) = I(f_0, +S^1) = n \neq 0 \square$$

6.2. Індекс Пуанкаре ізольованої особливої точки

Нехай $P_*(x_*, y_*) \in D$ — ізольована особлива точка векторного поля f , $S_\epsilon^1(P_*)$ — коло з центром у точці P_* , радіус $\epsilon > 0$ якого вибрано настільки малим, щоб замкнений круг $\overline{B_\epsilon^2(P_*)}$, обмежений цим колом, містився в D і P_* була єдиною особливою точкою f у $\overline{B_\epsilon^2(P_*)}$.

Означення 6.2. Індексом Пуанкаре точки P_* відносно векторного поля f називається число

$$I(f, P_*) = I(f, +S_\epsilon^1(P_*)).$$

Неважко перевірити коректність цього означення (незалежність від конкретного вибору ϵ).

Теорема 6.3 (про суму індексів). Нехай f — векторне поле в області D , G — однозв'язна область, обмежена жордановою кривою Γ така, що $G \cup \Gamma \subset D$. Припустимо, що кожна особлива точка поля f , яка належить G — ізольована, а на кривій Γ особливих точок немає. Тоді індекс векторного поля f відносно $+\Gamma$ дорівнює сумі індексів усіх особливих точок цього векторного поля, які містить область G .

Доведення. Зрозуміло, що з огляду на припущення ізольованості, G може містити лише скінченне число особливих точок векторного поля f . Нехай $\{P_1, \dots, P_N\}$ — множина всіх таких точок. Виберемо $\epsilon > 0$ так, щоб для кожного $i = 1, \dots, N$ замкнений круг $\overline{B_\epsilon^2(P_i)}$ із центром у P_i цілком належав G і не містив жодної точки P_j , $j \neq i$. Покладемо

$$G'_\epsilon := G \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_\epsilon^2(P_i)}, \quad \Gamma_i = S_\epsilon^1(P_i).$$

Оскільки орієнтована межа області G' має вигляд $\partial G' = +\Gamma \cup (-\Gamma_1) \cup \dots \cup (-\Gamma_N)$, то за формулою Стокса

$$\oint_{\partial G'} \omega = \iint_{G'} d\omega = 0 \Rightarrow \oint_{+\Gamma} \omega + \sum_{i=1}^N \oint_{-\Gamma_i} \omega = 0 \Rightarrow \oint_{+\Gamma} \omega - \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \omega = 0.$$

Залишилось скористатись теоремою 6.1 \square

Зауваження 6.2. Теорему 6.2 можна вивести безпосередньо з теореми 6.2, якщо скористатися можливістю побудови розрізів, які перетворюють $(N+1)$ -зв'язну область G' на однозв'язну (область G' є $(N+1)$ -зв'язною, оскільки число зв'язних компонент, з яких складається її межа, дорівнює $(N+1)$). Розріз, що відповідає точці P_i — це крива γ_i без самоперетинів, яка з'єднує деяку точку на колі Γ_i з деякою точкою на Γ (рис. 6.2). При цьому потрібно вимагати, щоб $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$. Шукана однозв'язна область $G \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_\epsilon^2(P_i)} \setminus \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$ має своєю межею криву

$$\mathcal{G} := +\Gamma \cup \bigcup_{i=1}^N (-\Gamma_i) \cup \bigcup_{i=1}^N (+\gamma_i \cup (-\gamma_i)).$$

За теоремою 6.2 індекс векторного поля f відносно цієї кривої дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} 0 = 2\pi I(f, \mathcal{G}) &= \int_{+\Gamma} \omega - \sum_{i=1}^N \left[\int_{+\Gamma_i} \omega + \int_{+\gamma_i} \omega - \int_{-\gamma_i} \omega \right] = \\ &= 2\pi \left[I(f, +\Gamma) - \sum_{i=1}^N I(f, P_i) \right]. \end{aligned}$$

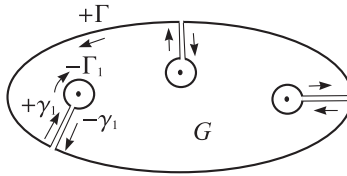


Рис. 6.2.

6.3. Обчислення індексу основних типів особливих точок

Виведемо формулу для індексу особливої точки векторного поля за умови, що оператор його лінійної частини в цій точці не вироджений.

Теорема 6.4. Нехай P_* — така особлива точка гладкого векторного поля f , що $\det f'(P_*) \neq 0$. Тоді

$$I(f, P_*) = \text{sign} \det f'(P_*).$$

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо, що P_* — початок координат. Позначимо $z = (x, y)$, $A := f'(0)$. Тоді

$$f(z) - Az = o(\|z\|),$$

а оскільки Az в $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ не обертається в нуль, то для досить малого $\epsilon > 0$ на колі $S_\epsilon^1(0)$ векторне поле f гомотопне векторному полю Az . Залишається обчислити індекс векторного поля Az .

У координатах (x, y) лінеаризоване векторне поле має вигляд $Az = (u(x, y), v(x, y))$, де

$$u(x, y) := P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y, \quad v(x, y) := Q'_x(0, 0)x + Q'_y(0, 0)y.$$

При лінійному відображенні $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ коло S^1 переходить в еліпс $E = AS^1$. У координатах (u, v) напрям обходу цього еліпса, породжений орієнтацією кола $+S^1$, визначається знаком $\det A$, а саме: відображення A переводить коло $+S^1$ в еліпс $+E$, якщо $\det A > 0$, і в еліпс $-E$, якщо $\det A < 0$. Отже, якщо на площині з координатами (u, v) увести векторне поле $w = (u, v)$, то з урахуванням прикладу 1 одержимо

$$\begin{aligned} I(Az, 0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{+S^1} \omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{+S^1} \frac{u(x, y)dv(x, y) - v(x, y)du(x, y)}{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = \\ &= \text{sign} \det A \frac{1}{2\pi} \oint_{+E} \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2} = \text{sign} \det A \cdot I(w, E) = \text{sign} \det A \quad \square \end{aligned}$$

Ураховуючи, що знак детермінанта оператора A збігається зі знаком добутку власних чисел цього оператора, маємо таку таблицю.

Таблиця

Тип особливості точки	Значення індексу
Вузли всіх типів	+1
Фокус	+1
Центр	+1
Сідло	-1

Зауважимо, що індекс особливості точки $z = 0$ лінійного векторного поля Az з невідірженим оператором A можна обчислити безпосередньо, виходячи лише із самого означення 6.2. Для цього досить прослідкувати за обертанням цього векторного поля на колі S^1 .

Нехай, наприклад, маємо поле $f(x, y) = (x, -y)$. Фазовий портрет відповідної системи — сідло. З рисунку 6.3 а легко зрозуміти, що в процесі обходу кола S^1 проти годинникової стрілки «векторне поле здійснює повний оберт» за годинниковою стрілкою. Тому індекс особливості точки $(0, 0)$ дорівнює -1 .

Векторне поле $f(x, y) = (x^2, -y)$ має вироджену особливу точку $(0, 0)$. Користуючись рисунком 6.3 б, на якому зображено кілька траєкторій відповідної системи, знайти індекс цієї особливості точки.

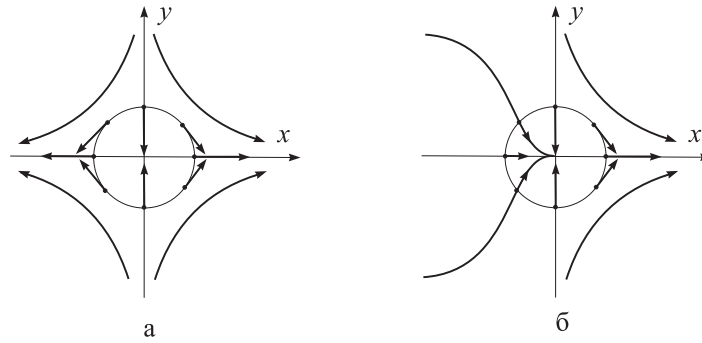


Рис. 6.3.

7. Граничні множини траєкторій

Важлива задача якісної теорії автономних систем полягає у вивченні граничної поведінки траєкторій (півтраєкторій).

Розглянемо автономну систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (7.1)$$

де $f(x) \in C^r(\mathcal{D} \mapsto \mathbf{R}^n)$, \mathcal{D} — область у \mathbf{R}^n . Задля спрощення подальших міркувань будемо припускати, що $r \geq 1$ і векторне поле f повне в \mathcal{D} , тобто породжує потік $\{g^t : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}\}_{t \in \mathbf{R}}$.

Означення 7.1. Точка x_* називається ω -граничною (α -граничною) точкою півтраєкторії $\Gamma_+(x_0)$ ($\Gamma_-(x_0)$), якщо існує така послідовність $\{t_k\}_{k=1,2,\dots} \subset [0, \infty)$ ($\{t_k\}_{k=1,2,\dots} \subset (-\infty, 0]$), що $t_k \rightarrow \infty$ ($t_k \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow \infty$) і $g^{t_k}x_0 \rightarrow x_*$ при $k \rightarrow \infty$.

Означення 7.2. Множина всіх ω -граничних (α -граничних) точок півтраєкторії $\Gamma_+(x_0)$ ($\Gamma_-(x_0)$) називається ω -граничною (α -граничною) множиною цієї півтраєкторії і позначається через $\Omega(x_0)$ ($\Lambda(x_0)$).

Легко бачити, що коли півтраєкторія обмежена, то відповідна гранична множина не порожня. Справді, нехай, наприклад, $\Gamma_+(x_0)$ обмежена. Тоді її замикання — множина $\text{cls } \Gamma_+(x_0)$ — компакт, а отже, якою б не була не обмежена згори послідовність $\{t_j\}_{j=1,2,\dots} \subset [0, \infty)$, послідовність точок $\{g^{t_j}x_0\}_{j=1,2,\dots} \subset \text{cls } \Gamma_+(x_0)$ містить підпослідовність, збіжну до деякої точки x_* . Остання, за означенням, є ω -граничною точкою.

Надалі будемо вивчати лише ω -граничні множини.

Теорема 7.1. Кожна ω -гранична множина є інваріантною і замкненою множиною. Якщо ω -гранична множина обмежена, то вона зв'язна.

Доведення. Інваріантність множини $\Omega(x_0)$ означає, що для довільної точки $x \in \Omega(x_0)$ має місце включення $g^t x \in \Omega(x_0)$, $t \in \mathbf{R}$. Покажемо, що це справді так. Оскільки $x \in \Omega(x_0)$, то існує послідовність $\{t_k\}_{k=1,2,\dots}$ така, що $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, і $g^{t_k}x_0 \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$. Однак тоді $g^t \circ g^{t_k}x_0 \rightarrow g^t x$, $k \rightarrow \infty$, звідки

$$g^{t+t_k}x_0 \rightarrow g^t x, \quad k \rightarrow \infty.$$

Це означає, що $g^t x \in \omega$ -граничною точкою півтраєкторії $\Gamma_+(x_0)$.

Покажемо, що $\Omega(x_0)$ — замкнена. Нехай $\{x_k\}_{k=1,2,\dots} \in \Omega(x_0)$ і $x_k \rightarrow x_*$, $k \rightarrow \infty$. Для кожної точки x_k знайдеться t_k таке, що $t_k > k$ і

$$\|g^{t_k}x_0 - x_k\| \leq \|x_k - x_*\|.$$

Тоді

$$\|g^{t_k}x_0 - x_*\| \leq \|g^{t_k}x_0 - x_k\| + \|x_k - x_*\| \leq 2\|x_k - x_*\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Це означає, що $x_* \in \Omega(x_0)$, а отже, множина $\Omega(x_0)$ замкнена.

Перш ніж перейти до доведення зв'язності $\Omega(x_0)$, нагадаємо, що відстанню від точки $x \in \mathbf{R}^n$ до множини $M \subset \mathbf{R}^n$ називається число

$$\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|,$$

а відстань між множинами $M_1 \subset \mathbf{R}^n$ та $M_2 \subset \mathbf{R}^n$ визначається як

$$\text{dist}(M_1, M_2) := \inf_{x \in M_1, y \in M_2} \|x - y\|.$$

Оскільки для довільних $x, y \in \mathbf{R}^n$ і довільного $z \in M$ виконується нерівність

$$\text{dist}(x, M) \leq \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

то $\text{dist}(x, M) \leq \|x - y\| + \text{dist}(y, M)$. В останній нерівності x і y можна поміняти місцями, а тому

$$|\text{dist}(x, M) - \text{dist}(y, M)| \leq \|x - y\|. \quad (7.2)$$

Тепер, міркуючи від супротивного, припустимо, що множина $\Omega(x_0)$ обмежена, а тоді й компактна, але не зв'язна. Її можна подати у вигляді об'єднання двох неперетинних множин, M_1 та M_2 , відстань між якими є додатним числом d (цей факт є простим наслідком компактності $\Omega(x_0)$). Зрозуміло, що кожна з множин M_1 і M_2 — компактна і складається з ω -граничних точок траєкторії $\Gamma_+(x_0)$. Тому знайдуться послідовності $\{t_k^{(i)}\}_{k=1,2,\dots} \subset [0, \infty)$, $i = 1, 2$ такі, що $t_k^{(i)} \rightarrow \infty$ і $\text{dist}(g^{t_k^{(i)}}x_0, M_i) \rightarrow 0$, коли $k \rightarrow \infty$. Зауважимо, що коли деяка точка x задовольняє нерівність $\text{dist}(x, M_2) < d/2$, то $\text{dist}(x, M_1) > d/2$. Скориставшись тепер неперервністю функції $\varphi(t) := \text{dist}(g^t x_0, M_1)$ (ця властивість випливає з нерівності (7.2)) і теоремою Коші про проміжне значення, побудуємо послідовність $\{t_k\}_{k=1,2,\dots} \subset [0, \infty)$ таку, що $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, і $\text{dist}(g^{t_k}x_0, M_1) = d/2$. Послідовність точок $\{g^{t_k}x_0\}_{k=1,2,\dots}$ обмежена, а отже, містить підпослідовність, збіжну до деякої точки x_* . Ця точка належить $\Omega(x_0)$ і розташована на відстані $d/2$ від M_1 . Зрозуміло, що тоді x_* не міститься ні в M_1 , ані в M_2 . Отримали протиріччя з тим, що $\Omega(x_0) = M_1 \cup M_2$ \square

Наслідок 7.1. *Мають місце рівності $g^t\Omega(x_0) = \Omega(g^t x_0) = \Omega(x_0)$.*

Зауваження 7.1. Необмежена півтраєкторія автономної системи може мати незв'язну ω -граничну множину (рис. 7.1)

Найпростішою ω -граничною множиною є положення рівноваги.

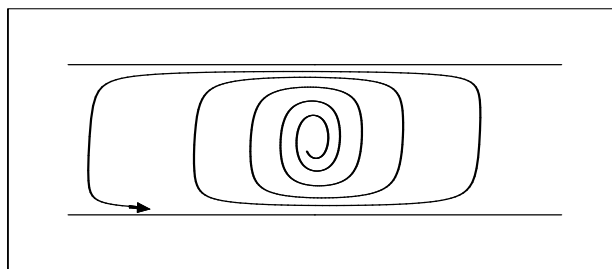


Рис. 7.1.

Твердження 7.1. Нехай $\Gamma_+(x_0)$ входить у деяку точку x_* , тобто існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} g^t x_0 = x_*$. Тоді якщо $x_* \in \mathcal{D}$, то x_* — положення рівноваги.

