КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З

ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2005

Збірник задач з функціонального аналізу. Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції / Укладачі О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 126 с.

Рецензенти: В.Д. Кошманенко

Ю.А. Чаповський

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
13 вересня 2004 року, протокол №1

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$\mathbf{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbb{C}$;

$C(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, визначених і неперервних на множині M;

$C^n(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, що визначені та мають n неперервних похідних на множині M;

$C^\infty(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, що визначені та нескінченно диференційовні на множині M;

$R([a,b])$ – клас функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$;

$BV([a,b])$ – клас функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$;

$BV_0([a,b]) := \{f \in BV([a,b]) \,|\, f -$ неперервна справа на $(a,b), f(a) = 0\}$;

$V(f,[a,b])$ – варіація функції f на відрізку $[a,b]$;

$RS(\alpha,[a,b])$ – клас функцій, інтегровних за Ріманом – Стілтьєсом відносно функції $\alpha \in BV([a,b])$ на відрізку $[a,b]$;

$\chi_A(x)$ – характеристична функція множини A, що набуває значення 1, якщо $x \in A$, і значення 0, якщо $x \notin A$;

m – міра Лебега у просторі $\mathbb{R}^k,\ k \geq 1$;

$f_n \to f(\operatorname{mod}\mu)$ – послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається до функції f майже скрізь відносно міри μ при $n \to \infty$;

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f,\ n \to \infty,$ – послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається до функції f за мірою μ;

$f_n \rightrightarrows f,\ n \to \infty,$ – послідовність функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ збігається до функції f рівномірно на заданій множині;

$\int\limits_A f(x)d\mu(x)$ – абстрактний інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри μ;

$\int\limits_A f(x)dx$– інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри Лебега m;

$\int\limits_a^b f(x)dx$ – інтеграл Лебега від функції f по відрізку $[a,b]$ відносно міри Лебега m. Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то цей інтеграл збігається з інтегралом Рімана;

$L(A, \mathcal{F}, \mu)$ або $L(A, \mu)$ – множина функцій, інтегровних за Лебегом на множині A відносно міри μ, визначеної на σ-алгебрі вимірних множин $\mathcal{F}$;

$L(A)$ – множина функцій, інтегровних за Лебегом на множині A відносно міри Лебега m;

$||\cdot||$ (розділ 1) – норма в лінійному нормованому просторі (ЛНП);

$B(x_0, r)$ (розділ 1) – відкрита куля в ЛНП із центром у т. x_0 і радіусом $r \geq 0$;

$\overline{B}(x_0, r)$ (розділ 1) – замкнена куля в ЛНП із центром у т. x_0 і радіусом $r \geq 0$;

$S(x_0, r)$ (розділ 1) – сфера в ЛНП із центром у т. x_0 і радіусом $r \geq 0$;

$\rho(x, A)$ (розділ 1) – відстань від точки x до множини A;

л.о.(M) (розділ 1) – лінійна оболонка множини M;

з.л.о.(M) (розділ 1) – замкнена лінійна оболонка множини M;

$\dim X$ (розділ 1) – розмірність простору X;

$A + B$ (розділ 1) – сума множин A і B у ЛНП;

$L_p(T, \mathcal{F}, \mu) = L_p(T, \mu) = L_p(T)$ (розділ 1) – простір $\mathcal{F}$-вимірних функцій, модуль яких інтегровний у p-му степені на T відносно міри μ, $1 \leq p \leq +\infty$;

$L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu) = L_\infty(T, \mu) = L_\infty(T)$ (розділ 1) – простір істотно обмежених відносно міри μ $\mathcal{F}$-вимірних функцій на T;

l_p (розділ 1) – простір послідовностей зі скінченною нормою $||\cdot||_p$;

$\mathbb{R}^m_p$ (розділи 1 і 3) – простір $\mathbb{R}^m$ з нормою $||\cdot||_p$;

$\mathbb{C}^m_p$ (розділи 1 і 3) – простір $\mathbb{R}^m$ з нормою $||\cdot||_p$;

$||\cdot||_p$ (розділ 1) – норма на $L_p(T), l_p, \mathbb{R}^m$ або $\mathbb{R}^m$;

c_0 (розділ 1) – простір збіжних до нуля послідовностей;

c (розділ 1) – простір збіжних послідовностей;

$(\cdot, \cdot)$ (розділ 2) – скалярний добуток;

$\overline{z}$ – число, спряжене до комплексного числа z;

$x \perp y$ (розділ 2) – вектор x ортогональний вектору y;

$M^{\perp}$ (розділ 2) – ортогональне доповнення множини M у передгільбертовому просторі;

$\mathrm{pr}_M\, x$ (розділ 2) – проекція (ортогональна) вектора x на множину M;

$M \oplus N$ (розділ 2) – ортогональна сума множин M і N;

$W_2^1([a,b])$ (задача 31 з розділу 2) – соболєвський простір;

X^* (розділ 3) – простір, спряжений до ЛНП X;

$\mathrm{Ker}\, f$ (розділ 3) – ядро функціонала f;

$x_n \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty,$ (розділ 5) – послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів ЛНП слабко збігається до елемента x;

$f_n \xrightarrow{*-w} f,\ n \to \infty,$ (розділ 5) – послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ лінійних неперервних функціоналів $*$-слабко збігається до лінійного функціонала f;

$\mathcal{L}(X_1, X_2)(\mathcal{L}(X))$ (розділ 6) – простір лінійних неперервних операторів, що діють із ЛНП X_1 у ЛНП X_2 (у ЛНП X);

$\mathrm{Ker}\, A$ (розділ 6) – ядро лінійного оператора A;

$R(A)$ (розділ 6) – множина значень лінійного оператора A;

$A_n \rightrightarrows A$ (розділ 7) – послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ рівномірно збігається до лінійного оператора A;

$A_n \xrightarrow{s} A,\ A = s\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (розділ 7) – послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ сильно збігається до лінійного оператора A;

$A_n \xrightarrow{w} A,\ A = w\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (розділ 7) – послідовність лінійних неперервних операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ слабко збігається до лінійного оператора A;

A^{-1} (розділ 8) – оператор, обернений до оператора A;

A^* (розділ 9) – оператор, спряжений до оператора A, що діє в гільбертовому просторі;

A' (розділ 9) – оператор, спряжений до оператора A, що діє в ЛНП;

$A \geq 0$ (розділ 9) – оператор, A, що діє в гільбертовому просторі, є невід'ємним;

P_G (розділ 9) – ортопроектор у гільбертовому просторі на підпростір G;

$\sqrt{A}$ (задача 50 з розділу 9 і задача 17 з розділу 12) – квадратний корінь з невід'ємного оператора A;

$\rho(A)$ (розділ 10) – резольвентна множина оператора A;

$\sigma(A)$ (розділ 10) – спектр оператора A;

$\sigma_p(A)$ (розділ 10) – точковий спектр оператора A;

$\sigma_c(A)$ (розділ 10) – неперервний спектр оператора A;

$\sigma_r(A)$ (розділ 10) – залишковий спектр оператора A;

$r(A)$ (розділ 10) – спектральний радіус оператора A;

$R_\lambda(A)$ (розділ 10) – резольвента оператора A;

$S_\infty(X_1, X_2)(S_\infty(X))$ (розділ 11) – простір компактних операторів, що діють із ЛНП X_1 у ЛНП X_2 (діють у ЛНП X);

$S_0(X_1, X_2)(S_0(X))$ (розділ 11) – простір скінченновимірних операторів, що діють із ЛНП X_1 у ЛНП X_2 (діють у ЛНП X);

$\operatorname{supp}\varphi(\operatorname{supp} f)$ (розділ 14) – носій функції φ (узагальненої функції f);

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ (розділ 14) – сукупність усіх нескінченно диференційовних та фінітних функцій із $\mathbb{R}^m$ у $\mathbb{C}$ (простір основних функцій);

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (розділ 14) – простір узагальнених функцій (над простором $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$);

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$ (розділ 14) – послідовність функцій $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ збігається до функції φ у $\mathcal{D}(\mathbb{R})$;

$L_1^{loc}(\mathbb{R})$ (розділ 14) – простір локально інтегровних на $\mathbb{R}$ функцій (тобто інтегровних на кожному відрізку з $\mathbb{R}$);

δ (розділ 14) – δ-функція Дірака;

δ_a (розділ 14) – зсунена на a δ-функція;

$f * g$ (розділ 14) – згортка функцій f і g;

$S(\mathbb{R})$ (розділ 14) – простір швидко спадних основних функцій;

$S'(\mathbb{R})$ (розділ 14) – простір узагальнених функцій (над простором $S(\mathbb{R}^m)$);

$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \varphi$ (розділ 14) – послідовність функцій $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ збігається до функції φ у $S(\mathbb{R})$;

$F[\varphi] = \hat{\varphi}$ (розділ 14) – перетворення Фур'є функції φ.

ПЕРЕДМОВА

Сучасний курс функціонального аналізу, що читається для студентів спеціальностей "Математика", "Прикладна математика", "Статистика", "Системний аналіз та керування" та інших математичних спеціальностей є одним з найбільш абстрактних і важких для засвоєння дисциплін. Разом з тим елементи функціонального аналізу застосовуються в теорії ймовірностей та випадкових процесів, фінанасовій математиці, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, гармонічному та вейвлет-аналізі та інших дисциплінах. Тому кожний кваліфікований математик обов'язково повинен оволодіти основними поняттями функціонального аналізу. Метою цього збірника задач є допомога студентам, аспірантам, науковим співробітникам та викладачам у кращому засвоєнні матеріалу. Він може бути використаний як на практичних заняттях з нормативного курсу "Функціональний аналіз", так і для самостійної роботи.

Даний збірник містить задачі з тем: "Компактні множини та оператори", "Інтегральні рівняння" та "Узагальнені функції". Він є продовженням, фактично другою частиною видання "Збірник задач з функціонального аналізу. Банахові простори. Гільбертові простори. Спряжені простори. Теорія операторів". Тому нумерацію розділів продовжено, і даний збірник задач складається з розділів 11-14.

Розділ 11 присвячено основним властивостям компактних та передкомпактних множин і компактних операторів. Ці властивості використовуються в розділі 12 при вивченні спектра компактного оператора і в розділі 13 при розв'язку інтегральних рівнянь з компактними операторами. Розділ 14 містить задачі для узагальнених функцій з просторів $\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}),\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ при $m > 1$. Особливу увагу присвячено властивостям перетворення Фур'є на $\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ та $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Крім того, вміщено відповіді та вказівки до всіх розділів 1-14, основні позначення, що вживаються в обох збірниках задач, а також виправлення до розділів 1-10.

Кожний розділ складається з коротких теоретичних відомостей, прикладів розв'язання простих типових задач та із задач для самостійного розв'язання. Задачі підвищеної складності відмічено знаком $*$. Тематика задач відповідає програмі курсу "Функціональний аналіз" для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 11
КОМПАКТНІ МНОЖИНИ ТА ОПЕРАТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Множину M у ЛНП X називають *компактною*, якщо кожне її відкрите покриття містить скінченне підпокриття.

Критерій Больцано – Вейєрштрасса. Множина M компактна тоді й тільки тоді, коли кожна послідовність точок із множини M містить підпослідовність, збіжну до деякого елемента з M.

Критерій Гаусдорфа. Для компактності замкненої множини M необхідно, а у випадку банахового простору X і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувала скінченна ε-сітка для множини M, тобто скінченна множина M_ε така, що $\forall x \in M \, \exists y \in M_\varepsilon \ : \ ||x - y|| < \varepsilon$.

Множину називають *передкомпактною*, якщо її замикання компактне.

Критерії передкомпактності, аналогічні критеріям компактності Больцано – Вейєрштрасса і Гаусдорфа див. у задачах 5 і 6.

У скінченновимірному просторі передкомпактність множини еквівалентна її обмеженості.

У нескінченновимірному просторі куля не є передкомпактною множиною.

Теорема 1 (Арцела – Асколі). Множина B у просторі $C([a,b])$ є передкомпактною тоді й лише тоді, коли виконуються умови: 1) $\exists C > 0$ $\forall x \in B \ \forall t \in [a,b] \ : \ |x(t)| \le C$ (рівномірна обмеженість); 2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \ \forall x \in B \ \forall t_1, t_2 \in [a,b], \ |t_1 - t_2| < \delta \ : \ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ (одностайна неперервність).

Критерії передкомпактності в деяких інших просторах див. у задачах 30-35,38,39,43,50.2,96,99-102.

Нехай $X_1, \ X_2$ – лінійні нормовані простори. Лінійний оператор $A : X_1 \to X_2$ називають компактним, якщо він переводить довільну обмежену множину в X_1 у передкомпактну множину в X_2. Сукупність усіх компактних операторів, що діють з X_1 в X_2, позначають через $S_\infty(X_1, X_2)$ ($S_\infty(X)$ у випадку, коли $X_1 = X_2 = X$).

Оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли образ одиничної кулі $A(B(0,1))$ – передкомпактна множина в X_2.

Теорема 2 (Про властивості компактних операторів). 1) $S_\infty(X_1, X_2) \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$; 2) $S_\infty(X_1, X_2)$ – лінійна множина; 3) якщо X_2 – банахів простір, $\{A_n : n \ge 1\} \subset S_\infty(X_1, X_2)$ і $A_n \rightrightarrows A$, то $A \in S_\infty(X_1, X_2)$; 4) якщо $A \in S_\infty(X_1, X_2)$, $B \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$, $C \in \mathcal{L}(X_3, X_1)$, то $BA \in S_\infty(X_1, X_3), AC \in S_\infty(X_3, X_2)$; 5) компактний оператор переводить слабко збіжну послідовність в X_1 у сильно збіжну послідовність в X_2.

Лінійну множину $J \subset \mathcal{L}(X)$ називають *двостороннім ідеалом* в алгебрі $\mathcal{L}(X)$, якщо $\forall A \in J \forall B \in \mathcal{L}(X) \ : \ \{AB, BA\} \subset J$.

Твердження 1)-3) теореми 2 означають, що коли X_2 – банахів простір, то $S_\infty(X_1, X_2)$ – підпростір в $\mathcal{L}(X_1, X_2)$. Твердження 1)-2) і 4) означають, що $S_\infty(X)$ є двостороннім ідеалом в алгебрі $\mathcal{L}(X)$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ називають *скінченновимірним*, якщо $\dim(R(A)) < +\infty$. Множину скінченновимірних операторів позначають через $S_0(X_1, X_2)$. Кожен скінченновимірний оператор є компактним, а $S_0(X)$ є двостороннім ідеалом в $\mathcal{L}(X)$ (див. задачу 53).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. З'ясувати, чи є наведені множини передкомпактними (компактними) у відповідних просторах:

1) $M = \{e_n : n \geq 1\}$ в $l_p, \ 1 \leq p < +\infty$;
2) $M = \left\{x_n(t) = e^{-nt}, \ t \in [0,1] \mid n \geq 1\right\}$ в $C([0,1])$; в $L_p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$;
3) $M = \{x_\alpha(t) = \cos \alpha t, t \in [0,\pi] \mid \alpha \in [0,2]\}$ в $C([0,\pi])$; в $L_p([0,\pi])$, $1 \leq p < +\infty$;
4) $M = \{x_n(t) = \cos nt, \ t \in [0,\pi] \mid n \geq 1\}$ в $C([0,\pi])$; в $L_p([0,\pi])$, $1 \leq p < +\infty$;
5) M – обмежена множина в $C([0,1])$, що складається з многочленів степеня не вище n, де n – фіксоване;
6) $M = \left\{x \in C^1([0,1]) \mid \int\limits_0^1 |x(t)|dt \leq 1, \ |x'(t)| \leq 3, \ t \in [0,1]\right\}$ в $C([0,1])$.

Р о з в ' я з о к . Одним з найзручніших методів встановлення, чи є дана множина передкомпактною, є аналог критерію компактності Больцано – Вейєрштрасса (див. задачу 5), який ми систематично використовуватимемо.

1) I спосіб. Оскільки $||e_n - e_m||_p = 2^{\frac{1}{p}} > 1, \ n \neq m$, то жодна з підпослідовностей послідовності $\{e_n : n \geq 1\}$ не є фундаментальною, а отже, збіжною, тому множина M не є передкомпактною, а отже, не є компактною.

II спосіб. Припустимо, що M передкомпактна. Розглядаючи саму множину як послідовність, отримаємо існування збіжної підпослідовності $\{e_{n_k} : k \geq 1\}$. Вона збігається покоординатно до 0 разом з усією послідовністю. Однак $||e_{n_k}|| = 1, \ k \geq 1$, отже, ця підпослідовність не збігається до 0, а тому розбіжна. Суперечність.

2) Припустимо, що дана множина передкомпактна. Тому, розглядаючи її як підпослідовність, отримаємо існування підпослідовності $\{x_{n_k} : k \geq 1\}$,

збіжної в $C([0,1])$, а отже, і поточково, до деякої функції $y \in C([0,1])$. Однак $x_{n_k}(t) = e^{-n_k t} \to \begin{cases} 1, & t=0, \\ 0, & t \in (0,1], \end{cases}$, $k \to \infty$, звідки, враховуючи єдиність границі, отримаємо, що y – розривна функція. Суперечність. Таким чином, M не є передкомпактною, а отже, і компактною в $C([0,1])$.

Оскільки $x_n \to 0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty$, що легко встановити за теоремою Лебега про мажоровану збіжність або безпосередньо обчисливши інтеграл, то і довільна підпослідовність послідовності $\{x_n : n \ge 1\}$ збіжна, тому M – передкомпактна множина. Однак вона не є компактною, бо $0 \notin M$.

3) Покажемо, що M – компактна множина у $C([0,\pi])$. Нехай $\{x_{\alpha_n} : n \ge 1\}$ – деяка послідовність з M. Оскільки послідовність $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset [0,2]$, то вона обмежена, а отже, за класичною теоремою Больцано – Вейєрштрасса, містить підпослідовність $\{\alpha_{n_k} : k \ge 1\}$, збіжну до деякого числа $\alpha_0 \in [0,2]$. Покажемо, що $x_{\alpha_{n_k}} \to x_{\alpha_0},\ k \to \infty$, у $C([0,\pi])$. Дійсно, використовуючи відому нерівність $|\cos u - \cos v| \le |u - v|,\ u, v \in \mathbb{R}$, що є наслідком теореми Лагранжа, отримуємо, що $\max\limits_{t\in[0,\pi]} |x_{\alpha_{n_k}} - x_{\alpha_0}(t)| = \max\limits_{t\in[0,\pi]} |\cos \alpha_{n_k} t - \cos \alpha_0 t| \le \max\limits_{t\in[0,\pi]} |\alpha_{n_k} t - \alpha_0 t| \le \pi|\alpha_{n_k} - \alpha_0| \to 0,\ k \to \infty$. Таким чином, M – компактна множина, а отже, і передкомпактна в $C([0,\pi])$.

Зауважимо, що передкомпактність M у $C([0,\pi])$ просто випливає і з теореми Асколі – Арцела, але перевірка замкнености вимагає міркувань, подібних наведеним у попередньому абзаці.

Множина M компактна і в $L_p([0,\pi]),\ 1 \le p < +\infty$, що випливає з її компактності в $C([0,\pi])$, бо зі збіжності в $C([0,1])$ випливає збіжність в $L_p([0,\pi])$.

4) Множина M не є передкомпактною в $C([0,\pi])$, бо не є одностайно неперервною. Справді, $\exists \varepsilon = 2\,\forall \delta > 0\,\exists t_1 := 0\,\exists t_2 := \frac{\pi}{n}, |t_1 - t_2| < \delta$ $\exists x_n \in M\ :\ |x_n(t_1) - x_n(t_2)| = 2 \ge \varepsilon$, де $n > \frac{\pi}{\delta}$.

Множина M не є передкомпактною і в $L_p([0,\pi]),\ 1 \le p < +\infty$. Справді, оскільки $\int\limits_0^\tau x_n(t)dt \to 0,\ n \to \infty,\ \tau \in [0,\pi]$, (зокрема, $x_n \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,\pi]),\ 1 < p < \infty$), то кожна збіжна підпослідовність послідовності $\{x_n : n \ge 1\}$ збігається до 0. Проте це неможливо, бо $||x_n||_p^p = \int\limits_0^\pi |\cos nt|^p dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi n} |\cos u|^p du = \int\limits_0^\pi |\cos u|^p du > 0,\ n \ge 1$. Зауважимо, що звідси випливає також, що M не є передкомпактною і в $C([0,\pi])$.

5) Нехай P_n – простір многочленів степеня не вище n з рівномірною нормою. Оскільки M – обмежена множина у скінченновимірному просторі P_n, то вона передкомпактна у цьому просторі, а отже, і в $C([0,1])$.

б) Покажемо, користуючись теоремою Асколі – Арцела, що множина M – передкомпактна в $C([0,1])$. Дійсно, одностайна неперервність випливає з теореми Лагранжа і обмеженості похідної: $|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\theta)| \cdot |t_1 - t_2| \le 3|t_1 - t_2|,\ t_1, t_2 \in [0,1],\ \theta \in [t_1, t_2],\ x \in M$. Крім того, якщо $x \in M$ і $||x|| = |x(t_0)|$, де $t_0 \in [0,1]$, то $|x(t_0)| \le |x(t)| + |x(t_0) - x(t)| \le |x(t)| + 3|t - t_0| \le |x(t)| + 3,\ t \in [0,1]$. Проінтегруємо цю нерівність від 0 до 1: $|x(t_0)| \le \int\limits_0^1 |x(t)|dt + 3 \le 4$. Отже, множина M – рівномірно обмежена.

Ця множина не є компактною, бо не є замкненою. Справді, $x_0 \notin M$, де $x_0(t) := |t - \frac{1}{2}|,\ t \in [0,1]$, але $\exists \{x_n : n \ge 1\} \subset M\ :\ x_n \to x_0$, $n \to \infty$, в $C([0,1])$. Прикладом такої послідовності є $x_n(t) = \sqrt{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n}},\ t \in [0,1],\ n \ge 1$.

2. Нехай $H = L_2([a,b]),\ \{p_k \mid 1 \le k \le n\},\ \{q_k \mid 1 \le k \le n\}$ – системи функцій з $L_2([a,b])$. Довести, що оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \left(\sum\limits_{k=1}^n p_k(t) q_k(s) \right) x(s)ds$ – компактний в H.

Р о з в ' я з о к . Оператор лінійний і обмежений, як скінченна сума операторів із задачі 25 розділу 6. Крім того, $R(A) \subset$ л.о.$\{p_k \mid 1 \le k \le n\}$, тобто A – скінченновимірний оператор. Тому A компактний.

3. Нехай $\{a_n : n \ge 1\}$ – обмежена послідовність комплексних чисел. Розглянемо оператор $A : l_2 \to l_2,\ Ax := (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$. Довести, що A компактний тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Р о з в ' я з о к . Достатність. Нехай виконується остання умова. Означимо $A_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots)$. Оператор A_n – компактний, бо скінченновимірний. Крім того, (див. задачу 9 з розділу 6) $||A - A_n|| = \sup\limits_{k \ge n+1} |a_k| \to 0,\ n \to \infty$. Тобто A – рівномірна границя послідовності $\{A_n : n \ge 1\}$. За п.3 теореми 2 звідси випливає, що $A \in S_\infty(l_2)$.

Необхідність. I спосіб. Припустимо, що $A \in S_\infty(l_2)$. Розглянемо стандартний базис в l_2 : $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, 0, \ldots)$. При цьому $e_k \xrightarrow{w} 0$. За п.5 теореми 2 звідси випливає, що $Ae_k \to 0$, бо A – компактний. Маємо $|a_k| = ||Ae_k|| \to 0,\ k \to \infty$.

II спосіб. Припустимо, що $A \in S_\infty(l_2)$, але $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність $\{\alpha_{n_k} : k \ge 1\}$ така, що $|a_{n_k}| \ge \varepsilon$, $k \ge 1$. Оскільки $A \in S_\infty(l_2)$ і $M := \{e_{n_k} : k \ge 1\}$ – обмежена множина, то множина $A(M) = \{a_{n_k} e_{n_k} : k \ge 1\}$ передкомпактна. Однак це не так, бо жодна її підпослідовність не збігається (існує поточкова збіжність до 0, проте $||a_{n_k}e_{n_k}|| = |a_{n_k}| \geq \varepsilon,\ k \geq 1$). Суперечність.

4. Нехай $K \in C([a,b]^2)$ і $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ x \in C([a,b])$. Довести, що $A \in S_\infty(C([a,b]))$.

Р о з в ' я з о к . Перш за все зазначимо, що A – обмежений (див. задачу 14 з розділу 6).

I спосіб. Нехай $\overline{B}(0,1)$ – одинична куля в $C([a,b])$. Доведемо, що $A(\overline{B}(0,1))$ – передкомпактна множина в $C([a,b])$. Ясно, що $A(\overline{B}(0,1)) \subset \overline{B}(0,||A||)$ і є обмеженою множиною. Доведемо, що функції з $A(\overline{B}(0,1))$ одностайно неперервні. Так як $K \in C([a,b]^2)$, то K – рівномірно неперервна (теорема Кантора). Тобто $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\forall (t_1,s_1),(t_2,s_2) \in [a,b]^2, \rho((t_1,s_1),(t_2,s_2)) < \delta$ виконується нерівність $|K(t_1,s_1) - K(t_2,s_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (тут ρ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^2$).

Візьмемо $t_1, t_2 \in [a,b]\ :\ |t_1 - t_2| < \delta$. Тоді $\forall x \in \overline{B}(0,1)\ :$ $|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| \leq \int\limits_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \cdot |x(s)|ds \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\int\limits_a^b |x(s)|ds$ $\leq \varepsilon$. Звідси, за теоремою Арцела, $A(\overline{B}(\overline{0},1))$ – передкомпактна множина.

II спосіб. За теоремою Стоуна – Вейєрштрасса існує послідовність поліномів $\{K_n : n \geq 1\}$ така, що $K_n \rightrightarrows K,\ n \to \infty$, на $[a,b]^2$. Нехай A_n – інтегральний оператор з ядром $K_n,\ n \geq 1$. Згідно із задачею 14 з розділу 6 $||A - A_n|| = \max\limits_{t \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|ds \leq$ $(b-a)\max\limits_{t,s \in [a,b]} |K(t,s) - K_n(t,s)| \to 0,\ n \to \infty$, тобто $A_n \rightrightarrows A$. Оскільки ядро K_n можна подати у вигляді $K_n(t,s) = \sum\limits_{k=0}^{m_n} t^k p_k(s),\ (t,s) \in [a,b]^2$, де p_k – многочлен, $0 \leq k \leq m_n,\ m_n \in \mathbb{N}$, то оператор A_n – скінченновимірний, а отже, компактний. За п.3 теореми 2 $A \in S_\infty(C([a,b]))$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. Довести, що множина M у ЛНП X передкомпактна тоді й тільки тоді, коли кожна послідовність елементів з M містить збіжну підпослідовність (при цьому границя не обов'язково належить M).

6. Для передкомпактності множини в ЛНП необхідно, а у випадку банахового простору й достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувала скінченна ε-сітка для цієї множини.

7. Довести, що якщо у банаховому просторі для кожного $\varepsilon > 0$ існує передкомпактна ε-стіка для множини M, то ця множина передкомпактна.

8. Довести, що кожна підмножина передкомпактної множини є передкомпактною.

9. Довести, що якщо у ЛНП хоч одна куля (відкрита чи замкнена) передкомпактна, то й усі кулі (відкриті й замкнені) у цьому просторі передкомпактні.

10. Нехай M – передкомпактна множина в ЛНП X, а послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $\rho(x_n, M) \to 0,\ n \to \infty$. Довести, що множина $K = \{x_n : n \geq 1\}$ передкомпактна.

11. Нехай $M = \{x_n : n \geq 1\}$ – передкомпактна множина в ЛНП $X,\ x_0 \in X$. Довести, що $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в X, якщо виконується хоча б одна з умов: 1) x_0 – єдина гранична точка множини M; 2) $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$.

12. Нехай $\{M_n : n \geq 1\}$ – послідовність компактних множин у ЛНП. Довести, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n \neq \varnothing$, якщо виконується хоча б одна з умов: 1) $M_{n+1} \subset M_n,\ n \geq 1$; 2) перетин довільної скінченної кількості цих множин непорожній.

13. Нехай M – компактна множина в ЛНП X. Довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ множина M може бути зображена у вигляді $M = \bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k$, де M_k – замкнена множина і $\mathrm{diam} M_k := \sup\limits_{x,y \in M_k} ||x - y|| \leq \varepsilon,\ 1 \leq k \leq n$.

14. Нехай X – ЛНП, $M \subset X,\ N \subset X$. Чи правильно, що множина $M + N$: 1) компактна, якщо M і N – компактні; 2) передкомпактна, якщо M і N передкомпактні; 3) замкнена, якщо M – компактна, N – замкнена; 4) замкнена, якщо M і N – замкнені?

15. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$. Функцію $f : M \to \mathbb{R}$ називають *напівнеперервною знизу* (*напівнеперервною зверху*) на множині M, якщо $\forall x_0 \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in B(x_0, \delta) \cap M\ :\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ $(f(x) < f(x_0) + \varepsilon)$. Довести: 1) що якщо M – компактна множина, то кожна напівнеперервна знизу (зверху) на M функція набуває на цій множині найменше (найбільше) значення; 2) твердження, обернене до твердження п. 1; 3) що якщо кожна неперервна на M функція обмежена, то M – компактна множина.

16. Нехай M – така множина в банаховому просторі, що кожна дійсна неперервна на M функція рівномірно неперервна. Чи випливає звідси, що M – компакт?

17. Нехай $\{L_n : n \geq 1\}$ – скінченновимірні підпростори банахового простору X такі, що $L_n \subset L_{n+1},\ n \geq 1$, і множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ – скрізь щільна в X. Довести, що обмежена множина M передкомпактна в X тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_{x \in M} \rho(x, L_n) \to 0,\ n \to \infty$.

18*. Довести, що у лінійному просторі s всіх числових послідовностей не можна ввести норму так, щоб збіжність за цією нормою була рівносильною покоординатній збіжності, але можна ввести метрику, що має цю властивість.

19. Довести, що наведені множини передкомпактні в $C([a,b])$ ($k_1, k_2 \in [0,+\infty)$ – фіксовані сталі):

1) $\left\{\int\limits_a^t x(u)du,\ t\in[a,b] \mid x \in M\right\}$, M – обмежена в $C([a,b])$;
2) $\{x \mid |x(a)| \le k_1; |x(t_1)-x(t_2)| \le k_2|t_1-t_2|,\ t_1,t_2 \in [a,b]\}$;
3) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(t_0)| \le k_1;\ |x'(t)| \le k_2,\ t\in[a,b]\right\}$, де $t_0 \in [a,b]$ – фіксоване;
4) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(a)| \le k_1, \int\limits_a^b |x'(t)|^2 dt \le k_2\right\}$;
5) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid \int\limits_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)dt \le k_2\right\}$;
6) $\left\{x \in C^2([a,b]) \mid |x(t)| \le k_1, |x''(t)| \le k_2,\ t \in [a,b]\right\}$;
7) $\{x \in C^1([a,b]) \,|\, |x(t)| \le k_1, t \in [a,b];\ |x'(t_1) - x'(t_2)| \le k_2|t_1-t_2|,\ t_1,t_2 \in [a,b]\}$;
8) одностайно неперервна множина неперервних функцій, значення яких обмежені однією сталою в деякій точці $t_0 \in [a,b]$;
9) обмежена множина многочленів степеня n.

Які з цих множин будуть компактними в $C([a,b])$?

20. Які з наведених множин передкомпактні (компактні) в $C([0,1])$:

1) $\{t^n \mid n \ge 1\}$;
2) $\left\{\sin n\sqrt{t} \mid n \ge 1\right\}$;
3)* $\{\sin(t+n) \mid n \ge 1\}$;
4) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
5) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in [1,3]\}$;
6) $\{\operatorname{arctg} \alpha t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
7) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$;
8) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \ge 0\right\}$;
9) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} e^{-nt} \mid a_n \in (-1,1),\ n \ge 1\right\}$;
10) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t+n^2} \mid a_n \in (-1,1),\ n \ge 1\right\}$?

21. За якої умови на множину $A \subset \mathbb{R}$ наведені множини будуть передкомпактними (компактними) в $C([0,1])$:

1) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in A\}$;
2) $\{\operatorname{arctg} \alpha t \mid \alpha \in A\}$;
3) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \in A\right\}$;
4) $\left\{\frac{1}{1+|t-\alpha|} \mid \alpha \in A\right\}$?

22. Чи є наведені множини передкомпактними в $L_2([0,1])$:

1) $\{t^n \mid n \ge 1\}$;
2) $\{\sin \pi n t \mid n \ge 1\}$;
3) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;
4) $\{\operatorname{arctg} \alpha t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$?

23. Користуючись задачею 5, довести, що куля $\overline{B}(0,1)$ не є передкомпактною множиною в: 1) $C([a,b])$; 2) $l_p,\ 1 \le p < +\infty$; 3) $L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty$.

24. Нехай множина $M \subset C([a,b])$ така, що $\forall \varepsilon > 0 \, \forall t_0 \in [a,b] \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \, \forall t \in [a,b], \ |t - t_0| < \delta \, \forall x \in M \ : \ |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$. Чи обов'язково множина M одностайно неперервна?

25. Нехай $\{x_n : n \geq 1\} \subset C([a,b])$ – одностайно неперервна множина і $\forall t \in [a,b] \ : \ x_n(t) \to x_0(t)$. Довести, що $x_0 \in C([a,b])$.

26. Нехай $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – компактна множина в $C([a,b]), \ y(t) := \sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha(t), \ t \in [a,b]$. Довести, що $y(t) = \max\limits_{\alpha \in A} x_\alpha(t), \ t \in [a,b]$, а також $y \in C([a,b])$.

27*. Довести, що функція $f \in C([a,b]^2)$ тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: 1) $\forall x \in [a,b] \ : \ f(x,\cdot) \in C([a,b])$; 2) $\forall y \in [a,b] \ : \ f(\cdot, y) \in C([a,b])$; 3) принаймні одна з множин $\{f(x,\cdot) \mid x \in [a,b]\}$, $\{f(\cdot,y) \mid y \in [a,b]\}$ компактна в $C([a,b])$.

28. Довести, що кожна множина, передкомпактна в $C^1([a,b])$, є передкомпактною в $C([a,b])$. Чи вірне обернене твердження для множини в $C^1([a,b])$?

29. Довести, що куля $B(0,1)$ простору $C^1([a,b])$ є передкомпактною множиною в $C([a,b])$. Чи є вона компактною в $C([a,b])$?