Доведення. Дійсно, $\Omega(x_0) = \{x_*\}$, а з властивості інваріантності ω -граничної множини випливає, що $g^t x_* = x_*$ для всіх $t \in \mathbf{R}$ \square

Переформулюємо означення асимптотичної півтраєкторії.

Означення 7.3. Додатна (від'ємна) півтраєкторія, ω -гранична (α -гранична) множина якої складається з однієї точки, називається *додатною (від'ємною) асимптотичною півтраєкторією*. Траєкторія, яка є об'єднанням додатної та від'ємної асимптотичних півтраєкторій, називається *двояко асимптотичною*. При цьому, якщо α - і ω -граничні точки такої траєкторії різні (тобто траєкторія виходить з однієї точки, а закінчується — в іншій), то вона називається *гетероклінічною траєкторією*; у протилежному випадку кажуть про *гомоклінічну двоякоасимптотичну траєкторію*.

7.1. Цикли. Періодичні точки потоку

Найпростішою, тривіальною траєкторією є положення рівноваги. Важливий клас нетривіальних траєкторій складають замкнені фазові криві або *цикли*.

Означення 7.4. Замкнена траєкторія автономної системи, відмінна від положення рівноваги, називається *циклом*.

Зауваження 7.2. При більш широкому трактуванні до класу циклів зараховують також жорданові криві, які є об'єднанням кількох нетривіальних траєкторій та положень рівноваги. Такі узагальнені цикли ми розглядати не будемо.

Як положення рівноваги, так і цикли часто виступають у ролі ω -граничних множин.

Означення 7.5. Точка $x_* \in \mathcal{D}$ називається *періодичною точкою потоку*, якщо знайдеться таке число T , що $g^T x_* = x_*$. Число T називається періодом точки x_* .

Отже, можна говорити, що цикли (у сенсі означення 7.4) — це траєкторії періодичних точок потоку.

Якщо T — період точки x_* , то таку ж властивість мають і всі числа kT , де $k \in \mathbf{Z}$. Цей факт є простим наслідком властивостей потоку. Надалі мова йтиме лише про додатні періоди.

Твердження 7.2. Якщо $f(x_*) \neq 0$ і існує пара таких $t_1 \neq t_2$, що $g^{t_1} x_* = g^{t_2} x_*$, то x_* — періодична точка потоку. При цьому знайдеться таке $T > 0$, що рух кожної точки кривої $\Gamma(x_*)$ — періодичний з найменшим додатним періодом T , тобто

$$g^{(t+T)}x = g^t x \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in \Gamma(x_*),$$

причому відображення $[t, t+T) \ni s \mapsto g^s x \in \mathcal{D}$ — взаємно однозначне.

Доведення. Нехай $t_1 < t_2$. Тоді $g^{(t_2-t_1)}x_* = x_*$, а це означає, що $\mathcal{P}_{x_*} := \{t > 0 : g^t x_* = x_*\}$ — множина додатних періодів точки x_* — містить точку $t_2 - t_1$. Визначимо $T := \inf \mathcal{P}_{x_*}$ і покажемо, що $T > 0$. Досить переконатись у тому, що існує таке число $a > 0$, що на відрізку $[0, a]$ немає точок множини \mathcal{P}_{x_*} . Однак цей факт відразу випливає з формули Тейлора

$$g^t x_* = x_* + t \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x_* + o(t) = x_* + t f(x_*) + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

і припущення про те, що $f(x_*) \neq 0$. Дійсно, $t f(x_*) + o(t) \neq 0$ для всіх досить малих значень t . Тепер покажемо, що $T \in \mathcal{P}_{x_*}$. Справді, за означенням точної нижньої межі знайдеться послідовність періодів $T_k \in \mathcal{P}_{x_*}$, яка збігається до T при $k \rightarrow \infty$. У послідовності рівностей $g^{T_k} x_* = x_*$ перейдемо до границі. Одержимо $g^T x_* = x_*$. Отже, T — найменший додатний період точки x_* .

Нехай T' — будь-який додатний період точки x_* , $x_1 = g^{T'} x_*$ — інша точка траєкторії $\Gamma(x_*)$. Оскільки $g^{T'} x_1 = g^{T'} \circ g^{T'} x_* = g^{2T'} x_* = g^{T'} x_1$, то T' є одночасно й періодом точки x_1 . Отже, $\mathcal{P}_{x_*} \subseteq \mathcal{P}_{x_1}$. Аналогічні міркування показують, що $\mathcal{P}_{x_1} \subseteq \mathcal{P}_{x_*}$. Звідси легко зробити висновок, що всі точки траєкторії $\Gamma(x_*)$ мають однакові найменші періоди, а також, що для всіх $t \in \mathbf{R}$ і $x \in \Gamma(x_*)$ відображення $[t, t+T) \ni s \mapsto g^s x \in \mathcal{D}$ — взаємно однозначне; адже в протилежному випадку на $\Gamma(x_*)$ знайшлася б точка з періодом, меншим за T \square

Твердження 7.3. Якщо $\Gamma(x_0)$ — цикл, відмінний від положення рівноваги, то $\Omega(x_0) = \Gamma(x_0)$.

Доведення. Позначмо через T найменший додатний період точки x_0 .

Покажемо спочатку, що $\Gamma(x_0) \subseteq \Omega(x_0)$. Справді, нехай $x \in \Gamma(x_0)$. Тоді існує $\tau \in [0, T)$ таке, що $x = g^\tau x_0$. Поклавши $t_k = \tau + kT$, $k = 1, 2, \dots$, маємо $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, і $x = g^{t_k} x_0$, $k = 1, 2, \dots$. Звідси $x \in \Omega(x_0)$.

Тепер покажемо, що $\Omega(x_0) \subseteq \Gamma(x_0)$. Справді, нехай $x_* \in \Omega(x_0)$. Тоді існує послідовність $\{t_k\}_{k=1,2,\dots}$ така, що $t_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, і $g^{t_k} x_0 \rightarrow x_*$, $k \rightarrow \infty$. Подамо кожне t_k у вигляді $t_k = i(k)T + \tau_k$, де $i(k) \in \mathbf{Z}$, а $\tau_k \in [0, T)$. Тоді $x_* = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{t_k} x_0$. Однак послідовність $\{\tau_k\}_{k=1,2,\dots}$ містить підпослідовність, збіжну до деякого τ_* . Тому точка $x_* = g^{\tau_*} x_0$ належить $\Gamma(x_0)$ \square

У випадку одновимірного фазового простору ω -граничними множинами півтраєкторій можуть бути лише положення рівноваги. Системи ж вимірності $n > 2$ можуть мати ω -граничні множини надзвичайно складної структури. На даний час досить повне дослідження цих множин удалося провести лише в окремих випадках. З цього погляду випадок $n = 2$, з одного боку, є нетривіальним, а з іншого — практично вичерпно вивченим.

Будова ω -граничних множин півтраєкторій двовимірних систем була описана А. Пуанкаре та І. Бендіксоном. Основні факти розробленої ними теорії викладено в наступному пункті.

7.2. Теорія Пуанкаре – Бендіксона

У цьому пункті ми будемо мати справу із системою (7.1) у випадку $n = 2$. Опишемо структуру ω -граничної множини півтраєкторії точки x_0 , для якої справджується таке припущення.

Припущення К. Додатна півтраєкторія точки x_0 належить деякому компактному $K \subset \mathcal{D}$, в якому векторне поле або не обертається в нуль, або має лише скінченну кількість нулів.

Півтраєкторія $\Gamma_+(x_0)$ може належати одному з чотирьох таких типів:

- I. Положення рівноваги.
- II. Асимптотична півтраєкторія.
- III. Цикл.
- IV. Не замкнена і не асимптотична півтраєкторія.

Випадок траєкторії першого типу не потребує коментарів. Для півтраєкторії другого типу $\Omega(x_0) = \{x_*\}$, причому, оскільки $x_* \in K \subset \mathcal{D}$, то x_* — положення рівноваги (Твердження 7.1). Якщо $\Gamma_+(x_0)$ — цикл, то $\Omega(x_0) = \Gamma(x_0)$ (Твердження 7.3). Отже, нам залишається проаналізувати будову $\Omega(x_0)$ для півтраєкторії типу IV.

З теореми 7.1 випливає, що коли точка x_* лежить у $\Omega(x_0)$, то траєкторія цієї точки $\Gamma(x_*)$ теж лежить у $\Omega(x_0)$. Таким чином, для розуміння будови ω -граничної множини потрібно перш за все з'ясувати, якими можуть бути траєкторії ω -граничних точок.

У подальших міркуваннях будемо використовувати такий допоміжний результат.

Лема 7.1. Нехай $x \in \mathcal{D}$ — неособлива точка векторного поля f і S — січна, що проходить через x . Тоді існує криволінійний чотирикутник $ABCD \subset \mathcal{D}$ (рис. 7.2) з такими властивостями: 1) точка x лежить усередині $ABCD$; 2) січна S перетинається з $ABCD$ по дузі EF , а траєкторія $\Gamma(x)$ — по дузі GH ; 3) сторони AB і CD є дугами січних векторного поля f , а сторони AD і BC — дугами траєкторій системи (7.1); 4) для кожної точки $x_0 \in \text{int } ABCD$ існують моменти t_-, t_0, t_+ такі, що $t_- < 0, t_+ > 0, t_- < t_0 < t_+$ і $g^{t_-}x_0 \in AB, g^{t_0}x_0 \in EF, g^{t_+}x_0 \in CD$, причому $\cup_{t \in (t_-, t_+)} g^t x_0 \subset \text{int } ABCD$ (дуга траєкторії точки x_0 на часовому інтервалі (t_-, t_+) лежить у $\text{int } ABCD$); крім того, $t_0 - t_- \geq \tau$ і $t_+ - t_0 \geq \tau$, де додатне число $\tau > 0$ можна вибрати не залежним від x_0 .

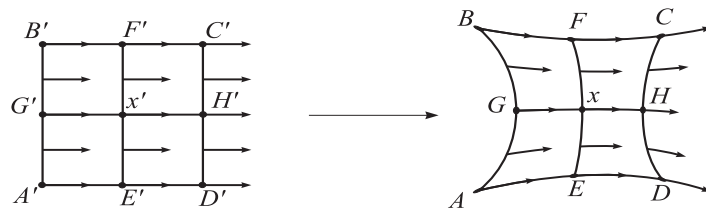


Рис. 7.2.

Доведення. Доведення випливає з теореми про випрямлення векторного поля в околі звичайної точки (теорема 3.1 та зауваження 3.5, п. 3.3). Справді, для випрямленого векторного поля в околі точки x' , зображеного в лівій частині рис. 7.2, усі потрібні властивості має досить малий квадрат $A'B'C'D'$ із центром у x' та відрізки $E'F', G'H'$. Чотирикутник $ABCD$ та дуги EF, GH є образами відповідно квадрата $A'B'C'D'$ та відрізків $E'F', G'H'$ при дії дифеоморфізму, що переводить випрямлене поле в поле f \square

Зауваження 7.3. Для довільного $\epsilon > 0$ криволінійний чотирикутник $ABCD$ можна вибрати настільки малим, щоб $t_+ - t_- < \epsilon$.

Твердження 7.4. Траєкторія ω -граничної точки не може перетинати будь-яку січну S векторного поля f більш ніж в одній точці.

Доведення. Припустимо, навпаки, що знайдеться точка $x_* \in \Omega(x_0)$, траєкторія якої перетинає деяку січну S принаймні у двох точках. Тоді можна вказати два послідовних моменти t_1, t_2 перетину траєкторією $\Gamma(x_*)$ січної S . Іншими словами, $t_1 < t_2$, $x_i := g^{t_i}x_* \in S$, $i = 1, 2$, але $g^t x_* \cap S = \emptyset$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$. Для строгого доведення цього інтуїтивно зрозумілого факту досить скористатися наведеною вище лемою 7.1.

Далі, дуга $\cup_{t \in [t_1, t_2]} g^t x_*$ траєкторії $\Gamma(x_*)$ та відкрита ділянка січної $\sigma \subset S$ між точками x_1 та x_2 утворюють жорданову криву γ . Ця крива обмежує деяку область G . При цьому можливі два випадки: 1) кожна точка $x \in \sigma$ є точкою строгого входу в область G ; при цьому G має властивість додатної півінваріантності: разом з кожною своєю точкою вона містить додатну півтраєкторію цієї точки; 2) кожна точка $x \in \sigma$ є точкою строгого виходу з області G ; при цьому G має властивість від'ємної півінваріантності: разом з кожною своєю точкою вона містить від'ємну півтраєкторію цієї точки (рис. 7.3). Строго доведення цього інтуїтивно зрозумілого факту легко випливає з леми 7.1.

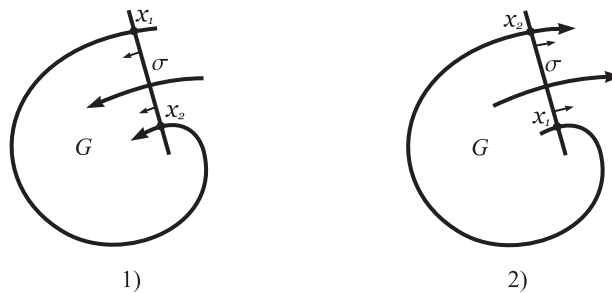


Рис. 7.3.

Покажемо тепер, що випадок 1) неможливий. Справді, у випадку 1) на траєкторії $\Gamma(x_*)$ можна вказати точки x^+ та x^- такі, що $x^+ \in G$, а $x^- \in \mathbf{R}^2 \setminus \text{cls } G$. Оскільки $\Gamma(x_*) \subseteq \Omega(x_0)$, то $x^+ \in \Omega(x_0)$, а тому існує послідовність $\{t_k\}$ така, що $g^{t_k}x_0 \rightarrow x^+$, коли $k \rightarrow \infty$. Починаючи з деякого номера k_G , усі точки $g^{t_k}x_0$ лежать у G . З додатної інваріантності G випливає тоді, що $g^t x_0 \in G$ для всіх $t \geq t_{k_G}$. Однак тоді, з одного боку, $x^- \notin \Omega(x_0)$, а з іншого, $x^- \in \Gamma(x_*) \subseteq \Omega(x_0)$. Отримали протиріччя. Так само можна довести, що й випадок 2) неможливий \square

Наслідок 7.2. Нехай $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ — довільна додатно або від'ємно півінваріантна область. Тоді не існує ω -граничної точки, траєкторія якої перетинається як з \mathcal{G} , так і з $\mathcal{D} \setminus \text{cls } \mathcal{G}$.

Лема 7.1 дозволяє одержати важливу інформацію про поведінку півтраєкторії $\Gamma_+(x_0)$ поблизу траєкторії $\Gamma(x_*)$ ω -граничної точки x_* , відмінної від положення рівноваги. З твердження, яке наводиться нижче, випливає, що $\Gamma_+(x_0)$ спіралевидно наближається до $\Gamma(x_*)$.