30. Сформулювати й довести критерій передкомпактності в $C^k([a,b]), \ k \in \mathbb{N}$.

31. Нехай (K, ρ) – компактний метричний простір. Довести, що множина M передкомпактна у просторі $C(K)$ тоді й тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена та одностайно неперервна (тобто $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, \forall t_1, t_2 \in K, \ \rho(t_1, t_2) < \delta, \ \forall x \in M \ : \ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$).

32. Нехай T – деяка множина, Y – компактна підмножина ЛНП X, $||\cdot||$ – норма в X, $B(T,Y)$ – лінійний простір усіх функцій, що діють з T в Y, а також $||x||_\infty := \sup\limits_{t \in T} ||x(t)||, \ x \in B(T,Y)$. Довести, що: 1) $B(T,Y)$ з нормою $||\cdot||_\infty$ – банахів простір; 2) множина M передкомпактна у $B(T,Y)$ тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке скінченне розбиття множини $T, \ T = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$, що на кожній множині T_k кожна функція з M змінюється не більше ніж на ε, тобто $\forall k = \overline{1,n} \, \forall x \in M \, \forall t_1, t_2 \in T_k \ : \ ||x(t_1) - x(t_2)|| \leq \varepsilon$.

33. Нехай T – деяка множина, $B(T)$ – лінійний простір усіх обмежених функцій, що діють із T в $\mathbb{R}$, а також $||x||_\infty := \sup\limits_{t \in T} |x(t)|, \ x \in B(T)$. Довести, що $B(T)$ з нормою $||\cdot||_\infty$ – банахів простір, і сформулювати та довести критерій передкомпактності в цьому просторі.

34. Довести, що обмежена множина M елементів простору l_2 передкомпактна тоді й лише тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall x \in M \ : \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon$.

Узагальнити це твердження на випадок довільного сепарабельного гільбертового простору.

35. Сформулювати й довести критерій передкомпактності в $l_p,\ 1 \leq p < +\infty$.

36. Довести компактність наведених множин в l_2 :

$$1)\ \left\{x \in l_2 \mid \forall n \geq 1\ :\ |x_n| \leq \frac{1}{n}\right\};\ 2)\ \left\{x \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2|x_n|^2 \leq 1\right\}.$$

37. Нехай $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Сформулювати умови на $\{a_n : n \geq 1\}$, за яких наведена множина компактна в l_2 :

$$1)\ \left\{x \in l_2 \mid \forall n \geq 1\ :\ |x_n| \leq \frac{1}{a_n}\right\};2)\ \left\{x \in l_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n|x_n|^2 \leq 1\right\}.$$

38. Довести, що множина M передкомпактна у просторі c тоді й тільки тоді, коли вона обмежена і $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall k \geq N\, \forall x \in M\ :$ $|x_k - \lim\limits_{n\to\infty} x_n| < \varepsilon$.

39. Сформулювати й довести критерій передкомпактності у просторі c_0.

40. Чи правильно, що кожна передкомпактна множина в ЛНП X_1 є передкомпактною в ЛНП X_2, якщо: 1) $X_1 = L_2([a,b]), X_2 = L_1([a,b])$; $2) X_1 = C([a,b]), X_2 = L_2([a,b])$; $3) X_1 = l_1, X_2 = l_\infty$; $4) X_1 = l_1, X_2 = l_2$.

41. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $X_1 \subset X_2$ (як множини). Знайти необхідну й достатню умову, щоб кожна передкомпактна множина в X_1 була передкомпактною в X_2.

42. Чи правильно, що куля $\overline{B}(0,1)$ ЛНП X_1 передкомпактна в ЛНП X_2, якщо: 1) $X_1 = l_1,\ X_2 = l_2$; $2) X_1 = C([0,1]),\ X_2 = L_2([0,1])$; $3) X_1 = L_2([0,1]),\ X_2 = L_1([0,1])$?

43. **(Красносельський)**. Кажуть, що множина $M \subset L_p(T,\mathcal{F},\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, має *одностайно абсолютно неперервні норми*, якщо $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall E \in \mathcal{F},\ \mu(E) < \delta\, \forall x \in M\ :\ ||x \cdot \chi_E||_p < \varepsilon$. Довести, що множина M передкомпактна у просторі $L_p(T,\mathcal{F},\mu)$, де $\mu(T) < +\infty$, тоді й тільки тоді, коли множина M має одностайно абсолютно неперервні норми і передкомпактна в сенсі збіжності за мірою.

44. Множину M називають *ніде не щільною* в ЛНП, якщо для будь-якої кулі $B(x_0,R)$ існує інша куля $B(x_1,r) \subset B(x_0,R)$ така, що $M \cap B(x_1,r) = \varnothing$. Довести, що у нескінченновимірному ЛНП кожна передкомпактна множина ніде не щільна.

45. Множину в ЛНП називають *множиною першої категорії*, якщо вона зображається у вигляді не більш ніж зліченного об'єднання ніде не щільних множин. Довести, що M – множина першої категорії в ЛНП X, якщо: 1) $M = C^1([a,b]), X = C([a,b])$; $2) M = C^1([a,b]), X = L_p([a,b])$, $1 \leq p \leq +\infty$.

46*. Нехай M – підпростір простору $C([a,b])$ такий, що $M \subset C^1([a,b])$. Довести, що M скінченновимірний.

47*. Нехай $\mu(T) < +\infty, M \subset L_1(T, \mu)$ – нескінченновимірний підпростір. Довести, що M не може міститись в $L_\infty(T, \mu.)$

48*. 1) Довести, що компактну множину в ЛНП не можна ізометрично відобразити на свою підмножину, що не збігається з усією множиною. 2) У просторі $\mathbb{R}^2$ з евклідовою нормою побудувати передкомпактну множину, ізометричну своїй підмножині, що не збігається з усією множиною.

49*. Нехай M – компактна множина в банаховому просторі X, $f : M \to M$. Довести, що f – ізометричне відображення множини M на себе в кожному з таких випадків: 1) $||f(x) - f(y)|| \geq ||x - y||$, $x, y \in M$; $2) f$ – сюр'єкція і $||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||,\ x, y \in M.$

50. 1) Нехай X – сепарабельний банахів простір, $\{x_n : n \geq 1\}$ – злічення скрізь щільна множина в $X,\ B$ – куля $\overline{B}(0,1)$ в $X^*,\ \rho(f,g) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|},\ f, g \in B$. Довести, що (B, ρ) – компактний метричний простір, збіжність у якому рівносильна $*$-слабкій збіжності.

2) (**Гельфанд**). Довести, що для передкомпактності множини M у банаховому просторі X необхідно, а у випадку сепарабельного простору X і достатньо, щоб для довільної $*$-слабко збіжної до нуля послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ співвідношення $f_n(x) \to 0,\ n \to \infty$, виконувалось рівномірно за $x \in M$, тобто $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, \forall x \in M$: $|f_n(x)| < \varepsilon.$

51. Нехай X_1, X_2 – ЛНП. Довести, що для лінійного оператора $A : X_1 \to X_2$ наведені умови рівносильні: 1) $A \in S_\infty(X_1, X_2);$ 2) образ одиничної кулі в X_1 передкомпактний в X_2; 3) для кожної обмеженої послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset X_1$ з послідовності $\{Ax_n : n \geq 1\} \subset X_2$ можна виділити збіжну підпослідовність.

52. Довести твердження 1)-4) з теореми 2. Показати, що умова повноти простору у п. 3 істотна.

53. Нехай X_1, X_2 – ЛНП. Довести, що: 1) $S_0(X_1, X_2) \subset S_\infty(X_1, X_2)$; $2) S_0(X_1, X_2)$ – лінійна множина в $\mathcal{L}(X_1, X_2)$; 3) якщо $A \in S_0(X_1, X_2)$, $B \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$, $C \in \mathcal{L}(X_3, X_1)$, то $BA \in S_0(X_1, X_3)$, $AC \in S_0(X_3, X_2)$; 4) якщо $A \in S_0(X_1, X_2)$, то $A^* \in S_0(X_2^*, X_1^*)$, причому $\dim R(A) = \dim R(A^*)$ (можна розглянути випадок, коли $X_1 = X_2 = H$ – гільбертів простір).

54. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A : X_1 \to X_2$ – лінійний оператор. Чи правильно, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$, якщо: 1) $\dim X_1 < +\infty;$ 2) $\dim X_2 < +\infty$?

55. Довести, що у нескінченновимірному ЛНП: 1) одиничний оператор не є компактним; 2) компактний оператор не має неперервного оберненого.

56. Які з наведених операторів в l_2 компактні:

1) $Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$; 3) $Ax = (x_2, x_3, ..., x_{100}, 0, 0, ...)$;

2) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...)$; 4) $Ax = (x_3, \frac{x_4}{2}, ..., \frac{x_n}{n-2}, ...)$?

57. Знайти необхідну й достатню умову на обмежену послідовність $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$, щоб оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$, $x \in X$, був компактним у просторі X, якщо: 1) $X = l_p$, $1 \leq p < +\infty$; $2) X = l_\infty$; $3) X = c$; $4) X = c_0$.

58. Знайти необхідну й достатню умову компактності оператора $A : l_2 \to l_2$, що задається матрицею Якобі (див. задачу 44 з розд. 9).

59. Які з наведених операторів $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ є компактними:

1) $(Ax)(t) = x(0) + t^2 x(1)$;
2) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$;
3) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{its} x(s)ds$;
4) $(Ax)(t) = tx(t)$;
5) $(Ax)(t) = x(t^3)$;
6) $(Ax)(t) = 3x(t) + \int\limits_0^1 e^{ts} x(s)ds$;
7) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(1-t))$;
8) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 x(s^2)ds$?

60. Які з наведених операторів $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ є компактними:

1) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)ds$;
2) $(Ax)(t) = p(t)\int\limits_0^1 q(s)x(s)ds$, де $p, q \in L_2([0,1])$;
3) $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (ts^2 + s)x(s)ds$;
4) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$;
5) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t tsx(s)ds$?

61. За якої умови на функцію a оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ буде компактним у просторі: 1) $C([0,1])$, якщо $a \in C([0,1])$; 2) $L_2([0,1])$, якщо $a \in L_\infty([0,1])$?

62. Довести компактність оператора $A : X_1 \to X_2$, заданого формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b]$, $x \in X_1$, якщо:

1) $X_1 = L_2([a,b])$, $X_2 = C([a,b])$, $K \in C([a,b]^2)$;
2) $X_1 = X_2 = L_2([a,b]^2)$, $K \in L_2([a,b]^2)$;
3) $X_1 = X_2 = L_2([a,b])$, $K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha}$, $(t,s) \in [a,b]^2$, $t \neq s$, $K_0 \in L_\infty([a,b]^2)$, $\alpha < \frac{1}{2}$;

4) $X_1 = X_2 = C([a,b]),\ K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^{\alpha}},\ (t,s) \in [a,b]^2,$ $t \neq s,\ K_0 \in C([a,b]^2),\ \alpha < 1;$

5) $X_1 = X_2 = C([0,1]),\ K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}},\ (t,s) \in [0,1]^2,\ t \neq s;$

6) $X_1 = X_2 = C([a,b]),\ K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\forall t \in [a,b]\ :\ K(t,\cdot) \in L_1([a,b])$, а також $\forall t_0 \in [a,b]\ :\ \int\limits_a^b |K(t,s) - K(t_0,s)|ds \to 0,\ t \to t_0;$

7)* виконуються припущення п. 3, але $\alpha < 1$.

63. Довести, що оператор вкладення ЛНП X у ЛНП Y, тобто оператор $J : X \to Y,\ Jx = x,\ x \in X$, є компактним, якщо: 1) $X = C^1([a,b]),\ Y = C([a,b]);$ 2)$X = C^{k+1}([a,b]),\ Y = C^k([a,b]),\ k \in \mathbb{N}$.

64. Чи буде компактним оператор вкладення ЛНП X у ЛНП Y, якщо: 1) $X = l_1, Y = l_2;$ 2)$X = l_1, Y = c_0;$ 3)$X = C([0,1]), Y = L_2([0,1]);$ 4)$X = L_2([0,1]), Y = L_1([0,1])$?

65. Довести, що для довільної послідовності $\alpha = \{\alpha_n : n \geq 1\} \subset (1, +\infty)$, оператор вкладення простору $l_{2,\alpha}$ (див. задачу 7 з розділу 2) у c_0 не є компактним.

66. Чи є компактним оператор $A : X \to Y, (Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [0,1]$, якщо: 1) $X = C^1([0,1]),\ Y = C([0,1]);$ 2)$X = C^2([0,1]),$ $Y = C^1([0,1]);$ 3)$X = C^2([0,1]), Y = C([0,1])$?

67. Довести, що оператор ортогонального проектування в гільбертовому просторі буде компактним тоді й лише тоді, коли він скінченновимірний.

68. Навести приклад некомпактних операторів $A, B \in \mathcal{L}(l_2)$ таких, що: 1) $AB \in S_\infty(l_2);$ 2) $A^2 \in S_\infty(l_2);$ 3)$A^k \notin S_\infty,\ 2 \leq k \leq m-1$, але $A^m \in S_\infty(l_2)$, де $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$ – фіксоване.

69. Нехай H – гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Чи правильно, що якщо:

1) $A + B \in S_\infty(H)$, то $A, B \in S_\infty$;
2) $A + B, A - B \in S_\infty(H)$, то $A, B \in S_\infty$;
3) $A + B \in S_\infty(H),\ R(A) \perp R(B)$, то $A, B \in S_\infty$;
4) лінійний оператор $C : H \to H$ такий, що $\forall A \in S_\infty(H)\ :$ $AC \in \mathcal{L}(H)$, то $C \in \mathcal{L}(H)$?

70. Довести, що область значень компактного оператора сепарабельна.

71. Чи може компактний оператор A в нескінченновимірному нормованому просторі задовольняти рівняння $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k A^k = 0$, де прийнято $A^0 = I$?

72. Чи може компактний оператор A в нескінченновимірному ЛНП X мати алгебраїчний обернений, визначений на: 1) X, якщо X – банахів простір; 2) $R(A)$?

73. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$ і $\exists c > 0 \,\forall x \in X \;:\; ||Ax|| \geq c||x||$. За якої умови на X оператор A може бути компактним?

74. Довести, що у гільбертовому просторі: 1) підпростір, який лежить в області значень компактного оператора, є скінченновимірним; 2) кожне ненульове власне значення компактного оператора має скінченну кратність (тобто відповідний власний підпростір є скінченновимірним).

75*. Нехай X і Y – банахові простори, оператор $A : X \to Y$ компактний і його множина значень $R(A)$ замкнена. Довести, що $R(A)$ скінченновимірна.

76. Нехай $A \in S_\infty(X_1, X_2)$ і $\dim X_1 = \infty$. Довести, що знайдеться послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X_1$ така, що $||x_n|| = 1$ і $Ax_n \to 0,\; n \to \infty$.

77. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли існує послідовність скінченновимірних лінійних операторів, яка рівномірно збігається до A.

78. Довести, що гільбертів простір H сепарабельний тоді й тільки тоді, коли кожен лінійний неперервний оператор в H є сильною границею послідовності скінченновимірних операторів.

79. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що оператори A, A^* і A^*A одночасно компактні або некомпактні.

80. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що якщо: 1) $A^2 \in S_\infty(H)$ і A нормальний, то $A \in S_\infty(H)$; 2) $\exists n > 1 \;:\; A^n \in S_\infty(H)$ і A нормальний, то $A \in S_\infty(H)$; $3) A \in S_\infty(H),\; A \geq 0$, то $\sqrt{A} \in S_\infty(H)$ (означення оператора $\sqrt{A}$ див. у задачі 50 з розділу 9).

81. Нехай X – банахів простір, а оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ такий, що $\forall \varepsilon > 0 \,\exists B_\varepsilon \in S_0(X) \,\exists C_\varepsilon \in \mathcal{L}(X),\; ||C_\varepsilon|| < \varepsilon \;:\; A = B_\varepsilon + C_\varepsilon$. Довести, що $A \in S_\infty(X)$.

82. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A : X_1 \to X_2$ – лінійний оператор. Довести, що такі умови рівносильні: 1) $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$; 2) A переводить кожну слабко збіжну послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X_1$ у слабко збіжну послідовність $\{Ax_n \;:\; n \geq 1\}$ в X_2. 3) 2) A переводить кожну збіжну послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X_1$ у слабко збіжну послідовність $\{Ax_n \mid n \geq 1\}$ в X_2.

83. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис у гільбертовому просторі $H,\; A \in \mathcal{L}(H)$ і $\sup\limits_{x \in L_n} ||Ax|| \to 0,\; n \to \infty$, де $L_n = \left\{x \in (\{e_1, ..., e_n\})^\perp \mid ||x|| = 1\right\},\; n \geq 1$. Довести, що A – компактний оператор.

84. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A \in S_\infty(X_1, X_2)$. Довести, що A переводить довільну слабко збіжну послідовність у сильно збіжну.

85. Нехай X_1, X_2 – банахові простори і X_1 – рефлексивний. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ буде компактним тоді й тільки тоді, коли він переводить усяку слабко збіжну послідовність у сильно збіжну.

86. Довести, що в задачі 85 у частині достатності умова рефлексивності простору X_1 істотна.

87. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ і $A \geq 0$. Довести, що оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли для всякої слабко збіжної до нуля послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset H$ виконується співвідношення $(Ax_n, x_n) \to 0,\ n \to \infty$.

88. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H),\ B \in S_\infty$. Довести, що $A \in S_\infty(H)$ у кожному з випадків: 1) $0 \leq A \leq B$; $2) A^*A \leq B^*B$.

89*. **(Шаудер)**. Нехай X_1 – ЛНП, X_2 – банахів простір, $A \in L(X_1, X_2)$. Довести, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$ тоді й тільки тоді, коли $A^* \in S_\infty(X_2^*, X_1^*)$.

90. Нехай X – рефлексивний банахів простір. Довести компактність будь-якого оператора з просторів: 1) $\mathcal{L}(X, l_1)$; 2) $\mathcal{L}(c_0, X)$.

91. Нехай X_1 – ЛНП, X_2 – сепарабельний банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Довести, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$ тоді й тільки тоді, коли A^* переводить довільну $*$-слабко збіжну в X_2^* послідовність у збіжну в X_1^* послідовність.

92. Нехай H – гільбертів простір, $A \in S_\infty(H)$. Довести, що множина $A(\overline{B}(0,1))$ компактна.

93. Нехай H гільбертів простір, $A \in S_\infty(H)$. Довести, що $\exists x \in H \backslash \{0\}\ :\ ||Ax|| = ||A|| \cdot ||x||$.

94. Чи справджуються твердження задач 92,93 для оператора $A \in S_\infty$, що розглядається: 1) у довільному банаховому просторі X; 2) у рефлексивному банаховому просторі X?

95*. Нехай X, Y – банахові простори, $A \in S_\infty(X, Y),\ B \in \mathcal{L}(X, Y)$, а також $R(B) \subset R(A)$. Довести, що $B \in S_\infty(X, Y)$.

96. **(Мазур)** Нехай X – банахів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset S_\infty(X)$, причому $A_n \xrightarrow{s} I,\ n \to \infty$. Довести, що множина $M \subset X$ передкомпактна тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: 1) M – обмежена множина; 2) $A_n x \to x,\ n \to \infty$, рівномірно за $x \in M$. Переконатись, що умову 2) можна замінити умовою $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\ :\ ||A_n x - x|| < \varepsilon$.

97. Яку послідовність операторів слід узяти, щоб з твердження задачі 96 отримати твердження задач 34 і 38?

98. Нехай $1 \leq p < +\infty,\ x \in L_p([a,b]),\ h > 0$. Функцію $(A_h x)(t) := x_h(t) := \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} x(s) ds$, де $x(t) := 0,\ t \in \mathbb{R} \backslash [a,b]$, називають середньою функцією Стєклова. Довести, що:

1) $x_h \in C([a,b]),\ ||x_h||_\infty \leq \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} ||x||_p$;

2)$^*||x_h||_p \le ||x||_p$;

3)$||x - x_h||_p \to 0,\ h \to 0+$;

4)$A_h \in S_\infty(L_p([a,b]), C([a,b])),\ 1 < p < +\infty$;

5)$A_h \in S_\infty(L_p([a,b]), L_p([a,b])),\ 1 < p < +\infty$.

99. (Колмогоров) Довести, що множина M передкомпактна у просторі $L_p([a,b]),\ 1 < p < +\infty$, тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: 1) M – обмежена множина; 2) $\forall \varepsilon > 0\, \exists h > 0\, \forall x \in M\ :\ ||x - x_h||_p < \varepsilon$.

100. Довести, що: 1) твердження задачі 96 залишається вірним, якщо умову $\{A_n : n \ge 1\} \subset S_\infty(X)$ замінити вимогою, щоб $\exists k \in \mathbb{N}\ :$ $\left\{A_n^k\ :\ n \ge 1\right\} \subset S_\infty(X)$;

2) **(Тулайков)** твердження задачі 99 справджується і при $p = 1$.

101. (М.Рісс). Довести, що множина M передкомпактна у просторі $L_p([a,b]),\ 1 \le p < +\infty$, тоді й лише тоді, коли виконуються умови: 1) M – обмежена множина; 2) M – одностайно неперервна в середньому порядку p, тобто $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall h \in (0,\delta)\, \forall x \in M\ :\ \int\limits_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p (x(t+h) := 0,$ якщо $t + h > b)$.

102. (Тамаркін). Довести, що множина M передкомпактна у просторі $L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p < +\infty$, тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: 1) M – обмежена множина; 2) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ ||h|| < \delta\, \forall x \in M\ :\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$; 3) $\forall \varepsilon > 0\, \exists R > 0\, \forall x \in M\ :$ $\int\limits_{||t|| \ge R} |x(t)|^p dt < \varepsilon^p$ (тут $||\cdot||$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n$).

103. Нехай $p > 1$ і $A \in \mathcal{L}(L_p([a,b]), C([a,b]))$. Довести, що оператор A компактний, як оператор, що діє з $L_p([a,b])$ в $L_p([a,b])$.

104. Чи правильно, що $B_n \rightrightarrows I,\ K_n \rightrightarrows I$ в $C([0,1])$, де B_n, $n \ge 1$, – оператори Бернштейна: $(B_n x)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x(\frac{k}{n}) t^k (1-t)^{n-k}$, $t \in [0,1],\ x \in C([0,1])$, а $K_n,\ n \ge 1$, – оператори Канторовича (див. задачу 29 з розд. 7)?

105. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $X_0 \subset X_1$ – лінійна скрізь щільна в X_1 множина з нормою, індукованою нормою з $X_1,\ A \in S_\infty(X_0, X_2)$. Довести, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$.

106. Нехай $W_2^1([a,b])$ – поповнення простору $C^1([a,b])$ за нормою $||x|| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt + \int\limits_a^b |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\ x \in C^1([a,b])$. Довести, що:

1) $W_2^1([a,b]) \subset L_2([a,b])$;

2) оператор вкладення простору $A : W_2^1([a,b]) \to L_2([a,b]),\ Ax = x$, є компактним.

107. Довести, що: 1) $\forall x \in C^1([a,b]) \ : \ x(t) = \frac{1}{b-a}\left(\int\limits_a^b x(s)ds + \int\limits_a^b K(t,u)x'(u)du\right)$, $t \in [a,b]$, де $K(t,u) = \begin{cases} u-b, & a \le t \le u \le b, \\ u-a, & a \le u < t \le b; \end{cases}$

2) $||x||_\infty \le c||x||, \ x \in C^1([a,b])$, де $c > 0$ – стала, а $||\cdot||_\infty, ||\cdot||$ – норми в $C([a,b])$ і $W_2^1([a,b])$ відповідно;

3) $W_2^1([a,b]) \subset C([a,b])$ і відповідний оператор вкладення компактний.

108. Довести, що оператор $A : W_2^1([a,b]) \to L_2([a,b]), \ (Ax)(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, буде компактним.

109. 1) Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\{e_n : n \ge 1\}$ – ортонормований базис в H, A – оператор, заданий матрицею $\{\alpha_{jk} \ : \ j,k \ge 1\} \ \subset \ \mathbb{C} \quad \left(Ax = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k\right)e_j, \ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right)$, причому $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < +\infty$. Довести, що $A \in S_\infty(H)$.

2) Нехай $L_2(T,\mu)$ – сепарабельний гільбертів простір, $K \in L_2(T \times T, \mu \times \mu), \ (Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)ds, \ t \in T, \ x \in L_2(T,\mu)$. Довести, що $A \in S_\infty(L_2(T,\mu))$.

110. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою, $p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $K : T \times T \to \mathbb{C}$ – вимірна функція, $\sup\limits_{t \in T}\int\limits_T |K(t,s)|^q d\mu(s) < \infty$. Довести, що оператор $A : L_p(T,\mu) \to L_p(T,\mu)$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s), \ t \in T$, є компактним.

111. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір з мірою, $K : T \times T \to \mathbb{R}$ – вимірна функція, $c_1 := \sup\limits_{s \in T}\int\limits_T |K(t,s)|d\mu(t), \ c_2 := \sup\limits_{t \in T}\int\limits_T |K(t,s)|d\mu(s)$. Для оператора A з попередньої задачі довести, що:

1) якщо $c_1 < +\infty$, то $A \in \mathcal{L}(L_1(T,\mu)), \ ||A|| \le c_1$;

2) якщо $c_1 < +\infty, \ c_2 < +\infty$, то $A \in \mathcal{L}(L_p(T,\mu)), \ ||A|| \le c_1^{\frac{1}{p}} c_2^{\frac{1}{q}}$, $1 < p < +\infty$;

3) за умов п. 2) оператор не обов'язково компактний у просторі $L_p(T,\mu)$, $1 \le p < +\infty$, навіть коли $\mu(T) < +\infty$;

4) якщо $c_1 < +\infty, \ c_2 < +\infty, \mu(T) < +\infty$ і $\sup\limits_{s \in T}\int\limits_{B_n(s)} |K(t,s)|d\mu(t) \to 0, \ n \to \infty$, де $B_n(s) := \{t \in T \mid |K(t,s)| > n\}, \ n \ge 1, \ s \in T$, то $A \in S_\infty(L_p(T,\mu)), \ 1 \le p < +\infty$.

112. Нехай $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – 2π-періодична вимірна за Лебегом функція, причому $K \in L_1([0, 2\pi])$. Довести, що при $1 \leq p < +\infty$ оператор $A : L_p([0, 2\pi]) \to L_p([0, 2\pi])$, заданий формулою $(Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} K(t-s)x(s)ds,\ t \in [0, 2\pi]$, є компактним.

113. Нехай $p \in L_1(\mathbb{R})$. Довести, що оператор $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(t-s)x(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ x \in L_2(\mathbb{R})$, є лінійним і неперервним в $L_2(\mathbb{R})$. За якої умови на функцію p оператор A є компактним?

114. Нехай $p \in L_1([0, +\infty)),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t p(t-s)x(s)ds,$ $t \in [0, +\infty),\ x \in L_2([0, +\infty))$. Довести, що оператор $A \in \mathcal{L}(L_2([0, +\infty)))$. За якої умови на функцію p він компактний?

115. Нехай $p \in L_1([0, +\infty)),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{+\infty} p(t+s)x(s)ds,$ $t \in [0, +\infty),\ x \in L_2([0, +\infty))$. Довести, що: 1) $A \in \mathcal{L}(L_2([0, +\infty)))$; 2) якщо $\int\limits_0^{+\infty} t|p(t)|^2dt < +\infty$, то $A \in S_\infty(L_2([0, +\infty)))$.

116. Нехай $p(t) = \frac{1}{t},\ t > 0$, оператор A визначений формулою з попередньої задачі 115. Довести, що: 1) $A \in \mathcal{L}(L_2([0, +\infty)))$; $2) A \notin S_\infty(L_2([0, +\infty)))$.

117. Нехай $C_b(\mathbb{R})$ – лінійний простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ числових функцій з нормою $||x|| := \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,\ x \in C_b(\mathbb{R})$, а функція $K \in C(\mathbb{R}^2)$ така, що $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |K(t,s)|ds < \infty$. Нехай також $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} K(t,s)x(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ x \in C_b(\mathbb{R})$. Довести, що: 1) $A \in \mathcal{L}(C_b(\mathbb{R}))$; 2) не обов'язково $A \in S_\infty(C_b(\mathbb{R}))$.

118. Нехай у ЛНП X, де $X = C([0,1])$ або $X = L_p([0, +\infty))$, $1 < p < +\infty$, оператор A визначений формулою $(Ax)(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t x(s)ds,$ $t > 0,\ x \in X$. Довести, що: 1) $A \in \mathcal{L}(C([0,1]))$; $2) A \notin S_\infty(C([0,1]))$; $3)^* A \in \mathcal{L}(L_p([0, +\infty)))$; $4) A \notin S_\infty(L_p([0, +\infty)))$.

РОЗДІЛ 12
СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРІВ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорема 1. Нехай A – компактний оператор у нескінченновимірному банаховому просторі. Тоді:

1) $0 \in \sigma(A)$;

2) $\sigma(A)$ – не більш ніж злічення множина, єдиною можливою граничною точкою якої є 0;

3) довільна ненульова точка спектра є власним числом скінченної кратності, тобто якщо $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, то $0 < \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < +\infty$.

Опис компактних самоспряжених операторів дає така теорема.

Теорема 2 (Гільберт, Шмідт). Нехай H – гільбертів простір, A – компактний самоспряжений оператор в H. Тоді існує ортонормована система $\{e_n : 1 \le n \le N\}$ $(N \le \infty)$ і набір $\{\lambda_n : 1 \le n \le N\} \subset \mathbb{R}$ такі, що

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\cdot, e_n) e_n.$$

При цьому $\{\lambda_n : n \ge 1\} \backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\} = \sigma(A)\backslash\{0\},$ e_n – власний вектор, що відповідає власному значенню λ_n, а також якщо $N = +\infty$, то $\lambda_n \to 0,\ n \to \infty$, і ряд у теоремі збігається за нормою в просторі $\mathcal{L}(H)$.

При $N = \infty$ ряд з теореми 2 називають *рядом Шмідта*.

У теоремі 2 можна вважати, що $\lambda_n \ne 0,\ n \ge 1$, і тоді $\forall x \in H$: $x = \sum_{n=1}^{N} (x, e_n)e_n + Px$, де P – ортопроектор на $\operatorname{Ker} A$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$, де H – сепарабельний гільбертів простір, називають *оператором Гільберта – Шмідта*, якщо для деякого ортонормованого базису $\{e_n : n \ge 1\}$ в H ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2$ збігається; при цьому число $||A||_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2\right)^{\frac{1}{2}}$ називають *абсолютною нормою* (або *нормою Гільберта – Шмідта*). Збіжність указаного ряду і число $||A||_2$ не залежать від вибору базису (див. задачу 36), тому наведене означення коректне. Множину операторів Гільберта – Шмідта позначають $S_2(H)$.

Ядро K інтегрального оператора $(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b],\ x \in L_2([a,b])$, називають *ядром Гільберта – Шмідта*, якщо $K \in L_2([a,b]^2)$. При цьому $A \in S_2(L_2([a,b]))$ (див. задачу 36.7).

1. Знайти спектр, власні числа та власні функції оператора $(Ax)(t) = \int\limits_a^b e^{t-s}x(s)ds$ в $C([a,b])$.

Р о з в ' я з о к . A – інтегральний оператор з неперервним ядром $K(t,s) = e^{t-s}$. Звідси випливає (див. задачу 4 з розділу 11), що A – компактний оператор і всяка його ненульова точка спектра є власним числом. Нехай $\lambda \neq 0$ і $Ax = \lambda x$. Звідси випливає, що $e^t \int\limits_a^b e^{-s}x(s)ds = \lambda x(t)$ і $x(t) = Ce^t$ ($C \neq 0,$ бо ми шукаємо нетривіальні розв'язки). Підставимо x із другої рівності в першу та отримаємо: $Ce^t(b-a) = \lambda Ce^t$. Тобто, $\lambda = b - a$. Звідси випливає, що єдине ненульове власне значення – це $b-a$, і йому відповідає власна функція Ce^t $(C \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$. З теореми про спектр компактного оператора робимо висновок, що $\sigma(A) = \{0, b-a\}$.

Зауважимо, що $\lambda = 0$ є власним числом оператора A, бо існує ненульова функція x така, що $\int\limits_a^b e^{-s}x(s)ds = 0$ (її можна знайти, наприклад, серед функцій виду $x(t) = 1 + \alpha e^t,\ t \in [a,b]$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ – шукана стала).

2. Знайти спектр, власні числа та власні функції оператора $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \min\{t,s\}x(s)ds$ в $L_2([0,1])$.

Р о з в ' я з о к . Ядро $K(t,s) = \min\{t,s\}$ – неперервне та ермітове. Звідси випливає, що A – компактний самоспряжений оператор (див. задачі 2.1 з розділу 9 і 62.2 з розділу 11). Знайдемо ненульові власні числа оператора A. Маємо $Ax = \lambda x,\ \lambda \neq 0,\ x \neq 0,\ x \in L_2([0,1])$, або $\int\limits_0^t sx(s)ds + t\int\limits_t^1 x(s)ds = \lambda x(t).(1)$ Ясно, що для довільного $x \in L_2([0,1])$ ліва частина цієї рівності – неперервна на $[0,1]$ функція. Звідси випливає, що і права частина, тобто $x \in C([0,1])$. Проте для $x \in C([0,1])$ ліва частина належить до $C^1([0,1])$ і тому $x \in C^1([0,1])$. Продовжуючи ці міркування, отримуємо, що всяка власна функція оператора A (що відповідає $\lambda \neq 0$) нескінченно диференційовна на $[0,1]$. Продиференціюємо двічі рівність (1): $tx(t) + \int\limits_t^1 x(s)ds - tx(t) = \lambda x'(t)(2)$ і $-x(t) = \lambda x''(t)$. З рівностей (1),(2) випливає, що $x(0) = 0,\ x'(1) = 0$. Тобто всяка власна функція оператора A, що відповідає власному значенню $\lambda \neq 0$ є розв'язком крайової задачі $\lambda x''(t) + x(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x'(1) = 0$. Зазначимо, що аналогічні міркування показують, що $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора A (диференціювання можливе згідно з теоремою [19](гл.VI, §3, теорема 1): якщо $x \in L_1([a,b]),\ y(t) := \int\limits_a^t x(s)ds,\ t \in [a,b]$, то m-майже скрізь на $[a,b]$ існує похідна y' і $y'(t) = x(t) \pmod{m}$).