Твердження 7.5. *Нехай точка $x_* \in \Omega(x_0)$ не є положенням рівноваги, S — січна векторного поля f , яка проходить через x_* . Тоді на S визначені точки x_1, x_2, \dots послідовного перетину січної S півтраєкторією $\Gamma_+(x_0)$. При цьому $x_k \rightarrow x_*$, коли $k \rightarrow \infty$, усі точки послідовності $\{x_k\}$ розташовані по один бік від x_* на кривій S так, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ точка x_{k+1} лежить між x_k і x_* , а часові проміжки між кожними двома послідовними перетинами можна обмежити знизу одним і тим самим додатним числом.*

Доведення. Побудуємо згідно з лемою 7.1 чотирикутник $ABCD$ для точки $x = x_*$. Оскільки $x_* \in \Omega(x_0)$, то існує необмежена згори послідовність моментів часу, яким відповідають точки траєкторії $\Gamma_+(x_0)$, що лежать в $ABCD$. Однак тоді з урахуванням леми 7.1 точка x_0 під дією потоку безліч разів входить у $ABCD$ через сторону AB і виходить з нього через сторону CD , кожного разу перетинаючи дугу EF . Звідси й випливає існування послідовності точок $\{x_k\}$.

Покажемо, що точки x_1, x_2, \dots лежать по один бік від x_* . Припустимо, навпаки, що існує пара послідовних точок перетину $\Gamma_+(x_0)$ із S , розташованих по різні боки від x_* . Можемо позначити ці точки через x_1 та x_2 . Тоді ділянка півтраєкторії з кінцями в x_1 і x_2 разом з відкритою дугою січної між цими точками утворює жорданову криву, яка обмежує півінваріантну область G так, що реалізується один із випадків, зображених на рис. 7.3. І в першому, і в другому випадку траєкторія $\Gamma(x_*)$ містить точки як з G , так і з G , так і з $\mathcal{D} \setminus \text{cls } G$, а це неможливо з огляду на наслідок 7.2.

Аналогічними міркуваннями від супротивного легко довести, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ точка x_{k+1} лежить між x_k і x_* .

Нарешті, оскільки чотирикутник $ABCD$ можна вибрати як завгодно малим, то $x_k \rightarrow x_*$, коли $k \rightarrow \infty$ \square

Твердження 7.6. *Якщо виконується припущення К, то $\Omega(x_0)$ не містить незамкнених не асимптотичних півтраєкторій.*

Доведення. Припустимо, що $\Omega(x_0)$ містить точку x_* , для якої півтраєкторія $\Gamma_+(x_*)$ незамкнена і не асимптотична. Тоді ця півтраєкторія сама має непорожню ω -граничну множину $\Omega(x_*) \subseteq \Omega(x_0)$, яка складається більш ніж з однієї точки. Із зв'язності $\Omega(x_*)$ і припущення К випливає, що ця множина містить неособливу точку x_{**} . Однак тоді за твердженням 7.5 $\Gamma_+(x_*)$ мусила б безліч разів перетинати січну, що проходить через x_{**} . Це, однак, неможливо з огляду на твердження 7.4. Отримали протиріччя.

Аналогічні міркування доводять, що не існує незамкненої неасимптотичної від'ємної півтраєкторії ω -граничної точки \square

Підсумком наведених міркувань є така теорема.

Теорема 7.2. Нехай $f(x_0) \neq 0$ і для $\Gamma_+(x_0)$ виконується припущення К. Тоді реалізується один з перелічених нижче випадків:

1) $\Gamma_+(x_0)$ асимптотична траєкторія, тобто існує границя $\lim_{t \rightarrow +\infty} g^t x_0 =: x_*$. Тоді $\Omega(x_0) = x_*$.

2) $\Gamma_+(x_0)$ — цикл. Тоді $\Gamma(x_0) = \Omega(x_0)$.

3) $\Gamma_+(x_0)$ незамкнена неасимптотична півтраєкторія, ω -гранична множина якої не містить положень рівноваги. Тоді $\Omega(x_0)$ — цикл, на який $\Gamma_+(x_0)$ навивається у вигляді спіралі.

4) $\Gamma_+(x_0)$ незамкнена неасимптотична півтраєкторія, ω -гранична множина якої містить положення рівноваги. Тоді $\Omega(x_0)$ є зв'язним об'єднанням положень рівноваги і двоякоасимптотичних траєкторій, серед яких можуть бути як гомо-, так і гетероклінічні. Півтраєкторія $\Gamma_+(x_0)$ навивається на $\Omega(x_0)$ у вигляді спіралі.

Доведення. Додаткового роз'яснення потребують лише випадки 3) і 4). У випадку 3) з огляду на твердження 7.6 траєкторія будь-якої точки $x_* \in \Omega(x_0)$ може бути лише циклом. Із зв'язності $\Omega(x_0)$ випливає тоді, що $\Omega(x_0) = \Gamma(x_*)$.

У випадку 4) $\Omega(x_0)$, як зв'язна множина, не може складатися лише з положень рівноваги. Отже, вона містить і нетривіальні траєкторії, кожна з яких може бути лише двоякоасимптотичною. Граничні точки кожної такої траєкторії є положеннями рівноваги, які належать $\Omega(x_0)$, оскільки ця множина замкнена. Поведінку $\Gamma_+(x_0)$ поблизу $\Omega(x_0)$ пояснює твердження 7.5 \square

Один з варіантів реалізації випадку 4) з наведеної вище теореми зображено на рис. 7.4. Тут ω -гранична множина складається з двох положень рівноваги, трьох гомоклінічних і двох гетероклінічних траєкторій.

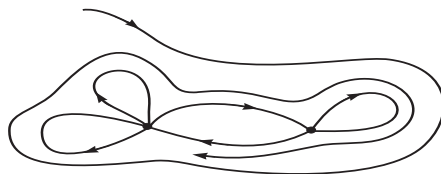


Рис. 7.4.

7.3. Граничні цикли

З теореми 7.2 випливає, що коли деяка обмежена множина містить додатну півтраєкторію системи (7.1) і не містить положень рівноваги, то зазначена півтраєкторія навивається на цикл.

Означення 7.6. Цикл який є ω - або α -граничною множиною деякої півтраєкторії, називається *граничним циклом*.

Твердження 7.7. Кожен ізольований цикл системи (7.1) (тобто цикл, у деякому околі якого немає інших циклів та положень рівноваги) є граничним циклом.

Доведення. Нехай x_* — довільна точка ізольованого циклу, T — його найменший додатний період. Побудуємо для x_* чотирикутник $ABCD$ з леми 7.1. Якщо точка $x_0 \neq x_*$ на дузі EF січної S розташована в досить малому околі U точки x_* , то за теоремою про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових значень і з урахуванням рівності $g^T x_* = x_*$ точка $g^T x_0$ буде належати $ABCD$. Властивість цього чотирикутника пропускати через себе траєкторії дозволяє зробити важливий висновок: існує такий окіл U точки x_* на кривій EF , що кожна точка x_0 з цього околу під дією потоку спочатку вийде з чотирикутника $ABCD$, а потім у деякий момент $\tau(x_0) > 0$, близький до T , знову потрапить на EF . При цьому функція $\tau(x)$ обмежена й відокремлена від 0 в U , і якщо $U \ni x \rightarrow x_*$, то $\tau(x) \rightarrow T$. Цей факт впливає із зауваження 7.3.

Таким чином, виникає відображення

$$U \ni x \rightarrow P(x) := g^{\tau(x)} x \in S,$$

яке називається *відображенням Пуанкаре* (у російськомовній літературі замість цього використовують термін «функція послідования») (рис. 7.5).

Точка $P(x_0)$ лежить на січній по той самий бік від x_* , що й x_0 , інакше $\Gamma_+(x_0)$ перетинала б цикл $\Gamma(x_0)$.

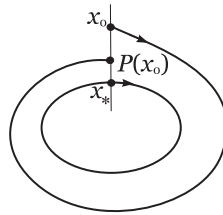


Рис. 7.5.

Оскільки ми зробили припущення про ізольованість циклу, то за умови достатньої малості околу U маємо $P(x_0) \neq x_0$. Для визначеності при-

пустимо, що $P(x_0)$ лежить між x_* та x_0 (у протилежному випадку наші міркування стосувалися б від'ємної півтраєкторії $\Gamma_-(x_0)$). Тоді $P(x_0) \in U$, і будуть визначені всі ітерації відображення Пуанкаре: $P(x_0)$, $P^2(x_0) = P \circ P(x_0), \dots, P^i(x_0) = \underbrace{P \circ \dots \circ P}_i(x_0), \dots$. При цьому $P^i(x_0)$ лежить між

$P^{i-1}(x_0)$ та $P^{i+1}(x_0)$. Отже, маємо монотонну, обмежену, а тому збіжну послідовність точок $\{x_i := P^i(x_0)\}_{i=0,1,2,\dots}$, які лежать на відрізку з кінцями в x_0 та x_* . Залишається показати, що $\lim_{i \rightarrow \infty} P^i(x_0) := x^* = x_*$.

Припустимо, навпаки, що $x^* \neq x_*$. Тоді можна було б указати послідовність натуральних чисел $\{i(j)\}_{j=1,2,\dots}$ таку, що існує скінченна додатна границя $T^* := \lim_{j \rightarrow \infty} \tau(x_{i(j)})$. Звідси випливало б, що $g^{T^*} x^* = x^*$, а це суперечить ізольованості циклу $\Gamma(x_*)$ \square

Серед граничних циклів розрізняють *стійкі, нестійкі, напівстійкі*.

Стойкий (нестойкий) цикл є ω -граничною (α -граничною) множиною будь-якої додатної (від'ємної) півтраєкторії, що починається в досить малому околі циклу. Усі додатні (від'ємні) півтраєкторії точок, що лежать у досить малому околі стійкого (нестійкого) циклу, намотуються на нього, коли $t \rightarrow \infty$ (коли $t \rightarrow -\infty$).

Можливий випадок, коли цикл $\Gamma(x_*)$ розрізає деякий свій окіл на дві області D_1 і D_2 так, що для кожної $x_0 \in D_1$ цикл $\Gamma(x_*)$ є ω -граничною множиною півтраєкторії $\Gamma_+(x_0)$, а для кожної $x_0 \in D_2$ цикл $\Gamma(x_*)$ є α -граничною множиною півтраєкторії $\Gamma_-(x_0)$. У такому разі цикл $\Gamma(x_*)$ називають напівстійким.

Цикли перелічених типів зображено відповідно на рис.7.6 а, б, в.

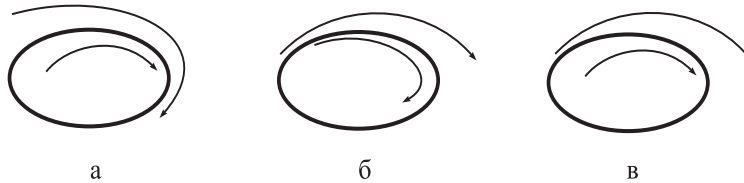


Рис. 7.6.

Уведемо на січній S в околі точки x_* локальну координату u , так щоб $u(x_*) = 0$. Тоді відображення Пуанкаре задається скалярною функцією $p(u)$, визначеною в околі нуля. Можна показати (це буде зроблено в п. 8.1.), що коли січна й векторне поле f мають клас гладкості C^r (ми припускаємо, що $r \geq 1$), то й функція $p(u)$ r -разів неперервно диференційовна. Крім того, ця функція має такі властивості:

- справджується рівність $p(0) = 0$ (x_* — нерухома точка відображення Пуанкаре);
- функція $p(u)$ строго монотонно зростає (в протилежному випадку знайшлися б дві різні траєкторії, що перетинаються);
- при $u \neq 0$ маємо $p(u)u > 0$ (наслідок перших двох властивостей);
- виконується нерівність $p'(0) > 0$ (наслідок попередньої властивості).

Зображенням на рис. 7.6 типам граничних циклів відповідають три типи розташування графіка функції $y = p(u)$ відносно бісектриси $y = u$, показаних на рис. 7.7. Тут також показано графічний спосіб побудови точок $u_i = p^i(u_0)$, $i = 1, 2, \dots$ за допомогою так званих діаграм (східців) Ламерея.

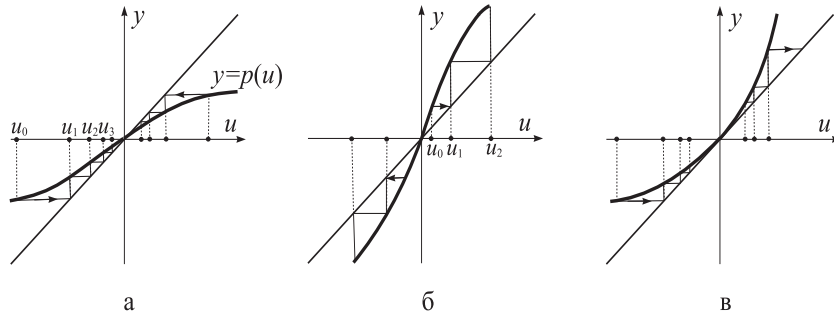


Рис. 7.7.

Серед граничних циклів виділяють *грубі (невироджені)* і *негрубі (вироджені)* відносно збурень векторного поля f . Стійкий (нестійкий) грубий цикл характеризує умова $p'(0) < 1$ ($p'(0) > 1$), а негрубий — умова $p'(0) = 1$. Напівстійкий цикл завжди негрубий, причому одночасно з рівністю $p'(0) = 1$ виконується одна з таких умов: 1) $p''(0) \neq 0$; 2) $p^{(k)}(0) = 0$, $k = 2, \dots, 2m + 1$, але $p^{(2m+2)}(0) \neq 0$, де m — деяке натуральне число.

7.4. Збурення граничних циклів

Розглянемо, як впливають збурення на фазовий портрет системи (7.1) ($n = 2$) в околі граничного циклу.

Для збуреної системи

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon f_1(x),$$

де $f_1 \in C^r(D \mapsto \mathbf{R}^2)$, а ϵ — малий параметр ($|\epsilon| \ll 1$), з урахуванням теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші за параметрами визначене

збурене відображення Пуанкаре $P(x, \epsilon)$, залежне від малого параметра ϵ . Можна показати (це буде зроблено в п. 9.2.), що функція $p(u, \epsilon)$, яку породжує збурене відображення Пуанкаре після введення локальної координати u на січній S , належить класу C^r . При цьому $p(u, 0) = p(u)$.

Розглянемо випадок грубого циклу. Для того, щоб збурена система мала цикл, близький до циклу незбуреної системи, досить, щоб рівняння

$$p(u, \epsilon) - u = 0$$

мало розв'язок $u = u(\epsilon)$, близький до нуля. Оскільки $p(0, 0) = 0$ і $p'_u(0, 0) - 1 \neq 0$, то за теоремою про неявну функцію в досить малому околі точки $(0, 0)$ дійсно існує єдиний неперервний розв'язок $u(\epsilon)$, причому $u(\epsilon) = O(\epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Звідси випливає, що при $|\epsilon| \ll 1$ графік функції $y = p(u, \epsilon)$ перетинає бісектрису $y = u$ в точці з абсцисою $u(\epsilon)$, і в точці перетину кутовий коефіцієнт його дотичної $p'_u(u(\epsilon), \epsilon)$ буде близьким до $p'(0)$. Отже, у випадку, що розглядається, тип діаграми Ламерея при малих збуреннях не змінюється.

Наведені міркування дозволяють зробити такий висновок: при малих збуреннях грубий цикл не руйнується, а лише злегка деформується. Тип його стійкості, а разом з тим і характер поведінки траєкторій в його малому околі, зберігається.