Отриману крайову задачу легко розв'язати. Характеристичне рівняння $\lambda z^2 + 1 = 0$ має розв'язки $z = \pm z_0,$ де $z_0 = \sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$ (довільне з двох значень кореня). Тоді $x(t) = C_1 e^{-z_0 t} + C_2 e^{z_0 t}$. Враховуючи крайові умови, дістанемо лінійну систему, розв'язуючи яку, отримаємо умову $e^{2z_0} = -1,$ тобто $2z_0 = 2\pi n i + \pi i,\ n \in \mathbb{Z}$. Тому маємо: $\lambda_n = \pi^{-2}(n + \frac{1}{2})^{-2},\ \varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin(n+\frac{1}{2})\pi t,\ n \geq 0$ (ми виписали ортонормовану послідовність власних функцій, що відповідає λ_n, причому кожне λ_n має кратність 1). Таким чином, маємо, що $\sigma_p(A) = \left\{\pi^{-2}(n+\frac{1}{2})^{-2} \mid n \geq 0\right\}$ і $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$. При цьому, оскільки оператор A самоспряжений, то (див. задачу 20.1 розділу 10) $||A|| = r(A) = \sup\{\lambda_n\ :\ n \geq 0\} = \frac{4}{\pi^2}$.

Зауважимо, що співвідношення $0 \notin \sigma_p(A)$ випливає також з повноти ортонормованої системи власних функцій $\{\varphi_n\ :\ n \geq 0\}$ (доведіть її) і розкладу $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x,\varphi_n)\varphi_n + Px,$ де P – ортопроектор на $\operatorname{Ker} A$.

Зазначимо, що згідно з теоремою Гільберта – Шмідта $(Ax)(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n(x,\varphi_n)\varphi_n(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2}\int\limits_0^1 \sin(n+\frac{1}{2})\pi s x(s)ds \cdot \sin(n+\frac{1}{2})\pi t$. Це і є розклад у ряд Шмідта; він збігається в $L_2([0,1])$ рівномірно за $x \in \overline{B}(0,1) \subset L_2([0,1])$. Змінюючи порядок інтегрування й підсумовування, отримаємо, що

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t \cdot \sin(n+\frac{1}{2})\pi s}{(n+\frac{1}{2})^2}\right)x(s)ds.$$

Обґрунтування можна дістати за теоремою Лебега про мажоровану збіжність або користуючись неперервністю скалярного добутку і враховуючи, що ряд під знаком інтеграла рівномірно збігається за $s \in [0,1]$, а отже, і в $L_2([0,1])$, при кожному $t \in [0,1]$. Звідси, зокрема, можна вивести, що $\min\{t,s\} = \frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t \cdot \sin(n+\frac{1}{2})\pi s}{(n+\frac{1}{2})^2},\ t,s \in [0,1]$. Ця рівність також випливає з теореми про білінійний розклад ермітового ядра Гільберта – Шмідта.

3. Які з наведених множин можуть бути спектром компактного оператора в l_2 : 1) $[0,1]$, 2) $\{0,1\}$, 3) $\{0\}$, 4) $\{1\}$, 5) $\left\{\frac{1}{n} \,:\, n \geq 1\right\}$, 6) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \geq 1\right\}$, 7) $\{0\} \cup \left\{\frac{i}{n} \,:\, n \geq 1\right\}$?

4. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 ts^3 x(s)ds$ компактним і знайти його спектр у просторі 1) $L_2([0,1])$; 2) $C([0,1])$.

5. Нехай $p, q \in C([a,b])$. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^b p(t)q(s)x(s)ds$ компактним і знайти його спектр у просторі: 1) $L_2([a,b])$; 2) $C([a,b])$.

6. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ компактним і знайти його спектр в $L_2([a,b])$:

1) $K(t,s) = \cos(t-s),\ a = 0,\ b = 2\pi;$
2) $K(t,s) = \sin(t-s),\ a = 0,\ b = 2\pi;$
3) $K(t,s) = \cos(t+s),\ a = 0,\ b = \pi;$
4) $K(t,s) = ts - 2t^2s^2,\ a = -1,\ b = 1;$
5) $K(t,s) = ts + t^2s^2,\ a = 0,\ b = 1.$

У кожному випадку знайти норму оператора A.

7. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ компактним і знайти його спектр в $L_2([a,b])$:

1) $K(t,s) = ts + 3t^2s^2,\ a = -1,\ b = 1;$
2) $K(t,s) = \cos(t-s),\ a = -\pi,\ b = \pi.$

8. Знайти спектр, власні числа, спектральний радіус та норми операторів із задач 56.2,56.3 з розділу 11.

9. Нехай X – банахів простір, $A \in S_\infty(X)$ і $\lambda \neq 0$. Довести, що $R(A - \lambda I)$ – замкнений підпростір в X.

10. Навести приклад компактного оператора в l_2, для якого: 1) 0 не є власним значенням; 2) 0 є власним значенням скінченної кратності; 3) 0 є власним значенням нескінченної кратності.

11. Нехай компактний самоспряжений оператор A в нескінченновимірному гільбертовому просторі має скінченну кількість власних значень. Довести, що 0 – власне число A нескінченної кратності.

12. Нехай H – гільбертів простір, $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормована послідовність в H, $\{\lambda_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ – обмежена послідовність, $Ax := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n,\ x \in H$. Довести, що: 1) $A \in \mathcal{L}(H)$; 2)$\sigma_p(A)\backslash\{0\} =$

$\{\lambda_n : n \geq 1\}$; $3)0 \notin \sigma_p(A)$ тоді й тільки тоді, коли $\{e_n : n \geq 1\}$ – базис в H. З'ясувати, за якої умови на послідовність $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ оператор A є: 4) нормальним; 5) самоспряженим; 6) невід'ємним; 7) компактним; 8) оператором Гільберта – Шмідта.

13. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\{e_n : n \geq 1\}$ і $\{g_n : n \geq 1\}$ – дві ортонормовані послідовності в H, $\{s_n : n \geq 1\}$ – числова послідовність така, що $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. Для довільного $x \in H$ покладемо $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(x, g_n)e_n$, $A_k x = \sum\limits_{n=1}^{k} s_n(x, g_n)e_n$. Довести, що: 1) $A_n \rightrightarrows A$, $n \to \infty$; 2) A – компактний оператор в H; 3) A – оператор Гільберта – Шмідта тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < \infty$.

14. Нехай A – оператор з попередньої задачі. Знайти A^*, AA^*, A^*A.

15. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – деякий ортонормований базис у гільбертовому просторі H, $A \in \mathcal{L}(H)$ і $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n \geq 1$, де $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ – деяка обмежена числова послідовність. Довести, що $\forall x \in H \ : \ Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n$.

16. Нехай $A \in \mathcal{L}(L_2([0,\pi]))$, $(A\varphi_n)(t) = \frac{1}{n^2}\varphi_n(t)$, $t \in [0,\pi]$, $n \geq 1$, де $\varphi_n(t) = \sin nt$. Довести, що A – інтегральний оператор Гільберта – Шмідта. Знайти його ядро K.

17. Нехай A – самоспряжений компактний оператор у гільбертовому просторі H, $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$ – його розклад у ряд Шмідта. Довести твердження:

1) $\forall k \geq 1 \ : \ A^k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, \lambda_n, \ n \geq 1\} \ : \ R_\lambda(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cdot,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n$;

3) якщо $A \geq 0$ і $\sqrt{A} := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$, то $(\sqrt{A})^2 = A$.

18. Нехай A – невід'ємний компактний оператор у гільбертовому просторі H. Довести, що існує єдиний невід'ємний компактний оператор B такий, що $B^2 = A$, при цьому, звичайно, $B = \sqrt{A}$, де оператор $\sqrt{A}$ визначений 1) у попередній задачі; 2) у задачі 50 з розділу 9.

19. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$, $\forall k \geq 1 \ : \ \alpha_k \geq 1$, $l_{2,\alpha}$ – гільбертів простір усіх послідовностей $x = (x_1, x_2, ...)$, які задовольняють умову $||x||_\alpha = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, із відповідним скалярним добутком. Довести твердження: 1) $l_{2,\alpha} \subset l_2$ і норма оператора вкладення $A : l_{2,\alpha} \to l_2$, $Ax = x$, не перевищує одиниці; 2) оператор A компактний тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$; 3) $A \in S_2(l_{2,\alpha}, l_2)$ тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$.

20. Нехай $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi t \sin n\pi s,\ t,s \in [-1,1]$. Розглянемо в $L_2([-1,1])$ оператор A, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [-1,1]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта (зокрема, A – компактний оператор). 2) Знайти $\sigma(A),\ r(A)$ і $||A||$, а також послідовність власних функцій. 3) Зобразити A у вигляді рівномірно збіжного ряду одновимірних операторів (ряду Шмідта).

21. Нехай K – парна 2π-періодична дійсна функція з $L_2([-\pi,\pi])$; $K(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int},\ t \in \mathbb{R}$ – її розклад у ряд Фур'є. Розглянемо в $L_2([-\pi,\pi])$ оператор A, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds,\ t \in [-\pi,\pi]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта і функції $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},\ t \in [-\pi,\pi],\ n \in \mathbb{Z}$, які утворюють ортонормований базис у просторі $L_2([-\pi,\pi])$, є власними функціями оператора A.

2) Знайти $\sigma(A),\ r(A)$ і $||A||$.

3) Зобразити A у вигляді ряду Шмідта.

22. Нехай K – парна 2π-періодична дійсна функція, яка належить до $L_2([-\pi,\pi]); K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,\ t \in \mathbb{R}$ – її розклад у ряд Фур'є. Розглянемо в $L_2([-\pi,\pi])$ оператор A, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t+s)x(s)ds,\ t \in [-\pi,\pi]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта; послідовності його власних чисел і ортонормованих власних функцій визначаються формулами $\lambda_0 = \pi a_0,\ \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \lambda_n^{(1)} = -\pi a_n,\ \varphi_n^{(1)}(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}; \lambda_n^{(2)} = \pi a_n,\ \varphi_n^{(2)}(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ n \geq 1$.

2) Знайти $\sigma(A),\ r(A)$ і $||A||$.

3) Зобразити A у вигляді ряду Шмідта.

23. Знайти норму, спектр, власні числа та власні функції оператора $A : L_2([-\pi,\pi]) \to L_2([-\pi,\pi])$, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [-\pi,\pi]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \cos n(t-s),\ N \in \mathbb{N},\ \{\lambda_1, ..., \lambda_N\} \subset \mathbb{C}$;

2) $K(t,s) = \cos^4(t-s)$;

3) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt \cos ns$;

4) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(2n+1)t \sin(2n+1)s$;

5) $K(t,s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)t \cos(2n+1)s$;

6) $K(t,s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)(t-s)$.

24. Знайти норму, спектр, власні числа та власні функції оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s, \\ s(1-t), & s \le t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1;$

2) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \le s, \\ \cos t \sin s, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0, b = \pi;$

3) $K(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & t \le s, \\ \sin t \cos s, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0, b = \pi;$

4) $K(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & t \le s, \\ t(s+1), & s \le t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1;$

5) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \sin(1-s), & t \le s, \\ \sin(1-t) \sin s, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1;$

6) $K(t,s) = \begin{cases} (1+t)(1-s), & t \le s, \\ (1-t)(1+s), & s \le t, \end{cases} \quad a = -1, b = 1.$

25*. Знайти норму оператора Вольтерра в $L_2([0,1])$: $(Vx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

26. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, A – компактний самоспряжений оператор в H, $\{e_n : n \ge 1\}$ – ортонормований базис в H, причому e_n – власний вектор оператора A, що відповідає власному числу λ_n, $n \ge 1$. Довести, що при фіксованих $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $y \in H$ розв'язок рівняння $(A - \lambda I)x = y$:

1) має вигляд $x = \frac{1}{\lambda}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda}(y,e_n)e_n - y\right)$, якщо $\lambda \neq \lambda_n$ для всіх $n \geq 1$;

2) якщо $\lambda = \lambda_j = ... = \lambda_{j+m-1}$, $j,m \in \mathbb{N}$, і $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{j, j+1, ..., j+m-1\} : \lambda_n \neq \lambda_j$, існує тоді й тільки тоді, коли $(y, e_k) = 0$ для всіх $k \in \{j, j+1, ..., j+m-1\}$, при цьому $x = \frac{1}{\lambda}\left(\sum\limits_{n=1}^{j-1}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda}(y,e_n)e_n + \sum\limits_{n=j+m}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda}(y,e_n)e_n - y\right) + \sum\limits_{n=j}^{j+m-1} C_n e_n$,
де $C_j, ..., C_{j+m-1}$ – довільні сталі (сума за порожньою множиною індексів вважається рівною нулю).

27. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ і $A^* = A$. Довести, що: $1)\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$; $2)$ власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні; 3) якщо $G \subset H$ – інваріантний підпростір для A (тобто $AG \subset G$), то $G^{\perp}$ також є інваріантним підпростором для A; 4) якщо спектр оператора A задовольняє умови 1)-3) теореми 1, то оператор A компактний; 5) якщо $\sigma(A) = \{0, 1\}$, то A – ортопроектор.

28*. (Нікольський). Довести, що теорема 1 залишається правильною для оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, де X – банахів простір, якщо умову $A \in S_\infty(X)$ замінити вимогою, щоб $A^k \in S_\infty(X)$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.

29. (Судаков). 1) Нехай X – банахів простір, $M \subset X$, $A \in \mathcal{L}(X)$, $1 \notin \sigma_p(A)$, $A^k \in S_\infty(X)$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, а також $\exists C > 0\, \forall x \in M$: $||Ax - x|| < C$. Довести, що множина M обмежена. 2) Довести, що у критеріях компактності в $L_p([a, b])$ Колмогорова і М.Рісса (див. задачі 99 і 101 з розділу 11) з умови 2 випливає умова 1.

30. Довести, що будь-який компактний оператор у гільбертовому просторі H зображується рівномірно збіжним рядом Шмідта: $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, \varphi_n)\psi_n$, де $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – ортонормована послідовність власних функцій самоспряженого компактного оператора $|A| := \sqrt{A^*A}$, визначеного в задачі 17.3, $\{s_n : n \geq 1\}$ – відповідна послідовність власних чисел оператора $|A|$ і $\{\psi_n : n \geq 1\}$ – деяка ортонормована послідовність. Числа s_n, $n \geq 1$, називають *сингулярними числами* оператора A.

31*. Нехай H – гільбертів простір, $A \in S_\infty(H)$, $||A^*x|| \leq ||Ax||$, $x \in H$. Довести, що $A^*A = AA^*$.

32. (Гільберт). Нехай H – гільбертів простір, $A \in S_\infty(H)$, $A^* = A$, $\{\lambda_n^+ : n \geq 1\}$, $\{-\lambda_n^- : n \geq 1\}$ – послідовності, відповідно, додатних та від'ємних власних чисел оператора A, причому кожне власне число повторюється стільки разів, яка його кратність, а також $\lambda_1^{\pm} \geq \lambda_2^{\pm} \geq ...$ (тут і далі такий запис треба читати для знаків "$+$"і "$-$"окремо). Нехай також $e_n^{\pm}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_n^{\pm}$, $n \geq 1$.

Довести, що $\lambda_1^{\pm} = \max\{(Ax,x) \mid ||x|| = 1\} = (Ae_1^{\pm}, e_1^{\pm})$, $\lambda_n^{\pm} = \max \{(Ax,x) \mid ||x|| = 1,\ (x, e_k^{\pm}) = 0,\ 1 \le k \le n-1\} = (Ae_n^{\pm}, e_n^{\pm}),\ n \ge 2.$

33*. (Курант, принцип мінімаксу). У позначеннях попередньої задачі довести, що $\lambda_n^{\pm} = \min\limits_{L} \max\limits_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\pm(Ax,x)}{||x||^2}$, де мінімум береться за всіма підпросторами L дефекта $\mathrm{def} L := \dim L^{\perp} \le n-1,\ n \ge 1.$

34*. (Принцип проміжності). Нехай H – гільбертів простір, $A \in S_\infty(H),\ A^* = A,\ H_1$ – підпростір в H корозмірності 1 (тобто $\dim H_1^{\perp} = 1$), P – ортопроектор на H_1. Довести, що для власних чисел $\{\lambda_n^{\pm} : n \ge 1\}$ оператора A і власних чисел $\mu_n^{\pm}$ оператора PAP, занумерованих так само, як і в задачі 32, справджується нерівність $\lambda_1^{\pm} \ge \mu_1^{\pm} \ge \lambda_2^{\pm} \ge \mu_2^{\pm} \ge \dots$.

35. Нехай H – гільбертів простір. Нехай $A \in S_\infty(H)$. Через $s_n(A),\ \lambda_n(A),\ n \ge 1,$ позначимо сингулярні та власні числа оператора A відповідно, причому вважаємо, що $s_1(A) \ge s_2(A) \ge \dots$. Довести, що: 1) якщо $B \in S_\infty(H),\ A \ge B \ge 0$, то $s_n(A) \ge s_n(B),\ n \ge 1$; 2) $s_n(A) = \min\limits_{L\,:\,\mathrm{def}L \le n-1} \max\limits_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{||Ax||^2}{||x||^2},\ n \ge 1$; 3) якщо $B \in \mathcal{L}(H)$, то $s_n(BA) \le ||B|| s_n(A),\ s_n(AB) \le ||B|| \cdot s_n(A),\ n \ge 1$; 4) $s_n(A) = \min\{||A - T|| \mid T \in S_0(H),\ \mathrm{rank}T := \dim R(T) = \dim(\mathrm{Ker}\, T)^{\perp} \le n-1\},\ n \ge 1,$ (тобто $s_n(A)$ характеризує швидкість наближення компактного оператора скінченновимірними операторами рангу $\le n-1$); 5) якщо $B \in S_\infty(H)$, то $s_{m+n-1}(A+B) \le s_m(A) + s_n(B),\ n, m \ge 1$; 6) якщо $B \in S_\infty(H)$, то $|s_n(A) - s_n(B)| \le ||A - B||,\ n \ge 1.$

36. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Довести твердження:

1) для $A \in S_2(H)$ величина $||A||_2$ не залежить від вибору ортонормованого базису $\{e_n : n \ge 1\}$ і визначає норму в $S_2(H)$, яка мажорує норму $||A||$ оператора A; при цьому $(S_2(H), ||\cdot||_2)$ – банахів простір;

2) норма $||A||_2$ визначається скалярним добутком $(A,B)_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ag_n, Bg_n),\ A, B \in S_2(H)$, де $\{g_n : n \ge 1\}$ – ортонормований базис в H;

3) $A \in S_2(H) \ \Leftrightarrow\ A^* \in S_2(H)$;

4) $S_2(H)$ – двосторонній ідеал в $\mathcal{L}(H)$, причому $\forall A \in S_2(H)$ $\forall B, C \in \mathcal{L}(H) \ :\ ||BAC||_2 \le ||B|| \cdot ||C|| \cdot ||A||_2$;

5) $S_2(H)$ – сепарабельний гільбертів простір з базисом, який складається з одновимірних операторів $A_{mn} = (\cdot, e_n)g_m,\ \{m,n\} \subset \mathbb{N}$, де $\{e_n : n \ge 1\}$ і $\{g_n : n \ge 1\}$ – деякі ортонормовані базиси в H;

6) якщо $A \in S_2(H)$, то A компактний;

7)* якщо $H = L_2(T,\mu)$, то $A \in S_2(H)$ тоді й тільки тоді, коли A – інтегральний оператор $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s),\ t \in T$, з ядром Гільберта – Шмідта: $\int\limits_T \int\limits_T |K(t,s)|^2 d\mu(t)d\mu(s) < \infty$.

37*. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називають ядерним, якщо він має вигляд скінченної суми $A = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k C_k,\ \{B_k, C_k,\ k = 1, ..., n\} \subset S_2(H)$. Нехай $S_1(H)$ – множина всіх ядерних операторів у H. Довести твердження:

1) $S_1(H)$ – двосторонній ідеал у $\mathcal{L}(H)$;

2) якщо $A \in S_1(H)$, то $A^* \in S_1(H)$;

3) якщо $A \in S_1(H)$ і $\{e_n : n \geq 1\}$ – деякий ортонормований базис у H, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(Ae_n, e_n)| < \infty$, причому вираз $SpA := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)$ не залежить від вибору базису $\{e_n : n \geq 1\}$. Його називають *слідом оператора* A.

4) $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$, де $s_n,\ n \geq 1$, – сингулярні числа оператора A (див. задачу 30);

5) $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли $A = BC$, де $B, C \in S_2(H)$;

6) якщо $A \geq 0$, то $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли для деякого базису $\{e_n : n \geq 1\}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n) < \infty$; при цьому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, де $\{\lambda_n : n \geq 1\} = \sigma_p(A)$, тобто матричний слід (ліва частина) збігається зі спектральним слідом (права частина) оператора A. (Зауважимо, що наведена рівність справджується для всіх операторів $A \in S_1(H)$ і без припущення, що $A \geq 0$ (теорема Лідського)).

7) функція $S_1(H) \ni A \mapsto ||A||_1 = Sp(|A|) \in \mathbb{R}$ є нормою.

38. Нехай H_1, H_2 – сепарабельні гільбертові простори, $\{e_n : n \geq 1\}$, $\{f_n : n \geq 1\}$ – ортонормовані базиси в H_1 та H_2 відповідно. Оператор $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ називають оператором Гільберта – Шмідта, якщо його абсолютна норма $||A||_2 := \left(\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_k, f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ скінченна. Довести, що:

1) функції $\operatorname{sh} t,\ e^{ikt},\ t \in [-\pi, \pi],\ k \in \mathbb{Z}$, утворюють повну ортогональну систему в просторі $W_2^1([-\pi, \pi])$ (див. задачу 106 з розділу 11);

2) оператор вкладення простору $W_2^1([-\pi, \pi])$ у простір $L_2([\pi, \pi])$ є оператором Гільберта – Шмідта.

РОЗДІЛ 13
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Інтегральним рівнянням Фредгольма I роду називають рівняння вигляду

$$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b],$$

де K, y – відомі функції, x – шукана. Ми обмежимось розглядом випадків, коли $x, y \in C([a,b]),\ K \in C([a,b]^2)$ і $x, y \in L_2([a,b]),\ K \in L_2([a,b]^2)$.

Інтегральним рівнянням Фредгольма II роду називають рівняння вигляду

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],$$

де λ – параметр, припущення щодо x, y, K ті самі.

Інтегральним рівнянням Вольтерра I роду називають рівняння вигляду

$$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b].$$

Інтегральним рівнянням Вольтерра II роду називають рівняння вигляду

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b].$$

Інтегральні рівняння Фредгольма II роду при малих λ можуть бути розв'язані методом послідовних наближень. Точніше, нехай $|\lambda| < ||A||^{-1}$, де $||A||$ – норма інтегрального оператора з ядром K, що фігурує в рівнянні Фредгольма. Зауважимо, що $||A|| \le \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}}$ для рівнянь в $L_2([a,b])$ і $||A|| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds$ для рівнянь у $C([a,b])$. Тоді послідовні наближення $x_n(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x_{n-1}(s)ds + y(t),\ n \ge 1$, збігаються в нормі простору $L_2([a,b])$ або $C([a,b])$ відповідно до єдиного розв'язку рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t)$.

Інтегральні рівняння Вольтерра II роду розв'язуються методом послідовних наближень при довільних λ.

Рівняння Фредгольма II роду з виродженим ядром, тобто ядром, яке можна зобразити у вигляді $K(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)g_k(s)$, розв'язуються шляхом підбору невідомих сталих у виразі $x(t)=y(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(t)$. Підстановка цього виразу в інтегральне рівняння зводить рівняння до лінійної алгебраїчної системи рівнянь.

Назвемо ядра $K_n(t,s)=\int\limits_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ n\geq 2,\ K_1(t,s)=K(t,s)$, *ітерованими ядрами* рівняння Вольтерра, а вираз $R_\lambda(t,s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,s)$ – *резольвентою* цього рівняння. Тоді розв'язок рівняння Вольтерра II роду можна зобразити у вигляді $x(t)=y(t)+\lambda\int\limits_a^t R_\lambda(t,s)y(s)ds$.

Назвемо ядра $K_n(t,s)=\int\limits_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ n\geq 2,\ K_1(t,s)=K(t,s)$, *ітерованими ядрами* рівняння Фредгольма, а вираз $R(t,s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(t,s)$ – *резольвентою* цього рівняння. Тоді розв'язок рівняння Фредгольма II роду при достатньо малих за модулем λ можна зобразити у вигляді $x(t)=y(t)+\int\limits_a^b R_\lambda(t,s)y(s)ds$.

У випадку, коли інтегральний оператор $A(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ є компактним в $L_2([a,b])$, зокрема при $K\in L_2([a,b])$, для рівняння Фредгольма II роду справджується така *альтернатива Фредгольма*.

Теорема. Розглянемо рівняння:

$$x-\lambda Ax=y,\ (1)\qquad f-\overline{\lambda}A^*f=g,\ (2)$$

$$x-\lambda Ax=0,\ (3)\qquad f-\overline{\lambda}A^*f=0.\ (4)$$

Тоді виконується одне з тверджень:

1. $\frac{1}{\lambda}\in\rho(A)$; $(A-\frac{1}{\lambda})$ – неперервно оборотний, рівняння (1) розв'язне для довільної функції y, рівняння (2) розв'язне для довільної функції g, рівняння (3) і (4) мають лише тривіальний розв'язок.

2. $\frac{1}{\lambda}\in\sigma(A)$; $\frac{1}{\lambda}$ – власне число оператора A, рівняння (3) і (4) мають однакову скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків, рівняння (1) розв'язне для тих функцій y, які ортогональні (в $L_2([a,b])$) усім розв'язкам рівняння (4), рівняння (2) розв'язне для тих функцій g, які ортогональні всім розв'язкам рівняння (3).

Числа λ, що задовольняють умови другого пункту, називають *характеристичними числами* відповідного інтегрального рівняння.

Теорема (про білінійний ряд ермітового ядра). Нехай $K \in L_2([a,b]^2)$ – ермітове ядро (тобто $K(t,s) = \overline{K(s,t)} \pmod{m \times m}$), $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ – власні числа (занумеровані з урахуванням кратності) оператора A, визначеного в попередній теоремі, $\psi_n,\ n \geq 1,$ – ортонормований власний вектор оператора A, що відповідає власному числу $\lambda_n,\ n \geq 1$. Тоді $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(t)\overline{\psi_n(s)}$, де ряд збігається в $L_2([a,b]^2)$.

Зауваження. Правильне й обернене твердження: якщо $\{\psi_n : n \geq 1\} \subset L_2([a,b])$ – ортонормована система і $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(t)\overline{\psi_n(s)}$, де ряд збігається в $L_2([a,b]^2)$, то ненульовими власними числами відповідного інтегрального оператора A будуть λ_n (занумеровані з урахуванням кратності), яким відповідають власні функції $\psi_n,\ n \geq 1$ (див. задачу 12.2 з розділу 12).

За умов цієї теореми розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма можна записати так:

1) якщо $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що $\lambda \neq \lambda_n,\ n \geq 1$, то для будь-якого $y \in L_2([a,b])$ $x(t) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(y,\psi_n)}{\lambda_n - \lambda}\psi_n + y$, де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у $L_2([a,b])$.

2) нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що $\exists k, m \in \mathbb{N}\ :\ \lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+m-1}$, причому $\forall n \in \mathbb{N} \backslash M\ :\ \lambda_n \neq \lambda_k$, де позначено $M := \{k, k+1, \ldots, k+m-1\}$. Тоді інтегральне рівняння має розв'язок для тих $y \in L_2([a,b])$, для яких $(y,\psi_n) = 0,\ n \in M$, причому $x(t) = \lambda \sum\limits_{n \in \mathbb{N} \backslash M} \frac{(y,\psi_n)}{\lambda_n - \lambda}\psi_n + \sum\limits_{n \in M} c_n \psi_n + y$, де $c_n,\ n \in M$ – довільні сталі (див. задачу 26 з розділу 12).

Теорема (Гільберта – Шмідта). Нехай $\mu(T) < +\infty$, ермітове ядро K задовольняє умову $\exists C > 0\ \forall t \in T\ \int\limits_T |K(t,s)|^2 d\mu(s) \leq C$. Тоді: 1) $K \in L_2(T \times T, \mu \times \mu)$; 2) власні функції оператора $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu$ при $\lambda \neq 0$ обмежені; 3) ряд $(Ax)(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x,\psi_n)\psi_n(t)$ збігається абсолютно й рівномірно на T (λ_n і ψ_n визначені в попередній теоремі).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,T],$$

та за її допомогою розв'язати рівняння у випадку: $K(t,s) = e^{t-s},\ \lambda = -1,\ y(t) = t^2e^t$.

Розв'язок. Маємо $K_1(t,s) = e^{t-s}$. Шукаємо наступні ітеровані ядра: $K_2(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau}e^{\tau-s}d\tau = (t-s)e^{t-s}, K_3(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau}(\tau-s)e^{\tau-s}d\tau = e^{t-s}\int_s^t(\tau-s)d\tau = \frac{(t-s)^2}{2!}e^{t-s}$.

Тепер можна висунути гіпотезу, що $K_n(t,s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{t-s}$. Перевіримо її за індукцією. База індукції вже є, робимо крок: $K_{n+1}(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau}\frac{(\tau-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\tau-s}d\tau = e^{t-s}\int_s^t \frac{(\tau-s)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau = \frac{(t-s)^n}{n!}e^{t-s}$.

Отже, гіпотеза перевірена. Тепер можна отримати резольвенту: $R_\lambda(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{t-s} = \lambda e^{(\lambda+1)(t-s)}$. Звідси $x(t) = y(t) + \int_0^t R_\lambda(t,s)y(s)ds = t^2e^t + \int_0^t \lambda e^{(\lambda+1)(t-s)}s^2e^s$. Двічі інтегруючи частинами, отримаємо: $x(t) = t^2e^t + \lambda e^{(\lambda+1)t}\int_0^t e^{-\lambda s}s^2ds = t^2e^t + e^{(\lambda+1)t} \cdot \left(-t^2e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda s}2sds\right) = t^2e^t + e^{(\lambda+1)t}(-t^2e^{-\lambda t} - 2t\lambda^{-1}e^{-\lambda t} + 2\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})) = \frac{2}{\lambda}e^t(e^{\lambda t} - 1 - t),\ t \in [0,T],\ \lambda \neq 0.$

2. Розв'язати інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (28t^5s^2 - 15t^3s)x(s)ds + \frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ t \in [0,1],\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Розв'язок. Перепишемо рівняння у вигляді $x(t) = \lambda(C_1t^5 + C_2t^3) + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, де $C_1 = \int_0^1 28s^2x(s)ds,\ C_2 = \int_0^1(-15s)x(s)ds$ – невідомі сталі. Підставимо вираз для x у вирази для C_1 і C_2. Отримаємо: $C_1 = \int_0^1 28s^2(\lambda(C_1s^5 +$

$C_2s^3)+s^{-\frac{1}{3}})ds = \lambda(\frac{7}{2}C_1+\frac{14}{3}C_2)+\frac{21}{2}$; $C_2 = \int\limits_0^1 (-15s)(\lambda(C_1s^5+C_2s^3)+s^{-\frac{1}{3}})ds = \lambda(-\frac{15}{7}C_1 - 3C_2) - 9.$

Звідси маємо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{2-7\lambda}{2}C_1 - \frac{14\lambda}{3}C_2 = \frac{21}{2}, \\ \frac{15\lambda}{7}C_1 + (1+3\lambda)C_2 = -9 \end{cases}$

Визначник цієї системи $\triangle = \frac{(2-7\lambda)(1+3\lambda)}{2} + 10\lambda^2 = \frac{-\lambda^2-\lambda+2}{2}$. Він рівний нулю при $\lambda = 1$ і $\lambda = -2$.

Якщо $\lambda = 1$, маємо систему $\begin{cases} \frac{-5}{2}C_1 - \frac{14}{3}C_2 = \frac{21}{2} \\ \frac{15}{7}C_1 + 4C_2 = -9, \end{cases}$ двох пропорційних рівнянь, що має безліч розв'язків. Отже, розв'язками інтегрального рівняння будуть функції $x(t) = C_1t^5 + (-\frac{9}{4} - \frac{15}{28}C_1)t^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, де $C_1 \in \mathbb{C}$ – довільне.

Якщо $\lambda = -2$, отримаємо систему $\begin{cases} 8C_1 + \frac{28}{3}C_2 = \frac{21}{2} \\ -\frac{30}{7}C_1 - 5C_2 = -9, \end{cases}$, яка не має розв'язків. Отже, і інтегральне рівняння не має розв'язків.

Якщо $\lambda \neq 1,\ \lambda \neq -2$, то система має єдиний розв'язок $C_1 = \frac{126}{7(-\lambda-2)},\ C_2 = \frac{21}{-4-2\lambda}$. Отже, єдиним розв'язком інтегрального рівняння буде функція $x(t) = \frac{126}{7(-\lambda-2)}t^5 + \frac{21}{-4-2\lambda}t^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$.

3. Знайти всі значення параметрів p, q, r, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + 2t + 3st)x(s)ds + pt^2 + qt + r,\ t \in [-1, 1]$, має розв'язок у просторі $L_2([-1; 1])$ для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}$.

Розв'язок. Використаємо альтернативу Фредгольма. Розглянемо спряжене однорідне рівняння $f(t) = \overline{\lambda} \int\limits_{-1}^{1} (1 + 2s + 3st)f(s)ds$. Розв'яжемо його як рівняння з виродженим ядром. Маємо $f(t) = \overline{\lambda}(C_1 + tC_2)$, де $C_1 = \int\limits_{-1}^{1} (1 + 2s)f(s)ds,\ C_2 = \int\limits_{-1}^{1} 3sf(s)ds.$

Підставимо вираз для $f(t)$ в останні два рівняння: $C_1 = \int\limits_{-1}^{1} (1 + 2s) \cdot (\overline{\lambda}(C_1+sC_2))ds = 2\overline{\lambda}(C_1+\frac{1}{3}C_2),\ C_2 = \int\limits_{-1}^{1} 3s(\overline{\lambda}(C_1+sC_2))ds = 2\overline{\lambda}C_2.$

Отримана система має єдиний розв'язок при $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq \frac{1}{2}$. Ненульовому характеристичному числу $\lambda = \frac{1}{2}$ відповідає розв'язок $(C_1, C_2) =$

$(1, 0)$, а отже, власна функція $f_1(t) = 1, \ t \in [-1; 1]$.

Згідно з альтернативою Фредгольма вихідне рівняння при $\lambda \neq \frac{1}{2}$ має єдиний розв'язок. При $\lambda = \frac{1}{2}$ воно має розв'язок, якщо $(y, f_1) = 0$, тобто $\int\limits_{-1}^{1} (pt^2 + qt + r)ds = \frac{2p}{3} + 2r = 0$.

Відповідь: при всіх значеннях, що задовольняють співвідношення $p + 3r = 0$.

4. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром $x(t) = \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos(t-s)+2\sin 2t \sin 2s)x(s)ds + \cos t, \ t \in [0, 2\pi]$.

Розв'язок. Ядро $K(t, s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s + 2\sin 2t \sin 2s = \pi \left(\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}} \right) + 2\pi \left(\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin 2s}{\sqrt{\pi}} \right)$, отже, із зауваження до теореми про білінійний розклад ермітовоспряженого ядра випливає, що характеристичними числами будуть $\lambda = \pi$ (відповідні нормовані власні функції $\varphi_1(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}$ і $\varphi_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}$), $\lambda = 2\pi$ (відповідна нормована власна функція $\varphi_3(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}$).

Звідси маємо $(y, \varphi_1) = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} = \sqrt{\pi}$;

$(y, \varphi_2) = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} = 0$;

$(y, \varphi_3) = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos t \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} 2cos^2 t d\cos t = 0$.

Якщо $\lambda \neq \pi$ і $\lambda \neq 2\pi$, то $x(t) = \lambda \left(\frac{(y,\varphi_1)}{\pi-\lambda} \varphi_1(t) + \frac{(y,\varphi_2)}{\pi-\lambda} \varphi_2(t) + \frac{(y,\varphi_3)}{2\pi-\lambda} \varphi_3(t) \right) + y(t) = \lambda \left(\frac{\cos t}{\pi-\lambda} \right) + \cos t$.

Якщо $\lambda = \pi$, то внаслідок того, що y не ортогональний одному з власних векторів, що відповідають цьому власному значенню, розв'язків немає.

Якщо $\lambda = 2\pi$, то з урахуванням того, що y ортогональний власному вектору, що відповідає цьому власному значенню, розв'язок має вигляд $x(t) = \lambda \left(\frac{(y,\varphi_1)}{\pi-\lambda} \varphi_1(t) + \frac{(y,\varphi_2)}{\pi-\lambda} \varphi_2(t) + \varphi_3(t) \right) + y(t) = \lambda \left(\frac{\cos t}{\pi-\lambda} \right) + \sin 2t + \cos t$, де $C \in \mathbb{C}$ – довільна стала.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. Нехай $|\lambda| r(A) < 1$. Довести, що інтегральне рівняння Фредгольма II роду має єдиний розв'язок, причому його можна знайти методом послідовних наближень.

6. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння, узявши $x_0(t) = 0$:

1) $x(t) = \int\limits_0^t \frac{x(s)}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t,\ t \in [0, T],\ T > 0;$

2) $x(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds + 1,\ t \in [0, 1];$

3) $x(t) = \int\limits_0^t (t-s) x(s) ds + 1,\ t \in [0, 1];$

4) $x(t) = \int\limits_0^1 e^{-t-s} x(s) ds + 1,\ t \in [0, 1];$

5) $x(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t,\ t \in [0, 1];$

6) $x(t) = \int\limits_0^1 \frac{te^{ts}}{2(e^t-1)} x(s) ds + \frac{1}{2},\ t \in [0, 1];$

7) $x(t) = \int\limits_0^1 s x(s) ds + 1,\ t \in [0, 1];$

8) $x(t) = \int\limits_1^2 \frac{t}{2s} x(s) ds + 1,\ t \in [1, 2].$

7. Побудувати перші два послідовних наближення розв'язку інтегрального рівняння, узявши $x_0(t) = 0$:

1) $x(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{(1+s+t)^2} ds + 1,\ t \in [0, 1];$

2) $x(t) = \int\limits_0^1 \frac{1}{3}(ts + s^2) x(s) ds + t,\ t \in [0, 1];$

3) $x(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(ts) x(s) ds + 1,\ t \in [0, \frac{\pi}{4}].$

8. Нехай $K \in C([a,b]^2)$. Довести, що оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t,s) x(s) ds,\ t \in [a, b]$, у просторі $C([a, b])$ є квазінільпотентним, тобто $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{||A^n||} = 0$. Зокрема, $\sigma(A) = \{0\}$.

9. За умов попередньої задачі показати, що $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ A^n$ є відображенням стиску в метричному просторі $C([a,b])$. Вивести звідси, що інтегральне рівняння Вольтерра $x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, де $y \in C([a,b])$, має єдиний розв'язок $x \in C([a,b])$, причому його можна отримати методом послідовних наближень.

10. Нехай A – інтегральний оператор в $L_2([a,b])$, тобто $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, причому $\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds \le c^2$. Довести, що при довільному $n \ge 1$ оператор A^n є також інтегральним оператором з ядром K_n, яке є n-м ітерованим ядром ядра K, причому $\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K_n(t,s)|^2 dtds \le c^{2n}$.

11. Нехай R_λ – резольвента інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, з ядром $K \in C([a,b]^2)$ і $M := \max\limits_{a \le t,s \le b} |K(t,s)| > 0$. Довести, що R_λ задовольняє при $|\lambda| < (M(b-a))^{-1},\ \{t,s\} \subset [a,b]$ кожне з таких співвідношень:

1) $R_\lambda(t,s) = \lambda \int\limits_a^b K(t,u)R_\lambda(u,s)du + K(t,s)$;

2) $R_\lambda(t,s) = \lambda \int\limits_a^b K(u,s)R_\lambda(t,u)du + K(t,s)$;

3) $\frac{\partial R_\lambda(t,s)}{\partial \lambda} = \lambda \int\limits_a^b R_\lambda(t,u)R_\lambda(u,s)du$.

12. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,T],$$

та за її допомогою розв'язати рівняння у таких випадках:

1) $K(t,s) = e^{t^2-s^2},\ \lambda = 2,\ y(t) = e^{t^2+2t}$;
2) $K(t,s) = e^{t-s},\ \lambda = 2,\ y(t) = \sin t$;
3) $K(t,s) = \frac{1+t^2}{1+s^2},\ \lambda = 1,\ y(t) = 1 + t^2$;
4) $K(t,s) = 3^{t-s},\ \lambda = -1,\ y(t) = t3^t$;
5) $K(t,s) = \frac{2+\cos t}{2+\cos s},\ \lambda = 1,\ y(t) = e^t \sin t$;
6) $K(t,s) = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s},\ \lambda = -1,\ y(t) = t \operatorname{ch} t$;
7) $K(t,s) = e^{s-t},\ \lambda = 1,\ y(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$.

13. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, та за її допомогою розв'язати рівняння у таких випадках:

1) $K(t,s) = e^{t+s},\ a = 0,\ b = 1,\ \lambda = \frac{1}{e^2-1},\ y(t) = \sin \pi t;$
2) $K(t,s) = \sin t \cos s,\ a = 0,\ b = \frac{\pi}{2},\ \lambda = -1,\ y(t) = \cos t;$
3) $K(t,s) = te^s,\ a = -1,\ b = 1,\ \lambda = \frac{e}{3},\ y(t) = (3t^2+1)e^{-t};$
4) $K(t,s) = t^2 s^2,\ a = -1,\ b = 1,\ \lambda = 2,\ y(t) = e^t;$
5) $K(t,s) = (1+t)(1-s),\ a = -1,\ b = 0,\ \lambda = 1,\ y(t) = \pi \cos \pi t;$
6) $K(t,s) = ts + t^2 s^2,\ a = -1,\ b = 1,\ \lambda = 1,\ y(t) = 3(t+1);$
7) $K(t,s) = 1 + (2t-1)(2s-1),\ a = 0,\ b = 1,\ \lambda = \frac{1}{2},\ y(t) = 3t^2;$
8) $K(t,s) = \sin t \cos s + \cos 2t \sin 2s,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ \lambda = -\frac{1}{\pi},\ y(t) = \cos t + \sin t;$
9) $K(t,s) = \sin t \sin s + \cos 2t \cos 2s,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ \lambda = \frac{1}{2\pi},\ y(t) = \cos 2t;$
10) $K(t,s) = \cos t \cos s + 3\sin 2t \sin 2s,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ \lambda = \frac{1}{6\pi},\ y(t) = 5\cos t;$
11) $K(t,s) = 2 + \cos t \cos s,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ \lambda = -\frac{1}{8\pi},\ y(t) = 2t;$
12) $K(t,s) = e^t \cos s,\ a = 0,\ b = \pi,\ \lambda = \frac{1}{e^\pi+1},\ y(t) = \frac{t}{4}.$

14. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],\ \lambda \in \mathbb{C}$$

з виродженим ядром:

1) $K(t,s) = 1,\ y(t) = 1,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
2) $K(t,s) = ts + t^2 s^2,\ y(t) = t^2 + t^4,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
3) $K(t,s) = \sin(t-2s),\ y(t) = \cos 2t,\ t \in [a,b] = [0;\pi];$
4) $K(t,s) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s},\ y(t) = 1 - 6t^2,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
5) $K(t,s) = t^4 + 5t^3 s,\ y(t) = t^2 - t^4,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
6) $K(t,s) = 2ts^3 + 5t^2 s^2,\ y(t) = 7t^4 + 3,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
7) $K(t,s) = t^2 - ts,\ y(t) = t^2 + t,\ t \in [a,b] = [-1;1];$
8) $K(t,s) = \sin(2t+s),\ y(t) = \pi - 2t,\ t \in [a,b] = [0;\pi];$
9) $K(t,s) = \cos(2t+s),\ y(t) = \sin t,\ t \in [a,b] = [0;\pi];$
10) $K(t,s) = \sin(3t+s),\ y(t) = \cos t,\ t \in [a,b] = [0;\pi];$
11) $K(t,s) = \sin s + s\cos t,\ y(t) = 1 - \frac{2t}{\pi},\ t \in [a,b] = [0;\pi];$

12) $K(t,s) = \cos^2(t-s),\ y(t) = 1 + \cos 4t,\ t \in [a,b] = [0;\pi]$;
13) $K(t,s) = \cos t \cos s + \cos 2t \cos 2s,\ y(t) = \cos 3t$,
$t \in [a,b] = [0;2\pi]$;
14) $K(t,s) = \cos t \cos s + 2\sin 2t \sin 2s,\ y(t) = \cos t$,
$t \in [a,b] = [0;2\pi]$;
15) $K(t,s) = \sin t \sin s + 3\cos 2t \cos 2s,\ y(t) = \sin t$,
$t \in [a,b] = [0;2\pi]$;

15. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],$$

з виродженим ядром:

1) $K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{100} \frac{\sin kt \sin ks}{\sqrt{k}},\ y(t) = \sin\sqrt{2}t$,
$t \in [a,b] = [0;\pi]$;
2) $K(t,s) = 2e^{i(t-2s)}\cos(t+s),\ y(t) = e^{2it}$,
$t \in [a,b] = [0;\pi]$;
3) $K(t,s) = \operatorname{ch}(t+is),\ y(t) = 1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\operatorname{sh} t - i\sin 1 \operatorname{ch} t$,
$t \in [a,b] = [0;1]$;
4) $K(t,s) = \begin{cases} ts, & 0 \le s \le 1, \\ t^2s^2, & 1 < s \le 2, \end{cases}\ y(t) = 1$,
$t \in [a,b] = [0;2]$;
5) $K(t,s) = \begin{cases} t^2+s, & 0 \le s \le 1, \\ t^2+1, & 1 < s \le 2, \\ t^3+s^3, & 2 < s \le 3, \end{cases}\ y(t) = t^2$,
$t \in [a,b] = [0;3]$.

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

замінивши ядро на часткову суму його розкладу в ряд Тейлора, що складається з двох перших ненульових доданків:

1) $K(t,s) = e^{ts},\ y(t) = 1,\ t \in [a,b] = [0;1]$;
2) $K(t,s) = \sin ts,\ y(t) = t,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
3) $K(t,s) = \frac{1}{2+t+s},\ y(t) = t,\ t \in [a,b] = [0;1]$;
4) $K(t,s) = \operatorname{tg}(t-s),\ y(t) = t,\ t \in [a,b] = [0;1]$;
5) $K(t,s) = \ln(2-ts),\ y(t) = t,\ t \in [a,b] = [0;1]$;
6) $K(t,s) = \sqrt{t+t^2s^2},\ y(t) = 1,\ t \in [a,b] = [0;1]$.

17. Установити, при яких $\lambda \in \mathbb{C}$ інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a,b])$:

1) $K(t,s) = e^{t-s},\ y(t) = 1,\ t \in [a,b]$;
2) $K(t,s) = ts^2e^{-s^4},\ y(t) = t,\ t \in [a;b]$.

18. 1) Довести, що для інтегрального рівняння $x(t)=\lambda \int\limits_0^{+\infty} \sin(ts)x(s)ds$, $t \in [0,+\infty)$, число $\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ є власним і йому відповідають власні функції $x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-at} \pm \frac{t}{a^2+t^2},\ t \geq 0,\ a > 0)$. Чи суперечить це твердженню теореми Фредгольма про скінченність числа лінійно незалежних власних функцій, які відповідають кожному характеристичному числу?

2)Довести, що $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ – характеристичне число інтегрального оператора з ядром $\cos(ts),\ 0 < s,t < \infty$, і йому відповідають власні функції $\varphi(t) = f(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \cos(ts)f(s)ds$, де f – довільна функція з класу $L_2([0,+\infty))$.

19. Довести, що кожне дійсне число $\lambda \geq \frac{1}{2}$ є характеристичним числом інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}x(s)ds,\ t \in \mathbb{R}$, причому відповідні власні функції мають вигляд $x(t) = e^{i\alpha t},\ t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

20. Знайти всі значення параметрів p, q, r, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a;b])$ для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}$:

1) $K(t,s) = ts + t^2s^2,\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
2) $K(t,s) = 1 + ts,\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
3) $K(t,s) = t^2 + ts^2,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
4) $K(t,s) = \frac{1}{2}(ts + t^2s^2),\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
5) $K(t,s) = \frac{ts}{2} + t^2s^2,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
6) $K(t,s) = t^2s + ts^2,\ y(t) = pt + qt^3,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
7) $K(t,s) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s},\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
8) $K(t,s) = 3t + ts - 5t^2s^2,\ y(t) = pt,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
9) $K(t,s) = 3ts + 5t^2s^2,\ y(t) = pt^2 + qt,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
10) $K(t,s) = s\sin t + \cos s,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;
11) $K(t,s) = \cos(t+s),\ y(t) = p\sin t + q,\ t \in [a,b] = [0;\pi]$;

12) $K(t,s) = t\cos s + \sin t \sin s,\ y(t) = p + q\cos t,$
$t \in [a,b] = [-\pi;\pi];$

13) $K(t,s) = t\sin s + \cos t,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-\pi;\pi].$

21. При яких функціях $y \in C([0;\pi])$ інтегральне рівняння $x(t) = \int\limits_0^\pi \sin(t-s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0;\pi]$, має розв'язок у просторі $C([0;\pi])$?

22. Знайти всі дійсні значення параметра p, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_0^1 (pt - s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,1]$, має розв'язок при всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та всіх $y \in L_2([0,1])$.

23. Знайти всі значення λ, при яких інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],$$

має єдиний розв'язок для будь-якого $y \in C([a,b])$ у таких випадках:

1) $K(t,s) = \frac{1}{2} + \cos^2(t+s),\ [a,b] = [0,2\pi];$
2) $K(t,s) = \sin(t-s),\ [a,b] = [0,2\pi];$
3) $K(t,s) = t^2s^2 - \frac{2}{45},\ [a,b] = [0,1];$
4) $K(t,s) = \left(\dfrac{t}{s}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\dfrac{s}{t}\right)^{\frac{2}{5}},\ [a,b] = [0,1].$

24. Довести, що диференціальне рівняння $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = f(t),\ t \in [0,T]$, з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами $a_k,\ k = 1,\ldots,n$, за початкових умов $x^{(k)}(0) = x_k,\ k = 0,1,\ldots,n-1$, рівносильне інтегральному рівнянню $x(t) = \lambda \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,T]$, в якому $K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^n a_k(t)\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}$, $y(t) = f(t) - x_{n-1}a_1(t) - (x_{n-1} + x_{n-2})a_2(t) - \ldots - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{k!} a_n(t)$.

25. Знайти характеристичні числа та відповідні нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = ts,\ a = 1,\ b = 2;$
2) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin kt \sin ks}{k^2+k},\ a = 0,\ b = \pi;$

3) $K(t,s)=\frac{1}{\sqrt{s}(t+1)}+\frac{1}{\sqrt{1-s}(t+3)},\ a=0,\ b=1;$

4) $K(t,s)=\frac{1}{s^2(t^2+1)}+\frac{1}{t^2(1+s^2)},\ a=1,\ b=+\infty;$

5) $K(t,s)=|t-s|,\ a=0,\ b=1;$

6) $K(t,s)=e^{-|t-s|},\ a=0,\ b=1.$

26. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром $x(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+y(t),\ t\in[a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s)=\sin t\sin s,\ a=0,\ b=2\pi,\ y(t)=\cos t+\sin t;$

2) $K(t,s)=\cos^2(t-s),\ a=-\pi,\ b=\pi,\ y(t)=\sin 2t;$

3) $K(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & t\le s,\\ s(1-t), & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=1,$
$y(t)=\frac{1}{4}\sin 2\pi t+\frac{1}{9}\sin 3\pi t;$

4) $K(t,s)=\begin{cases} (t+1)s, & t\le s,\\ t(s+1), & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=1,$
$y(t)=\sin\pi t+\pi\cos\pi t;$

5) $K(t,s)=\begin{cases} (t+1)(1-s), & t\le s,\\ (1-t)(s+1), & s\le t,\end{cases}\quad a=-1,\ b=1,$
$y(t)=1;$

6) $K(t,s)=\begin{cases} (e^t-e^{-t})(e^s+e^{2-s}), & t\le s,\\ (e^s-e^{-s})(e^t+e^{2-t}), & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=1,$
$y(t)=t;$

7) $K(t,s)=\begin{cases} \sin t\cos s, & t\le s,\\ \sin s\cos t, & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=\frac{\pi}{2},$
$y(t)=\cos t;$

8) $K(t,s)=\begin{cases} \sin t\cos s, & t\le s,\\ \sin s\cos t, & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=\pi,$
$y(t)=\sin\frac{3}{2}t;$

9) $K(t,s)=\begin{cases} \cos t\sin s, & t\le s,\\ \cos s\sin t, & s\le t,\end{cases}\quad a=0,\ b=\pi,$
$y(t)=t;$

10) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \sin(1-s), & t \le s, \\ \sin(1-t)\sin s, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1,$
$y(t) = \cos \pi t;$

11) $K(t,s) = \min\{t,s\}, \quad a = 0,\ b = 1,\ y(t) = \sin \pi t.$

27. Звести інтегральні рівняння $\mu x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, до диференціальних і розв'язати їх:

1) $y(t) = \frac{t}{2},\ K(t,s) = \frac{\pi^2}{8} \begin{cases} t(2-s), & 0 \le t \le s, \\ s(2-t), & s < t \le 2, \end{cases} \ t \in [a,b] = [0;2],\ \mu = 1;$

2) $y(t) = te^t,\ K(t,s) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(s-1), & 0 \le t \le s, \\ \operatorname{sh} s \operatorname{sh}(t-1), & s < t \le 1, \end{cases} \ t \in [a,b] = [0;1],\ \mu = 1;$

3) $y(t) = \sin^3 \pi t,\ K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s, \\ (t-1)s, & s < t \le 1, \end{cases} \ t \in [a,b] = [0;1],\ \mu = 0;$

4) $y(t) = 2t^2 - 3t + \frac{5}{2},\ K(t,s) = |t-s| + t^2,\ t \in [a,b] = [1;2],\ \mu = 0.$

28. Звести інтегральні рівняння I роду $\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b]$, диференціюванням до рівнянь II роду:

1) $K(t,s) = \frac{1}{|t-s|+4},\ t,s \in [a,b] = [0;1];$
2) $K(t,s) = \sin|t-s|,\ t,s \in [a,b] = [1;2];$
3) $K(t,s) = \frac{e^{i|t-s|}}{1+|t-s|},\ t,s \in [a,b] = [0;1];$
4) $K(t,s) = t + s + 2\operatorname{sign}(t-s),\ t,s \in [a,b] = [0;1].$

29. Звести наведені інтегральні рівняння Вольтерра I роду $\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b]$, диференціюванням до рівнянь II роду:

1) $K(t,s) = t - s + 1,\ y(t) = t,\ t,s \in [a,b] = [0;1];$
2) $K(t,s) = e^{ts},\ y(t) = e^t - 1,\ t,s \in [a,b] = [0;1];$
3) $K(t,s) = \sin(t-s),\ y(t) = \cos t - 1,\ t,s \in [a,b] = [0;\pi].$

30. Звести наведені інтегральні рівняння Вольтерра I роду $\int\limits_a^{\varphi(t)} K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b]$, заміною змінної та диференціюванням до рівнянь II роду:

1) $K(t,s) = 1,\ y(t) = t^4,\ \varphi(t) = t^3,\ t,s \in [a,b] = [0;1]$;
2) $K(t,s) = t+s,\ y(t) = t^4 + \frac{t^6}{2},\ \varphi(t) = t^3,\ t,s \in [a,b] = [0;1]$;
3) $K(t,s) = 1+t+s,\ y(t) = \frac{t^2-1}{2} + \frac{t\sqrt{t}-1}{3},\ \varphi(t) = \sqrt{t},\ t \in [a,b] = [1;2]$.

31. Нехай K – 2π-періодична функція така, що $K(t) = |t|$, $t \in [-\pi,\pi]$. Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t+s)x(s)ds + y(t),\ t \in [-\pi,\pi]$, і для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ розв'язати його у таких випадках:

1) $y(t) = 1 + 2\sin t - \cos t$;
2) $y(t) = \cos 2t + \sin 3t$;
3) $y(t) = \operatorname{sign} t$;
4) $y(t) = t^2$.

32. Нехай K – функція з попередньої задачі. Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds + y(t),\ t \in [-\pi,\pi]$, і для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ розв'язати його у таких випадках:

1) $y(t) = 1 + \sin t - 2\cos 2t$;
2) $y(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;
3) $y(t) = \operatorname{sign} t$;
4) $y(t) = t^2$.

33. Довести, що при $\lambda < \frac{1}{2}$ розв'язок інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|}x(s)ds + y(t),\ t \in \mathbb{R}$, з неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}$ функцією y виражається формулою

$$x(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|t-s|}y(s)ds + y(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

34. 1) Довести, що розв'язок *рівняння Абеля* $y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha}ds$, $0 < \alpha < 1,\ y \in C^1([0,T])$, яке є частковим випадком рівняння Вольтерра I роду з ядром, що має "слабку особливість", задається формулою $x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ x(0) = 0.$

Зауваження. Це рівняння є основним у теорії дробових похідних та дробових інтегралів.

2) Довести, що необхідною і достатньою умовою розв'язності рівняння Абеля на відрізку $[0,T]$ є умова: функція $f_{1-\alpha}(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} ds$ абсолютно неперервна на відрізку $[0,T]$, тобто $f_{1-\alpha}(t) = \int\limits_0^t g(s)ds$, де $g \in L_1([0,T])$. При виконанні цієї умови розв'язок рівняння Абеля має вигляд $x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} ds$.

35. *(Узагальнене рівняння Абеля).* Нехай $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ – функція, що задовольняє умову $|g(t) - g(s)| \le |t-s|^\beta,\ 0 < \beta < 1$. 1) Довести, що для кожного $t \in [0,T]$ існує інтеграл $\int\limits_0^t (t-s)^\gamma dg(s)$, де $\beta + \gamma > 0$.

2) Довести, що розв'язок узагальненого рівняння Абеля $Y(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} dg(s),\ t \in [0,T],\ 0 < \gamma < 1$, має вигляд $g(t) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int\limits_0^t (t-s)^\gamma dY(s)$, причому інтеграли в умові і в розв'язку існують.

36. Нехай $K(t)$ – неперервна на $\mathbb{R}$ парна функція з періодом 2π, і $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{ikt}dt \ne 0,\ k \in \mathbb{Z}$. Довести, що тоді $\lambda_k = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{ikt}dt \right)^{-1}$ і $\varphi_k(t) = e^{-ikt}$ є характеристичними числами і відповідними власними функціями інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds$.

37. Нехай $\{\lambda_n : n \ge 1\}$ – послідовність характеристичних чисел і $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ – відповідна ортонормована послідовність власних функцій інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, із симетричним ядром $K \in C([a,b]^2)$. Довести:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(t)|^2}{\lambda_n^2} = \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds,\ t \in [a,b]$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int\limits_{[a,b]^2} |K(t,s)|^2 dtds$;

3) $(Ax,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|(x,\varphi_n)|}{\lambda_n},\ x \in L_2([a,b])$, A – інтегральний оператор з ядром K.

РОЗДІЛ 14
УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Носієм* функції f називають замикання множини $\{x \ : \ f(x) \neq 0\}$. Носій позначається через $\operatorname{supp} f$. Функцію f називають *фінітною*, якщо її носій $\operatorname{supp} f$ – це обмежена множина, тобто $\exists C > 0 \ \forall x, \ |x| > C \ : \ f(x) = 0.$

Простір основних функцій $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – це сукупність усіх нескінченно диференційовних фінітних функцій, що діють з $\mathbb{R}$ у $\mathbb{C}$. Послідовність $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ називають збіжною до функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, якщо:

а) $\exists R > 0 \ \forall n \geq 1 \ : \ \operatorname{supp} \varphi_n \subset [-R, R]$,

б) $\forall k \geq 0 \ : \ \varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x)$ на $\mathbb{R}, \ n \to \infty$.

Позначення: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$.

Прикладом основної функції є "ε-капелюшок", тобто функція $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\}, & \text{коли} |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{коли} |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$ де сталу C_ε вибрано з умови $\int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x) dx = 1; \ \varepsilon > 0.$

Позначимо через $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на просторі основних функцій $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Функціонал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ назвемо *узагальненою функцією*. Значення функціонала f на основній функції φ позначатимемо $f(\varphi)$ або $< f, \varphi >$.

Послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ називають *збіжною до* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, якщо $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ : \ f_n(\varphi) \to f(\varphi), \ n \to \infty$. Позначення: $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} f$. Зокрема, ряд з узагальнених функцій $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ називається збіжним у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ до узагальненої функції f, якщо для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} < u_n, \varphi >$ збігається до числа $< f, \varphi >$.

Простір $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ є повним. Це означає, що для кожної послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ з існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} < f_n, \varphi >, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, випливає збіжність f_n у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ до деякої $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Кажуть, що узагальнена функція f дорівнює нулю на відкритій множині $G \subset \mathbb{R}$, якщо $f(\varphi) = 0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ з носієм у G. *Носієм узагальненої функції* f називають множину всіх таких точок, у жодному околі яких f не дорівнює нулю. Носій f позначають через $\operatorname{supp} f$. Дане означення коректне, носій – деяка замкнена підмножина дійсної прямої.

Вимірну за Лебегом функцію $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ називають локально інтегровною, якщо $f\in L_1([a,b])$ для довільних $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$. Множину таких функцій позначають через $L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Регулярною узагальненою функцією з $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ називають довільний функціонал виду

$$<f,\varphi>=\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

де $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

Щоб указати аргумент основних та узагальнених функцій, іноді замість f та $<f,\varphi>$ писатимемо $f(x)$ та $<f(x),\varphi(x)>$.

Справедливе таке твердження.

Лема Дюбуа – Реймона. Нехай G – відкрита множина в $\mathbb{R}$, $f\in L_1^{loc}(G)$ локально інтегровна на G. Якщо для будь-якої $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ з носієм у G виконується умова $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)=0$, то $f(x)=0$ майже скрізь у G.

За цією лемою, існує взаємно-однозначна відповідність між простором $L_1^{loc}(\mathbb{R})$ та простором регулярних узагальнених функцій. Тому функцію $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ можна ототожнити з породженою нею регулярною узагальненою функцією. Наприклад, будемо писати

$$<1,\varphi>=\int\limits_{\mathbb{R}} 1\cdot\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Якщо функція $f\in C(\mathbb{R})$, то її носій як узагальненої функції збігається з її носієм як класичної функції.

Кожну узагальнену функцію, яка не є регулярною, називають *сингулярною*. Зокрема, такою є *δ-функція Дірака*, що діє за правилом $<\delta,\varphi>=\varphi(0),\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Сингулярними є також зсунені δ-функції, які діють за правилом $<\delta_a,\varphi>=\varphi(a),\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R});\ a\in\mathbb{R}$.

Добутком функції $\alpha\in C^\infty(\mathbb{R})$ та узагальненої функції $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ називають узагальнену функцію αf, яка діє за формулою $<\alpha f,\varphi>=<f,\alpha\varphi>,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Нехай $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \{a,b\}\subset\mathbb{R},\ a\neq 0$. Узагальнена функція $f(ax+b)$ означається формулою $<f(ax+b),\varphi(x)>=\frac{1}{|a|}<f(t),\varphi(\frac{t-b}{a})>,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

При $a=1$ маємо зсув узагальненої функції f на $(-b)$: $<f(x+b),\varphi(x)>=<f(t),\varphi(t-b)>$. Зокрема, $<\delta(x-x_0),\varphi(x)>=$ $<\delta(t),\varphi(t+x_0)>=\varphi(x_0)=<\delta_{x_0},\varphi>$, тому $\delta(x-x_0)=\delta_{x_0}$ – зсунена δ-функція.

Похідною узагальненої функції f називають узагальнену функцію f', яка діє за формулою $<f',\varphi>=-<f,\varphi'>,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Кожна узагальнена функція f має похідну $f^{(m)}$ довільного порядку $m\in\mathbb{N}$. Ця похідна є узагальненою функцією, що діє за формулою $<f^{(m)},\varphi>=(-1)^m<f,\varphi^{(m)}>$.

Нехай f – локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція, класична похідна якої є кусково неперервною функцією на $\mathbb{R}$. Регулярну узагальнену функцію, породжену цією похідною, позначимо через $\{f'(x)\}$, на відміну від узагальненої похідної $(Df)(x) = f'(x)$. Якщо класична похідна функції f має ізольовані розриви першого роду в точках $\{x_n : n \geq 1\}$, то узагальнена похідна дорівнює $f'(x) = \{f'(x)\} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(x_n+) - f(x_n-))\delta(x - x_n)$.

Операція диференціювання є неперервною в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, тобто із збіжності $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} f$ випливає збіжність $f_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} f',\ n \to \infty$.

Якщо узагальнена функція f задовольняє співвідношення $f' = 0$, то $f = const$, тобто $\exists C \in \mathbb{C}\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \ : < f, \varphi > = < C, \varphi > = C \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$.

Нехай $\{a_k : 0 \leq k \leq m\} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$. Розглянемо диференціальний оператор $Ly = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k y^{(k)},\ y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Узагальненим розв'язком* рівняння $Ly = f$ називають будь-яку узагальнену функцію $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння в просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, тобто таку, що $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \ : < \sum\limits_{k=0}^{m} a_k y^{(k)}, \varphi > = < y, \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k (a_k\varphi)^{(k)} > = < f, \varphi >$. Довільний розв'язок рівняння можна подати у вигляді суми його часткового розв'язку та загального розв'язку однорідного рівняння $Ly = 0$.

Нехай $f, g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \{f, g\} \subset L_1(\mathbb{R})$. Функцію $h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt,\ x \in \mathbb{R}$, називають *згорткою* функцій f та g і позначають $f * g$. Вона теж належить $L_1(\mathbb{R})$.

Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Згорткою $f * g$ називають функцію $(f * g)(x) = < f(y), \varphi(x - y) >,\ x \in \mathbb{R}$. Тут у правій частині рівності узагальнена функція $f(y)$ діє на основну функцію $\psi(y) = \varphi(x-y),\ y \in \mathbb{R}$, а x виступає у ролі параметра. Якщо $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, то $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x - y)dy,\ x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n I,\ n \geq 1,\ \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$. Узагальнену функцію $\mathcal{E}$ називають *фундаментальним розв'язком* оператора L, якщо $L\mathcal{E} = \delta$. Нехай z – розв'язок задачі Коші $Lz = 0,\ z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0,\ z^{(n-1)}(0) = 1$. Тоді локально інтегровна функція $\mathcal{E}(x) = \theta(x)z(x),\ x \in \mathbb{R}$, є фундаментальним розв'язком оператора L, де $\theta(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x)$ – функція Хевісайда. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, тоді лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $Lu = \varphi$ має частковий розв'язок $u(x) = (\mathcal{E} * \varphi)(x),\ x \in \mathbb{R}$, де $\mathcal{E}$ – фундаментальний розв'язок оператора

L, при цьому $u \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Простір основних функцій Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, або *простір швидко спадних основних функцій* – це $\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ та $\forall k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\varphi^{(k)}(x) = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{|x|^m}),\ x \to \pm\infty\}$. Послідовність $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ називають *збіжною* до функції $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, якщо при всіх $k, m \geq 0$ послідовність $\left\{x^m \varphi_n^{(k)}(x),\ x \in \mathbb{R} \,:\, n \geq 1\right\}$ збігається до функції $x^m \varphi^{(k)}(x),\ x \in \mathbb{R}$, рівномірно на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$. Позначення: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi$.

Позначимо через $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на просторі основних функцій $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ці функціонали будемо називати *узагальненими функціями повільного зростання*. Через $< f, \varphi >$ позначимо дію функціонала $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ на основну функцію $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Збіжність послідовності, операції диференціювання та лінійна заміна аргументу вводяться в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ аналогічно простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

На $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ визначена операція *перетворення Фур'є* $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, де $(F[\varphi])(y) := \hat{\varphi}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy} \varphi(x) dx,\ y \in \mathbb{R}$. Перетворення Фур'є здійснює лінійну неперервну бієкцію $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Оберненим до нього відображенням є обернене перетворення Фур'є $F^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto F^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, де $(F^{-1}[\varphi])(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi(x) dx,\ y \in \mathbb{R}$.

Для кожного $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $||F[\varphi]||_{L_2(\mathbb{R})} = ||\varphi||_{L_2(\mathbb{R})}$. Продовження за неперервністю оператора F з $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$ є унітарним оператором в $L_2(\mathbb{R})$. Це продовження $F[f],\ f \in L_2(\mathbb{R})$, називають перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$. Воно може бути задане так: $(F[f])(y) = \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x) dx,\ y \in \mathbb{R}$, де границя береться у розумінні збіжності в $L_2(\mathbb{R})$. Якщо $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то $F[f]$ збігається з перетворенням Фур'є для функцій з $L_1(\mathbb{R})$.

Нехай $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Перетворенням Фур'є $F[f]$ називають узагальнену функцію із $S'(\mathbb{R})$, яка діє за формулою $< F[f], \varphi > = < f, F[\varphi] >,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Оператор F в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ є лінійною неперервною бієкцією. Оператор $F^{-1}[f] = F[f(-x)],\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, є оберненим для оператора F на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, цей оператор F^{-1} називають оберненим перетворенням Фур'є.