Збурення системи з негрубим циклом у загальному випадку супроводжується якісними перебудовами фазового портрету. Так, під дією збурень півстійкого циклу, для якого $p''(0) \neq 0$, може відбутися його роздвоєння (біфуркація²) на два грубих цикла різних типів стійкості. Один з цих циклів міститься в області, обмеженій іншим. У цій ситуації графік функції $y = p(u, \epsilon)$ має вигляд, зображений на рис. 7.8 а. Можливий випадок, коли графік цієї функції має вигляд, зображений на рис. 7.8 б. Тоді збурення руйнують напівстійкий цикл.

Якщо $p'(0) = 1$, $p''(0) = 0$, а $p'''(0) \neq 0$, то графік функції $y = p(u)$ дотикається прямої $y = u$ в точці $(0, 0)$, яка для нього є точкою перегину. Тоді при малій деформації такого графіка обов'язково залишається хоча б одна точка його перетину з прямою $y = u$, причому ця точка припиняє бути точкою дотику. У загальному випадку в процесі малого деформування або залишається одна точка перетину збуреним графіком прямої $y = u$, або з'являється відразу три точки перетину (див. рис. 7.8 в).

З цих міркувань випливає, що деформований унаслідок збурень півстійкий цикл, як правило, або перетворюється на грубий, або розпадається на

²Термін «біфуркація» походить від латинського bifurcus — роздвоєний. У географії, наприклад, він означає поділ течії річки на два відгалуження. У сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь цей термін використовується в ширшому розумінні для позначення якісних перетворень фазових портретів систем, залежних від параметрів, коли останні змінюються в околі певних критичних значень.

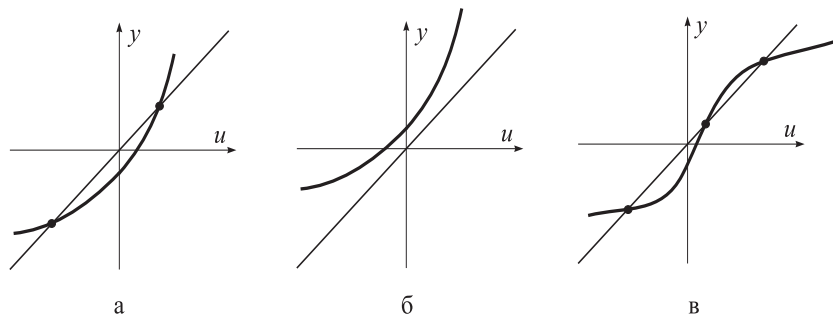


Рис. 7.8.

три грубих цикли з почерговою зміною характеру їх стійкості. Останній випадок має місце, коли, наприклад, графік функції $y = p(u, \epsilon)$ має вигляд, зображений на рис. 7.8 в.

7.5. Структурно-стійкі системи

Наведемо без доведення критерій структурної стійкості двовимірних систем, заданих в обмежених замкнених областях (див. [2]).

Теорема 7.3. *Нехай D — обмежена область площини, межа якої є жордановою кривою з неперервною дотичною, і нехай $f \in C^1(\text{cls } D \mapsto \mathbf{R}^2)$ — векторне поле в $\text{cls } D$, яке не дотикається до межі ∂D у кожній її точці. Аби породжена цим векторним полем автономна система була структурно-стійкою, необхідно й досить, щоб виконувалися такі умови:*

- 1) Система має лише скінченне число положень рівноваги й усі вони гіперболічні, тобто якщо $f(x_*) = 0$, то $\text{Re } \lambda(f'(x_*)) \neq 0$.
- 2) Система не має двоякоасимптотичних траєкторій, які з'єднують сідла.
- 3) Система має лише скінченне число циклів і всі вони не вироджені, тобто для кожного циклу значення похідної відповідного відображення Пуанкаре в його нерухомій точці не дорівнює 1.

7.6. Топологічний портрет системи на площині

Основна задача якісного аналізу конкретної автономної системи на площині полягає в побудові фазового портрета цієї системи, тобто в описі всіх тих властивостей розбиття фазового простору системи на траєкторії, які залишаються інваріантними при гомеоморфізмах (коли йдеться про топологічний портрет) або дифеоморфізмах (при більш тонкому описі) її фазового простору. Виявляється, що для побудови топологічного портрета до-

силь обмежитись вивченням поведінки не всіх, а лише деяких, так званих особливих траєкторій.

Означення 7.7. Півтраєкторія $\Gamma_+(x_*)$ називається орбітально стійкою, якщо для довільного $\epsilon > 0$ знайдеться δ -окіл $B_\delta(x_*)$ точки x_* такий, що для кожної точки $x_0 \in B_\delta(x_*)$ півтраєкторія $\Gamma_+(x_0)$ належить ϵ -околу півтраєкторії $\Gamma_+(x_*)$. Аналогічно (із заміною індексів «+» на «-») визначається орбітально стійкість від'ємної півтраєкторії.

Якщо півтраєкторія $\Gamma_+(x_*)$ (півтраєкторія $\Gamma_-(x_*)$) орбітально стійка, то траєкторія $\Gamma(x_*)$ називається ω -орбітально стійкою (α -орбітально стійкою).

Траєкторія, яка є одночасно ω -орбітально стійкою і α -орбітально стійкою, називається орбітально стійкою.

Траєкторія, яка не є орбітально стійкою або яка є положенням рівноваги, називається особливою.

Асимптотична орбітально нестійка додатна (від'ємна) півтраєкторія називається ω -сепаратрисою (α -сепаратрисою).

Наведемо без доведення таке твердження (див. [4]).

Теорема 7.4. *Кожна особлива траєкторія належить одному з таких трьох типів траєкторій:*

- 1) положення рівноваги;
- 2) граничний цикл;
- 3) назамкнена траєкторія, яка містить хоча б одну з двох типів сепаратрис.

Надалі будемо припускати, що досліджувана система визначена в деякій скінченній області D і має скінченну кількість особливих траєкторій.

Особливі траєкторії розбивають певним чином область D на скінченну кількість підобластей D_1, \dots, D_N . Якщо межа підобласті D_j складається лише з особливих траєкторій, то таку підобласть називають чарункою.

Наведемо без доведення таке твердження (див. [4]).

Теорема 7.5. *Якщо всередині чарунки D_j існує хоча б один цикл, то всі траєкторії в D_j є циклами, вкладеними один в один, причому кільцева область, обмежена будь-якою парою циклів, належить D_j . У цьому випадку область D_j — двозв'язна.*

Якщо ж усередині D_j не існує жодного цикла, то всі траєкторії точок з D_j незамкнені й мають одні й ті ж самі α - та ω -граничні множини. У цьому випадку область D_j не більш ніж двозв'язна. Якщо вона двозв'язна, тобто $\partial D_j = \gamma_{1j} \cup \gamma_{2j}$, де γ_{1j} та γ_{2j} — компоненти зв'язності межі (вони є зв'язними замкненими неперетинними множинами), то одна з цих компонент є ω -граничною, а інша — α -граничною множинами для всіх траєкторій із чарунки D_j .

Приклади однозв'язної та двозв'язної чарунок наведено на рис. 7.9.

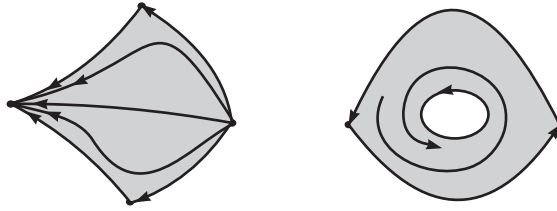


Рис. 7.9.

Для того, щоб остаточно побудувати топологічний портрет двовимірної автономної системи, потрібно вивчити розташування чарунок та з'ясувати характер поведінки траєкторій усередині них. З цією метою потрібно: 1) дослідити характер положень рівноваги та поведінку траєкторій в їхніх околах; 2) установити взаємне розташування інших особливих траєкторій, які є граничними множинами; 3) дослідити поведінку сепаратрис, які не є граничними множинами.

Спроба реалізації запропонованого плану побудови топологічного портрета автономної системи наштовхується на дуже складну задачу визначення числа граничних циклів. У випадку, коли праві частини системи — поліноми, відповідна задача пов'язана з другою частиною знаменитої 16-ї проблеми Гільберта. У сучасному формулюванні вона звучить так.

Нехай праві частини двовимірної автономної системи — поліноми степеня n . Чи можна число граничних циклів цієї системи оцінити зверху числом n^q , де q — деяка універсальна стала?

Протягом тривалого часу вважалося, що теорема про скінченність числа граничних циклів поліноміальної системи доведена у 1923 р. французьким математиком А. Дюлаком. Однак через 60 років Ю. Ільяшенко виявив у міркуваннях Дюлака похибку. Правильне доведення теореми Дюлака було опубліковане Ю. Ільяшенко у 1992 р. На розв'язання сформульованої вище проблеми Гільберта претендували російські математики Петровський і Ландіс. Однак їхні оцінки числа граничних циклів виявилися помилковими.

8. Окіл циклу автономної системи

Розглянемо в області $D \subset \mathbf{R}^n$ автономну систему

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x) \in C^r(D \mapsto \mathbf{R}^n). \quad (8.1)$$

Будемо припускати, що вона визначає потік $(D, \{g^t\}_{t \in \mathbf{R}})$.

Нагадаємо, що замкнена траєкторія автономної системи, відмінна від положення рівноваги, називається *циклом*. Задача про існування циклів є

однією з головних при дослідженні автономних систем. Особливе значення мають цикли, які притягують до себе інші траєкторії. Такі цикли називаються *граничними*. З ними ми вже зустрічалися при вивченні ω -граничних множин.

8.1. Метод перерізу Пуанкаре

Нехай $x_* \in D$ — періодична точка потоку, відмінна від положення рівноваги, T — її найменший додатний період.

Дослідження поведінки траєкторій автономної системи в околі її циклу $\Gamma(x_*)$ можна звести до вивчення ітерацій так званого відображення Пуанкаре. Воно будується таким чином. Через точку x_* ортогонально до вектора $f(x_*)$ проводимо гіперплощину Π . Якщо точка $x_0 \in \Pi$ знаходиться досить близько до x_* , то під дією потоку за час, близький до T , вона потрапляє в точку $x_1 \in \Pi$. Виникає відображення перетину деякого кола точки x_* з гіперплощиною Π у цю ж гіперплощину (рис. 8.1).

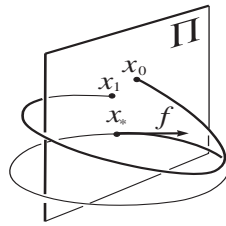


Рис. 8.1.

Наведемо строге обґрунтування коректності цієї конструкції. Усюди надалі без обмеження загальності будемо вважати, що $x_* = 0$.

Твердження 8.1. *Нехай $f(x) \in C^r(D \mapsto \mathbf{R}^n)$. Тоді існує куля $B(0) \subset \mathbf{R}^n$ із центром у точці 0 і така функція $\tau(x) \in C^r(B(0) \mapsto \mathbf{R})$, що $\tau(0) = T$ і $g^{\tau(x)}x \in \Pi$ для кожного $x \in B(0)$.*

Доведення. Оскільки гіперплощину Π можна задати рівнянням $\langle f(0), x \rangle = 0$, то $\tau(x)$ будемо шукати як неявну функцію, визначену співвідношенням $F(t, x) := \langle f(0), g^t x \rangle = 0$. Функція $F(t, x)$ має такі властивості: 1) $F(t, x) \in C^r(D \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R})$; 2) $F(T, 0) = \langle f(0), g^T 0 \rangle = \langle f(0), 0 \rangle = 0$; 3) $\frac{\partial F(T, 0)}{\partial t} = \langle f(0), \frac{d}{dt} \Big|_{t=T} g^t 0 \rangle = \langle f(0), f(0) \rangle \neq 0$. Отже, усі умови теореми про неявну функцію виконані і в деякій кулі $B(0)$ шукана функція $t = \tau(x) \in C^r(B(0) \mapsto \mathbf{R})$ існує \square

Означення 8.1. Відображення

$$P : \Pi \cap B(0) \mapsto \Pi$$

називається (локальним) відображенням Пуанкаре, породженим автономною системою (8.1) в околі циклу $\Gamma(0)$.

8.2. Лінеаризація відображення Пуанкаре

Вивчення властивостей відображення Пуанкаре P , яке має нерухому точку 0 , доцільно розпочати з оператора його лінійної частини $P'(0) : \Pi \mapsto \Pi$. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартний базис у \mathbf{R}^n . Без обмеження загальності можна вважати, що $e_n = f(0)/\|f(0)\|$. Тоді в координатах x_1, \dots, x_n , пов'язаних з базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$, гіперплощина Π задається рівнянням

$$\Pi : x_n = 0,$$

координатами на $\Pi \in x_1, \dots, x_{n-1}$, а компоненти відображення Пуанкаре мають вигляд

$$P_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \langle g^{\tau(x)}x, e_i \rangle \Big|_{x_n=0}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Тепер зрозуміло, що матриця оператора $P'(0)$ у базисі $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ одержується викреслюванням останнього рядка й останнього стовпця з матриці Якобі $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^{\tau(x)}x$. Установимо зв'язок між матрицею оператора $P'(0)$ і матрицею монодромії системи у варіаціях відносно періодичного розв'язку $g^t 0$. Нагадаємо, що ця система має вигляд

$$\dot{x} = f'_x(g^t 0)x, \quad (8.2)$$

а її матрицею монодромії є $X(T)$, де

$$X(t) := \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^t x$$

— нормована в точці $t = 0$ фундаментальна матриця системи (8.2).

Справді, очевидно, що $X(0) = \text{Id}$, а оскільки $\frac{\partial}{\partial t} g^t x = f(g^t x)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} g^t x &= \frac{\partial}{\partial x} f(g^t x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^t x = \left(f'_x(g^t x) \frac{\partial g^t x}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \Rightarrow \\ \dot{X}(t) &= f'_x(g^t 0)X(t). \end{aligned}$$

Теорема 8.1. Нехай $f(0) \parallel e_n$. Тоді матриця оператора $P'(0)$ у базисі $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ одержується шляхом викреслювання останнього рядка й останнього стовпця з матриці $X(T)$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^{\tau(x)}x &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^{\tau(x)}0 + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^T x = \\ &= \left[\tau'_{x_1}(0) \frac{d}{dt} g^t 0, \dots, \tau'_{x_n}(0) \frac{d}{dt} g^t 0 \right] \Big|_{t=T} + X(T) = \tau'_{x_n}(0) f(0) + X(T). \end{aligned}$$

Тут ураховано, що всі компоненти, крім n -ї, у вектора $f(0)$ дорівнюють 0. З цієї ж причини викреслювання останнього рядка й останнього стовпця у матриць $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} g^{\tau(x)} x$ та $X(T)$ дає один і той самий результат — матрицю оператора $P'(0)$ \square

Домовимось надалі ототожнювати оператор $P'(0)$ з його матрицею в базисі $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, а гіперплощину Π з координатним простором $\mathbf{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1})\}$. Дослідимо зв'язок між власними числами матриць $X(T)$ та $P'(0)$.

Твердження 8.2. *Вектор $f(0)$ є власним вектором матриці $X(T)$, який відповідає власному числу 1.*

Доведення. Продиференціювавши рівність $\frac{d}{dt} g^t 0 = f(g^t 0)$, бачимо, що функція $\xi(t) := \frac{d}{dt} g^t 0 \in T$ -періодичним розв'язком системи у варіаціях (8.2), який задовольняє початкову умову $\xi(0) = f(0)$. Тому $\xi(t) = X(t)f(0)$. З T -періодичності $\xi(t)$ випливає, що $\xi(T) = f(0)$. Отже, $X(T)f(0) = f(0)$ \square

Теорема 8.2. *Упорядкуємо власні числа μ_1, \dots, μ_n матриці $X(T)$ (мультиплікатори) так, що $\mu_n = 1$. Тоді власними числами матриці $P'(0)$ будуть числа μ_1, \dots, μ_{n-1} .*

Доведення. Дійсно, з твердження 8.2 випливає, що $X(T)e_n = e_n$, а отже, останній стовпець матриці $X(T)$ — це вектор e_n . На основі теореми 8.1 приходимо до висновку, що $\det(X(T) - \lambda \text{Id}) = \det(P'(0) - \lambda \text{Id})(1 - \lambda)$. Звідси й дістаємо потрібний результат \square

Теорема 8.3. *Нехай матриця монодромії системи у варіаціях відносно періодичного розв'язку $g^t 0$ має $n - 1$ мультиплікатор за модулем менший ніж 1. Тоді $\Gamma(0)$ — локальний атрактор: існує $(n-1)$ -вимірний окіл $U(0) \subset \Pi$ точки 0 такий, що*

$$\min_{y \in \Gamma(0)} \|y - g^t x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x \in U(0).$$

Доведення. Спочатку покажемо, що існує $(n-1)$ -вимірний окіл $U(0) \subset \Pi$ точки 0, на якому визначені всі ітерації $P^k(x) := \underbrace{P \circ \dots \circ P}_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$

Добре відомо, що яке б не було мале $\sigma > 0$, знайдеться невиводжена матриця H_σ (у загальному випадку з комплексними елементами) така, що $H_\sigma^{-1} P'(0) H_\sigma = M + N_\sigma$, де $M := \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$, N_σ — нільпотентна матриця, для якої $\|N_\sigma\| \leq \sigma$.

Спосіб побудови матриці H_σ легко зрозуміти з таких міркувань. Нехай A — $(m \times m)$ -вимірна матриця, яка має єдине власне число λ і нормальна

форма якої є $(m \times m)$ -клітиною Жордана. Тоді існує базис $\{g_j\}_{j=1}^m$ в \mathbf{C}^m такий, що

$$Ag_j = \lambda g_j + g_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad g_0 := 0.$$

Домноживши j -ту рівність на σ^j , $j = 1, \dots, m$, матимемо:

$$A\sigma^j g_j = \lambda \sigma^j g_j + \sigma(\sigma^{j-1})g_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Отже, поклавши $h_j = \sigma^j g_j$, дістанемо

$$Ah_j = \lambda h_j + \sigma h_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким чином, матриця A подібна до матриці $\lambda \text{Id} + \sigma N$, де N — нільпотентна матриця.

Уведемо нову норму в Π формулою $\|x\|_\sigma := \|H_\sigma^{-1}x\|$. Покладемо $P_1(x) := P(x) - P'(0)x$ і

$$\alpha_\sigma(x) := \frac{\|P_1(x)\|_\sigma}{\|x\|_\sigma}.$$

Зрозуміло, що $\alpha_\sigma(x) \rightarrow 0$, $\|x\|_\sigma \rightarrow 0$. Тепер для кожного $x \in B(0) \cap \Pi$ маємо

$$\begin{aligned} \|P(x)\|_\sigma &\leq \|P'(0)x\|_\sigma + \alpha_\sigma(x)\|x\|_\sigma = \|H_\sigma^{-1}P'(0)H_\sigma H_\sigma^{-1}x\| + \alpha_\sigma(x)\|x\|_\sigma \leq \\ &\leq \|(M + N_\sigma)H_\sigma^{-1}x\| + \alpha_\sigma(x)\|x\|_\sigma \leq [\rho + \sigma + \alpha_\sigma(x)]\|x\|_\sigma, \end{aligned}$$

де $\rho := \max_{1 \leq i \leq n-1} |\mu_i|$. Легко бачити, що числа $q \in (\rho, 1)$, $\sigma = \sigma(q) > 0$ і $\delta = \delta(\sigma) > 0$ можна вибрати так, щоб $U(0) := \{x \in \Pi : \|x\|_\sigma < \delta\} \subset \Pi \cap B(0)$ і виконувалась нерівність

$$\rho + \sigma + \alpha_\sigma(x) < q \quad \forall x \in U(0).$$

Тепер зрозуміло, що $\|P(x)\|_\sigma \leq q\|x\|_\sigma$ і, зокрема, $P : U(0) \mapsto U(0)$. Звідси й випливає, що для кожного $x \in U(0)$ визначені всі ітерації $P^k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, причому

$$\|P^k(x)\|_\sigma \leq q^k \|x\|_\sigma \quad \forall x \in U(0). \quad (8.3)$$

Оскільки норми $\|\cdot\|_\sigma$ та $\|\cdot\|$ еквівалентні, то звідси випливає, що $\|P^k(x)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, для кожного $x \in U(0)$.

Доведемо, що під дією потоку кожна точка $x \in U(0)$ наближається до циклу $\Gamma(0)$, коли $t \rightarrow \infty$. Без обмеження загальності можна вважати, що число δ вибране так, що

$$\frac{T}{2} < \tau(x) < 2T \quad \forall x \in U(0).$$

Позначимо через $T_k(x)$ момент k -го перетину додатною півтраєкторією точки x площини Π , $T_0(x) = 0$. Оскільки

$$g^{T_k(x)}x = P^k(x) = g^{\tau(P^{k-1}(x))}P^{k-1}(x) = g^{\tau(P^{k-1}(x))}g^{T_{k-1}(x)}x,$$

то $T_k(x) = T_{k-1}(x) + \tau(P^{k-1}(x))$ і

$$\frac{T}{2} < T_k(x) - T_{k-1}(x) < 2T \quad \forall x \in U(0).$$

Зрозуміло, що для кожного $t \geq 0$ існує ціле $k(t, x) \geq 0$ таке, що $t \in [T_k(t, x), T_{k(t, x)+1}(x))$. Тоді $t_1(t, x) := t - T_k(t, x) \in [T/2, 2T]$ і

$$\begin{aligned} \min_{y \in \Gamma(0)} \|y - g^t x\| &\leq \|g^{t_1(t, x)} 0 - g^t x\| = \|g^{t_1(t, x)} 0 - g^{t_1(t, x)} P^{k(t, x)}(x)\| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, 2T]} \|g^t 0 - g^t P^{k(t, x)}(x)\|. \end{aligned}$$

Зауваживши, що $\lim_{z \rightarrow 0} \max_{t \in [0, 2]} \|g^t 0 - g^t z\| = 0$ і $k(t, x) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, маємо $\min_{y \in \Gamma(0)} \|y - g^t x\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in U(0)$ \square

Означення 8.2. Цикл $\Gamma(0)$ називається орбітально асимптотично стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta \in (0, \varepsilon)$, що для кожного x із δ -околу циклу $\Gamma(0)$ і довільного $t \geq 0$ точка $g^t x$ належить ε -околу циклу $\Gamma(0)$ і

$$\max_{y \in \Gamma(0)} \|y - g^t x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Проаналізувавши доведення теореми 8.3, приходимо до висновку, що її умови гарантують орбітальну стійкість циклу $\Gamma(0)$. Більше того, має місце таке твердження.

Теорема 8.4 (про асимптотичну фазу). Нехай виконуються умови теореми 8.3. Тоді існує $(n - 1)$ -вимірний окіл $U(0) \subset \Pi$ точки 0 і функція $\theta(x) \in C(U(0)) \mapsto \mathbf{R}$ такі, що

$$\|g^t x - g^{t-\theta(x)} x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in U(0).$$

Доведення. Визначимо $U(0)$ і $T_k(x)$ так само, як і в теоремі 8.3. Нехай $t \in [T_k(x), T_{k+1}(x))$, $t_1 := t - T_k(x)$. Тоді, вважаючи $\theta(x)$ поки що невідомою функцією, з урахуванням рівності $g^{kT} 0 = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, маємо

$$\begin{aligned} g^t x &= g^{t_1} g^{T_k(x)} x = g^{t_1} P^k(x), \\ g^{t-\theta(x)} 0 &= g^{t_1} g^{T_k(x)-\theta(x)} 0 = g^{t_1} g^{T_k(x)-kT-\theta(x)} 0. \end{aligned}$$

Оскільки $t_1 \in [0, 2T]$, $P^k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то для доведення теореми досить показати, що функцію $\theta(x)$ можна вибрати так, щоб

$$T_k(x) - kT - \theta(x) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Вибір $\theta(x)$ будемо здійснювати на основі таких міркувань. Легко бачити, що $T_k(x) = \tau(x) + \tau(P(x)) + \dots + \tau(P^{k-1}(x))$. Тому

$$T_k(x) - kT = \sum_{i=0}^{k-1} [\tau(P^i(x)) - T] = \sum_{i=0}^{k-1} [\tau(P^i(x)) - \tau(0)].$$

Якщо б ряд $\sum_{i=0}^{\infty} [\tau(P^i(x)) - \tau(0)]$ збігався, то природно було б визначити $\theta(x)$ як його суму. Тоді $r_k(x) := \theta(x) - (T_k(x) - kT) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, як залишок збіжного ряду. Переконаємось у тому, що зазначений ряд дійсно

збігається, причому рівномірно в $U(0)$. Справді, з теореми Лагранжа про скінченні прирости та нерівності (8.3) випливає оцінка

$$|\tau(P^i(x)) - \tau(0)| \leq \|\text{grad}\tau(x)\| \|P^i(x)\| \leq \|\text{grad}\tau(x)\| \|H_\sigma\| \|x\|_\sigma q^i.$$

Будемо вважати, що $\text{cls}U(0) \subset B(0)$. Зрозуміло, що тоді можна вказати таку сталу $K_\sigma > 0$, щоб

$$|\tau(P^i(x)) - \tau(0)| \leq K_\sigma q^i \quad \forall x \in U(0).$$

Звідси відразу випливає рівномірна збіжність часткових сум ряду $\sum_{i=0}^{\infty} [\tau(P^i(x)) - \tau(0)]$ до неперервної в $U(0)$ функції $\theta(x)$ \square

8.3. Уведення локальних координат в околі циклу

Надалі для простоти будемо розглядати випадок, коли векторне поле $f(x)$ гладке (класу C^∞). Крім того, без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що період розв'язку $g^t 0$ дорівнює 2π .

З викладеного у п. 7.1. випливає, що відображення $\mathbf{R} \ni t \mapsto g^t 0 \in \mathbf{R}^n$, образом якого є цикл $\Gamma(0)$, є вкладенням кола $S^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ у простір \mathbf{R}^n . Виникає питання: чи можна в деякому околі циклу $\Gamma(0)$ ввести координати $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ прямого добутку кола S^1 на $(n-1)$ -вимірну кулю $B_\delta^{n-1}(0) := \{y \in \mathbf{R}^{n-1} : \|y\| < \delta\}$ так, щоб цей цикл описувався рівнянням $y = 0$? Позитивне розв'язання цього питання дозволило б, зробивши заміну змінних $x \mapsto (\varphi, y)$, подати систему (8.1) у вигляді, найбільш зручному для її локального аналізу поблизу $\Gamma(0)$.

Виявляється, що зазначене питання тісно пов'язане з такою задачею: чи існують 2π -періодичні вектор-функції $e_j(t) \in C^\infty(\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^n)$, $j = 1, \dots, n-1$ такі, що при кожному $t \in \mathbf{R}$ вектори $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t), e_n(t) := f(g^t 0) / \|f(g^t 0)\|$ утворюють ортонормований базис у \mathbf{R}^n . Мовою диференціальної топології це задача про тривіалізацію нормального розшарування до підмноговиду $\Gamma(0)$ простору \mathbf{R}^n . У більш загальній ситуації, коли замість циклу в \mathbf{R}^n занурено m -вимірний тор $T^m = \mathbf{R}^m / 2\pi\mathbf{Z}$ (прямий добуток m кіл S^1), аналогічна задача досліджувалася в [9].

Опишемо спосіб побудови вектор-функцій $e_j(t)$. Нехай $g_j(t) \in C(\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^n)$, $j = 1, \dots, n-1$, — будь-які відображення з властивостями: 1) для кожного $t \in \mathbf{R}$ вектори $g_1(t), \dots, g_{n-1}(t)$ лінійно незалежні й кожен з них ортогональний вектору $e_n(t)$; 2) $g_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, n-1$. За $g_j(t)$ можна, наприклад, узяти j -ий стовпець матриці, транспонованої по відношенню до матриці $X^{-1}(t)$, де, нагадаємо, $X(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{x=0} g^t x$ — матриця монодромії системи (8.2). Справді, досить зауважити, що $X^{-1}(t)X(t) = \text{Id}$, $X(0) = \text{Id}$, а останнім стовпцем матриці $X(t)$, як це випливає з доведення твердження 8.2, є вектор, колінеарний $e_n(t)$. Скориставшись процесом ортогоналізації Шмідта, побудуємо ортонормовані вектор-функції $h_1(t), \dots, h_{n-1}(t)$ з тими ж властивостями, що й $g_j(t)$. Оскільки вектори $h_1(2\pi), \dots, h_{n-1}(2\pi)$

лежать у гіперплощині Π , то існує ортогональна матриця $R \in SO(n-1)$ така, що

$$\begin{aligned} & [\mathbf{h}_1(t), \dots, \mathbf{h}_{n-1}(t), \mathbf{e}_n(t)]|_{t=2\pi} \text{diag}(R, 1) = \\ & = [\mathbf{h}_1(t), \dots, \mathbf{h}_{n-1}(t), \mathbf{e}_n(t)]|_{t=0} = \text{Id}. \end{aligned}$$

Тепер зауважимо, що в групі $SO(n-1)$ існує крива, яка з'єднує елементи Id та R .

Дійсно, як добре відомо (див. [5]), матриця R подібна до блочно-діагональної матриці, блоками якої є або одиниці, або двовимірні матриці типу

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Матрицю такого вигляду можна включити до сім'ї

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2\pi} \theta & -\sin \frac{t}{2\pi} \theta \\ \sin \frac{t}{2\pi} \theta & \cos \frac{t}{2\pi} \theta \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Унаслідок цього існує відображення $R(t) \in C([0, 2\pi] \mapsto SO(n-1))$, таке що $R(0) = \text{Id}$, $R(2\pi) = R$. Легко бачити, що матриця-функція

$$[\mathbf{h}_1(t), \dots, \mathbf{h}_{n-1}(t), \mathbf{e}_n(t)] \text{diag}(R(t), 1)$$

неперервна на $[0, 2\pi]$ і обертається в одиничну як при $t = 0$, так і при $t = 2\pi$. Тому її можна продовжити до неперервної 2π -періодичної матриці-функції на \mathbf{R} . Після цього наблизимо кожен елемент перших $(n-1)$ її стовпців тригонометричними поліномами так, щоб у результаті одержати невідроджену матрицю. Нарешті, ортонормуємо стовпці останньої методом Шмідта, залишивши незмінним стовпець $\mathbf{e}_n(t)$. Стовпці так одержаної матриці позначимо через $\mathbf{e}_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Неважко впевнитись у тому, що вони мають усі потрібні нам властивості.