Більшість означень, наведених вище та у попередній главі, переносяться без істотних змін на функції, задані на $\mathbb{R}^m$. Наведемо лише декілька означень для таких функцій.

Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\ A$ – невироджена матриця розміру $m \times m,\ b \in \mathbb{R}^m$. Узагальнену функцію $f(Ay + b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ означимо формулою $< f(Ay + b), \varphi(y) > = < f(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|} >,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Зокрема, якщо $A = aE,\ a \neq 0$, то маємо $< f(ay + b), \varphi(y) > =$

$< f(x), \frac{\varphi(\frac{1}{a}(x-b))}{a^m} >, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ – мультиіндекс, $\alpha_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq m$. Для $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ похідна $D^\alpha f$ – це узагальнена функція, що діє за формулою $< D^\alpha f, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < f, D^\alpha \varphi >, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Тут $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_m$.

Перетворення Фур'є в просторі $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ задається рівністю $(F[\varphi])(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} \varphi(x) dx, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай φ – ненульова функція з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Чи збігається в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ послідовність $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}), \ x \in \mathbb{R}, \ n \geq 1$?

Р о з в ' я з о к . Покажемо від супротивного, що порушується вимога а) збіжності в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Припустимо, що при деякому $R > 0$ і при всіх $n \geq 1$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-R, R]$. Тоді $\varphi(\frac{x}{n}) = 0, \ \forall x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, $\forall n \geq 1$. Звідси $\varphi(t) = 0$ при всіх $t \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} ((-\infty, -\frac{R}{n}) \cup (\frac{R}{n}, +\infty)) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Однак тоді внаслідок неперервності φ в нулі $\varphi(0) = 0$, і $\varphi(t) \equiv 0$. Це суперечить умові, що φ є ненульовою функцією. Отже, вимога а) збіжності справді порушується.

2. Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi(x) = 1$ в околі нуля; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Довести, що простору $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ належить також функція

$$\psi(x) = \frac{1}{x^n}[\varphi(x) - \xi(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k], \ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

доозначена за неперервністю при $x = 0$.

Р о з в ' я з о к . Нехай $\xi(x) = 1$ при $|x| < \delta$. Тоді при $x \neq 0$, $|x| < \delta$, маємо

$$\psi(x) = \frac{1}{x^n}[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k] = \frac{1}{(n-1)! x^n} \int\limits_0^x \varphi^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

згідно з формулою Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Зробимо заміну під знаком інтеграла $z = \frac{t}{x}$,

$$\psi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^1 \varphi^{(n)}(xz)(1-z)^{n-1} dz.$$

Звідси випливає, що ψ можна продовжити за неперервністю в нулі, поклавши $\psi(0) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^1 \varphi^{(n)}(0)(1-z)^{n-1} dz = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$. Після цього ψ

стане нескінченно диференційовною при $|x| < \delta$, оскільки

$$D^k\psi(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \varphi^{(n+k)}(xz)z^k(1-z)^{n-1}dz,\ k \geq 1.$$

Нескінченна диференційовність ψ у точках $x \neq 0$ випливає з того, що $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \xi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Функція ψ має обмежений носій, оскільки φ та ξ мають обмежені носії. Отже, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. Користуючись означенням, довести, що такі функціонали є узагальненими функціями: 1) $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx,\quad 2) g(\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Чи є вони регулярними? Знайти носії цих узагальнених функцій.

Р о з в ' я з о к . 1) Оскільки $\varphi \in C(\mathbb{R})$ та при деякому $a > 0$: $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, то $\int\limits_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} x\varphi(x)dx$, а це інтеграл Рімана по скінченному проміжку. Тому функціонал $f(\varphi)$ коректно визначений. Нехай $\{\varphi_1,\varphi_2\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ та $\{\lambda_1,\lambda_2\} \subset \mathbb{C}$. Тоді при деякому $a > 0$ обидва носії функцій φ_1 та φ_2 включаються в $[-a,a]$. Звідси маємо $f(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) = \int\limits_{-a}^{a} x(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)dx = \lambda_1\int\limits_{-a}^{a} x\varphi_1 dx+\lambda_2\int\limits_{-a}^{a} x\varphi_2 dx = \lambda_1 f(\varphi_1) + \lambda_2 f(\varphi_2)$, отже, f – лінійний функціонал на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Доведемо його неперервність. Нехай $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi,\ n \to \infty$. Тоді: 1) існує таке $a > 0$, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$ та при всіх $n \geq 1$: $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a,a]$; 2) $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $\mathbb{R},\ n \to \infty$. Маємо за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана $f(\varphi_n) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi_n(x)dx \to \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = f(\varphi),\ n \to \infty$. Отже, f – лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, і $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Це регулярна узагальнена функція, оскільки $h(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, є неперервною і тому локально інтегровною на $\mathbb{R}$, а f має зображення $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Носій f збігається з носієм h. Далі, $\{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, і носій h збігається із замиканням множини $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, яке дорівнює $\mathbb{R}$. Тому $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} h = \mathbb{R}$.

2) Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тоді $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash[-k,k]\ :\ \varphi(x) = 0$. Тоді значення $g(\varphi)$ збігається із скінченною сумою $\sum\limits_{n=1}^{k} \varphi^{(n)}(n)$, яка коректно визначена, оскільки $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Нехай $\{\varphi_1,\varphi_2\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ та $\{\lambda_1,\lambda_2\} \subset \mathbb{C}$. Тоді $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash[-k,k]\ :\ \varphi_1(x) = 0$ та $\varphi_2(x) = 0$. Звідси $g(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \sum\limits_{n=1}^{k} (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)^{(n)}(n) = \lambda_1\sum\limits_{n=1}^{k} \varphi_1^{(n)}(n) +$

$\lambda_2 \sum\limits_{n=1}^{k} \varphi_2^{(n)}(n) = \lambda_1 g(\varphi_1) + \lambda_2 g(\varphi_2)$, тому g – лінійний функціонал на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Доведемо його неперервність. Нехай $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$. Тоді існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [-k,k]$ та $\forall m \geq 1 \ : \ \operatorname{supp}\varphi_m \subset [-k,k]$. Крім того, при кожному $n \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_m^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(n)}(x)$ на $\mathbb{R}$, $m \to \infty$, звідки $\varphi_m^{(n)}(n) \to \varphi^{(n)}(n)$, $m \to \infty$. Маємо $g(\varphi_m) = \sum\limits_{n=1}^{k} \varphi_m^{(n)}(n) \to \sum\limits_{n=1}^{k} \varphi^{(n)}(n) = g(\varphi)$, $m \to \infty$, тому g неперервний, і $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Покажемо від супротивного, що функція g сингулярна. Припустимо, що g регулярна, тобто

$$\exists h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ : \ g(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx.$$

Якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty, 1)$ то $g(\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n) = 0$, і тоді за лемою Дюбуа – Реймона $h(x) = 0$ майже скрізь на $(-\infty, 1)$. Нехай $k \in \mathbb{N}$; якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset (k, k+1)$, то $\forall n \geq 1 \ : \ \varphi^{(n)}(n) = 0$, і $g(\varphi) = 0$. Тоді за тою ж лемою, $h(x) = 0$ майже скрізь на $(k, k+1)$. Звідси $h(x) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N} = (-\infty, -1) \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (k, k+1)$. Однак $\mathbb{N}$ має нульову лебегову міру, отже, $h(x) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$, і $g(\varphi) \equiv 0$. Проте це не так. Розглянемо ε-капелюшок ω_ε при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і нехай $\omega'_\varepsilon(x_0) \neq 0$. Тоді для $\varphi_1(x) = \omega_\varepsilon(x - 1 + x_0)$ матимемо $\varphi'_1(1) = \omega'_\varepsilon(x_0) \neq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset (0,2)$, і $\varphi_1^{(n)}(n) = 0$, $n \geq 2$. Тому $g(\varphi_1) = \varphi'_1(1) \neq 0$. Отримане протиріччя доводить, що функція g сингулярна.

Знайдемо $\operatorname{supp} g$. Точки відкритої множини $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ не належать носію g, бо якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, то $g(\varphi) = 0$. З іншого боку, кожна натуральна точка $n \in \operatorname{supp} g$. Справді, припустимо, що $\exists n \in \mathbb{N} \ \exists \varepsilon \in (0,1) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \ : \ g(\varphi) = 0$. Розглянемо δ-капелюшок ω_δ при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки ω_δ не є поліномом, існує така точка x_0, що $\omega_\delta^{(n)}(x_0) \neq 0$. Покладемо $\varphi_n(x) = \omega_\delta(x - n + x_0)$. Маємо $\varphi_n^{(n)}(n) = \omega_\delta^{(n)}(x_0) \neq 0$ та $\operatorname{supp}\varphi_n \subset (n - 2\delta, n + 2\delta) = (n - \varepsilon, n + \varepsilon)$; $g(\varphi_n) = \varphi_n^{(n)}(n) \neq 0$. Дістали протиріччя з припущенням, тому $\mathbb{N} \subset \operatorname{supp} g$. Однак носій g не містить точок не з $\mathbb{N}$, і $\operatorname{supp} g = \mathbb{N}$.

4. Довести, що функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, який діє за формулою $(\mathcal{P}\frac{1}{x})(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, є сингулярною узагальненою функцією.

Розв'язок. Доведемо, що границя існує. При $\varepsilon \in (0,1)$ маємо для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{[-1,1]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$

Існує $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(0)$, тому $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$ існує як звичайний інтеграл Рімана. Звідси випливає, що існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,$ і функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ коректно визначений. Його лінійність випливає із знайденого зображення. Для доведення неперервності функціонала розглянемо оцінку для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, за умови, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$: $| < \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi > | \le \int\limits_{[-a,a]\setminus(-1,1)} |\varphi(x)|dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|}dx$. Далі, при $x \neq 0$ за теоремою Лагранжа $|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}| = |\varphi'(\theta_x)| \le \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|$, де θ_x – проміжна точка між x і 0. Тому $| < \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi > | \le 2a \cdot \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| + 2 \cdot \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|$.

Достатньо довести неперервність функціонала в нулі. Нехай $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$. Тоді $\exists a > 0 \ \forall n \ge 1$: $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a,a]$. Далі, $| < \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_n > | \le 2a \cdot \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| + 2 \cdot \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n'(x)| \to 0, \ n \to \infty$, оскільки $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ та $\varphi_n'(x) \rightrightarrows 0$ при $x \in \mathbb{R}, \ n \to \infty$. Отже, $| < \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_n > | \to 0 = | < \mathcal{P}\frac{1}{x}, 0 > |, \ n \to \infty$. Тому це лінійний неперервний функціонал, і $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Припустимо, що це регулярна узагальнена функція, тобто що $\exists f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $< \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi >= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$. Якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то при достатньо малому $\varepsilon > 0$: $\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}dx = 0$, тому $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$. За лемою Дюбуа – Реймона, $f(x) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, тому $f(x) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$. Тоді $< \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi > \equiv 0$. Однак це не так, бо наприклад, для δ-капелюха ω_δ маємо $< \mathcal{P}\frac{1}{x}, \omega_\delta(x-2\delta) >= \int\limits_{\delta}^{3\delta} \frac{\omega_\delta(x-2\delta)}{x}dx > 0$. Отримане протиріччя показує, що це сингулярна узагальнена функція.

5. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\delta_n$ збігається в $D'(\mathbb{R})$ при довільних $\{a_n \,:\, n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$.

Р о з в ' я з о к . При $n \in \mathbb{N}$ часткова сума $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ як лінійна комбінація зсунених δ-функцій. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тоді $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall x > m \;:\; \varphi(x) = 0$. При $N \geq m$ маємо $< S_N, \varphi >= \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\varphi(n) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n\varphi(n)$, тому $< S_N, \varphi >\to \sum\limits_{n=1}^{m} a_n\varphi(n) \in \mathbb{C},\ N \to \infty$. Унаслідок повноти простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \exists S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \;:\; S_N \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} S$. Тоді ряд збігається до S у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6. Нехай при $n \in \mathbb{N}$ узагальнена функція $\mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}$ задана рівністю $< \mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}, \varphi >= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Довести, що $\mathcal{P}\frac{cosnx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0,\ n \to \infty$.

Р о з в ' я з о к . Як і в прикладі 4, маємо $< \mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos nx}{x}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \varphi(x) = 0$ при $|x| > a$, де $a > 1$. Тоді $< \mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}, \varphi >= \int\limits_{-a}^{-1} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx + \int\limits_{-1}^{1} \cos nx\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int\limits_{a}^{1} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx$. Функція $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ може бути продовжена за неперервністю в точку $x = 0$, тому всі три функції: $\varphi(x),\ x \in [-a,-1];\ \varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & \text{коли } x \in [-1,1]\setminus\{0\}, \\ \varphi'(0), & \text{коли } x = 0, \end{cases}$ та $\varphi(x),\ x \in [1,a]$, – є неперервними. За лемою Рімана, кожен із трьох інтегралів у правій частині виразу збігається до нуля. Тому $< \mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}, \varphi >\to 0 =< 0, \varphi >,\ n \to \infty$. Звідси $\mathcal{P}\frac{\cos nx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0,\ n \to \infty$.

7. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ xf = 0$. Довести, що $\exists c \in \mathbb{C} \;:\; f = c\delta$, тобто $< f, \varphi >= c\varphi(0),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Р о з в ' я з о к . Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \xi = 1$ в околі нуля. Згідно з прикладом 2, функція $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\xi(x)}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \varphi'(0), & x = 0, \end{cases}$ належить $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, звідки $\varphi(x) = \varphi(0)\xi(x) + x\psi(x)$. Маємо $< f, \varphi >= \varphi(0) < f, \xi > + < f, x\psi >$. Оскільки $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, де $\alpha(x) =$

x, і $< f,\alpha\psi >=< \alpha f,\psi >= 0$. Позначимо $< f,\xi >= c\in\mathbb{C}$. Тоді $< f,\varphi >= c\varphi(0)+ < \alpha f,\psi >= c\varphi(0)$.

8. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ та $\forall a\in\mathbb{R}\ :\ f(x+a) = f(x)$. Довести, що $f = const$, тобто $\exists C\in\mathbb{C}\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\ :< f,\varphi >= C\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx$.

Р о з в ' я з о к . Доведемо, що $f' = 0$. Маємо $< f(x+a),\varphi(x) >=< f(t),\varphi(t-a) >$. Тоді за умовою $0 =< f(t),\varphi(t-a) > - < f(t),\varphi(t) >=< f(t),\varphi(t-a)-\varphi(t) >$. Звідси при всіх $a\neq 0$ $:< f(t),\frac{\varphi(t-a)-\varphi(t)}{-a} >= 0,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Покладемо $a = -\frac{1}{n},\ n\geq 1$, і розглянемо послідовність $\left\{\varphi_n(t) = \frac{\varphi(t+\frac{1}{n})-\varphi(t)}{\frac{1}{n}},\ t\in\mathbb{R}\ :\ n\geq 1\right\}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Вона збігається в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ до функції φ'. Справді, якщо $\operatorname{supp}\varphi\subset[-b,b]$, то $\operatorname{supp}\varphi_n\subset[-b-1,b],\ \ \forall n\geq 1$. Крім того, при $k\geq 0$: $\varphi_n^{(k)}(t) = \frac{\varphi^{(k)}(t+\frac{1}{n})-\varphi^{(k)}(t)}{\frac{1}{n}} = \varphi^{(k+1)}(\theta_{nt})$, де $\theta_{nt}\in(t,t+\frac{1}{n})$ – проміжна точка, яка залежить також і від k. Тоді $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|\varphi_n^{(k)}(t)-\varphi_n^{(k+1)}(t)|\leq \max\limits_{t,u\in\mathbb{R},\ |u-t|\leq\frac{1}{n}}|\varphi^{(k+1)}(u)-\varphi^{(k+1)}(t)|$, що прямує до нуля, коли $n\to\infty$, унаслідок рівномірної неперервності фінітної функції $\varphi^{(k+1)}(t)$. Отже, $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})}\varphi'$. Тоді за неперервністю узагальненої функції f, $0 =< f,\varphi_n >\to< f,\varphi' >,\ n\to\infty$. Маємо $< f',\varphi >= - < f,\varphi' >= 0,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, тому $f' = 0$. Звідси випливає твердження прикладу.

9. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівності $|\sin x|''+|\sin x| = 2\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\pi}$.

Р о з в ' я з о к . Маємо $|\sin x| = \sin x\cdot\operatorname{sign}(\sin x),\ x\in\mathbb{R}$. Функція $\operatorname{sign}(\sin x)$ є сталою на проміжках $(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, між сусідніми нулями, тому $|\sin x|' = (\sin x)'\operatorname{sign}(\sin x) = \cos x\operatorname{sign}(\sin x),\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Оскільки $|\sin x|$ неперервна, а її класична похідна має ізольовані розриви першого роду в точках $\{k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$, то узагальнена похідна дорівнює $|\sin x|' = \{|\sin x|'\} = \cos x\cdot\operatorname{sign}(\sin x)$. Функція $h(x) = \cos x\cdot\operatorname{sign}(\sin x)$ має стрибки в точках $k\pi$, що дорівнюють $h(k\pi+)-h(k\pi-) = \cos k\pi\cdot(-1)^k-\cos k\pi(-1)^{k-1} = 2$. Тому $|\sin x|'' = |\sin x|''+\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}2\delta(x-n\pi);\ |\sin x|'' = (-\sin x)\operatorname{sign}(\sin x) = -|\sin x|$. Звідси $|\sin x|'' = -|\sin x|+2\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{n\pi}(x)$.

10. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $(x+1)y'' = 0$.

Р о з в ' я з о к . Зробимо заміну аргументу $x+1 = t$. Рівняння набуває вигляду $ty''(t-1) = 0$. За задачею 40 маємо $y''(t-1) = (y(t-1))''$, тому $t(y(t-1))'' = 0$. Уведемо нову узагальнену функцію $z(t) = y(t-1)$, маємо $tz''(t) = 0$. Тоді згідно із задачею 7, $z''(t) = c_1\delta(t),\ c_1\in\mathbb{C}$, або $(z')'(t) = c_1\delta(t)$. Позначимо $z' = v,\ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Маємо рівняння $v'(t) = c_1\delta(t)$. Його частковий розв'язок $v_0(t) = c_1\theta(t)$, де $\theta(t)$ – функція Хевісайда, а однорідне рівняння $v'(t) = 0$ має загальний розв'язок $v(t) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{C}$. Тому $v_{\text{заг}}(t) = c_1\theta(t)+c_2$. Маємо рівняння $z'(t) = c_1\theta(t)+c_2$. Його частковий розв'язок $z_0(t) = c_1 t\theta(t) + c_2 t$, а однорідне рівняння $z'(t) = 0$ має розв'язок $z(t) = \tilde{c}_3,\ \tilde{c}_3 \in \mathbb{C}$. Отже, $z_{\text{заг}}(t) = c_1 t\theta(t) + c_2 t + \tilde{c}_3$. Повернемось до аргументу $x:\ \ t-1 = x$. Тоді $y_{\text{заг}}(x) = c_1(x+1)\theta(x+1)+c_2(x+1)+\tilde{c}_3$ або $y_{\text{заг}}(x) = c_1(x+1)\theta(x+1)+c_2x+c_3$, де $c_3 := c_2 + \tilde{c}_3$; $c_1,\ c_2,\ c_3$ – довільні комплексні сталі.

В і д п о в і д ь : $c_1(x+1)\theta(x+1) + c_2x + c_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

11. . Довести, що загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $x^n y(x) = 0,\ n \in \mathbb{N}$, є узагальнена функція $y = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(x),\ \{c_0, ..., c_{n-1}\} \subset \mathbb{C}$.

Р о з в ' я з о к . Доведення проведемо індукцією за n. При $n = 1$ загальний розв'язок рівняння $xy(x) = 0$ є $y_{\text{заг}} = c_0\delta(x)$, згідно із задачею 7. Нехай твердження доведене при $n = m,\ m \geq 1$. Розглянемо рівняння $x^{m+1}y(x) = 0$, або $x(x^m y(x)) = 0$. Звідси узагальнена функція $x^m y(x)$ дорівнює $x^m y(x) = \tilde{c}_m\delta(x),\ \tilde{c}_m \in \mathbb{C}$. (*)

Частковий розв'язок цього рівняння дорівнює $\frac{(-1)^m\tilde{c}_m}{m!}\delta^{(m)}(x)$, оскільки $< x^m\delta^{(m)}, \varphi(x) >=< \delta^{(m)}(x), x^m\varphi(x) >= (-1)^m\mathcal{D}^m(x^m\varphi(x))|_{x=0} = (-1)^m \cdot m!\varphi(0)$. За припущенням індукції, загальний розв'язок однорідного рівняння $x^m y(x) = 0$ має вигляд $y_{\text{одн}}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k\delta^{(k)}(x)$, $\{c_0, ..., c_{m-1}\} \subset \mathbb{C}$. Тому загальний розв'язок рівняння (*) дорівнює $y_{\text{заг}} = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k\delta^{(k)}(x)$, де $c_m = \frac{(-1)^m\tilde{c}_m}{m!} \in \mathbb{C}$. Індукційний крок здійснено, і твердження доведено для кожного $n \in \mathbb{N}$.

12. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $\sin x \cdot y(x) = 0$.

Р о з в ' я з о к . Нехай $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \xi = 1$ в околі 0, $\operatorname{supp}\xi \subset [-1, 1]$. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ розглянемо функцію $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(k\pi)\xi(x-k\pi)}{\sin x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ця функція нескінченно диференційовна при $x \neq k\pi$, а в деякому околі точки $k\pi$ при $x \neq k\pi$ вона дорівнює $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(k\pi)}{x-k\pi} \cdot \frac{x-k\pi}{\sin(x-k\pi)}(-1)^k$. (*) Згідно із задачею 2, функція $\frac{\varphi(x)-\varphi(k\pi)}{x-k\pi}$, продовжена за неперервністю в точку $x = k\pi$, буде нескінченно диференційовною. Функція $\sin t$ має нуль порядку 1 у точці $t = 0$, тому функція $\frac{t}{\sin t}$, продовжена за неперервністю в точку $t = 0$, буде нескінченно диференційовною в околі нуля; звідси випливає, що і функція $\frac{x-k\pi}{\sin(x-k\pi)}$, продовжена за неперервністю в точку $x = k\pi$, буде нескінченно диференційовною в околі цієї точки. Із зображення (*) випливає ця ж властивість для функції ψ, тому для продовження ψ за неперервністю в точки $k\pi$ виконується $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Ясно, що ψ має обмежений носій, і тоді $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Маємо $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \exists\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \forall x\in\mathbb{R}\ :\ \varphi(x) = \psi(x)\sin x + \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k\pi)\xi(x-k\pi)$. Нехай y – це розв'язок заданого рівняння. Тоді $< y(x), \varphi(x) >=< y(x), \psi(x)\sin x > + \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k\pi) < y(x), \xi(x - k\pi) >$. Однак $< y(x), \psi(x)\sin x >=< \sin x \cdot y(x), \psi(x) >= 0$. Позначимо $c_k =< y(x), \xi(x-k\pi) >,\ k\in\mathbb{Z};\ c_k\in\mathbb{C}$. Тоді $< y(x), \varphi(x) >= \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\varphi(k\pi) =< \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\delta(x-k\pi), \varphi(x) >$. Отже, необхідно, щоб $y(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\delta(x-k\pi),\ \{c_k\ :\ k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$. Перевіримо, що такі суми задовольняють дане рівняння (ряд тут збігається в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). Унаслідок неперервності операції множення $\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ на $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, маємо $\sin x \cdot \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta(x-k\pi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot (\sin x \cdot \delta(x-k\pi))$. (*) Однак $< \sin x \cdot \delta(x-k\pi), \varphi(x) >=< \delta(x-k\pi), \sin x \cdot \varphi(x) >= \sin k\pi \cdot \varphi(k\pi) = 0$, тому $\sin x \cdot \delta(x-k\pi) = 0$, і ряд (*) збігається до 0. Відповідь: $y_{\text{заг}}(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\delta(x-k\pi),\ \{c_k\ :\ k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$.

13. Нехай $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = \varphi$.

Р о з в ' я з о к . Знайдемо фундаментальний розв'язок оператора $L = D^2 + a^2I$. Для цього розглянемо задачу Коші $z'' + a^2z = 0,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 1$. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + a^2 = 0,\ \lambda = \pm ia$, де i – уявна одиниця. Відповідно загальний розв'язок однорідного рівняння $Lz = 0$ буде $z_{\text{одн}}(x) = C_1\sin ax + C_2\cos ax$, де $\{C_1, C_2\}\subset\mathbb{C}$. З умови $z(0) = 0$ маємо $C_2 = 0$, тоді $z'(0) = C_1a$, при $C_1 = \frac{1}{a}$: $z'(0) = 1$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція $z(x) = \frac{\sin ax}{a}$. Функція $\mathcal{E}(x) = \frac{\theta(x)\sin ax}{a}$ є фундаментальним розв'язком оператора L.

Частковий розв'язок заданого неоднорідного рівняння дорівнює $(\mathcal{E} * \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\theta(y)\sin ay}{a}\varphi(x-y)dy$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумою цього часткового розв'язку та загального розв'язку однорідного рівняння: $u_{\text{заг}}(x) = C_1\sin ax + C_2\cos ax + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty} \sin ay\cdot\varphi(x-y)dy,\ x\in\mathbb{R}$.

14. Знайти фундаментальний розв'язок оператора $L=\frac{d}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}$, тобто для кожного $a\in\mathbb{R}$ знайти таку узагальнену функцію $\mathcal{E}(x)=\mathcal{E}(x,a)$, що $D\mathcal{E}(x)-\frac{2x}{1+x^2}\mathcal{E}(x)=\delta_a(x)$.

Розв'язок. Скористаємось задачею 59. При фіксованому $a\in\mathbb{R}$ розглянемо задачу Коші $z'-\frac{2x}{1+x^2}z=0,\ z(a)=1$. В однорідному рівнянні розділяються змінні, тому маємо $\frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{1+x^2},\ \ln|z|=\ln(1+x^2)+\ln C_1$, $z=C(1+x^2)$, де $C\in\mathbb{C}$. З початкової умови знаходимо $C=C(a)=\frac{1}{1+a^2}$, тому розв'язком задачі Коші є функція $z=z(x,a)=\frac{1+x^2}{1+a^2}$. Тоді шуканий фундаментальний розв'язок дорівнює $\mathcal{E}(x,a)=\frac{\theta(x-a)(1+x^2)}{1+a^2}$. Це локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція від x з параметром a.

15. Довести, що $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$, причому $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ щільний в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Розв'язок. Нехай $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тоді $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, причому $\exists a>0$ $\forall x,|x|>a\ :\ \varphi(x)=0$. Нехай $\alpha\geq 0,\ k\geq 0$. Маємо $|x|^k\varphi^{(\alpha)}(x)=0$ при $|x|>a$, тому $|x|^k\varphi^{(\alpha)}(x)\to 0,\ x\to\pm\infty$, звідки $\varphi^{(\alpha)}(x)=\bar{\bar{o}}(\frac{1}{|x|^k}),\ x\to\pm\infty$, і $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Це доводить включення $\mathcal{D}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Нехай тепер $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Наблизимо її функціями з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Нехай $\xi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – така функція, що $\xi(x)=1$ при $|x|\leq 1$. Тоді $\psi_n(x)=\psi(x)\xi(\frac{x}{n})\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Доведемо, що $\psi_n\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\psi$. Розглянемо $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|\psi_n(x)-\psi(x)|=\sup\limits_{|x|>n}|x|^k\cdot|\psi(x)|\cdot|\xi(\frac{x}{n})-1|\leq(1+\max\limits_{y\in\mathbb{R}}|\xi(y)|)\cdot\sup\limits_{|x|>n}|x|^k\cdot|\psi(x)|\to 0,\ n\to\infty$.

Нехай тепер $\alpha\in\mathbb{N}$. Маємо за формулою Лейбніца $\psi_n^{(\alpha)}(x)=\psi^{(\alpha)}(x)\xi(\frac{x}{n})+\sum\limits_{m=1}^{\alpha}C_\alpha^m\frac{1}{n^m}\xi^{(m)}(\frac{x}{n})\psi^{(\alpha-m)}(x)$. Тоді, як і вище, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|\psi^{(\alpha)}(x)\xi(\frac{x}{n})-\psi^{(\alpha)}(x)|\to 0,\ n\to\infty$.

Крім того, при всіх $1\leq m\leq\alpha,\ \frac{1}{n^m}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k\cdot|\xi^{(m)}(\frac{x}{n})\psi^{\alpha-m}(x)|\leq\frac{\mathrm{const}}{n^m}\to 0,\ n\to\infty$.

Унаслідок цього $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|\psi_n^{(\alpha)}(x)-\psi^{(\alpha)}|\to 0,\ n\to\infty$, а при $\alpha=0$ таку збіжність було показано вище. Отже, справді послідовність $\{\psi_n\}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R})$ збігається до ψ у просторі $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, що й доводить щільність $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ у $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

16. Довести, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}e^{k^2}\delta_k$ збігається в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, але розбігається в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Р о з в ' я з о к . При $n, m \in \mathbb{N}$ позначимо $\sum\limits_{k=-n}^{m} e^{k^2}\delta_k = S_{nm}$. Ці функції належать як $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, так і $S'(\mathbb{R})$ як лінійні комбінації зсунених δ-функцій. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Маємо при деякому $p \in \mathbb{N}\ :\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-p, p]$, та $< S_{nm}, \varphi >= \sum\limits_{k=-n}^{m} e^{k^2}\varphi(k) \to \sum\limits_{k=-p}^{p} e^{k^2}\varphi(k),\ m, n \to \infty$. З повноти простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ випливає збіжність S_{nm} до деякої узагальненої функції з $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, що й означає збіжність ряду в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Далі, $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Маємо $< S_{nm}, e^{-x^2} >= \sum\limits_{k=-n}^{m} e^{k^2} \cdot e^{-k^2} = n + m + 1 \to +\infty,\ m, n \to +\infty$. Тому S_{nm} розбігається в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ при $m, n \to \infty$.

17. Довести, що при всіх $f \in L_2(\mathbb{R})$, $(F^2[f])(x) = f(-x)$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Р о з в ' я з о к . Спочатку доведемо цю рівність для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Позначимо $\psi(x) = \varphi(-x),\ x \in \mathbb{R}$. Маємо $(F[\varphi])(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi(x)dx = |x = -t| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi(-t)dt = F^{-1}[\psi](y)$. Тоді $F^2[\varphi] = F(F^{-1}[\psi]) = \psi$, і рівність доведено на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Нехай тепер $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$. Згідно із задачею 64, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ щільна в $L_2(\mathbb{R})$, тому існує послідовність $\{\varphi_n(x),\ x \in \mathbb{R}\ :\ n \geq 1\}$, яка збігається до f в $L_2(\mathbb{R})$. Маємо $(F^2[\varphi_n])(y) = \varphi_n(-y),\ y \in \mathbb{R},\ n \geq 1$. Оператори F та F^2 неперервні в $L_2(\mathbb{R})$. Тому, спрямовуючи $n \to \infty$, матимемо $F^2[\varphi_n] \to F^2[f]$; крім того, $\varphi_n(-y) \to f(-y),\ n \to \infty$, де в обох випадках збіжність треба розглядати в сенсі $L_2(\mathbb{R})$. Звідси $(F^2[f])(y) = f(-y)$ майже при всіх $y \in \mathbb{R}$.

18. Довести, що $F[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ та $F[1] = \sqrt{2\pi}\delta$, де F діє в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Р о з в ' я з о к . Нехай $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Маємо $< F[\delta], \varphi >=< \delta, F[\varphi] >=< \delta(y), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixy}\varphi(x)dx >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx =< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi >$. Оскільки φ – довільна основна функція, то $F[\delta]$ збігається з регулярною узагальненою функцією $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Отже, $F[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ F^{-1}F[\delta] = F^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$. Звідси $\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F^{-1}[1],\ F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$. Однак для узагальненої функції $f(x) = 1$ маємо $f(-x) = 1$, і тоді $F^{-1}[1] = F[f(-x)] = F[1]$. Остаточно, $F[1] = \sqrt{2\pi}\delta$.

19. Нехай $\theta(x_1, ..., x_m) = \theta(x_1)\theta(x_2)...\theta(x_m)$, де $\theta(x_i)$ – функція Хевісайда. Довести, що в просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)\ :\ \frac{\partial^m\theta}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_m} = \delta(x),\ x = (x_1, ..., x_m)$.

Р о з в ' я з о к . Нехай $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Маємо, інтегруючи послідовно, $< \frac{\partial^m\theta}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_m}, \varphi >= (-1)^m < \theta, \frac{\partial^m\varphi}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_m} >=$

$(-1)^m \int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^\infty dx_2 ... \int\limits_0^\infty \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_m} dx_m =$

$(-1)^{m-1} \int\limits_0^\infty dx_1 ... \int\limits_0^\infty \frac{\partial^{m-1} \varphi(x_1,...,x_{m-1},0)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_{m-1}} dx_{m-1} = ... =$

$- \int\limits_0^\infty \frac{\partial \varphi(x_1,0,...,0)}{\partial x_1} dx_1 = \varphi(0) =< \delta, \varphi > .$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

20. Нехай φ – ненульова функція з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Чи збігаються у $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ послідовності:

1) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(x),\ x \in \mathbb{R} \ :\ n \geq 1\right\}$;

2) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(nx),\ x \in \mathbb{R} \ :\ n \geq 1\right\}$;

3) $\{\varphi(x+n),\ x \in \mathbb{R} \ :\ n \geq 1\}$?

21. Нехай $\varepsilon > 0,\ K(\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]$. Для довільної локально інтегровної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ означимо функцію $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ рівністю $f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x-y) f(y) dy,\ x \in \mathbb{R}$. Довести твердження:

1) якщо $f = \chi_{[-a,a]}$ і $\varepsilon < a < +\infty$, то $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причому $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 \leq f_\varepsilon(x) \leq 1;\ \forall x \in K(a-\varepsilon)\ :\ f_\varepsilon(x) = 1$, та $\forall x \in \mathbb{R} \backslash K(a+\varepsilon)\ :\ f_\varepsilon(x) = 0$;

2) якщо $f \in C(\mathbb{R})$ та $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$, то $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причому $\forall x \in \mathbb{R} \backslash K(a+\varepsilon)\ :\ f_\varepsilon(x) = 0$.