Позначимо тепер через $E(t)$ матрицю-функцію, стовпцями якої є вектор-функції $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_{n-1}(t)$, і введемо нові координати $\varphi \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ за формулою

$$x = g^\varphi 0 + E(\varphi)y. \quad (8.4)$$

Ці координати допускають таке тлумачення: φ — це кутова (циклічна) координата на замкненій кривій $\Gamma(0)$, а для кожного $\varphi \in [0, 2\pi)$ вектор y однозначно визначає точку гіперплощини, яка ортогонально перетинає цикл $\Gamma(0)$ у точці $g^\varphi 0$. Координати y з цієї причини називають нормальними (відносно циклу $\Gamma(0)$).

Твердження 8.3. Для досить малого $\delta > 0$ відображення

$$\mathbf{R} \times B_\delta^{n-1}(0) \ni (\varphi, y) \mapsto g^\varphi 0 + E(\varphi)y \quad (8.5)$$

визначає гладкий дифеоморфізм прямого добутку $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times B_\delta^{n-1}(0)$ на деякий окіл циклу $\Gamma(0)$.

Доведення. Оскільки матриця Якобі відображення (8.5) у точці $(\varphi, 0)$ має вигляд

$$[f(g^\varphi 0), e_1(\varphi), \dots, e_{n-1}(\varphi)],$$

то вона не вироджена. Тому (8.5) — гладкий локальний дифеоморфізм. Залишається довести, що для досить малого $\delta > 0$ з умови

$$g^{\varphi_1} 0 + E(\varphi_1)y_1 = g^{\varphi_2} 0 + E(\varphi_2)y_2, \quad y_1, y_2 \in B_\delta^{n-1}(0) \quad (8.6)$$

випливає, що $\varphi_1 = \varphi_2 \pmod{2\pi}$, $y_1 = y_2$.

Нехай, навпаки, умова (8.6) виконується, але або $\varphi_1 \neq \varphi_2 \pmod{2\pi}$, або $y_1 \neq y_2$. Оскільки відображення $g^\varphi 0$ та $E(\varphi)$ 2π -періодичні, то без обмеження загальності міркувань, можна вважати, що $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in (\varphi_1 - \pi, \varphi_1 + \pi]$. З цієї ж причини та з огляду на той факт, що відображення (8.5) є локальним дифеоморфізмом, можна стверджувати: існує таке $\epsilon > 0$, що або $|\varphi_1 - \varphi_2| \geq \epsilon$, або $\|y_1 - y_2\| \geq \epsilon$.

Будемо вважати, що $\delta < \epsilon/2$. Тоді умова (8.6) має наслідком нерівність $|\varphi_1 - \varphi_2| \geq \epsilon$. Однак знайдеться таке $\rho(\epsilon) > 0$, що $\|g^{\varphi_1} - g^{\varphi_2}\| \geq \rho(\epsilon)$ для будь-яких $\varphi_1, \varphi_2 \in [\varphi_1 - \pi, \varphi_1 + \pi]$, які задовольняють нерівність $|\varphi_1 - \varphi_2| \geq \epsilon$. З (8.6) тепер маємо

$$\rho(\epsilon) \leq 2 \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \|E(\varphi)\| \delta \quad \forall y_1, y_2 \in B_\delta^{n-1}(0).$$

Отже, якщо із самого початку вважати, що число δ задовольняє нерівність

$$\delta < \min\left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\rho(\epsilon)}{2 \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \|E(\varphi)\|}\right),$$

то наше припущення щодо виконання умови (8.6) буде хибним \square

Зробимо в системі заміну змінних (8.4). З урахуванням рівності $\frac{d}{d\varphi} g^\varphi 0 = f(g^\varphi 0) = \|f(g^\varphi 0)\| e_n(\varphi)$ маємо

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}[f(g^\varphi 0) + E'(\varphi)y] + E(\varphi)\dot{y} &= f(g^\varphi 0) + E(\varphi)y \equiv \\ &\equiv f(g^\varphi 0) + f'(g^\varphi 0)E(\varphi)y + O(y^2). \end{aligned}$$

Домноживши обидві частини цієї рівності скалярно на $e_n(\varphi)$, дістанемо:

$$\begin{aligned} (\|f(g^\varphi 0)\| + \langle e_n(\varphi), E'(\varphi)y \rangle)\dot{\varphi} &= \\ = \|f(g^\varphi 0)\| + \langle e_n(\varphi), f'(g^\varphi 0)E(\varphi)y \rangle + O(y^2). \end{aligned}$$

Тепер очевидно, що рівняння для φ можна подати у вигляді

$$\dot{\varphi} = 1 + \langle a(\varphi), y \rangle + O(y^2),$$

де $a(\varphi) \in C^\infty(\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^{n-1})$ — деяке 2π -періодичне відображення. Однак тоді змінна y задовольняє співвідношення

$$E(\varphi)\dot{y} = [f'(g^\varphi 0)E(\varphi) - E'(\varphi)]y - f(g^\varphi 0)\dot{\varphi} + O(y^2),$$

з якого випливає, що рівняння для y можна подати у вигляді

$$\dot{y} = E(\varphi)^*[f'(g^\varphi 0)E(\varphi) - E'(\varphi)]y + O(y^2),$$

де $*$ — операція транспонування матриці.

Таким чином, має місце

Твердження 8.4. Існують локальні координати $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ прямого добутку $S^1 \times B_\delta^{n-1}(0)$, у яких система (8.1) набуває вигляду

$$\dot{\varphi} = 1 + \Phi(\varphi, y), \quad \dot{y} = B(\varphi)y + G(\varphi, y), \quad (8.7)$$

де $B(\varphi) \in C^\infty(\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)})$, $\Phi(\varphi, y) \in C^\infty(\mathbf{R} \times B_\delta^{n-1}(0) \mapsto \mathbf{R})$, $G(\varphi, y) \in C^\infty(\mathbf{R} \times B_\delta^{n-1}(0) \mapsto \mathbf{R}^{n-1})$, причому

$$\Phi(\varphi, 0) = 0, \quad G(\varphi, 0) = 0, \quad G'_y(\varphi, 0) = 0.$$

Очевидно, що траєкторії системи (8.7) при досить малому $\delta > 0$ збігаються з інтегральними кривими неавтономної 2π -періодичної системи

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{B(\varphi)y + G(\varphi, y)}{1 + F(\varphi, y)},$$

яку можна подати у вигляді

$$\frac{dy}{d\varphi} = B(\varphi)y + F(\varphi, y), \quad (8.8)$$

де $F(\varphi, y)$ має ті ж властивості, що й $G(\varphi, y)$.

Позначимо через $\eta(\varphi, y_0)$ розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову $\eta(0, y_0) = y_0$. На основі викладеного вище одержуємо такий результат.

Теорема 8.5. У координатах $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ відображення Пуанкаре, породжене системою (8.1) в околі циклу $\Gamma(0)$, діє за правилом

$$y \mapsto \eta(2\pi, y),$$

а матриця похідної цього відображення в точці $y = 0$ — це матриця монодромії 2π -періодичної системи

$$\frac{dy}{d\varphi} = B(\varphi)y.$$

8.4. Системи Морса – Смейла

Нагадаємо, що положення рівноваги x_* системи (8.1) називається гіперболічним, якщо матриця $f'(x_*)$ не має власних чисел з нульовою дійсною частиною.

Означення 8.3. Цикл автономної системи називається гіперболічним, якщо матриця монодромії відповідної лінеаризованої системи має $n - 1$ мультиплікатор, не рівний за модулем одиниці (або, що те саме, лінеаризація відповідного відображення Пуанкаре не має жодного мультиплікатора, модуль якого дорівнює 1).

Для гіперболічного циклу Γ , якому відповідає $n_u \in \mathbf{N}$ мультиплікаторів назовні одиничного круга, де $1 \leq n_u \leq n - 2$, можна природно визначити дві множини

$$W^s(\Gamma) = \{x \in D : g^t x \rightarrow \Gamma, t \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(\Gamma) = \{x \in D : g^t x \rightarrow \Gamma, t \rightarrow -\infty\}.$$

Перша з них називається стійким, а друга — нестійким многовидом гіперболічного циклу. Виявляється, кожна з цих множин є диференційовним підмноговидом у \mathbf{R}^n , причому $\dim W^u(\Gamma) = n_u + 1$, $\dim W^s(\Gamma) = n_s + 1 := n - n_u$. Ці два підмноговиди трансверсально перетинаються по циклу Γ .

(Трансверсальність перетину двох підмноговидів M_1 і M_2 простору \mathbf{R}^n означає, що в кожній спільній точці цих підмноговидів сума їхніх дотичних просторів є n -вимірним векторним простором. Детальніше: якщо $x_* \in M_1 \cap M_2$, то в малому околі точки x для кожного $i \in \{1, 2\}$ множини M_i можна задати параметричними рівняннями $x = \varphi_i(u_1, \dots, u_{n_i})$, де $\varphi_i \in C^1(B^{n_i}(0) \mapsto \mathbf{R}^n)$, $B^{n_i}(0)$ — деякий окіл початку координат у \mathbf{R}^{n_i} . При цьому $\varphi_i(0) = x_*$, а вектори $a_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i(0)}{\partial u_j}$, $j = 1, \dots, n_i$, — лінійно незалежні. Трансверсальність перетину M_1 і M_2 у точці x_* тоді означає, що ранг системи векторів $\{a_{i,j}\}_{j=1, i=1}^{n_i, 2}$ дорівнює n .)

Кожне положення рівноваги можна розглядати як нульвимірний цикл. Для гіперболічного положення рівноваги x_* теж існують n_u -вимірний нестійкий і n_s -вимірний стійкий многовиди, які трансверсально перетинаються в точці x_* . При цьому n_u (відповідно n_s) дорівнює кількості тих власних чисел матриці $f'(x_*)$, що мають додатні (від'ємні) дійсні частини.

Означення 8.4. Система (8.1) називається системою Морса – Смейла, якщо:

- 1) Для будь-якої точки $x \in D$ кожна з граничних множин $\Omega(x_0)$ та $A(x_0)$ є або положенням рівноваги, або циклом.
- 2) Положень рівноваги і циклів скінченне число, причому всі вони гіперболічні, а їхні стійкі і нестійкі многовиди можуть перетинатися лише трансверсально.

Виявляється, що якщо $D \subset \mathbf{R}^n$ — обмежена область з досить гладкою межею, векторне поле $f \in C^1(\text{cls}D \mapsto \mathbf{R}^n)$ не дотикається ∂D і (8.1) — система Морса – Смейла, то ця система структурно-стійка. Однак у випадку $n > 2$, на відміну від двовимірного, системи Морса – Смейла вже не вичерпують усіх структурно-стійких систем. Наприклад, існують структурно-стійкі системи з нескінченним числом циклів.

9. Теорія збурень періодичних розв'язків

9.1. Постановка задачі Пуанкаре

Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (9.1)$$

залежну від параметра μ . Тут $f(x, \mu) \in C^r(D \times (-\mu_0, \mu_0) \mapsto \mathbf{R}^n)$, $D \subset \mathbf{R}^n$, $\mu_0 > 0$. Для спрощення подальших міркувань будемо припускати, що при кожному $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ система (9.1) породжує потік $\{g_\mu^t\}_{t \in \mathbf{R}}$.

Система

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad (9.2)$$

називається незбуреною. Припускається, що $0 \in D$ — періодична точка потоку $\{g_0^t\}$, T_0 — її найменший додатний період.

Задача Пуанкаре про продовження періодичного розв'язку $x_0(t) := g_0^t 0$ за параметром μ полягає в тому, щоб для деякого $\mu_* \leq \mu_0$ і кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ довести існування числа $T_\mu > 0$ і T_μ -періодичного розв'язку $x_\mu(t)$ збуреної системи (9.1) з властивостями неперервності

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} T_\mu = T_0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} x_\mu(t) = x_0(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Принаймні дві обставини роблять цю задачу природною й важливою. По-перше, якщо незбурена система (9.2) виступає в ролі математичної моделі деякого ідеалізованого процесу, то, з погляду проблеми коректності, слід з'ясувати, наскільки «стійкою» щодо збурень правої частини є та чи інша її властивість; зокрема, властивість мати періодичні рухи. По-друге, позитивне розв'язання задачі Пуанкаре відкриває широкі можливості для відшукування періодичних розв'язків досить складних систем за такою схемою: 1) апроксимуємо певним чином досліджувану систему, скажімо $\dot{x} = f(x)$, більш простою $\dot{x} = f_0(x)$, для якої періодичні розв'язки можна знайти; 2) включаємо вихідну систему до сім'ї $\dot{x} = f_0(x) + \mu(f(x) - f_0(x))$ і після цього з'ясуємо, які з періодичних розв'язків системи $\dot{x} = f_0(x)$ допускають продовження за параметром μ на проміжок $[0, 1]$.

Для аналізу задачі Пуанкаре можна використати два підходи. Перший спирається на метод перерізів Пуанкаре (його ми розглянемо у наступному п.). Другий — зводить зазначену задачу до аналогічної задачі в класі $(n - 1)$ -вимірних неавтономних T -періодичних систем. А саме, вважаючи без обмеження загальності, що $T = 2\pi$, уведемо локальні координати $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ в околі циклу $\Gamma(0) = \cup_{t \in [0, T]} x_*(t)$ за формулою $x = x_*(\varphi) + E(\varphi)y$ (див. п. 8.3) і перепишемо у цих координатах систему (9.1):

$$\dot{\varphi} = 1 + \Phi(\varphi, y, \mu), \quad \dot{y} = B(\varphi)y + G(\varphi, y, \mu). \quad (9.3)$$

Виключивши час t , перейдемо до 2π -періодичної щодо φ системи вигляду

$$\frac{dy}{d\varphi} = B(\varphi)y + F(\varphi, y, \mu). \quad (9.4)$$

Інтегральні криві останньої збігаються з фазовими кривими системи (9.3). При $\mu = 0$ система (9.4) має тривіальний розв'язок $y = 0$. Потрібно з'ясувати, чи має (9.4) для кожного досить малого за модулем μ 2π -періодичний розв'язок $y_\mu(\varphi)$, і при цьому $y_\mu(\varphi) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ (теорію збурень 2π -періодичних систем буде розглянуто у п. 9.5). Якщо $y_\mu(\varphi)$ знайдено, то інтегруванням скалярного рівняння

$$\dot{\varphi} = 1 + \Phi(\varphi, y_\mu(\varphi), \mu)$$

знайдемо еволюцію кута φ у часі $\varphi = \varphi_\mu(t)$, $\varphi_\mu(0) = 0$, період

$$T_\mu := \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \Phi(\varphi, y_\mu(\varphi), \mu)}$$

і, нарешті, збурений періодичний розв'язок

$$x = x_0(\varphi_\mu(t)) + E(\varphi_\mu(t))y_\mu(\varphi_\mu(t)).$$

9.2. Задача Пуанкаре в некритичному випадку

Спочатку покажемо, що продовження за параметром μ допускає відображення Пуанкаре. Як і раніше, через Π позначаємо гіперплощину в \mathbf{R}^n , яка проходить через 0 ортогонально $f(0, 0)$.

Твердження 9.1. *Існує куля $B(0) \subset \mathbf{R}^n$ із центром у точці 0, число $\mu^* \in (0, \mu_0)$ і така функція $\tau(x, \mu) \in C^r(B(0) \times (-\mu^*, \mu^*) \mapsto \mathbf{R})$, що $\tau(0, 0) = T$ і $g_\mu^{\tau(x, \mu)} x \in \Pi$ для всіх $(x, \mu) \in B(0) \times (-\mu^*, \mu^*)$.*

Доведення. Оскільки гіперплощину Π можна задати рівнянням $\langle f(0, 0), x \rangle = 0$, то $\tau(x, \mu)$ будемо шукати як неявну функцію, визначену співвідношенням $F(t, x, \mu) := \langle f(0, 0), g_\mu^t x \rangle = 0$. Функція $F(t, x, \mu)$ має такі властивості: 1) $F(t, x, \mu) \in C^r(D \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R})$; 2) $F(T, 0, 0) = \langle f(0, 0), g_0^T 0 \rangle = \langle f(0, 0), 0 \rangle = 0$; 3) $\frac{\partial F(T, 0, 0)}{\partial t} = \langle f(0, 0), \frac{d}{dt} \Big|_{t=T} g_0^t 0 \rangle = \langle f(0, 0), f(0, 0) \rangle \neq 0$. Отже, усі умови теореми про неявну функцію виконані, а тому функція $\tau(x, \mu)$ з потрібними властивостями існує \square

Тепер для $\mu \in (-\mu^*, \mu^*)$ маємо сім'ю відображень Пуанкаре

$$B(0) \cap \Pi \ni x \mapsto g_\mu^{\tau(x, \mu)} x \in \Pi.$$

Очевидно, що кожна нерухома точка $x = \xi(\mu)$ відображення $P_\mu \in$ періодичною точкою потоку g_μ^t періоду $T_\mu := \tau(\xi(\mu), \mu)$. Тепер зрозуміло, що задача Пуанкаре зводиться до відшукування розв'язку $x = \xi(\mu)$ рівняння

$$\Phi(x, \mu) := P_\mu(x) - x = 0, \quad (x, \mu) \in B(0) \cap \Pi \times (-\mu^*, \mu^*), \quad (9.5)$$

який був би неперервною функцією в околі точки $\mu = 0$ і обертався в 0 при $\mu = 0$.

Означення 9.1. Випадок, коли 1 не є власним числом оператора $P'_0(0)$ (тобто лінеаризація відображення Пуанкаре незбуреної системи не має не-тривіальних нерухомих точок), будемо називати *некритичним випадком* задачі Пуанкаре.

Теорема 9.1. У некритичному випадку задача Пуанкаре завжди має розв'язок.

Доведення. Застосуємо теорему про неявну функцію до рівняння (9.5). Для цього зауважимо, що $\Phi(0,0) = 0$, функція $\Phi(x, \mu)$ гладка в околі точки $(0,0)$, а оператор $\Phi'_x(0,0) = P'_0(0) - \text{Id}$ не вироджений. Тому існує $\mu_* \in (0, \mu^*]$ і функція $\xi(\mu) \in C^r((-\mu_*, \mu_*) \mapsto B(0) \cap \Pi)$ така, що $\xi(0) = 0$, $\Phi(\xi(\mu), \mu) \equiv 0$ \square

Задача 1. Знайти коефіцієнти полінома Тейлора функції $\xi(\mu)$ у точці $\mu = 0$.

9.3. Періодичні розв'язки неавтономних періодичних систем

Нехай D — область у \mathbf{R}^n , а вектор-функція $f(t, x) \in C(\mathbf{R} \times D \mapsto \mathbf{R}^n)$ — 2π -періодична щодо t :

$$f(t + 2\pi, x) \equiv f(t, x).$$

Розглянемо неавтономну систему

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (9.6)$$

Будемо припускати, що для кожного $x_0 \in D$ розв'язок $x(t, x_0)$ системи (9.6), який задовольняє початкову умову $x(0, x_0) = x_0$, продовжується на всю дійсну вісь і має властивість єдиності.

Твердження, яке наводиться нижче, відкриває широкі можливості для залучення топологічних методів до розв'язання задачі про періодичні розв'язки.

Твердження 9.2. Функція $x(t, x_0)$ тоді й тільки тоді є 2π -періодичним розв'язком системи (9.6), коли початкове значення x_0 задовольняє рівність

$$x(2\pi, x_0) = x_0. \quad (9.7)$$

Доведення. Необхідність умови (9.7) очевидна. Для доведення її достатності зауважимо, що функція $x(t + 2\pi, x_0)$ є розв'язком системи (9.7), який при $t = 0$ набуває значення $x(2\pi, x_0)$. Справді, з урахуванням 2π -періодичності функції $f(t, x)$, маємо

$$\dot{x}(t + 2\pi, x_0) \equiv f(t + 2\pi, x(t + 2\pi, x_0)) \equiv f(t, x(t + 2\pi, x_0)).$$

З припущення про властивість єдиності розв'язку задачі Коші випливає, що

$$x(t + 2\pi, x_0) \equiv x(t, x(2\pi, x_0)).$$

Таким чином, умова 2π -періодичності розв'язку $x(t, x_0)$ означає, що він збігається з розв'язком $x(t, x(2\pi, x_0))$. Для цього, з огляду на ту ж властивість єдиності, необхідно й досить, щоб збігались значення вказаних розв'язків у початковий момент $t = 0$, тобто виконувалась рівність (9.7) \square

З доведеного твердження випливає, що задача існування періодичного розв'язку системи (9.7) еквівалентна задачі існування нерухомої точки відображення

$$D \ni x_0 \rightarrow x(2\pi, x_0) \in D.$$

Задача 2. Довести, що наведені вище міркування залишаються вірними й тоді, коли замість умови глобальної продовжуваності, вимагати лише, щоб кожен розв'язок $x(t, x_0)$ існував на проміжку $[0, 2\pi]$.

9.4. Періодичні розв'язки лінійних періодичних систем

Перш ніж викладати теорію збурень періодичних розв'язків 2π -періодичних систем, розглянемо задачу існування таких розв'язків у лінійному випадку.

Нехай у системі

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (9.8)$$

матриця-функція $A(t)$ та вектор-функція $f(t)$ неперервні та 2π -періодичні.

Позначимо через $X(t)$ нормовану в точці $t = 0$ фундаментальну матрицю відповідної однорідної системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x. \quad (9.9)$$

Нагадаємо важливе співвідношення теорії лінійних періодичних систем:

$$X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi).$$

Воно є наслідком того факту, що $X(t + 2\pi)$ — теж фундаментальна матриця для (9.9).

Випадок, коли система (9.9) не має 2π -періодичних розв'язків, будемо називати *некритичним* (порівн. з означенням п. 9.2).

Твердження 9.3. *Розв'язок $x(t, x_0)$ системи (9.9) є 2π -періодичним тоді й тільки тоді, коли його початкове значення є власним вектором матриці монодромії $X(2\pi)$, який належить мультиплікатору 1.*

Доведення. Досить зауважити, що з урахуванням рівності $x(t, x_0) = X(t)x_0$ умову 2π -періодичності розв'язку можна подати у вигляді $X(t + 2\pi)x_0 = X(t)x_0 \Leftrightarrow X(t)X(2\pi)x_0 = X(t)x_0 \Leftrightarrow X(2\pi)x_0 = x_0 \square$

Теорема 9.2. У некритичному випадку існує єдиний 2π -періодичний розв'язок системи (9.8).

Доведення. Методом Лагранжа дістаємо формулу для розв'язку $x(t, x_0)$ неоднорідної системи:

$$x(t, x_0) = X(t)x_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s) ds. \quad (9.10)$$

З цієї формули і твердження 9.2 випливає, що розв'язок $x(t, x_0)$ буде 2π -періодичним тоді й тільки тоді, коли його початкове значення x_0 задовольняє лінійну неоднорідну алгебричну систему

$$(\text{Id} - X(2\pi))x_0 = X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s) ds.$$

Оскільки у некритичному випадку матриця $\text{Id} - X(2\pi)$ не вироджена (твердження 9.3), то розв'язок цієї системи існує і єдиний \square

Проаналізуємо тепер *критичний* випадок. Для наших подальших міркувань корисно задачу про 2π періодичні розв'язки тлумачити як операторне рівняння. А саме, нехай \tilde{C} простір \mathbf{R}^n -значних неперервних 2π -періодичних вектор-функцій, а \tilde{C}^1 — його підпростір, утворений вектор-функціями, що мають неперервні похідні. Визначимо лінійний диференціальний оператор

$$L := \frac{d}{dt} - A(t) : \tilde{C}^1 \mapsto \tilde{C} : x(t) \mapsto \dot{x}(t) - A(t)x(t).$$

Очевидно, що задача про 2π -періодичні розв'язки системи (9.8) еквівалентна операторному рівнянню

$$Lx(t) = f(t). \quad (9.11)$$

Теорема 9.2 еквівалентна твердженню

$$\ker L = \{0\} \implies \exists L^{-1}.$$

При цьому

$$L^{-1}f(t) = X(t)[\text{Id} - X(2\pi)]^{-1}X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s) ds + \\ + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s) ds.$$

Задача 3. Знайти у невиродженому випадку функцію Гріна — таку матричнозначну функцію $G(t, s)$, що

$$L^{-1}f(t) = \int_0^{2\pi} G(t, s)f(s) ds.$$

Можна показати, що, насправді, умова $\ker L = \{0\}$ еквівалентна існуванню L^{-1} .

Якого типу результату можна сподіватись у критичному випадку? Підказку можна знайти в теорії лінійних операторних рівнянь в евклідових просторах. Нагадаємо відповідні факти.

Нехай $B : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ — лінійний оператор, $B^* : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ — спряжений оператор (відносно скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Наведемо добре відомий факт теорії евклідових просторів.

Лема 9.1. *Лінійний оператор $L : \mathbf{E}^N \mapsto \mathbf{E}^N$ в евклідовому просторі $\mathbf{E}^N := (\mathbf{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ визначає розклад цього простору в таку пряму двох взаємно ортогональних підпросторів:*

$$\mathbf{E}^N = \text{im } L \oplus \text{ker } L^*.$$

Доведення. Оскільки $\mathbf{E}^N = \text{im } L \oplus \text{im } L^\perp$, то досить довести, що $\text{ker } L^* = L^\perp$.

Маємо

$$x \in \text{ker } L^* \Rightarrow \langle L^*x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbf{E}^n \Rightarrow \langle x, Ly \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbf{E}^n \Rightarrow x \in \text{im } L^\perp.$$

Звідси $\text{ker } L^* \subset \text{im } L^\perp$.

Навпаки,

$$x \in \text{im } L^\perp \Rightarrow \langle x, Ly \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbf{E}^n \Rightarrow \langle L^*x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbf{E}^n \Rightarrow x \in \text{ker } L^*.$$

Звідси $\text{im } L^\perp \subset \text{ker } L^* \quad \square$

Наслідком рівності $\mathbf{E}^n = \text{im } B \oplus \text{ker } B^*$ є таке відоме твердження.

Теорема 9.3 (Фредгольма). *Рівняння $Bx = b$, де $b \in \mathbf{E}^n$, має розв'язок тоді й тільки тоді, коли вектор b ортогональний кожному розв'язку системи $B^*y = 0$.*

Покажемо, що аналогічний результат має місце і для простору \tilde{C}^1 та оператора L , якщо в просторі \tilde{C} ввести скалярний добуток $\langle \cdot, \cdot \rangle$ за формулою

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(s), g(s) \rangle ds \quad \forall f, g \in \tilde{C}.$$

Знайдемо спряжений оператор L^* . Інтегруючи за частинами, маємо

$$\begin{aligned} (Lf, g) &= (\dot{f}, g) - (Af, g) = \langle f, g \rangle \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - (f, \dot{g}) - (f, A^*g) = \\ &= -(f, \dot{g}) - (f, A^*g) =: (f, L^*g). \end{aligned}$$

Отже,

$$L^* = -\frac{d}{dt} - A^*(t).$$

Означення 9.2. Система

$$\dot{y} = -A^*(t)y \tag{9.12}$$

називається спряженою відносно системи (9.9).

Твердження 9.4. Для будь-яких розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ систем (9.9) та (9.12) відповідно виконується тотожність $\langle x(t), y(t) \rangle \equiv \langle x(0), y(0) \rangle$.

Доведення. Правильність тотожності перевіряється її диференціюванням з урахуванням систем (9.9) та (9.12):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), y(t) \rangle &= \langle \dot{x}(t), y(t) \rangle + \langle x(t), \dot{y}(t) \rangle = \\ &= \langle A(t)x(t), y(t) \rangle - \langle x(t), A^*(t)y(t) \rangle = 0 \square \end{aligned}$$

Твердження 9.5. Матриця $Y(t) = [X^*(t)]^{-1}$ є нормованою в точці $t = 0$ фундаментальною матрицею спряженої системи.

Доведення. Нехай $Y(t)$ — нормована в точці $t = 0$ фундаментальна матриця спряженої системи. Тоді на основі твердження 9.4 маємо тотожність

$$X^*(t)Y(t) \equiv X^*(0)Y(0) = \text{Id},$$

з якої й випливає формула для $Y(t)$ \square

Теорема 9.4. Лінійна однорідна 2π -періодична система (9.9) і спряжена до неї система (9.12) мають однакове число лінійно незалежних 2π -періодичних розв'язків:

$$\dim \ker L = \dim \ker L^*.$$

Доведення. З твердження 9.3 випливає, що $\dim \ker L$ дорівнює $\text{corank}[\text{Id} - X(2\pi)]$, тобто числу лінійно незалежних розв'язків системи $[\text{Id} - X(2\pi)]x_0 = 0$. Якщо додатково взяти до уваги твердження (9.5), то дістанемо рівність $\dim \ker L^* = \text{corank}(\text{Id} - [X^*(2\pi)]^{-1})$. Однак система $(\text{Id} - [X^*(2\pi)]^{-1})y_0 = 0$, з якої визначаються початкові значення періодичних розв'язків спряженої системи, еквівалентна такій:

$$[X(2\pi)^* - \text{Id}]y_0 = 0 \iff [X(2\pi) - \text{Id}]^*y_0 = 0.$$

Тепер залишилось лише зауважити, що матриці $X(2\pi) - \text{Id}$ та $[X(2\pi) - \text{Id}]^*$ мають однакові ранги \square

Позначимо через B лінійний оператор з матрицею $\text{Id} - X(2\pi)$ і покладемо

$$b := X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s) ds.$$

Тепер сформулюємо й доведемо таке важливе твердження.