22. Нехай f_ε – функція, визначена в попередній задачі. Довести твердження:

1) якщо $f \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < +\infty$, то для довільного $\varepsilon > 0\ :\ f_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ і $||f_\varepsilon||_{L_p(\mathbb{R})} \leq ||f||_{L_p(\mathbb{R})}$;

2) нехай $f = 0$ майже скрізь поза деяким компактом у $\mathbb{R}$, тоді

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} f \begin{cases} \text{у } C(\mathbb{R}), & \text{якщо } f \in C(\mathbb{R}); \\ \text{у } L_p(\mathbb{R}), & \text{якщо } f \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty; \\ \text{майже скрізь}, & \text{якщо } f \in L_\infty(\mathbb{R}). \end{cases}$$

3)$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – скрізь щільна в $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p \leq +\infty$, і у просторі $C_0(\mathbb{R})$ фінітних неперервних функцій з нормою $||f|| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

23. Множина $M \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ обмежена в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, якщо носії всіх функцій із M належать деякому відрізку $[a, b]$ і $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \exists C_k > 0\ \forall \varphi \in M\ :\ \max\limits_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_k$. Довести, що всяка обмежена множина в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ відносно компактна, тобто з довільної послідовності її елементів можна виділити збіжну в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ підпослідовність.

24. Довести, що операції диференціювання та множення на функцію $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ є неперервними операторами в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, тобто що із збіжності $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi,\ n \to \infty$, випливає: а) $D\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} D\varphi$, б) $\alpha\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \alpha\varphi$.

25. Нехай функція ξ така сама, як в задачі 2, а функція $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ має єдиний нуль порядку 1 у точці $x = 0$. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Довести, що до простору $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ належить також функція

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\xi(x)\varphi(0)}{\alpha(x)},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

доозначена за неперервністю при $x = 0$.

26. Довести, що функція $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ може бути зображена як похідна від деякої іншої функції $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ тоді й лише тоді, коли вона задовольняє умову $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$.

27. Довести, що кожну функцію $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ можна зобразити у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy + \psi'(x),\ x \in \mathbb{R},$$

де $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, а φ_0 – довільна функція з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)dx = 1$.

28. Довести, що функціонал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ є узагальненою функцією, тобто $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, у таких випадках:

1) $f(\varphi) = \varphi(0) + \varphi(1);$
2) $f(\varphi) = \varphi'(0);$
3) $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx;$
4) $f(\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx;$
5) $f(\varphi) = \int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sign} x\varphi'(x)dx;$
6) $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi(x)dx;$
7) $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{x}\varphi'(x)dx;$
8) $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\varphi^{(n)}(x)dx,\ n \in \mathbb{N};$
9) $f(\varphi) = \varphi'(1) + \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x\varphi(x)dx;$
10) $f(\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_{1}^{3} x\varphi''(x)dx.$

В яких з цих випадків функція є регулярною? Знайти носій f.

29. Довести, що подані нижче функціонали є сингулярними узагальненими функціями:

1) $< \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi >= Vp \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx;$
2) $< \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi >= Vp \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^3}dx;$
3) $< \mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}, \varphi >= Vp \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx,$

де $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване, $Vp\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx\right).$

30*. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ і для довільної невід'ємної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $f(\varphi) \geq 0$. Довести, що існує міра μ, яка визначена на σ-алгебрі борельових множин на $\mathbb{R}$ і така, що $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ :\ f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)d\mu(x)$.

31. Довести, що $\delta_a(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0,\ a \to +\infty$.

32. Довести, що у просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

1) $\chi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \delta_0$;

2) $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \delta_0 \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx$,

де $\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$ $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon}),\ x \in \mathbb{R},\ f \in L_1(\mathbb{R}),\ \delta_0$ – дельта-функція Дірака, яка зосереджена в точці 0.

33. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

1) $\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \delta_0$;

2) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \sqrt{\pi}\delta_0$;

3) $\frac{1}{x} \sin\frac{x}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \pi\delta_0$;

4) $\frac{\varepsilon}{x^2} \sin^2\frac{x}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \pi\delta_0$;

5) $t^n e^{ixt} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0,\ n \geq 0$.

34. Довести твердження:

1) $\forall\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})\ :\ \alpha\delta_0 = \alpha(0)\delta_0$;

2) $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ :\ \delta_0(ax) = \frac{1}{|a|}\delta_0(x)$;

35. Нехай $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ має єдиний нуль порядку 1 у точці $x = 0$. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $\alpha f = 0$.

36. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} f \subset [-a, a],\ \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $\exists\varepsilon > 0$ $\forall x \in [-a-\varepsilon, a+\varepsilon]\ :\ \eta(x) = 1$. Довести, що $\eta f = f$.

37. Довести, що загальний розв'язок рівняння $x^n f = 0,\ n \in \mathbb{N}$, у $D'(\mathbb{R})$ визначається формулою $f = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \delta_0^{(k)}$, де $C_0, C_1, ..., C_{n-1}$ – довільні комплексні сталі.

38. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівностей:

1) $x^n\mathcal{P}\frac{1}{x} = x^{n-1},\ n \geq 1;$
2) $x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x};$
3) $x^n\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = x^{n-2},$

де $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, та $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ – узагальнені функції, визначені в задачах 4 та 29.

39. Знайти похідні в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ від функцій:

1) $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R};$
2) $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x),\ x \in \mathbb{R}.$

40. Довести, що для будь-яких $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ правильна рівність $(f(x+a))^{(n)} = f^{(n)}(x+a).$

41. Обчислити при $n \geq 1$:

1) $\theta^{(n)}(x-a);$
2) $(\theta(x)\sin x)';$
3) $(\theta(x)\cos x)';$
4) $(\theta(x)e^{ax})^{(n)};$
5) $(\operatorname{sign} x)^{(n)};$
6) $(x \operatorname{sign} x)';$
7) $|x|^{(n)};$
8) $(\operatorname{sign}(\cos x))^{(n)};$
9) $[x]^{(n)},$

де $\theta(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$ – функція Хевісайда, $[x]$ означає цілу частину x.

42. Знайти похідні перших трьох порядків від функцій:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2+1, & x \geq 1; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2+1, & x \geq 0; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ x \ge 2, \\ x^2, & 0 \le x \le 1, \\ (x-2)^2,\ 1 \le x \ge 2; \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

43. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівностей:

1) $\frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;
2) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$;
3) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$,

де $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, та $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ – узагальнені функції, визначені в задачах 4 та 29.

44. Нехай $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Довести, що $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$. Обчислити $(\alpha\theta)'$, де θ – функція Хевісайда.

45. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ правильна рівність $x\delta_0^{(n)} = -n\delta_0^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

46. Довести, що узагальнені функції $\delta_0, \delta_0', ..., \delta_0^{(n)}$ лінійно незалежні в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

47. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівності: $|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(k+\frac{1}{2})\pi}$.

48. Використовуючи розклад $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}e^{inx}$, $x \in [0, 2\pi]$, довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівності $\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

49. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівності: $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cos(2k+1)x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{\pi k}$.

50. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $y'' = 0$.

51. Довести, що $u = C_1 + C_2\theta(x) + \ln|x|$, де C_1, C_2 – довільні сталі, θ – функція Хевісайда, є загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $xu' = 1$.

52. Знайти загальні розв'язки в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівнянь:

1) $(x-1)u = 0$;
2) $(x^2-1)u = 0$;
3) $xu = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;
4) $\cos x \cdot u = 0$;
5) $x^2u' = 0$;
6) $(x+1)^2u'' = 0$;
7) $x(x-1)u = 0$;
8) $xu = 1$;
9) $x^2u = 0$;
10) $xu' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;
11) $x^2u' = 1$;
12) $(x+1)u''' = 0$.

53. Довести, що загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $x^n u^{(m)} = 0,\ n > m$, є узагальнена функція $u = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum\limits_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k x^k$, де $a_k,\ b_k,\ c_k$ – довільні сталі.

54. Довести, що для всіх $\{f_1, f_2, f_3\} \subset L_1(\mathbb{R}),\ f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ та $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$.

55. Означимо на $L_1(\mathbb{R})$ перетворення Фур'є $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iyx} f(x) dx$, $y \in \mathbb{R}$. Довести, що $\forall \{f, g\} \subset L_1(\mathbb{R})\ \forall y \in \mathbb{R}\ :\ \widehat{f * g}(y) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(y) \hat{g}(y)$.

56. Довести, що:

1) $\delta_0 * \varphi = \varphi,\ \delta_a * \varphi = \varphi(x-a),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \forall a \in \mathbb{R}$;
2) $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, і $\forall n \geq 1\ :\ (f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)} = f^{(n)} * \varphi$;
3) $\delta_0^{(n)} * \varphi = \varphi^{(n)},\ \forall n \geq 1,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

57. Знайти фундаментальний розв'язок оператора $D + aI,\ a \in \mathbb{R}$, та загальний розв'язок рівняння $\frac{du}{dx} + au = \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

58. Знайти фундаментальний розв'язок оператора L та загальний розв'язок рівняння $Lu = \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, у таких випадках:

1) $L = D^2 - a^2 I,\ a \in \mathbb{R}$;
2) $L = (D \pm aI)^n,\ a \in \mathbb{R},\ n \geq 2$;
3) $L = D^2 + 4D$;
4) $L = D^2 - 2D + 1$;
5) $L = D^2 + 3D + 2$;
6) $L = D^2 - 4D + 5$;
7) $L = D^3 - a^3,\ a \in \mathbb{R}$;
8) $L = D^3 - 3D^2 + 2D$;
9) $L = D^4 - a^4,\ a \in \mathbb{R}$;
10) $L = D^4 - 2D^2 + 1$.

59. Нехай z – розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $Lz = z^{(n)} + a_1(x) z^{(n-1)} + ... + a_n(x) z = 0,\ \{a_1, ..., a_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, який задовольняє умови $z(a) = z'(a) = ... = z^{(n-2)}(a) = 0,\ z^{(n-1)}(a) = 1$, де $a \in \mathbb{R}$. Довести, що:

1) для довільного $a \in \mathbb{R}$ функція $\mathcal{E}(x, a) = \theta(x-a) z(x, a),\ x \in \mathbb{R}$, задовольняє у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівняння $L\mathcal{E} = \delta_a$, тобто $\mathcal{E}$ – фундаментальний розв'язок оператора L;
2) якщо всі коефіцієнти L сталі, то $\mathcal{E}(x, a) = \mathcal{E}(x - a, 0) = \mathcal{E}_0(x - a)$.

60. Знайти фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}$ оператора L у таких випадках:

1) $L = D - 2x$;
2) $L = D + 3x^2$;
3) $L = D - \sin x$;
4) $L = D + \cos x$;
5) $L = D + 4x\sin(x^2 + \frac{\pi}{3})$;
6) $L = D - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;
7) $L = D - 4x^3 + 4x - 1$;
8) $L = D - 2^x$;
9) $L = D + x^2 3^{x^3+1}$.

61. Чи належать до простору $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ функції $e^{-x^2}, e^{-x}, xe^{-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$?

62. 1) Нехай $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ і P – многочлен. Довести, що $P\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) Нехай $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ і $k \geq 1$. Довести, що $\varphi^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

63. Нехай функція ψ належить до $C^\infty(\mathbb{R})$, дорівнює нулю на $(-\infty, a)$ та обмежена разом з усіма похідними. Довести, що функція $\psi(x)e^{-\sigma x}$, $x \in \mathbb{R}$, належить до простору $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, якщо $\sigma > 0$.

64. Довести, що $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ щільний в $L_2(\mathbb{R})$.

65. Нехай φ – ненульова функція з $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Чи збігаються в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ послідовності:

1) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(x), \ x \in \mathbb{R} \ : \ n \geq 1\right\}$;
2) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(nx), \ x \in \mathbb{R} \ : \ n \geq 1\right\}$;
3) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}), \ x \in \mathbb{R} \ : \ n \geq 1\right\}$?

66. Довести, що $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ і для довільного $k \geq 1 \ : \ \delta_0^{(k)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

67. Довести, що $e^{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, але e^{x^2} не породжує регулярну узагальнену функцію з простору $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

68. Довести, що $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ і відповідний оператор вкладення неперервний.

69. Нехай $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ і P – многочлен. Означимо функціонал $< Pf, \varphi >=< f, P\varphi >, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Довести, що $Pf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

70. Довести, що ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$ збігається в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, якщо $\forall k \in \mathbb{Z} \ :$ $|a_k| \leq C(1 + |k|)^m$, де $C > 0$ і $m \geq 0$ – деякі сталі.

71. 1) Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f вимірна за Лебегом та $\exists m \geq 0 \ :$ $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^m} dx < \infty$. Довести, що $f(x)$ визначає регулярну узагальнену функцію з $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, яка задається рівністю $< f, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) Довести, що функція $f(x) = e^x \cos e^x$ не задовольняє умови п.1, проте визначає регулярну узагальнену функцію за формулою п.1, де інтеграл слід розуміти як інтеграл Рімана.

72. Довести, що:

1) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ :\ F[\varphi(x-h)] = e^{ihy}F[\varphi],\ h \in \mathbb{R};$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ :\ F[\varphi^{(k)}] = (-iy)^k F[\varphi],\ k \geq 1;$

3) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ :\ (F[\varphi])^{(k)} = F[(ix)^k\varphi],\ k \geq 1;$

4) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ :\ y^k(F[\varphi])^{(l)} = i^{k+l}F[(x^l\varphi)^{(k)}],\ k \geq 1,\ l \geq 1.$

73. Нехай $a > 0$. Знайти перетворення Фур'є функцій: 1) $e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R};$ 2) $xe^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R}.$

74. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $\theta(x)e^{-ax},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0;$

2) $e^{-a|x|},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0;$

3) $xe^{-a|x|},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0;$

4) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}(x^2+a^2)},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0;$

5) $\chi_{[0,a]}(x),\ a > 0;$

6) $\chi_{[-a,a]}(x),\ a > 0;$

7) $x^2e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0;$

8) $e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(ax),\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$

75. Для перетворення Фур'є F у просторі $L_2(\mathbb{R})$ довести, що $\sigma_p(F) \subset \{1, -1, i, -i\}$.

76. Для перетворення Фур'є F у просторі $L_2(\mathbb{R})$ знайти $\sigma(F)$.

77. Нехай $f \in L_1(\mathbb{R})$ і $g \in L_2(\mathbb{R})$. Довести, що $F[f * g] = \sqrt{2\pi}F[f] \cdot F[g]$, де $f * g$ – згортка функцій f і g (див. задачу 46.3 з розділу 6).

78. Нехай F – це перетворення Фур'є в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Довести:

1) $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\ :\ (F[f])^{(k)} = F[(ix)^k f],\ k \geq 1;$

2) $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\ :\ F[f^{(k)}] = (-iy)^k F[f],\ k \geq 1.$

79. Довести твердження:

1) $F[\delta_h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ihy},\ y \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R};$

2) $F[x^k] = \sqrt{2\pi}(-i)^k\delta_0^{(k)},\ k \geq 1;$

3) $F[\delta_0^{(k)}] = \frac{(-iy)^k}{\sqrt{2\pi}},\ k \geq 1.$

80. Довести правильність у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ рівностей:

1) $F[\frac{1}{2}(\delta_h + \delta_{-h})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(hy),\ h \in \mathbb{R};$

2) $F[\frac{1}{2}(\delta_h - \delta_{-h})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(hy),\ h \in \mathbb{R};$

3) $F[3x^2 + 2x - 1] = \sqrt{2\pi}(-3\delta_0'' + 2i\delta_0' - \delta_0).$

81. Довести, що узагальнена функція $< \mathcal{P}f\frac{1}{x^2+y^2}, \varphi(x,y) >= \int\limits_{x^2+y^2<1} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(0,0)}{x^2+y^2}dxdy + \int\limits_{x^2+y^2<1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dxdy,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, задовольняє рівняння $(x^2+y^2)\mathcal{P}f\frac{1}{x^2+y^2} = 1$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

82. 1) На площині (x, y) розглянемо квадрат $[0, 1]^2$. Нехай функція f дорівнює 1 у цьому квадраті та 0 назовні квадрату. Обчислити в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ похідну f''_{xy}.

2) На площині (x, y) розглянемо квадрат з вершинами: $A(-1, 0)$, $B(0, -1)$, $C(1, 0)$, $D(0, 1)$. Нехай функція f дорівнює 1 в $ABCD$ і 0 назовні квадрату. Обчислити в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ вираз $f''_{yy} - f''_{xx}$.

83. Які з функцій $e^{-||x||^2}$, $e^{-||x||}$, $(x_1^2 + ... + x_m^2)e^{-||x||^2}$, $\frac{1}{1+||x||^2}$ належать простору $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$?

84. 1) Нехай μ – міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, яка набуває скінченних значень на компактних множинах. Довести, що рівність $\alpha_\mu(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(t) d\mu(t)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, задає узагальнену функцію $\alpha_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

2) Нехай μ – міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, для якої $\exists m \in \mathbb{N}\ :\ (1 + ||x||)^{-m} \in L_1(\mathbb{R}^m, \mu)$ (таку міру називають мірою повільного зростання). Довести, що рівність з п.1) задає узагальнену функцію $\alpha_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

3) Показати, що не кожна міра, яка набуває скінченних значень на компактах, породжує $\alpha_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Розглянути приклад $\mu(\triangle) = \int\limits_{\triangle} e^{||x||} dx$, $\triangle \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

85. Довести властивості перетворення Фур'є в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

1) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m\ :\ F[f(x - x_0)](y) = e^{i(y,x_0)} F[f](y)$;

2) $F[f](y + y_0) = F[e^{i(y_0,x)} f(x)](y)$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

86. Довести в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

1) $F[\delta(x - x_0)] = \frac{e^{i(y,x_0)}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}$;

2) $F[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}$;

3) $F[1] = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \delta$.

87. Довести в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

1) $F[D^\alpha \delta] = \frac{(-iy)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}$;

2) $F[x^\alpha] = (2\pi)^{\frac{m}{2}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta$, де $x^\alpha = \prod\limits_{k=1}^{m} x_k^{\alpha_k}$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

РОЗДІЛ 1

5. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$, 1; 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; 5) 3; 6) 0; 7) 1; 8) $\sqrt[3]{\frac{17}{6} - 3e + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^3}$; 9) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2$; 10) $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$. **6.** 1) Ні; 2),3) Так. **7.** 1),3),4),6) Так; 2),5) Ні. **8.** 1),2),3) Так. **9.** У цій та наступних відповідях через x_0 (у $C([0,1])$, $C^1([0,1])$, $L_p([0,1])$) і через $x^{(0)}$ (в l_p) позначаються границі збіжних послідовностей. I. 1) Ні; 2) Так, $x_0 = 0$; 3) Ні; 4) Так, $x_0(t) = 1$; 5) Так, $x_0(t) = \sin t$; 6) Так, $x_0(t) = t$; 7) Ні; 8) Так, $x_0(t) = t$; 9) Так, $x_0(t) = t$; 10) Ні; 11) Так, $x_0(t) = \varphi(t)$. II. 1) Так, $x_0(t) = 0$; 2) Так, $x_0(t) = t$. III. 1) Так, $x^{(0)} = 0$; 2) Так, $x^{(0)} = e_1$; 3) Так, $x^{(0)} = 0$; 4) Ні; 5) Так лише при $1 < p \leq +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 6) Так лише при $1 < p \leq +\infty$, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...)$; 7) Так лише при $2 < p \leq +\infty$, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, ...)$; 8) Так лише при $1 < p \leq +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 9) Так лише при $p = +\infty$, $x^{(0)} = 0$; 10) Ні; 11) Ні; 12) Ні; 13) Ні. IV. 1) Так, $x_0 = 0$; 2) Так, $x_0 = 0$; 3) Так лише при $1 \leq p < 2$, $x_0 = 0$; 4) Ні; 5) Так, $x_0(t) = 1$; 6) Ні. **14.** 2) За умовою, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \leq f(\varphi)\})$ – опукла множина, що є кулею $\overline{B}(0,1)$ у наведеній нормі. Перевіримо, що це справді норма. Для точок $x, y \in \mathbb{R}^2$: $\frac{||x||}{||x||+||y||}\frac{x}{||x||} + \frac{||y||}{||x||+||y||}\frac{y}{||y||} \in A$ внаслідок опуклості, тому норма цього елемента не перевищує одиниці, що еквівалентно третій аксіомі норми. Інші дві аксіоми перевіряються легко. Навпаки, якщо задана деяка норма, то позначивши кулю $\overline{B}(0,1)$ через A, отримаємо шукану опуклу множину. При $1 \leq p < +\infty$ шукана крива є $\rho = \dfrac{1}{(|\cos\varphi|^p + |\sin\varphi|^p)^{\frac{1}{p}}}$, при $p = +\infty:\ \rho = \dfrac{1}{\max\{|\cos\varphi|, |\sin\varphi|\}}$.
15. При доведенні рівності скористатись тим, що для $x \in l_1$, $x \neq 0$, маємо $||x||_\infty \leq ||x||_p = ||x||_\infty \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{||x||_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||x||_\infty \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{||x||_\infty}\right)^{\frac{1}{p}} = ||x||_1^{\frac{1}{p}} ||x||_\infty^{\frac{p-1}{p}} \to ||x||_\infty$, $p \to +\infty$. **16.** Включення випливає з нерівності Гельдера, а рівність – з того, що для $x \in L_\infty(T,\mu)$, $x \neq 0$, і $\forall \varepsilon \in (0, ||x||_\infty)$ $\exists A_\varepsilon \in F$, $\mu(A_\varepsilon) > 0$ $\forall t \in A_\varepsilon$: $|x(t)| \geq ||x||_\infty - \varepsilon$, отже, $(||x||_\infty - \varepsilon)(\mu(A_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} \leq ||x||_p \leq ||x||_\infty (\mu(T))^{\frac{1}{p}}$. **17.** Розглянути функції $x(t) = t^{-\alpha}\chi_{(0;1]}(t)$, $y(t) = t^{-\beta}\chi_{[1;+\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, підібравши відповідні $\alpha \geq 0$ і $\beta \geq 0$. **18.** 1) Необхідно й достатньо, щоб існувала вимірна множина $B \subset A$, яка не має граничних точок, така, що

$\lambda_F(A\backslash B)=0$. Зауважимо, що ця умова еквівалентна такій: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ :\ \lambda_F((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A)=\lambda_F(\{x\}\cap A)$. За цих умов простори L_p ізометрично ізоморфні просторам l_p з вагою, для яких потрібне включення правильне. Необхідність можна довести від супротивного. Дійсно, якщо умова хибна, то $\exists x_0\in\mathbb{R}\,\exists\,\{\varepsilon_n : n\geq 1\}\,,\ 0<\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n,\ n\geq 1$, причому $\forall n\geq 1\ :\ m_n:=\lambda_F(A\cap((x_0-\varepsilon_n,x_0+\varepsilon_n)\backslash(x_0-\varepsilon_{n+1},x_0+\varepsilon_{n+1})))>0$. Тому включення просторів не справджується, про що свідчить приклад $f(x)=0,\ x\in A\backslash(x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1),\ f(x)=\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}m_k\right)^{-\alpha},\ x\in A\cap((x_0-\varepsilon_n,x_0+\varepsilon_n)\backslash(x_0-\varepsilon_{n+1},x_0+\varepsilon_{n+1})),\ n\geq 1$, де $\alpha\in(\frac{1}{p_2},\frac{1}{p_1})$. Збіжність відповідних рядів розглянута в задачі VII.2.47[14]; 2) Необхідно й достатньо, щоб міра $\lambda_F(A)$ була скінченна. Якщо міра скінченна, то достатність цієї умови міститься в задачі 16. Необхідність цієї умови встановлюється від супротивного. Якщо умова не виконується, то існує послідовність вимірних множин $\{B_n\subset A\ :\ n\geq 1\}$ така, що $B_n\cap B_m=\varnothing,\ n\neq m,\ a_n:=\lambda_F(B_n)>0,\ n\geq 1$, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ розбіжний. Тому включення хибне, про що свідчить приклад $f(x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{-\alpha},\ x\in B_n,\ n\geq 1$, де $\alpha\in(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})$. Збіжність відповідних рядів розглянута в задачі VII.2.45[14].
19. У випадку $s<+\infty$ довести, що $||x||_r\leq||x||_p^{\alpha}||x||_q^{\beta},\ x\in L_p(\mathbb{R})\cap L_s(\mathbb{R})$, де $\alpha=\frac{r^{-1}-q^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}},\ \beta=\frac{p^{-1}-r^{-1}}{p^{-1}-q^{-1}}$, застосувавши нерівність Гельдера до добутку $|x|^{\alpha r}\cdot|x|^{\beta r}$ і врахувавши рівність $\frac{1}{p/(r\alpha)}+\frac{1}{q/(r\beta)}=1$.
21. 1),2) Ні. **22.** Необхідно й достатньо, щоб: $1)\alpha(t)\geq 0,\ t\in[a,b]$, причому $\alpha>0$ на скрізь щільній множині з $[a,b]$; $2)\alpha(t)>0,\ t\in[a,b]$. Для доведення достатності у п. 2) припустити, не втрачаючи загальності, що $[a,b]=[0,1],\ \alpha(0)=0$. Далі розглянути послідовність $x_n(t):=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)+1}}(1-t)^n,\ t\in[0,1],\ n\geq 1$. **23.** Необхідно й достатньо, щоб $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2,...)\in l_\infty$ і $\alpha_k>0,\ k\geq 1$. Урахувати, що коли $\alpha\notin l_\infty$, то $\forall n\geq 1\ \exists k_n\in\mathbb{N}\ :\ \alpha_{k_n}\geq n$, і розглянути $x:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e_{k_n}$.
24. Необхідною й достатньою умовою рівності є: 1) у нерівності Гельдера $||xy||_1\leq||x||_p||y||_q,\ x\in L_p(T,\mu),y\in L_q(T,\mu)$ – існування невід'ємних чисел $\alpha,\beta,\ \alpha+\beta>0$, таких, що $\alpha|x|^p=\beta|y|^q\ (\mathrm{mod}\ \mu)$; 2) у нерівності Мінковського $||x+y||_p\leq||x||_p+||y||_p,\ x,y\in L_p(T,\mu)$ при $p>1$ – існування невід'ємних чисел $\alpha,\beta,\ \alpha+\beta>0$, таких, що $\alpha x=\beta y\ (\mathrm{mod}\ \mu)$, а при $p=1$ – $xy\geq 0\ (\mathrm{mod}\ \mu)$. **26.** $f_1:=f\cdot\chi_{\{t\in\mathbb{R}\mid\ |f(t)|>1\}},\ f_2:=f-f_1$. **27.** Помітити, що для кожного $\varepsilon>0$ і для всіх $k\in\mathbb{N}\ :\ A\sigma^k\geq$

$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^k f(x)|dx \geq (\sigma+\varepsilon)^k \int\limits_{|x|\geq\sigma+\varepsilon} |f(x)|$, звідки $f(x)=0,\ |x|>\sigma+\varepsilon$.

28. $\alpha p<1$. **29.** 1) з.л.о.$(\{\varphi_n\ :\ n\in\mathbb{Z}\})$, де $\varphi_n(t)=(\frac{1}{2}-|t-n-\frac{1}{2}|)\chi_{[n,n+1]}(t),\ t\in\mathbb{R}$; 2) з.л.о.$(\{\psi_n\ :\ n\in\mathbb{Z}\})$, де $\psi_n(t)=\chi_{[n+\frac{1}{2},n+1]}(t)$, $t\in\mathbb{R}$. **32.** 1) Так. 2) Ні. **36.** Розглянути послідовність $x_n(t)=\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$, $t\in[a,b],\ n\geq 1$. **37.** Так. Скористатись задачею 33 2). **38.** Ні. Нехай $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]\backslash\mathbb{Q}$. Покладемо $x_k(\alpha):=1,\ x_k(t):=0,\ t\in[0,1]\backslash(\alpha-\frac{1}{k},\alpha+\frac{1}{k})$, а на проміжках $(\alpha-\frac{1}{k},\alpha),\ (\alpha,\alpha+\frac{1}{k})$ функцію x_k довизначимо лінійно, $k>\frac{1}{\alpha}$. Тоді $||x_k||_\infty=1,\ k>\frac{1}{\alpha}$, але $||x_k||\to 0,\ k\to\infty$. **40.** Усі. **41.** Для доведення необхідності застосувати критерій Коші до послідовності часткових сум ряду, що розглядається. При доведенні достатності врахувати, що коли $\{y_n : n\geq 1\}\subset X$ – фундаментальна послідовність, то $\forall k\geq 1\ \exists N_k\ \forall n,m\geq N_k\ :\ ||y_n-y_m||<\frac{1}{2^k}$, а тому послідовність $\{y_{n_k}\ :\ k\geq 1\}$, де $n_1:=N_1,\ n_k:=\max\{n_{k-1},N_k\}+1,\ k\geq 2$, задовольняє умову задачі. **42.** Для доведення повноти простору $(C^n([a,b]),||\cdot||_n)$ скористатись критерієм Коші збіжності в $C([a,b])$ і показати, що якщо $x_n^{(k)}\rightrightarrows y_k,\ n\to\infty$, на $[a,b],\ 0\leq k\leq n$, то $y_0\in C^n([a,b])$ і $y_0^{(k)}=y_k,\ 1\leq k\leq n$. При цьому можна скористатись формулою Ньютона – Лейбніца й теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана. Для доведення неповноти простору $(C^n([a,b]),||\cdot||_{n-j})$ побудувати обмежену в $C([a,b])$ послідовність функцій $\{x_n : n\geq 1\}\subset C^{j-1}([a,b])$, яка поточково збігається до розривної функції $x\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$, і довести, що тоді послідовність $y_k(t):=\frac{1}{(n-j)!}\int\limits_a^t (t-u)^{n-j}x(u)du,\ t\in[a,b],\ k\geq 1$, фундаментальна, але розбіжна в $(C^n([a,b]),||\cdot||_{n-j})$. **44.** Довести, що якщо Q не компакт, то в ньому існує зліченна система попарно неперетинних замкнених куль $\{B_n : n\geq 1\}$. Нехай M – множина тих функцій x, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ збігаються на B_n або з тотожно-нульовою функцією, або з функцією $B_n\ni t\mapsto\frac{\rho(t,Q\backslash B_n)}{\rho(t,t_n)+\rho(t,Q\backslash B_n)}$, де t_n – центр кулі $B_n,\ \rho$ – метрика на Q, а також $x(t)=0,\ t\in Q\backslash\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$. Тоді $M\subset C_b(Q)$ – незліченна множина і $\forall x,y\in M,\ x\neq y\ :\ ||x-y||=1$. Звідси вивести, що кожна скрізь щільна множина в $C_b(Q)$ незліченна. **45.** 2) Необхідно й достатньо, щоб множина T була скінченною. **46.** Ні. Розглянути множину $\{\chi_{[a,t)}\mid t\in(a,b)\}$. **47.** Ні. **48.** 2) $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$. **49.** 1) Ні. Скористатись 24.2. 2) При $\alpha\geq\beta\ :\ \alpha||x||+\beta||y||\geq||\alpha x+\beta y||=||\alpha(x+y)+(\beta-\alpha)y||\geq\alpha||x+y||-(\alpha-\beta)||y||=\alpha||x||+\beta||y||$.