Теорема 9.5. Система (9.8) має 2π -періодичний розв'язок тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f(t)$ ортогональна (у просторі $(\tilde{C}; (\cdot, \cdot))$) кожному 2π -періодичному розв'язку спряженої системи (9.12), тобто

$$(y(t), f(t)) = 0 \quad \forall y(t) \in \ker L^*. \quad (9.13)$$

Доведення. Доведемо необхідність умови (9.13). Нехай система (9.8) має 2π -періодичний розв'язок $x(t)$, а $y(t)$ — довільний 2π -періодичний розв'язок системи (9.12). Тоді

$$(f(t), y(t)) = (Lx(t), y(t)) = (x(t), L^*y(t)) = (x(t), 0) = 0.$$

Достатність. На основі тверджень 9.3 та 9.5 розв'язок $y = Y(t)y_0 \equiv [X^*(t)]^{-1}y_0$ спряженої системи (9.12) буде 2π -періодичним тоді й тільки тоді, коли $y_0 \in \ker B^*$. Тому умову ортогональності (9.13) можна подати у вигляді

$$B^*y_0 = 0 \implies ([X^*(t)]^{-1}y_0, f(t)) = 0. \quad (9.14)$$

Узявши до уваги цей факт, зауважимо, що, як було показано в процесі доведення теореми 9.2, існування 2π -періодичного розв'язку системи (9.8) еквівалентне сумісності рівняння $Bx_0 = b$. З урахуванням теореми Фредгольма відповідна умова сумісності виражається у вигляді рівності $\langle y_0, b \rangle = 0$, яка повинна виконуватись для кожного $y_0 \in \ker B^*$, тобто для кожного такого y_0 , що $X^*(2\pi)y_0 = y_0$. Однак якщо справджується (9.14), то

$$\begin{aligned} \langle y_0, b \rangle &= \left\langle y_0, X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s) ds \right\rangle = \\ &= \left\langle X^*(2\pi)y_0, \int_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s) ds \right\rangle = \\ &= \int_0^{2\pi} \langle y_0, X^{-1}(s)f(s) \rangle ds = \int_0^{2\pi} \langle [X^*(s)]^{-1}y_0, f(s) \rangle ds = 0. \end{aligned}$$

Тому рівняння $Bx_0 = b$ має розв'язок \square

9.5. Задача Пуанкаре для періодичних систем

Нехай $F \in C^1(\mathbf{R} \times D \times (-\mu_0, \mu_0)) \mapsto \mathbf{R}^n$ — вектор-функція, яка задовольняє умову періодичності $F(t+2\pi, x, \mu) \equiv F(t, x, \mu)$. Розглянемо задачу Пуанкаре для системи вигляду

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \mu F(t, x, \mu), \quad (9.15)$$

де $A(t)$ і $f(t)$ — ті ж самі, що й у (9.8).

Теорема 9.6. *Нехай при $\mu = 0$ система (9.15) (тобто незбурена система) має єдиний 2π -періодичний розв'язок $x_*(t)$ (або, що те саме, матриця монодромії однорідної системи (9.9) не має власних чисел, рівних 1). Тоді існує таке $\mu_* \in (0, \mu_0]$, що для довільного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ існує 2π -періодичний розв'язок $x_\mu(t)$ системи (9.15), який має властивість $x_\mu(t) \rightarrow x_*(t)$, $\mu \rightarrow 0$.*

Доведення. Позначимо через $x(t, x_0, \mu)$ такий розв'язок системи (9.15), що $x(0, x_0, \mu) = x_0$. За твердженням 9.2 він буде 2π -періодичним, якщо його початкове значення x_0 справджує рівність

$$\Phi(x_0, \mu) := x(2\pi, x_0, \mu) - x_0 = 0.$$

Залишається показати, що це співвідношення визначає неявну функцію $x_0 = \xi(\mu)$.

Неважко переконатися в тому, що $\Phi(x_0, \mu) \in C^1(D \times (-\mu_0, \mu_0) \mapsto \mathbf{R}^n)$. Нехай $x_* := x_*(0)$ — початкове значення 2π -періодичного розв'язку $x_*(t)$ незбуреної системи, який існує за теоремою 9.2. Тоді $\Phi(x_*, 0) = 0$. Крім того, оскільки $x(t, x_0, 0)$ збігається з функцією, визначеною формулою (9.10), то $\Phi'_{x_0}(x_*, 0) = X(2\pi) - \text{Id}$. За умовою ця матриця невироджена. Тому за теоремою про неявну функцію знайдеться $\mu_* \in (0, \mu_0]$ і вектор-функція $\xi(\mu) \in C^1((-\mu_*, \mu_*) \rightarrow D)$ така, що $\xi(0) = x_*$ і $\Phi(\xi(\mu), \mu) \equiv 0$ \square

Розглянемо тепер *критичний* випадок, коли незбурена система має хоча б один 2π -періодичний розв'язок. Така ситуація буде тоді, коли

$$k := \dim \ker B > 0$$

(як і вище, B — оператор з матрицею $\text{Id} - X(2\pi)$), причому в цьому випадку 2π -періодичні розв'язки утворюють k -параметричну сім'ю

$$x = x_0(t, c) := \sum_{i=1}^k c_i x_i(t) + x_*(t), \quad (9.16)$$

де $x_1(t), \dots, x_k(t)$ — лінійно незалежні 2π -періодичні розв'язки системи (9.9) і, отже, $x_i(0) \in \ker B$, $i = 1, \dots, k$, $c = (c_1, \dots, c_k)$ — вектор довільних сталих, $x_*(t)$ — частинний 2π -періодичний розв'язок неоднорідної системи (9.8), нормований умовою $x_*(0) \in \text{im } B^*$ (тут ураховано, що $\mathbf{R}^n = \ker B \oplus \text{im } B^*$). За теоремою 9.5 існування $x_*(t)$ еквівалентне виконанню умов ортогональності

$$(y_i(t), f(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

де $y_1(t), \dots, y_k(t)$ — лінійно незалежні 2π -періодичні розв'язки спряженої системи (9.12). Для подальших міркувань буде зручно вважати, що

$$y_i(0) = \mathbf{h}_i,$$

де $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k$ — ортонормований базис у $\ker B^*$.

Виявляється, у загальному випадку не кожен розв'язок сім'ї (9.15) допускає продовження за параметром μ . Справді, якщо для кожного μ з деякого околу нуля існує 2π -періодичний розв'язок $x = x_\mu(t, c)$ такий, що $x_\mu(t, c) \rightarrow x_0(t, c)$, $\mu \rightarrow 0$, то його можна тлумачити, як 2π -періодичний розв'язок лінійної системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \mu F(t, x_\mu(t, c), \mu).$$

Однак тоді повинні виконуватись умови ортогональності

$$(y_i(t), f(t) + \mu F(t, x_\mu(t, c), \mu)) = 0 \iff$$

$$(y_i(t), F(t, x_\mu(t, c), \mu)) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Спрямувавши в цих рівностях μ до нуля, у границі одержимо

$$\Psi_i(c) := (y_i(t), F(t, x_0(t, c), 0)) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (9.17)$$

Дістали систему k рівнянь відносно k компонент вектора c .

Означення 9.3. Систему рівнянь (9.17) будемо називати *визначальною*.

Нехай $\Psi(c)$ — вектор-стовпець з компонентами $\Psi_1(c), \dots, \Psi_k(c)$.

Теорема 9.7. Припустимо, що визначальна система $\Psi(c) = 0$ має розв'язок $c = c_*$, для якого $\det \Psi'(c_*) \neq 0$. Тоді знайдеться таке $\mu_* \in (0, \mu_0]$, що для кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ існує 2π -періодичний розв'язок $x_\mu(t)$ системи (9.15) із властивістю $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_\mu(t) = x_0(t, c_*)$.

Доведення. Зробимо в системі (9.15) заміну невідомої функції

$$x = x_0(t, c) + \mu z.$$

Маємо

$$\dot{x}_0(t, c) + \mu \dot{z} = A(t)x_0(t, c) + f(t) + \mu A(t)z + \mu F(t, x_0(t, c) + \mu z, \mu).$$

Отже, відносно z одержимо систему

$$\dot{z} = A(t)z + F(t, x_0(t, c) + \mu z, \mu).$$

Той її розв'язок, який при $t = 0$ набуває значення ζ , позначимо через $z(t, \zeta, \mu)$. Він задовольняє лінійну неоднорідну систему

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, c, \zeta, \mu),$$

де $\varphi(t, c, \mu) := F(t, x_0(t, c) + \mu z(t, \zeta, \mu), \mu)$. Міркуючи як і при доведенні теореми 9.2, задачу про 2π -періодичний розв'язок зведемо до системи

$$\Phi(c, \zeta, \mu) := B\zeta - b(c, \zeta, \mu) = 0, \quad (9.18)$$

де

$$b(c, \zeta, \mu) := X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s) \varphi(s, c, \zeta, \mu) ds$$

відносно невідомих c, ζ . Зауважимо, що оскільки $x_0(0, c) \in \ker B$, то природно вважати, що $\zeta \in \text{im } B^*$. Тоді кількість рівнянь і невідомих у зазначеній системі буде однаковою. Перевіримо, що до (9.18) можна застосувати теорему про неявну функцію.

Перш за все доведемо, що існує вектор $\zeta = \zeta_* \in \text{im } B^*$, для якого $\Phi(c_*, \zeta_*, 0) = 0$. Для цього зауважимо, що вектор-функція

$$b(c, \zeta, 0) = X(2\pi) \int_0^{2\pi} X^{-1}(s) F(s, x_0(s, c), 0) ds =: \beta(c)$$

не залежить від ζ . Тому

$$\Phi(c, \zeta, 0) = B\zeta - \beta(c). \quad (9.19)$$

Дослідимо більш детально будову цієї вектор-функції.

Нехай g_1, \dots, g_{n-k} — ортонормований базис у $\text{im } B$. Разом з h_1, \dots, h_k ці вектори утворюють ортонормований базис у \mathbf{R}^n . За означенням простору $\text{im } B$ знайдуться лінійно незалежні вектори d_1, \dots, d_{n-k} такі, що $g_i = B d_i$, $i = 1, \dots, n - k$, а оскільки $\mathbf{R}^n = \text{im } B^* \oplus \ker B$, то ці вектори

можна вибрати з простору $\text{im } B^*$. Отже, кожен вектор $\zeta \in \text{im } B^*$ можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$\zeta = \zeta_1 \mathbf{d}_1 + \dots + \zeta_{n-k} \mathbf{d}_{n-k}.$$

Підставивши цей розклад разом з

$$\beta(c) = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{h}_i, \beta(c) \rangle \mathbf{h}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \langle \mathbf{g}_i, \beta(c) \rangle \mathbf{g}_i$$

у (9.19), дістанемо

$$\Phi(c, \zeta, 0) = \sum_{i=1}^{n-k} (\zeta_i - \langle \mathbf{g}_i, \beta(c) \rangle) \mathbf{g}_i - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{h}_i, \beta(c) \rangle \mathbf{h}_i.$$

Якщо врахувати рівності $Y(s) = [X^{-1}(s)]^*$ і $\mathbf{h}_i = X^*(2\pi) \mathbf{h}_i$, то після елементарних перетворень (див. доведення теореми 9.5) дістанемо

$$\langle \mathbf{h}_i, \beta(c) \rangle = \int_0^{2\pi} \langle Y(s) \mathbf{h}_i, F(s, x_0(s, c), 0) \rangle ds = 2\pi \Psi_i(c).$$

Тому

$$\Phi(c, \zeta, 0) = \sum_{i=1}^{n-k} (\zeta_i - \langle \mathbf{g}_i, \beta(c) \rangle) \mathbf{g}_i - 2\pi \sum_{i=1}^k \Psi_i(c) \mathbf{h}_i. \quad (9.20)$$

Тепер очевидно, що лінійна система $\Phi(c_*, \zeta, 0) = 0$ має розв'язок $\zeta_* = \sum_{i=1}^{n-k} \langle \mathbf{g}_i, \beta(c_*) \rangle \mathbf{d}_i$, і для того, щоб застосувати до системи (9.18) теорему про неявну функцію, залишилося підрахувати ранг матриці Якобі відображення $(c, \zeta) \rightarrow \Phi(c, \zeta, 0)$ у точці (c_*, ζ_*) .

З урахуванням (9.20) маємо

$$\frac{\partial \Phi(c, \zeta, 0)}{\partial c_j} = - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial \langle \mathbf{g}_i, \beta(c) \rangle}{\partial c_j} \mathbf{g}_i - 2\pi \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_i(c)}{\partial c_j} \mathbf{h}_i, \quad \frac{\partial \Phi(c, \zeta, 0)}{\partial \zeta_i} = \mathbf{g}_i.$$

З цих рівностей випливає, що ранг зазначеного відображення дорівнює рангу системи векторів

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_i(c)}{\partial c_1} \mathbf{h}_i, \dots, \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_i(c)}{\partial c_k} \mathbf{h}_i, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-k}.$$

Однак останні лінійно незалежні в точці $c = c_*$, оскільки за умовою $\det \Psi'(c_*) \neq 0$.

Тепер, застосувавши до (9.18) теорему про неявну функцію, встановлюємо існування числа $\mu_* \in (0, \mu_0]$ і відображень $c(\mu) \in C^1((-\mu_*, \mu_*) \mapsto$

\mathbf{R}^k), $\zeta(\mu) \in C^1((-\mu_*, \mu_*) \mapsto \text{im } B^*)$ таких, що $c(0) = c_*$, $\zeta(0) = \zeta_*$ і $\Phi(c(\mu), \zeta(\mu), \mu) = 0$.

Таким чином, шуканий 2π -періодичний розв'язок системи (9.15) існує й має вигляд $x_\mu(t) = x_0(t, c(\mu)) + \mu z(t, c(\mu), \zeta(\mu), \mu)$ \square

Приклад. Розглянемо 2π -періодичну систему вигляду

$$\dot{x} = \mu X(t, x),$$

де $X(t, x) \in C^{r+1}(\mathbf{R} \times D \mapsto \mathbf{R}^n)$, D – область у \mathbf{R}^n . Поклавши $\bar{X}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(s, x) ds$, зробимо в цій системі 2π -періодичне перетворення усереднення

$$x \mapsto x + \mu \int_0^t [X(s, x) - \bar{X}(x)] ds.$$

Дістанемо 2π -періодичну систему вигляду

$$\dot{x} = \mu(\bar{X}(x) + \mu X_1(t, x, \mu)), \quad (9.21)$$

у якій $X_1(t, x, \mu) \in C^r(\mathbf{R} \times D_\rho \times (-\mu_0, \mu_0) \mapsto \mathbf{R}^n)$, де ρ, μ_0 – відповідним чином вибрані досить малі додатні числа, $\mu_0 < \rho$, D_ρ – підобласть області D , яка лежить у D разом зі своїм ρ -околом.

Припустимо, що існує точка $c_* \in D_\rho$ така, що

$$\bar{X}(c_*) = 0, \quad \det \bar{X}'(c_*) \neq 0. \quad (9.22)$$

Покажемо, що тоді система (9.21) при кожному досить малому μ має періодичний розв'язок, який стягується в точку c_* , коли $\mu \rightarrow 0$.

Для цього застосуємо теорію збурень періодичних розв'язків до системи (9.21). При $\mu = 0$ тривіальна незбурена система має n -параметричну сім'ю 2π -періодичних розв'язків $x_0(t, c) \equiv c$, де $c \in \mathbf{R}^n$ – вектор довільних сталих. Ясно, що $\ker B^* = \mathbf{R}^n$ і в такому випадку орти e_i , $i = 1, \dots, n$, утворюють ортонормований базис у $\ker B^* = \mathbf{R}^n$. Тепер зрозуміло, що в даному випадку система визначальних рівнянь має вигляд

$$\bar{X}(c) = 0,$$

а умови (9.22) дозволяють застосувати теорему 9.7. Згідно з цією теоремою існує $\mu_* \in (0, \sigma)$ таке, що для кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ система (9.21) має 2π -періодичний розв'язок $x_\mu(t)$ із властивістю $x_\mu(t) \rightarrow c_*$, $\mu \rightarrow 0$.

Бібліографія

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1984.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1978.
3. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1985.– Т. 1 – С. 7 – 109.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М., 1976.
5. Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.А. Лінійні простори. – К., 1971.
6. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
7. Ладис Н.Н. Топологическая эквивалентность линейных потоков// Дифференц. уравнения. – 1973. – 9, № 7. – С. 2123 – 2135.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.– Л., 1949.
9. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М., 1987.
10. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К., 2003.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.
12. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М., 1986.