51. Довести спочатку твердження задачі для деякої тотальної в $L_1([a,b])$ множини, наприклад, для неперервних функцій. **55.** Розглянути функцію $\chi_{[0,+\infty)}$. **56.** Розглянути множину функцій $\left\{\chi_{[t_0,b]} \mid t_0 \in (a,b]\right\}$. **57.** Скористатись теоремою Стоуна – Вейєрштрасса. **58.** 1) З умови випливає, що існує зліченна множина $\{t_n : n \geq 1\} \subset K$, яка складається з ізольованих точок. Якщо $r_n > 0$ таке, що $B(t_n, r_n) \cap \{t_k \mid k \geq 1,\ k \neq n\} = \varnothing$, то функції $K \ni t \mapsto \frac{\rho(t, K \setminus B(t_n, r_n))}{\rho(t, t_n) + \rho(t, K \setminus B(t_n, r_n))},\ n \geq 1,$ лінійно незалежні. 2) $\varphi_i(t) := \frac{\rho(t, K \setminus U_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(t, K \setminus U_k)},\ t \in K.$ 3) Нехай $C(K)$ – дійсний простір, $M = \{y_n : n \geq 1\}$ – не більш ніж зліченна скрізь щільна множина в K. Тоді $\forall m \geq 1\ \exists n_m \in \mathbb{N}\ :\ \left\{B(y_k, \frac{1}{m}) \mid k = \overline{1, n_m}\right\}$ – покриття K. Нехай $\left\{\varphi_k^{(m)}\ :\ k = \overline{1, n_m}\right\}$ – розбиття одиниці, побудоване за знайденим покриттям. Далі розглянути сукупність функцій $\sum\limits_{k=1}^{n_m} r_k \varphi_k^{(m)}$ при довільних раціональних r_k та $m \in \mathbb{N}$. **60.** Необхідно й достатньо, щоб $g \neq 0 \pmod m$ на $\mathbb{R}$. **61.** 1),2),5),7)-9),12) – Ні. 3),4),6),10),11) – Так. У п. 6 замкненість випливає з задачі 35. **62.** 1) Так. 2) Ні. **63.** $\overline{l_1} = c_0$ в l_∞. **64.** Підпростір лише при $p = 1$. При $1 < p \leq +\infty$ розглянути послідовність $x^{(n)} = e_1 - \frac{1}{n}(e_2 + ... + e_{n+1}),\ n \geq 1$. **65.** Ні. Розглянути послідовність $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...),\ n \geq 1$. **68.** Ні. Розглянути $\{e_n : n \geq 1\}$ в l_2. **74.** $\frac{1}{8}$. **75.** Скористатись теоремою з теоретичних відомостей і задачею 33. **76.** Скористатись задачею 75. **77.** 2) $\{e_n : n \geq 1\}$. **78.** Скористатися задачею 77.1. **80.** Скористатись задачею 35. **81.** Див. задачу 4. **84.** Якщо $B(x_0, r) \subset M$ для $x_0 \in M$ і $r > 0$, то $B(0, r) \subset M$, тому $M = X$. **85.** 1) Розглянути сукупність $\{X_A\}$ усіх систем X_A лінійно незалежних елементів в X; ввести на ній частковий порядок за включенням і застосувати лему Цорна (про неї див., наприклад, у [17]). 3) Якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – зліченний базис Гамеля в банаховому просторі X, $L_n :=$л.о.$\{e_1, ..., e_n\}$, $n \geq 1$, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. За теоремою Бера про категорії (про неї див., наприклад, у [17]) довести, що хоч один з підпросторів L_n має внутрішню точку, і скористатись задачею 84. 4) Розглянути $\{x \in l_2 \mid x = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...),\ n \in \mathbb{N}\}$ з нормою, індукованою з l_2. **86.** Для доведення необхідності врахувати, що ЛНП несепарабельний тоді й тільки тоді, коли для деякого $\varepsilon > 0$ він не має зліченної ε-сітки. Далі застосувати лему Цорна аналогічно до розв'язку задачі 85.1. **87.** Показати, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність. **88.** Для фундаментальної послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ розглянути кулі $\overline{B}(x_n, r_n)$, де $r_n := \sup\limits_{m \geq n} ||x_m - x_n||,\ n \geq 1$. **89.** 1) $X := l_2$,

$M_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{e_k\},\ n \geq 1.$ 2) Показати, що послідовність $\{r_n : n \geq 1\}$ радіусів куль є незростаючою. Якщо $r_n \to 0,\ n \to \infty$, то див. задачу 87. Якщо $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n\ :\ r_k = r_n$, то все доведено. У протилежному випадку $r_n \to \rho,\ n \to \infty,\ r_n > \rho,\ n \geq 1$. Тоді послідовність куль з тими ж центрами і радіусами $r_n - \rho$ також є вкладеною. **92.** 2) $\{e_n : n \geq 1\}$ – базис у c_0 і $l_p,\ 1 \leq p < +\infty$, а $\{e_n : n \geq 0\}$, де $e_0 = (1, 1, ..., 1, ...)$ – базис у c. 3) Достатність випливає з нерівності $||x^{(n)} - x|| \leq \sum\limits_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k| \cdot ||e_k|| + \sup\limits_{n\geq 1} || \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} x_k^{(n)} e_k|| + || \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} x_k e_k||,\ n \geq 1,\ N \geq 1$. Для доведення необхідності скористатися відомостями з [19] (гл.III, §6),[18] (гл.III, §7). **93.** Необхідність. Розглянути проектори $P_n : X \to X$, що діють за формулою $P_n \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$. У [19] (гл.III, §6),[18] (гл.III, §7) доведена їх обмеженість, а з теореми Банаха – Штейнгауза випливає їх рівномірна обмеженість. Тоді нерівність п. 2 випливає з рівності $P_n \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Достатність. Якщо $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e_n$, то, застосувавши до $\lambda_k = a_k - b_k$ другу умову і спрямувавши m до нескінченності, отримати рівність часткових сум рядів, а отже, рівність $a_k = b_k,\ k \geq 1$. Далі розглянути множину Y тих $x \in X$, які розкладаються в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Досить довести її замкненість, щоб за першою умовою отримати шукане. Нехай $y_n \to y,\ n \to \infty,\ y_n \in Y,\ n \geq 1$. Використовуючи другу умову, показати фундаментальність послідовностей $\left\{ a_k^{(n)} : n \geq 1 \right\}$ коефіцієнтів розкладів y_n для кожного $k \geq 1$, а отже, їх збіжність до $\{a_k : k \geq 1\}$. Звідси отримати, що $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. **94.** 1) Переконатися, що $\chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]} \in$л.о.$(\{h_n : n \geq 1\}),\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq l \leq 2^k - 1$. Показати, що такі характеристичні функції утворюють тотальну множину в $L_p([0, 1])$. 3) З опуклості функції $|t|^p,\ t \in \mathbb{R}$, вивести нерівність $2|x|^p \leq |x + y|^p + |x - y|^p,\ x, y \in \mathbb{R}$. Нехай $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k h_k,\ g = f + \lambda_{n+1} h_{n+1},\ [a, b]$ – відрізок, де $h_{n+1} \neq 0$. Тоді $f(t) = g(t),\ t \notin [a, b],\ f(t) := c = const,\ t \in [a, b],\ g(t) = c + \lambda_{n+1},\ t \in [a, \frac{a+b}{2}),\ g(t) = c - \lambda_{n+1},\ t \in [\frac{a+b}{2}, b]$. Тоді $\int\limits_a^b |f(t)|^p dt = |c|^p (b - a) \leq \frac{b-a}{2} (|c + \lambda_{n+1}|^p + |c - \lambda_{n+1}|^p) = \int\limits_a^b |g(t)|^p dt,$

що еквівалентно шуканій нерівності. 2) Скористатися 1),3) і попередньою задачею. **95.** Доведемо тотальність системи Шаудера. Для цього за теоремою Гана – Банаха досить довести, що кожен ЛНФ на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на всіх функціях системи Шаудера, є тотожно-нульовим. Переконатися, що існує лінійна комбінація f_{n+1} перших $n+1$ функцій системи Хаара така, що $|\int\limits_0^t \chi_{[a,b]}(u)du - \int\limits_0^t f_{n+1}(u)du| \leq \frac{n+1}{2^n},\ t \in [0,1]$. Звідси випливає, що функція $\int\limits_0^t \chi_{[a,b]}(u)du$ належить до з.л.о.$(\{s_n : n \geq 1\})$. Переконатися, що для довільного інтервала $(c,d) \subset [0,1]$ існує послідовність $\{g_n : n \geq 1\}$ таких функцій, для якої $g_n \to \chi_{(c,d)}$ поточково. Звідси випливає, що для функціонала $F \in (C([0,1]))^*$ маємо $0 = F(g_n) \to F(\chi_{(c,d)}) = \nu_F((c,d))$, де ν_F – заряд, що відповідає функціоналу F. Граничний перехід є наслідком теореми Лебега про мажоровану збіжність. Аналогічно доводиться, що $\nu(0) = \nu(1) = 0$. Отже, $F = 0$. Перевіримо тепер умову монотонності системи Шаудера. Нехай $f = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k s_k$ і $g = f + \lambda_{k+1}s_{k+1},\ [a,b]$ – проміжок, де s_{n+1} відмінна від нуля. Тоді $f(t) = g(t),\ t \notin [a,b]$, отже $||f||_{[0,1]} - ||g||_{[0,1]} = ||f||_{[a,b]} - ||g||_{[a,b]} = \max\{|f(a)|,|f(b)|\} - ||g||_{[a,b]} = \max\{|g(a)|,|g(b)|\} - ||g||_{[a,b]} \leq 0$. Тепер те, що система Шаудера є базисом, випливає із задачі 93. **96.** Якщо $\{x_n : n \geq 1\}$ – зліченна скрізь щільна множина в A, то $\left\{\sum\limits_{k=1}^n r_k x_k \mid r_k \in \mathbb{Q},\ k = \overline{1,n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ – зліченна скрізь щільна множина в з.л.о.(A). **98.** $1 < p < +\infty$. **99.** 1) Для гільбертового простору скористатись рівністю паралелограма (задача 9 з розділу 2), а для L_p – задачею 24.2. **100.** Необхідність. Показати, що коли $\exists x \in X\ \exists\{y_1,y_2\} \subset L\ :\ ||x-y_1|| = ||x-y_2|| = \rho(x,L) > 0$, то $||x - \frac{y_1+y_2}{2}|| = \rho(x,L)$. Далі розглянути $x_k := \frac{x-y_k}{||x-y_k||},\ k = 1,2$. Достатність. Припустимо, що $\exists x_1,x_2 \in X,\ ||x_1|| = ||x_2|| = ||\frac{x_1+x_2}{2}|| = 1\ :\ x_1 \neq x_2$. Покладемо $L := \{y_\alpha := \alpha(x_1-x_2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Тоді: $(i)||x_1 - y_\alpha|| = 1,\ \alpha \in [0,1]$, бо $||x_1 - y_\alpha|| \leq 1,\ ||-x_2+y_\alpha|| \leq 1$, а також $2 = ||x_1+x_2|| \leq ||x_1-y_\alpha||+||-x_2+y_\alpha||$; $(ii)||x_1-y_\alpha|| \geq ||\alpha-1|\cdot||x_1|| - |\alpha|\cdot||x_2||| = 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$. Отже, $\rho(x_1,L) = 1$ і $y_\alpha,\ \alpha \in [0,1]$ – елементи найкращого наближення в L для x_1. 1) $L := \{(x_1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\},\ x := (0,1)$. 2) $L := \{(x_1,-x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\},\ x := (1,1)$. **101.** 1) Скористатися рівністю паралелограма (задача 9 розділу 2). 3) Скористатись методом від супротивного і задачею 77.1. 4) Встановити, що $(1+t)^p + (1-t)^p \leq 2(1+t^p),\ 1 \leq p \leq 2,\ (1+t)^p + (1-t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p),\ 2 < p < +\infty,\ 0 \leq t \leq 1$, звідки отримати нерівності Кларксона:

$\forall x_1, x_2 \in L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$: $||\frac{x_1+x_2}{2}||_p^p + ||\frac{x_1-x_2}{2}||_p^p \le \frac{||x_1||_p^p + ||x_2||_p^p}{2}$, $2 < p < +\infty$, $||\frac{x_1+x_2}{2}||_p^q + ||\frac{x_1-x_2}{2}||_p^q \le \frac{1}{2}(||x_1||_p^p + ||x_2||_p^p)^{\frac{1}{p-1}}$, $1 < p < 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. **102.** Нехай $\{y_n : n \ge 1\} \subset L$: $0 \ne ||x - y_n|| \to \rho(x, L) > 0$, $n \to \infty$. Покладемо $z_n := \frac{x-y_n}{||x-y_n||}$, $n \ge 1$. Далі встановити нерівність $||\frac{z_n+z_m}{2}|| \ge (\frac{1}{2||x-y_n||} + \frac{1}{2||x-y_m||})\rho(x, L)$, $n, m \ge 1$, звідки вивести, що $||\frac{z_n+z_n}{2}|| \to 1$, $n, m \to \infty$, і отримати фундаментальність послідовності $\{z_n : n \ge 1\}$. **103.** Встановити, що твердження задачі 102 справджується для довільної опуклої замкненої множини, а не тільки для підпростору. **104.** Нехай існує розбиття $A_1, ..., A_n$ простору T з $\mu(A_k) > 0$. Розглянути індикаторні функції χ_{A_k}, $1 \le k \le n$, довести, що вони лінійно незалежні в $L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ і вивести звідси, що $\dim L_p(T, \mathcal{F}, \mu) \ge n$. Навпаки, нехай $\sup \Phi = n_0 < \infty$ (переконатися, що цього достатньо, згідно з попереднім). Розглянути відповідне розбиття $\{A_1, ..., A_{n_0}\}$ і встановити, що воно складається з атомів. Тоді переконатися, що кожна функція $f \in L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ є μ-майже скрізь стала на елементах розбиття, тобто $f = \sum\limits_{k=1}^{n_0} z_k \chi_{A_k}$, а отже, $\{\chi_{A_k} : 1 \le k \le n_0\}$ утворюють базис в $L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$.

РОЗДІЛ 2

6. Виправлення: в умові повинно бути $S : X \times X \to \mathbb{C}$. З третьої умови вивести, що $S(nx, y) = nS(x, y)$, $S(\frac{x}{n}, y) = \frac{1}{n}S(x, y)$, $S(\frac{m}{n}x, y) = \frac{m}{n}S(x, y)$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$. Тепер, якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то існує послідовність $\left\{\frac{m_k}{n_k} + i\frac{p_k}{r_k} : k \ge 1\right\}$, збіжна до λ, де $p_k, m_k \in \mathbb{Z}$, $r_k, n_k \in \mathbb{N}$. Тому з четвертої умови випливає, що $S(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. Не обов'язково. Наприклад, простір $C([0, 1])$ зі скалярним добутком $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ є неповним. **7.** 1) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}e_n : n \ge 1\right\}$; 2) $\left\{\frac{1}{n}e_n : n \ge 1\right\}$; 3) $\left\{e_n \exp\frac{n}{2} : n \ge 1\right\}$. **8.** Необхідно й достатньо, щоб $\inf\limits_{k \ge 1} \alpha_k > 0$. **9.** Зобразити квадрат норми як скалярний добуток і скористатись його властивостями. Урахувати, що для $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, не виконується рівність паралелограма в $C([0, 1])$. **10** і **11.** Скористатись задачею 9. **12.** Зробивши заміну $y_1 = y - x, z_1 = z - x, u_1 = u - x$, отримаємо нерівність $||z_1|| \cdot ||y_1 - u_1|| \le ||y_1|| \cdot ||z_1 - u_1|| + ||u_1|| \cdot ||y_1 - z_1||$. У цій нерівності фігурують лише три елементи та дії віднімання, тому можна вважати, що вони лежать у тривимірному дійсному евклідовому просторі.

Досліджуючи функцію $F(z_1) = ||y_1|| \cdot ||z_1 - u_1|| + ||u_1|| \cdot ||y_1 - z_1||$ на локальний умовний екстремум за умови $||z_1|| = 1$ як функцію трьох змінних, переконуємося, що екстремум досягається, якщо z_1 – лінійна комбінація y_1, u_1. Тому задачу досить розв'язати у двовимірному дійсному евклідовому просторі. Цей простір ізометрично ізоморфний простору $\mathbb{C}$ з нормою, що дорівнює модулю. Якщо елементам y_1, z_1, u_1 при цьому відповідають комплексні числа w_1, w_2, w_3, то шукана нерівність еквівалентна нерівності $|w_1w_2 - w_2w_3| \le |w_1w_2 - w_1w_3| + |w_1w_3 - w_2w_3|$, яка випливає з нерівності трикутника. **14.** Вигляд поляризаційної тотожності в дійсному просторі: $(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$. **15.** Скалярний добуток визначається за допомогою поляризаційної тотожності. Розв'язок див. [17] (гл. III, §4, п. 8). **16.** Необхідно й достатньо, щоб $\operatorname*{essinf}_{t\in[a,b]} p(t) > 0$, тобто $\exists \varepsilon > 0 \ : \ p \ge \varepsilon (\mathrm{mod\, m})$. **17.** Скористатись тим, що $|| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k||^2 = \sum\limits_{k=n}^{m} ||x_k||^2, \ 1 \le n \le m$. **18.** Скористатись тим, що для $y \in$л.о.$\{x_1, ..., x_n\}$ умова $y = 0$ рівносильна системі $(y, x_k) = 0, \ k = \overline{1, n}$. **19.** Скористатись задачею 9. **23.** 2) Встановити, що $(M^{\perp})^{\perp} =$з.л.о.(M). **25.** $L^{\perp} = \{x \in L_2(\mathbb{R}) \mid x(t) = 0, \ t \le 0 (\mathrm{mod}\, m)\}$. **27.** 1)-7) {0}. Скористатись задачею 4. **28.** 1) $\{0\}$; 2), 4) множина непарних функцій; 3) множина парних функцій. **29.** 1) з.л.о.$(\{\cos kt \mid k \ge 0\})$, тобто множина парних функцій; 2) з.л.о.$(\{1, \sin kt \mid k \ge 1\})$, тобто множина функцій вигляду $x + c$, де x – непарна функція, а $c \in \mathbf{K}$ – стала; 3) з.л.о.$(\{e^{ikt} \mid k \le 4\})$; 4) з.л.о.$(\{e^{-ikt} \mid k \le 2\})$. **30.** 1) $\{x \in l_2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$, 2) з.л.о.$(\{e_k \mid k > n\})$; 3) з.л.о.$(\{e_{2k-1} \mid k \in \mathbb{N}\})$. **32.** л.о.$(\{\operatorname{sh} t\})$. **33.** Розглянути $\{\chi_{\{t\}} \mid t \in \mathbb{R}\}$. **34.** Для доведення необхідності припустити супротивне й розглянути функцію $\chi_{[a,c]} - \chi_{[a+2\pi, a+2\pi+c]}$, де $0 < c < b - a - 2\pi$. При доведенні достатності скористатись міркуваннями з розв'язку задачі 5. **35.** I спосіб. Користуючись інтегральною формулою Коші, для $x \in A^2(D)$ встановити зображення $x(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{\overline{B}(z_0, R)} x(z) dt ds, \ z = t + is, \ |z_0| < 1$, де радіус $R > 0$ такий, що $\overline{B}(z_0, R) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, за допомогою якого довести замкненість $A^2(D)$. Для доведення щільності $P(\mathbb{C})$ показати повноту системи $\{z^n \ : \ n \ge 0\}$, встановивши її ортогональність та наступну рівність для $x(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ |z| < 1 \ : \ \int\limits_{\overline{B}(0,R)} x(z) \overline{z}^n dt ds = \frac{\pi}{n+1} R^{2(n+1)} c_n, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ 0 < R < 1$. II спосіб. Довести, що для $x(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ |z| < 1$, справджується співвідношення $\int\limits_{\overline{B}(0,R)} |x(z)|^2 dt ds = \pi \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{R^{2n+2}}{n+1}, \ 0 <$

$R < 1$, звідки вивести, що відповідність $x \leftrightarrow a = (a_0, a_1, \ldots)$ є ізометричним ізоморфізмом між $A^2(D)$ та $l_{2,\alpha}$, де $\alpha = \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \;:\; k \geq 0 \right\}$, (див. задачу 7). **36.** Див. вказівку до задачі 35. Відповідна ортонормована послідовність така: $\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} z^n, \ n \geq 0$. Поповнення $\overline{P(\mathbb{C})}$ складається з цілих функцій x таких, що $\int\limits_{\mathbb{C}} |x(z)|^2 e^{-|z|^2} dtds < +\infty; \ e^{-|z|} \notin \overline{P(\mathbb{C})}$.

38. Нехай M_{N+1} – підпростір функцій, сталих на кожному півінтервалі $\left[\frac{k-1}{2^{N+1}}, \frac{k}{2^{N+1}}\right), \quad 1 \leq k \leq N, \quad N \in \mathbb{N}$. Довести, що $M_{N+1} =$л.о.$\{x_0, x_{kn} \mid 1 \leq k \leq n, \ 0 \leq n \leq N\}$, порівнявши розмірності цих підпросторів, а потім скористатись скрізь щільністю множини $\bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}} M_{N+1}$ в $L_2([0,1])$. **39.** 2)-5) Скористатись інтегруванням частинами. **40.** 3),4) Див. [17] (гл. VII, §4, п. 3). **41.** Скористатись тим, що послідовність $\left\{\chi_{[a,b]} - \frac{b-a}{n}\chi_{[b,b+n]} \;:\; n \geq 1\right\}$ збігається в $L_2(\mathbb{R})$ до $\chi_{[a,b]}$.

42. 1),2) $\{0\}$. Скористатись тим, що якщо функція $f(t) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k, \ t \in (-1,1)$, де $\{x_k \;:\; k \geq 0\} \subset \mathbb{R}$, обертається в нуль у точках збіжної до нуля послідовності, то $f \equiv 0$. **43.** Ні. Наприклад, якщо M не є підпростором. **44.** Див. задачу 45. **45.** Необхідність випливає з теореми 6. Для доведення достатності припустимо, що H неповний. Тоді $\exists y_0 \in \tilde{H} \backslash H$, де $\tilde{H}$ – поповнення H. Покладемо Y :=л.о.$\{y_0\}$. Процесом ортогоналізації можна побудувати зліченну ортонормовану систему $M = \{x_n : n \geq 1\} \subset H \cap Y^{\perp}$, яка є скрізь щільною в $H \cap Y^{\perp}$. Далі встановити, що $H \cap Y^{\perp}$ – скрізь щільна в $Y^{\perp}$, звідки послідовно вивести повноту M в $Y^{\perp}$ і в H. Потім показати, що M не є базисом в H, урахувавши, що $y_0 \perp M$. **46.** Необхідність випливає із задачі 80 розділу 1, а для доведення достатності розглянути множину л.о.$(\{x_\alpha \;:\; \alpha \in A\})$, де $\{x_\alpha \;:\; \alpha \in A\}$ – ортонормований базис. **47.** 1) Так. 2) Ні. Нехай $H = L_2([0,1]), \ e_1(t) := 1, \ e_n(t) = -\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]}(t), \ t \in [0,1], \ n \geq 2, \ c_n := 1, \ n \geq 1$. **49.** Рівність з умови скалярно домножити на e_k. **50.** Перші два твердження очевидні. Припустимо, що для деякого $x \in L_2([0,1]) \cap C([0,1]) \ \exists \{c_n \;:\; n \geq 0\} \;:\; x(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ в $L_2([0,1])$. Якщо S_n – часткова сума цього ряду, то $\forall t \in [0,1] \;:\; (S_n, \chi_{[0,t]}) \to (x, \chi_{[0,t]}), \ n \to \infty$, тобто
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} t^{n+1} = \int\limits_0^t x(u)du =: y(t), \ t \in [0,1]$ (де ряд збігається поточково), звідки випливає, що $y \in C^{\infty}((0,1))$ як сума степеневого ряду, отже, $x \in C^{\infty}((0,1))$. Суперечності з теоремою 6 немає, бо ця система не ортонормована. **51.** Розглянути спочатку випадок скінченної міри

і скористатися теоремою Фубіні. **52.** Випливає із задач 101 і 103 розділу 1. Якщо $H = l_2$, то в $M = \left\{(1+\frac{1}{n})e_n \ : \ n \geq 1\right\}$ немає елемента з найменшою нормою. **53.** $y := x_0 + r\frac{x-x_0}{||x-x_0||}$. **54.** Необхідність. Оскільки $\lambda y+(1-\lambda)z \in M, \ \lambda \in [0,1]$, то $||x-y||^2 \leq ||x-\lambda y-(1-\lambda)z||^2$, звідки $(x-y, y-z) \geq -\frac{1}{2}(1-\lambda)||y-z||^2, \ \lambda \in [0,1)$; спрямовуючи тут $\lambda \to 1$, отримаємо потрібне твердження. Достатність випливає зі співвідношень $||x-z||^2 = ((x-y)+(y-z),(x-y)+(y-z)) \geq ||x-y||^2$. **55.** Якщо $y = pr_{L^\perp}x$, то $\exists t \in \mathbf{K} \ : \ x = ta+y$. Оскільки $y \in L^\perp$, то $(x-ta, a) = 0$, звідки $t = \frac{(x,a)}{||a||^2}$, тому $\rho(x, L^\perp) = ||x-y|| = |t| \cdot ||a||$. **57.** $M_n^\perp = \left\{ (\underbrace{t, t, ..., t}_{n}, 0, 0, ...) \mid t \in \mathbf{K} \right\}$. Скориставшись задачею 55, отримати, що $\rho(x_0, M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \ n \geq 1$. **58.** Ні. Розглянути $M = M_n, \ n \geq 2$, із задачі 57 і $N =$л.о.(e_1). **59.** Лінійність M, N очевидна, а їх замкненість виводиться з повноти l_2. $M+N = \left\{(x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{3}, x_5, \frac{x_6}{5}, x_7, \frac{x_8}{7}, ...) \mid x \in l_2\right\}$. Множина $M+N$ скрізь щільна в l_2, бо л.о.$(\{e_n : n \geq 1\}) \subset M+N$. Однак $M+N \neq l_2$, бо $(1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, ...) \notin M+N$. **60.** Див. вказівку до задачі 59. **61.** При доведенні замкненості $M+N$ для збіжної послідовності $\{x_n+y_n \ : \ n \geq 1\}$ такої, що $x_n \in M, \ y_n \in N, \ n \geq 1$, скористатись: 1) рівністю $||x_n+y_n-(x_m+y_m)||^2 = ||x_n-x_m||^2+||y_n-y_m||^2, \ n, m \geq 1$; 2) нерівністю $||x_n+y_n-(x_m+y_m)||^2 = ||x_n-x_m||^2+||y_n-y_m||^2+(x_n-x_m, y_n-y_m)+(y_n-y_m, x_n-x_m) \geq ||x_n-x_m||^2+||y_n-y_m||^2-2||x_n-x_m|| \cdot ||y_n-y_m||(1-\varepsilon), \ n, m \geq 1$, звідки отримати фундаментальність $\{x_n : n \geq 1\}$ і $\{y_n : n \geq 1\}$. **62.** Ні. **63.** Нехай $\{y_n : n \geq 1\}$ – ортонормована система в $L_2([b,c])$. Шукане продовження $\{z_n : n \geq 1\}$ побудуємо так: $z_n(t) := x_n(t), \ t \in [a,b], \ z_1(t) := y_1(t), \ z_n(t) := \alpha_{n,1}y_1(t)+...+\alpha_{n,n-1}y_{n-1}(t)+y_n(t), \ n \geq 2, \ t \in [b,c]$, де $\alpha_{n,j}$ визначаються із системи $(z_j, z_n) = 0, \ j = \overline{1, n-1}$.

РОЗДІЛ 3

9. 1),2),5),7),15) $||f|| = 1$; 3),4),9),13) нелінійний, неперервний; 6),10) $||f|| = \frac{1}{2}$; 8) нелінійний, розривний; 11),12) $||f|| = \frac{2}{\pi}$; 14) $||f|| = 2$; 16) $||f|| = \frac{4}{\varepsilon^2}$; 17) $||f|| = \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|$. **10.** 1) $||f|| = 1$; 2) $||f|| = 1$; 3) $||f|| = \sup\limits_{n\geq 1}|y_n|$; 4) нелінійний, неперервний; 5) $||f|| = 1$; 6) $||f|| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$; 7) $||f|| = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; 8) $||f|| = 2$; 9) $||f|| = 1$, якщо $p = 1$, $||f|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$,

якщо $1 < p < +\infty$; 10) $||f|| = \frac{1}{2}$, якщо $p = 1$; $||f|| = (\frac{1}{2^q-1})^{\frac{1}{q}}$, якщо $1 < p \leq +\infty$; 11) нелінійний, розривний; 12) нелінійний, неперервний; 13) $||f|| = 1$; 14) $||f|| = 1,\ p = 1$; $||f|| = 2^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 15) $||f|| = 2,\ p = 1$; $||f|| = (1 + 2^q)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$.
11. 1) $||f|| = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $||f|| = 1$; 3) $||f|| = \sqrt{2}$; 4) нелінійний, неперервний; 5) $||f|| = 1,\ p = 1$; $||f|| = \left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 6) $||f|| = 1,\ p = 1$; $||f|| = \left(\frac{1}{2}B(\frac{q+1}{2}, \frac{1}{2})\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$, де B – бета-функція; 7) $||f|| = \frac{1}{2},\ p = 1$; $||f|| = \left(\frac{1}{(q+1)2^{q+1}}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 8) $||f|| = 3,\ p = 1$; $||f|| = (1 + 3^q)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 9) $||f|| = \pi$.
12. 1) $||f|| = 1$; розглянути послідовність $x_n(t) = (1-t)^n$; 2) лінійний, розривний; 3) $||f|| = 2\pi$; 4) $||f|| = 1$; 5) $||f|| = 1$; 6) $||f|| = 1$; 7) $||f|| = \frac{1}{\sqrt{\alpha(2-\alpha)}},\ 0 < \alpha < 2$; при $\alpha \geq 2$ лінійний, розривний; для доведення зробити заміну $u = t^\alpha$ і розглянути послідовність $x_n(u) = \frac{1}{\sqrt{u}\ln u}\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]}(u)$; 8) $f(x) = x(0),\ ||f|| = 1$; 9) $||f|| = 1$; 10)-12) лінійний, розривний; у п. 12 розглянути послідовність $x^{(n)} = (\operatorname{sign} y_1, ..., \operatorname{sign} y_n, 0, 0, ...),\ n \geq 1$.
17. 1) $||f|| = 1$; 2) $||f|| = 1$; 3) $||f|| = 3$; 4) $||f|| = \frac{4}{3}$; 5) $||f|| = 2$; 6) $||f|| = \frac{1}{2}$; 7) $||f|| = \frac{7}{2}$; 8) $||f|| = 2$; 9) $||f|| = 2$; 10) $||f|| = 2$; 11) $||f|| = 2$; 12) $||f|| = 6$; 13) $||f|| = \frac{\pi^2}{6}$; 14) $||f|| = \frac{1}{10}$; 15) $||f|| = 1$; 16) $||f|| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$; 17) $||f|| = 1$. **18.** 1) $||f|| = 1$; 2) $||f|| = \frac{\pi}{2}$; 3) $||f|| = 1$; 4) $||f|| = \frac{3}{4}$; 5) $||f|| = \sqrt{2}$; 6) $||f|| = \frac{\pi^{\frac{4}{7}}}{6^{\frac{2}{7}}}$; 7) $||f|| = 1$; 8) $||f|| = 4,\ p = 1$; $||f|| = (2^q + 4^q)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 9) $||f|| = \frac{1}{2},\ p = 1$; $||f|| = \left(\frac{1}{2^q-1}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 10) $||f|| = \sqrt{6}$; 11) $||f|| = \pi$; 12) $||f|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; 13) $||f|| = 2,\ p = 1$; $||f|| = (\frac{2^{q+1}-1}{q+1} + 2)^{\frac{1}{q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 14) $||f|| = 1,\ p = 1$; $||f|| = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2q}},\ 1 < p \leq +\infty$; 15) $||f|| = \frac{\pi}{2}$.
19. 1) Якщо $p = 1$, то $\alpha \geq 0$ і $||f|| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha > \frac{1}{q}$ і $||f|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha q}}\right)^{\frac{1}{q}}$. 2) якщо $p = 1$, то $\alpha \leq 1$ і $||f|| = |2^\alpha - 1|$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha < 1 - \frac{1}{q}$ і $||f|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha)^q\right)^{\frac{1}{q}}$; 3) якщо

$p = 1$, то $\alpha \leq 0$ і $||f|| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha < \frac{1}{q}$, $||f|| = \left(\frac{1}{1-\alpha q}\right)^{\frac{1}{q}}$; 4) якщо $p = 1$, то $\alpha \geq 0$ і $||f|| = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha q}$ при $\alpha > 0$, $||f|| = 1$ при $\alpha = 0$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha > -\frac{1}{q}$ і $||f|| = \frac{1}{q^\alpha}\left(\frac{1}{q}\Gamma(\alpha q + 1)\right)^{\frac{1}{q}}$, де Γ – гамма-функція; 5) якщо $p = 1$, то $\alpha \geq 0$ і $||f|| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $\alpha > -\frac{1}{q}$ і $||f|| = \left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha q}{2}+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{\alpha q}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{q}}$. **20.** 1) Нехай X – ЛНП розмірності $n \in \mathbb{N}$, $\{e_1, ..., e_n\}$ – базис в X, f – лінійний функціонал на X. Тоді $\exists\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbf{K} \ : \ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ (тут $a_k = f(e_k)$). Неперервність випливає з того, що збіжність у скінченновимірному ЛНП рівносильна покоординатній збіжності (див. задачу 75 з розділу 1). 2) У $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ це прямі (відповідно, площини), що проходять через початок координат. **21.** Скористатись тим, що $\forall x \in c_0 \ : \ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. **22.** Скористатись тим, що $\forall x \in c \ : \ x = e_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - \lim\limits_{n\to\infty} x_n)e_k$, де $e_0 = (1, ..., 1, ...)$. **23.** Необхідно й достатньо, щоб $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \ : \ a_n = 0$, де $a \in l_1$ – елемент, що задає функціонал (див. задачу 21). **24.** 1) Якщо $f \in (C^1([a, b]))^*$, то $\exists \alpha \in \mathbf{K}\, \exists g \in BV_0([a, b]) \ : \ f(x) = \alpha x(a) + \int\limits_a^b x'(u)dg(u)$, $x \in C^1([a, b])$. Для доведення скористатись зображенням $x(t) = x(a) + \int\limits_a^t x'(u)du = x(a) = (Ax')(t)$, $t \in [a, b]$, $x \in C^1([a, b])$, де $(Ay)(t) := \int\limits_a^t x(u)du$, $t \in [a, b]$, $y \in C([a, b])$, покласти $\alpha := f(x_0)$, де $x_0(t) := 1$, $t \in [a, b]$, і показати, що суперпозиція $f(A) \in (C([a, b]))^*$. 2) Скористатись формулою Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. **25.** $||f|| = \int\limits_a^b |p(t)|dt$. Для доведення скористатись: 1) теоремою Рісса; 2) тим, що $\exists \{p_n : n \geq 1\} \subset C([a, b]) \ : \ p_n \to p$, $n \to \infty$, в $L_1([a, b])$, при цьому $f_n \to f$ в $(C([a, b]))^*$, де $f_n(x) = \int\limits_a^b p_n(t)x(t)dt$, $x \in C([a, b])$, $n \geq 1$. **26.** Див.: 1) задачу 9.7; 2) задачу 9.1; 3) задачу 9.2. **28.** 1) a) Ні; b) так; 2) a) ні; b) так; 3) усі. **30.** $||f|| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} \geq \sup\limits_{x\in L} \frac{1}{||x||} = \frac{1}{\inf\limits_{x\in L} ||x||}$.

Навпаки, оскільки $\forall x \notin \operatorname{Ker} f \ : \ \frac{x}{f(x)} \in L$, то $||f|| = \sup\limits_{x \notin \operatorname{Ker} f} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup\limits_{x \notin \operatorname{Ker} f} \frac{1}{||\frac{x}{f(x)}||} \leq \sup\limits_{y \in L} \frac{1}{||y||}$. **31.** 2) Щоб довести достатність, для кожної послідовності $\{y_n : n \geq 1\} \subset X,\ y_n \to 0,\ n \to \infty$, покладемо $x_n := \frac{y_n}{\sqrt{||y_n||}},\ n \geq 1$. Тоді $x_n \to 0,\ n \to \infty$, і за умовою послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена, тому $f(y_n) = \sqrt{||y_n||} f(x_n) \to 0,\ n \to \infty$. 3) Для доведення достатності, скориставшись тим, що якщо множина $A \subset X$ відкрита, то множина $-A := \{-x \mid x \in A\}$ теж відкрита, показати, що для довільного $c \in \mathbb{R}$ множина $\{x \mid f(x) > c\}$ відкрита, а потім скористатись теоремами про структуру відкритих множин в $\mathbb{R}$ і про характеризацію неперервного відображення. **32.** З умови випливає, що існує $\varepsilon > 0$, існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $x_n \to 0,\ n \to \infty$, і $|f(x_n)| \geq \varepsilon,\ n \geq 1$. Тоді для кожного $\alpha \in \mathbf{K}$ послідовність $y_n := \frac{\alpha}{f(x_n)} x_n \to 0,\ n \to \infty$, і $f(y_n) = \alpha,\ n \geq 1$. Відповідь на питання позитивна. **33** і **34.** Скористатись задачею 2.2. **35.** Припустимо, що $\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \subset \operatorname{Ker} f$. Якщо f_1 і f_2 лінійно незалежні, то згідно із задачею 34 $\exists z_1 \in \operatorname{Ker} f_1 \backslash \operatorname{Ker} f_2;\ \exists z_2 \in \operatorname{Ker} f_2 \backslash \operatorname{Ker} f_1$. Згідно із задачею 2.2, $\forall x \in X\, \exists! y \in \operatorname{Ker} f_1\, \exists! \lambda \in \mathbf{K} \ : \ x = y + \lambda z_2$. Ще раз застосувавши задачу 2.2 до функціонала f_2, що розглядається на підпросторі $\operatorname{Ker} f_1$, маємо: $\exists! u \in \operatorname{Ker} f_2 \cap \operatorname{Ker} f_1\, \exists! \mu \in \mathbf{K} \ : \ y = u + \mu z_1$. Показати, що $f = \frac{f(z_2)}{f_1(z_2)} f_1 + \frac{f(z_1)}{f_2(z_1)} f_2$. Для більшої кількості функціоналів скористатися математичною індукцією. **36.** 1) В усіх: $f = 0$. 2) Необхідно й достатньо, щоб $\dim X \leq 1$. **37.** Урахувати, що із задачі 2.2 випливає нерівність $\dim X \leq \dim \operatorname{Ker} f + 1$, а потім розглянути звуження g на $\operatorname{Ker} f$. **38.** Довести, що якщо 0 – внутрішня точка множини $A \subset X$, то 0 – внутрішня точка множини $f(A) \subset \mathbf{K}$. **39.** Для доведення достатності припустимо, що $f \notin X^*$. Тоді за задачею 32 існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $x_n \to 0,\ n \to \infty$, і $|f(x_n)| \geq 1,\ n \geq 1$. Оскільки існує $z \in X \backslash \operatorname{Ker} f$, то, за задачею 2, $x_n = y_n + \lambda_n z$, де $y_n \in \operatorname{Ker} f,\ \lambda_n \in \mathbf{K},\ n \geq 1$. Тоді $|\lambda_n| \cdot |f(z)| \geq 1,\ n \geq 1$, тому $\frac{x_n}{\lambda_n} \to 0,\ n \to \infty$, тобто $\frac{y_n}{\lambda_n} \to -z,\ n \to \infty$, звідки $z \in \operatorname{Ker} f$, що неможливо. **40.** Скористатись задачами 32 і 39. **41.** $||f|| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f) = \inf\limits_{y \in \operatorname{Ker} f} ||x - y|| \cdot ||f|| \geq \inf\limits_{y \in \operatorname{Ker} f} |f(x - y)| = |f(x)|$. Навпаки, якщо $x \notin \operatorname{Ker} f$, то $\forall z \in X \backslash \operatorname{Ker} f \ : \ z = y + \lambda x$, де $y \in \operatorname{Ker} f,\ \lambda \in \mathbf{K}$, тому $\frac{|f(z)|}{||z||} = \frac{|\lambda| \cdot |f(x)|}{|\lambda| \cdot ||x - (-\frac{y}{\lambda})||} \leq \frac{|f(x)|}{\rho(x, \operatorname{Ker} f)}$, звідки $||f|| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f) \leq |f(x)|$. **42.** Скористатись задачею 41. **43.** Скористатись задачами 2 і 41; 2) необхідно й достатньо, щоб існувало не більше одного елемента $z_0 \in \overline{B}(0,1)$ такого, що $f(z_0) = ||f||$. **44.** Скористатись задачами 26 і 43. **45.** 1) Довести, що $\forall x, y \in C([a,b]), x \leq y \ : \ f(x) \leq f(y)$, а потім урахувати, що $-x_0 \leq x \leq x_0$ для всіх $x \in \overline{B}(0,1)$. 2) Якщо існує x такий, що $0 \leq x \leq x_0$ і $f(x) < 0$, то для $y = x_0 - x$ справджуються співвідношення $0 \leq y \leq x_0,\ f(x) = ||f|| - f(y) < 0$, звідки $y \in \overline{B}(0,1)$ та $f(y) > ||f||$, що неможливо. **46.** g – неспадна на $[a,b]$ функція. **47.** Скористатись теоремою Рісса. **48.** 2) Скористатись задачею 45.1. **49.** Покласти $f_1(x) := h((x,0)),\ x \in X_1$. **50.** Якщо $\{x_{\alpha_n} : n \geq 1\}$ – довільна зліченна підмножина базиса Гамеля $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ у ЛНП X, то покладемо $f(x_{\alpha_n}) = ||x_{\alpha_n}||n,\ n \geq 1$, на інших елементах базиса Гамеля функціонал f визначимо довільно, а на всьому X довизначимо f за лінійністю. **51.** Переконатись, що можна вважати, що $x_0 = 0$. Далі скористатись індукцією за n. При $n = 1$ треба довести, що множина $M \cap \operatorname{Ker} f_1$ скрізь щільна в $\operatorname{Ker} f_1$.

РОЗДІЛ 4

4. $F(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 + a_3 x_3,\ x \in \mathbb{R}^3$, де $a_3 \in \mathbb{R}$ – довільне. F зберігає норму тоді й лише тоді, коли: 1) $|a_3| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ при $p = 1$; 2) $a_3 = 0$ при $1 < p \leq +\infty$. При $1 < p \leq +\infty$ продовження, що зберігає норму, єдине завжди, а при $p = 1$ – лише якщо $\alpha = \beta = 0$. **5.** $F((x,y)) = a_1 x + a_2 y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, де $a_1 + a_2 = \alpha$. F зберігає норму тоді й тільки тоді, коли: 1) $a_1 = a_2 = \frac{\alpha}{2}$ при $1 \leq p < +\infty$; 2) $a_1 \in [0, \alpha]$ при $p = +\infty$. Таке продовження єдине лише при $1 \leq p < +\infty$. **6.** $F((x,y)) = (1 - 2b)x + by,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, де $b \in \mathbb{R}$ – довільне. F зберігає норму лише при $b = \frac{2}{5}$. **7.** 1) Якщо $f(x) = (x, a),\ x \in G$, де $a \in G$ – фіксоване, то $F(x) = (x, a + b),\ x \in H$, де $b \in G^\perp$ – фіксоване. F зберігає норму тоді й лише тоді, коли $b = 0$; 2) $F(x) = (x, a + \alpha h),\ x \in H$, де $\alpha \in \mathbf{K}$ – фіксоване. $||F|| = ||f||$ тоді й лише тоді, коли $\alpha = -\frac{(a,h)}{||h||^2}$; 3) $F(x) = (x, a + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k h_k),\ x \in H$, де $\{\alpha_k : 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbf{K}$ – фіксовані. $||F|| = ||f||$ тоді й лише тоді, коли $\alpha_k = -(a, h_k),\ k = 1, ..., n$. **8.** $F(x) = \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t),\ x \in L_p(T)$, де $h \in L_q(T)$ така, що $h = a$ μ-майже скрізь на A. $||F|| = ||f||$ тоді й лише тоді, коли: 1) $h = 0$ μ-майже скрізь на $T \backslash A$ при $1 < p < +\infty$; 2) $\operatorname*{esssup}\limits_{t \in T \backslash A} |h(t)| \leq \operatorname*{esssup}\limits_{t \in A} |a(t)|$ при $p = 1$. **9.** Якщо $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x \in c_0$, де $a \in l_1$ – фіксоване, і F – продовження f на c, то $F(x) = a_0 \lim\limits_{n \to \infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x \in c$, де $a_0 \in \mathbf{K}$ – довільне. $||F|| = ||f||$ тоді й лише тоді, коли $a_0 = 0$. **10.** $f(x) = 2x(0)$. **11.** 1) $f(x) = -x(0) + 3x(1)$; 2) $f(x) = 2x(0)$. **12.** Такий функціонал не єдиний, наприклад, $f(x) = \left(\int\limits_A t^{\alpha+1}dt\right)^{-1} \cdot \int\limits_A t^{\alpha}x(t)dt,\ x \in L_2([0,1])$, де $\alpha \geq 0$ – фіксоване. **13.** 2) Ні. Див. задачі 21 і 22 з розділу 3. **14.** $\Phi^* = l_2$. **15.** Для доведення необхідності розглянути поповнення простору X, а для доведення достатності скористатись задачею 31.2 розділу 3. **16.** 1) $x \mapsto x(0)$; 2) $x \mapsto x(1)$; 3) Продовження немає. I спосіб. Множина многочленів виду $p_1(t) = (t+1)p(t),\ p \in P$, є скрізь щільною в $C([0,1]),\ f(p_1) = 0$, але нульовий функціонал продовженням не є. II спосіб. Нехай $x_n(-1) = n,\ x_n(t) = 0,\ t \in [0,1],\ x_n$ лінійна на $[-1;0]$, а $p_n \in P$ такий, що $||x_n - p_n||_{C([-1;1])} \leq 1$, тоді послідовність $\{p_n : n \geq 1\}$ обмежена в $C([0,1])$, але $f(p_n) = n$; 4) Продовження немає. Урахувати, що множина многочленів виду $p_1(t) = p(t^{N+1}),\ p \in P$, скрізь щільна в $C([0,1]),\ f(p_1) = c_0p_1(0)$. **17.** 4) Урахувати, що функція $x_0(t) = \sin\frac{1}{t},\ t \in [-1;1]\backslash\{0\}$, не належить з.л.о.$(\{x \in L_\infty([-1;1])\,|\,x = 0$ майже скрізь на $[-1;0]$ або x неперервна в точці $0\})$. **18.** 2) Довести, що функціонал F з п. 1 не зображається за формулою із задачі 14 розділу 3. **19.** До функціонала $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1},\ x \in G := \left\{x \in l_\infty \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} \in \mathbb{R}\right\}$ застосувати теорему Банаха. **20.** Довести, що функціонал із задачі 3.1 не зображається за формулою із задачі 15 розділу 3. **21.** Для даних включень властивість транзитивності хибна. **22.** 1) Довести, що $\rho(e,\overline{G}) = 1$, показавши, що $\forall\varepsilon > 0\,\forall t \in G\ :\ ||t - e|| \geq 1 - \varepsilon$; 2) б) Скористатись міркуваннями розв'язку задачі 45.2 з розділу 3; в) Довести, що якщо $x_n \to 0,\ n \to \infty$, то $x := (x_1, x_2, ...) \in \overline{G}$; п. в) випливає також з г); г) Урахувати, що $\forall\varepsilon > 0\,\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n \geq N\ :\ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \varepsilon \leq x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$; д) Побудувати такий елемент $t \in G$, що $t_n = 1$ для безлічі n. **23.** Розглянути множину $G := \{y : [0,+\infty) \to \mathbb{R}\,|\,\forall s > 0\,\exists x \in B([0,+\infty))\ :\ y(t) = x(t+s) - x(t),\ t \in [0,+\infty)\}$ і скористатись міркуваннями із задачі 22. **25.** Довести, що числа a_1 і a_2 з першого етапу доведення теореми Гана – Банаха (див. [5] (гл.VII, §3)) однакові. **26.** 1) Покласти $f_k(x) := a_k,\ x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_k \in G :=$л.о.$(\{x_1, ..., x_n\})$, $k = 1, ..., n$, і застосувати теорему Гана – Банаха; 2) Ні. Розглянути в $L_2([0,1])$ елементи $x_n(t) = \chi_{[r_n,1]}(t),\ t \in [0,1],\ n \geq 1$, де $\{r_n : n \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$; 3) Відповіді позитивні; 4) Необхідно й достатньо, щоб $\forall\alpha_0 \in A\ :\ x_{\alpha_0} \notin$ з.л.о.$(\{x_\alpha : \alpha \in A\backslash\{\alpha_0\}\})$; 5) Скористаємося індукцією. Нехай $\{y_2, ..., y_n\} \subset X$ – система, біортогональна функціоналам $f_2, ..., f_n$. Довести, що $\forall x \in X\,\exists u \in M_1 :=$

$\bigcap\limits_{k=2}^{n} \operatorname{Ker} f_k \quad : \quad x := u + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k y_k$, де $\lambda_k = f_k(x)$, а потім переконатись, що f_1 не тотожно-рівний нулю на M_1, звідки вивести існування першого елемента біортогональної системи. Аналогічно будуються наступні. **28.** Необхідність випливає з рівносильності доводжуваної нерівності й нерівності $|f(x)| \leq M||x||, \ x \in$л.о.($\{x_1, ..., x_m\}$). Для доведення достатності побудувати послідовність лінійно незалежних елементів $\{x_{n_k} : k \geq 1\} \subset \{x_n : n \geq 1\}$, для якої E :=л.о.($\{x_{n_k} : k \geq 1\}$)= л.о.($\{x_n : n \geq 1\}$), покласти $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k c_{n_k}, \ x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_{n_k} \in E$, і показати, що якщо $x_{n_0} = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_{n_k}$, де $x_{n_0} \in \{x_n : n \geq 1\}$, $x_{n_k} \in \{x_{n_l} : l \geq 1\}$, $k = 1, ..., m$, то $c_{n_0} = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k c_{n_k}$. **29.** 1),2) Так. **30.** Скористатись задачею 26. 2) Так. 3) $\dim X = \dim X^*$. **32.** Для доведення необхідності скористатись задачею 28.2.b з розділу 3. Для доведення достатності у дійсному випадку припустимо, що $\exists x_1, x_2 \in X \ : ||x_1|| = ||x_2|| = ||\frac{x_1+x_2}{2}|| = 1$, але $x_1 \neq x_2$. Застосувати наслідок 1 до елемента $\frac{x_1+x_2}{2}$ і підпростору $L := \{\alpha(x_1 - x_2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, показавши, що $\rho(\frac{x_1+x_2}{2}, L) = 1$. У випадку комплексного простору розглянути асоційований простір і скористатися задачею 54. **35.** Скористатись задачею 34. **36.** Скористатись наслідком 1. **38.** $\varphi(y) = (\lim\limits_{n\to\infty} y_n, y_1, y_2, ...)$. **39.** Скористатись задачами 21 і 22 з розділу 3. **40.** Нехай G – підпростір рефлексивного простору X, $F \in G^{**}$. За допомогою включення $X^* \subset G^*$ показати, що для $F_0 := F \restriction X^*$ існує такий $x \in X$, для якого $F_0(f) = f(x), \ f \in X^*$. Користуючись наслідком 1, встановити, що $x \in G$. Далі, розглядаючи для кожного $f \in G^*$ такий елемент $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f} \restriction G = f$, довести рівність $F(f) = f(x), \ f \in G^*$. **41.** Для доведення необхідності встановити, що $\forall \Phi \in X^{***} \ : \ \Phi(\varphi(\cdot)) \in X^*$, і скористатись рефлексивністю X. Для доведення достатності переконатись, що $\varphi(X)$ – підпростір в X^{**}, і скористатись наслідком 1, урахувавши, що якщо $\Phi \in X^{***}$ і $\Phi = 0$ на $\varphi(X)$, то $\Phi = 0$ на X^{**}. **42.** Довести, що на одиничній сфері $S^*(0,1)$ спряженого простору X^* існує зліченна множина $\{f_n : n \geq 1\}$, скрізь щільна в $S^*(0,1)$. Нехай $y_n \in X$ такий, що $||y_n|| = 1$ та $|f_n(y_n)| \geq \frac{1}{2}, \ n \geq 1$. Покладемо G :=з.л.о.($\{y_n : n \geq 1\}$). Довести, що G – сепарабельний ЛНП і $G = E$. Для доведення останньої рівності скористатись наслідком 1 і щільністю $\{f_n : n \geq 1\}$ в $S^*(0,1)$. Обернене твердження хибне (розглянути l_1). **43.** 1) Так. 2) Так, бо $\varphi(X)$ – замкнена в X^{**}. **44.** Припустивши існування функції $x_0 \in C([0,1])$, для якої $F(g) =$

$\int\limits_0^1 x_0(t)dg(t),\ g \in BV_0([0,1])$, показати, що $x_0(t) = \chi_{(0,\frac{1}{2})}(t),\ t \in (0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$, що неможливо. **45.** Див. 1) 35 (і 26.1 розділу 3); 42; 44; 2) 35 (і 18.2 розділу 3); 41 і 39; 42; 18.2. **47.** 2) Ортогональне доповнення до M. 3),4) Скористатись наслідком 1. 5) Ні. Якщо $X = c,\ M = c_0$, то $M^{\perp\perp} = \{x \in l_\infty \mid x_1 = 0\}$, $\varphi(M) = \left\{x \in l_\infty \mid x_1 = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x = 0\right\}$. **48.** 3) $X := c,\ f_0(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x,\ f_n(x) = x_n,\ x \in c,\ M := \{f_n : n \geq 1\}$. **49.** Для довільних $C > 0$ і $x_0 \in S(0,C)$ застосувати наслідок 2. **50.** 2) Необхідно й достатньо, щоб $x_0 = 0$. **51.** 1) Необхідність випливає з наслідку 1, а достатність – із задачі 2 розділу 3. **53.** Нехай $X = \mathbb{R},\ p(x) := 2x,\ x \geq 0,\ p(x) := x,\ x < 0$. **55.** Скористатись задачами 51 і 54. 2) Якщо $M = \operatorname{Ker} f$, де $f \in X^*$, то $M_0 = \operatorname{Ker} g$, де $g = \operatorname{Re} f$. **56.** Розглянути функціонал $f(x) := 0,\ x \in G := \{0\}$. **57.** 2) Скористатись задачею 56. **59.** 3) Рівність п. в) досить довести для $t_0 > 0$. Для цього розглянути функцію $y(t) := x(t+t_0) - x(t),\ t \in \mathbb{R}$, і, врахувавши, що $p(y) \leq \pi(y;\alpha_1,...,\alpha_n) \to 0,\ n \to \infty$, де $\alpha_k := kt_0,\ k = 1,...,n$, отримати нерівності $p(y) \leq 0,\ p(-y) \leq 0$. 5) Показати, що число $f(x)$ лежить між нижнім та верхнім інтегралом Рімана функції x. 6) Застосувати теорему 4 до інтеграла Лебега як лінійного функціонала на множині функцій з $M(\mathbb{R})$, інтегровних за Лебегом. **60.** Покласти $\mu(A) := f(\chi_A),\ A \subset [0,1]$, де f – функціонал із задачі 59.

РОЗДІЛ 5

5. 2) Скористатись наслідком 3 з теореми Гана – Банаха. **6.** Скористатись тим, що у скінченновимірному просторі сильна збіжність рівносильна покоординатній (див. задачу 75 з розділу 1). **7.** 1) Скористатись тим, що множина $\left\{\chi_{[a,\tau]} \mid \tau \in [a,b]\right\}$ тотальна в $L_q([a,b])$, і застосувати теорему 5. **8.** При доведенні необхідності для кожного $t_0 \in [a,b]$ розглянути функціонал $f(x) = x(t_0),\ x \in C([a,b])$, а при доведенні достатності скористатись теоремою 4 розділу 3 і теоремою Лебега про мажоровану збіжність. **9.** 1) $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ у c_0 тоді й тільки тоді, коли: а) $\exists C > 0\, \forall n \geq 1\ :\ ||x^{(n)}|| \leq C$; б) $\forall k \geq 1\ :\ x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty$; 2) $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ у c тоді й тільки тоді, коли виконуються умови, аналогічні умовам а),б) п.1, а також в) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)} \to \lim\limits_{k\to\infty} x_k,\ n \to \infty$. **10.** У наступних задачах через x_0 позначається границя збіжних послідовностей у просторах $C([0,1]), L_p$, а через $x^{(0)}$ – границя в l_p. 1) Слабко, $x^{(0)} = 0$; 2) сильно, $x^{(0)} = 0$; 3) не збігається; 4) сильно, $x^{(0)} = 0$;

5) сильно, $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k}, ...)$; 6) сильно, $x^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, ..., \frac{k}{2^k}, ...)$; 7) сильно, $x^{(0)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, ...)$; 8) не збігається; 9) сильно, $x_0 = 0$; 10),15) при $1 \leq p < 2$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 2$ слабко, $x_0 = 0$; при $2 < p \leq +\infty$ не збігається; 11)-14) слабко, $x_0 = 0$; 16) розбігається; 17) сильно, $x_0 = 0$; 18) при $1 \leq p < 4$ сильно, $x_0 = 0$; при $p = 4$ слабко, $x_0 = 0$; при $4 < p \leq +\infty$ не збігається; 19) слабко, $x_0 = 0$; 20) при $1 \leq p < 2$ не збігається; при $p = 2$ слабко, $x_0 = 0$; при $2 < p \leq +\infty$ сильно, $x_0 = 0$. **11.** 1) Слабко, $x_0 = 0$; 2) сильно, $x_0(t) = 1$; 3) не збігається; 4) сильно, $x_0 = 0$; 5) слабко, $x_0 = 0$; 6) слабко, $x_0 = 0$; 7) не збігається. **12.** 1) Слабко, $x_0 = 0$. Довести, що множина $\left\{t\chi_{[0,\tau]}(t),\ t \in [0,1] \mid \tau \in [0,1]\right\}$ тотальна в $L_2([0,1])$, і застосувати теорему 5; 2) слабко, $x_0 = 0$; 3) слабко, $x_0 = 0$; 4) не збігається; розглянути $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)dt,\ x \in L_1(\mathbb{R})$; 5) не збігається. **13.** Сильної збіжності немає. Через f_0 позначається $*$-слабка границя послідовності $\{f_n : n \geq 1\}$. 1),2) $f_0 = 0$; 3) $f_0 = 0$. Розглянути тотальну множину $\left\{t^k,\ t \in [0,1]\ :\ k \geq 0\right\}$; 4) $f_0(x) = x(1)$; 5) $f_0(x) = x'(0)$. Для доведення відсутності сильної збіжності розглянути послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt,\ t \in [-1;1],\ n \geq 1$. **14.** X не є банаховим простором. **15.** Нехай $X := C([0,1])$ з інтегральною нормою, $f_n(x) := n \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} (x(t+\frac{1}{n}) - x(t))dt,\ n \geq 1,\ f(x) := x(1) - x(0),\ x \in X$. Тоді $f_n \xrightarrow{*-w} f$. Розглянути послідовність $x_n(t) = (n{+}1)t^n,\ t \in [0,1],\ n \geq 1$. **16.** Довести, що зі слабкої збіжності в X^* випливає $*$-слабка збіжність. **19.** Нехай $\{e_n : n \geq 1\} \subset H$ – ортонормована система. 1) $x_n := y_n := e_n,\ n \geq 1$; 2) $x_n := e_{2n-1},\ y_n := e_{2n},\ n \geq 1$. **20.** Для встановлення імплікації $2) \Rightarrow 3)$ скористатись задачею 18.1, в якій замість x_n узяти $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ і покласти $a := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. **25.** 1) Розглянути послідовність $x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1],\ n \geq 1$, і довести, що $\int\limits_0^1 x_n(t)dg(t) \to g(1) - g(1-)$ для кожної функції $g \in BV_0([0,1])$, а потім скористатись задачею 8. 2),3) Розглянути $\sum\limits_{k=1}^{n} e_{2k},\ n \geq 1$. **27.** До послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ такої, що $||f_n|| = 1$ та $|f_n(x_n - x)| = ||x_n - x||,\ n \geq 1$, застосувати теорему 4. **28.** 2) Скористатись задачею 18.3; 3) Скористатись наслідком 1 з теореми Гана – Банаха; 4) Урахувати, що якщо $x_n \in \overline{B}(x_0, r),\ n \geq 1$, і $x_n \xrightarrow{w} y$, то $x - x_0 \to y - x_0$, а потім скористатись задачею 21.2.

29. Переконатись, що достатньо розглянути випадок, коли $||x_n|| = ||x|| = 1,\ n \geq 1$, при цьому досить довести, що $||\frac{x_n+x}{2}|| \to 1,\ n \to \infty$. За задачею 34 розділу 4 існує такий функціонал $f \in X^*$, що $||f|| = 1$ і $|f(x)| = ||x|| = 1$. При цьому $|f(\frac{x_n+x}{2})| \leq ||\frac{x_n+x}{2}|| \leq 1,\ n \geq 1$, а також $|f(\frac{x_n+x}{2})| \to 1,\ n \to \infty$. **30.** Не втрачаючи загальності, припустимо, що $||x^{(n)}|| = 1,\ n \geq 1,\ x^{(n)} \xrightarrow{w} 0$. Використовуючи покоординатну збіжність до нуля, побудувати послідовності цілих чисел $1 = n_1 < n_2 < ... < n_j < ...$ та $0 = p_0 < p_1 < ... < p_j < ...$ такі, що $\sum\limits_{k=1}^{p_{i-1}} |x_k^{(n_i)}| < \frac{1}{4},\quad \sum\limits_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} |x_k^{(n_i)}| > \frac{3}{4},\ i \geq 1$ (скористатись індукцією за j). Далі, поклавши $y_k := \operatorname{sign} x_k^{(n_i)},\ p_{i-1} < k \leq p_i,\ i \geq 1$, розглянути функціонал $f_0(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ x \in l_1$, і довести, що $|f_0(x^{(n_i)})| \geq 2 \sum\limits_{k=p_{i-1}+1} p_i |x_k^{(n_i)}| - ||x^{(n_i)}||$, звідки отримати суперечність.
32. 1) Застосувати теорему Банаха – Штейнгауза до послідовності функціоналів $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k,\ x \in l_p,\ n \geq 1$; 2) Розглянути послідовність $f_n(x) := \int\limits_a^b p_n(t)x(t)dt,\ x \in L_p([a,b])$, де $p_n(t) = p(t)$, якщо $|p(t)| \leq n$, і $p_n(t) = n$, якщо $|p(t)| > n,\ n \geq 1$. **34.** Скористатись теоремою 3 з розділу 4. **35.** $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt,\ x \in C([0,1])$. Збіжності за нормою немає. Розглянути послідовність неперервних кусково-лінійних функцій x_n таких, що $x_n(\frac{k}{n}) = 1,\ 0 \leq k \leq n,\ x_n(\frac{1}{2}(\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n})) = 0,\ 0 \leq k \leq n-1$.
37. Для доведення достатності розглянути допоміжну східчасту функцію, "близьку"до $x(t),\ t \in [a,b]$, у рівномірній нормі, причому сходинки вибрати в точках неперервності F_0. Для доведення необхідності зауважити, що умова $\sup\limits_{n\geq 1} V(F_n, [a,b]) < +\infty$ випливає з критерію $*$-слабкої збіжності, тоді використати теорему Хеллі, згідно з якою така послідовність містить підпослідовність указаного вигляду, і довести збіжність усієї послідовності внаслідок єдиності границі (мається на увазі, що всі функції F_n неперервні, наприклад, справа на (a,b) і $F_n(a) = 0,\ n \geq 0$).
38. Ні. Наприклад, $X := c,\ L := \{y = (y_0, y_1, ...) \in l_1 \mid y_0 = 0\}$ або $X := (C([0,1]))^*,\ L := \varphi(C([0,1]))$, де $\varphi : C([0,1]) \to (C([0,1]))^{**}$ – оператор канонічного вкладення. **39.** 1) Кожну функцію $x \in C([0,1])$ зобразити у вигляді $x = x_+ - x_-$, де x_+, x_- – невід'ємні неперервні функції на $[0,1]$, довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n - f_1)(x_\pm)$ і застосувати теорему 3.

2) Ні. Розглянути функції $p_n(t) := p_0(2^n t),\ t \in [0,1],\ n \geq 1$, де $p_0(t) := (-1)^k,\ t \in [k, k+1),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 3) Так. **40.** 1),2) Якщо $f \neq 0$, то необхідно й достатньо, щоб послідовність $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ збігалась. **41.** 1) Розглянути випадки $t \in [a, a+\delta)$ і $t \in [a+\delta, b]$. **43.** Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} f$ на c, якщо $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x \in c$, урахувавши тотальність множини $\{e_n : n \geq 0\}$ у c, де $e_0 = (1, 1, ...)$. **44.** Встановити, що $C_n := \sum\limits_{k=0}^{n} c_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$, де $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k,\ n \geq 0$. Для доведення необхідності при фіксованому $B = (B_0, B_1, ...) \in c$ розглянути C_n як функціонали від $a = (a_0, a_1, ...) \in l_1$ і довести їх $*$-слабку збіжність. Для доведення достатності при фіксованій послідовності $\{a_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ розглянути C_n як функціонали від $B \in c$ і скористатись теоремою 1. **45.** Скористатись перетворенням Абеля і задачею 33. **46.** Нехай $\{x_n : n \geq 1\} \subset S(0, c)$ – множина, скрізь щільна в $S(0, c)$, де $c > 0$. Тоді існує функціонал $f_n \in X^*$, для якого $||f_n|| = 1$ та $f(x_n) = ||x_n||,\ n \geq 1$. Далі, користуючись теоремою 4, довести, що $\overline{B}(0, c) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \leq c\}$.

РОЗДІЛ 6

7. Урахувати, що збіжність у скінченновимірному просторі рівносильна покоординатній збіжності (див. задачу 75 з розділу 1). **8.** Якщо $\{e_1, ..., e_m\} \subset X,\ \{g_1, ..., g_n\} \subset Y$ – базиси в X та Y, то $Ax = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk} x_k) g_j,\ x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k e_k$, де $(a_{jk})_{j=1,k=1}^{nm}$ – числова матриця така, що $\{a_{jk} \mid j = 1, ..., n\}$ – координати вектора Ae_k в базисі $\{g_1, ..., g_n\}$. 1) $||A|| = \max\limits_{1\leq k\leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{jk}|$; 2) $||A|| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{jk}|$; 3) $||A|| = \max\{|a_{jk}| \mid 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m\}$; 4) $||A|| = \max\limits_{x_k=\pm 1,\ k=\overline{1,m}} \sum\limits_{j=1}^{n} |\sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk} x_k|$; 5) $||A|| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk}^2}$. **9.** $||A|| = \sup\limits_{n\geq 1} |\alpha_n|$. **10.** 1),2) $||A|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |a(t)|$. **12.** $||A|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. **13.** $||A|| \leq \left(\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. **14.** Для доведення рівності у співвідношенні $||A|| \le \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds$, яке легко отримати, урахувати, що для кожного фіксованого $t \in [a,b]$ функціонал $f_t(x) := (Ax)(t),\ x \in C([a,b])$, є лінійним і неперервним на $C([a,b])$, та скористатись задачею 25.1 розділу 3. **15.** Скористатись теоремою Фубіні та нерівністю Гельдера. **16.** $||A|| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^t |K(t,s)|ds$. Див. вказівку до задачі 14. **17.** 1) $||A|| = 1$; 2) Для доведення замкненості скористатися зображенням $x_n(t) = x_n(a) + \int\limits_a^t x_n'(u)du$ і перейти до границі при $n \to \infty$ (або скористатися теоремою про почленне диференціювання функціонального ряду). Для доведення розривності A розглянути послідовність $\{t^n,\ t\in[0,1] \ :\ n \ge 1\}$. **19.** 1) $||I|| = 1$; 2) $||I|| = (b-a)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. **21.** A^n – інтегральний оператор з ядром K_n, яке визначається індукцією: $K_1(t,s) = K(t,s)$, 1) $K_n(t,s) := \int\limits_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ (t,s) \in [a,b]^2$; 2) $K_n(t,s) := \int\limits_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,\ a \le s \le t \le b,\ n \ge 2$. **22.** $||A|| = \frac{1}{\beta-\alpha}$, якщо $\gamma = \alpha$; $||A|| = \left(\frac{(\alpha-\gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta-\gamma)^{\beta-\gamma}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$, якщо $\gamma < \alpha$. **23.** $||A|| = ||f|| \cdot ||y||$. **24.** $||A|| = ||y|| \cdot ||z||$. **25.** $||A|| = ||p||_X \cdot ||q||_{X^*}$. **26.** Для доведення необхідності врахувати, що оскільки $R(A)$ – скінченновимірний підпростір, то в ньому існує базис $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$. При цьому $\forall x \in X\ \exists! \{f_1(x), ..., f_n(x)\} \subset \mathbf{K}\ :\ Ax = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)y_k$. Лінійність функціоналів f_k випливає з лінійної незалежності елементів $y_1, ..., y_n$, а неперервність є наслідком рівносильності збіжності у скінченновимірному просторі покоординатній збіжності. **28.** $||A|| = \max\limits_{1\le k\le n} |c_k|$. **29.** 1) $||A|| = \frac{1}{\beta+1}$; 2) $||A|| = \frac{1}{2}e^3(1-e^{-2})$; 3) $||A|| = \frac{2}{\pi}$; 4) $||A|| = 2$; 5),7),8) $||A|| = \pi$; 6) $||A|| = \frac{1}{(2\alpha+1)(2\beta+1)}$; 9) $||A|| = 1$. **30.** 1)-6) $||A|| = 1$. **32.** 2) Ні. Нехай $X = C^1([a,b])$ з рівномірною нормою, $Y = C([a,b])$, $(Ax)(t) = x'(t),\ t \in [a,b],\ x \in X$. 3) а) I; б) Нехай $X := Y := l_2,\ Ax := (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$. Тоді $R(A)$ – скрізь щільна в l_2 (бо містить усі фінітні вектори), $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...) \notin R(A)$. **34.** I спосіб. Маємо, що $\forall x \in X\ \exists \{f_k(x)\ :\ 1 \le k \le m\} \subset \mathbf{K}\ :\ Ax = \sum\limits_{k=1}^m f_k(x)y_k$, де $\{y_1, ..., y_m\}$ – базис в $R(A)$. Для доведення неперервності функціоналів $f_1, ..., f_m$ скористатися задачами 26.5 з розділу 4 (переконатись, що у ній неперервність функціоналів не істотна), 39 з розділу 3 і 4 з розділу 1.

II спосіб. Довести бієктивність оператора $A' : X/\mathrm{Ker}\,A \to R(A),\ A = A'B$, де $X/\mathrm{Ker}\,A$ – фактор-простір (див. [5,15,17-19]), $B : X \to X/\mathrm{Ker}\,A$ – оператор, який ставить у відповідність кожному елементу з X клас суміжності, що містить цей елемент. **35.** Див. задачу 5 з розділу 9. **36.** Для доведення достатності встановити, що якщо $B(x_0, r) \subset \{x \in X \mid ||Ax|| < 1\}$ для деяких $x_0 \in X$ та $r > 0$, то $\forall u \in B(0, r)\ :\ ||Au|| = ||Ax_0 + A(u - x_0)|| \le ||Ax_0|| + 1$, звідки вивести обмеженість оператора A. **38.** Скористатись наслідком 3 з теореми Гана – Банаха і задачею 37.3. **39.** 1) $\alpha \ge 0,\ ||A|| = 1$; 2) $0 < \alpha \le 1,\ ||A|| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; 3) $0 < \alpha \le 2\beta + 1,\ ||A|| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Скористатись задачею 32.2 з розділу 5. **41.** Нехай $A = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \mid \alpha_n \in \{0, 1\},\ n \ge 1\}$, $\{e_n : n \ge 1\}$ – ортонормований базис в X, P_α – ортопроектор на з.л.о.$(\{\alpha_n e_n \mid n \ge 1\})$, $\alpha \in A$. Оскільки множина A незліченна і $||P_\alpha - P_\beta|| = 1$ при $\alpha \ne \beta,\ \alpha, \beta \in A$, то $L(X)$ несепарабельний. **42.** X – скінченновимірний. Якщо $\dim X < +\infty$, то $\dim L(X) < +\infty$, отже, простір $\mathcal{L}(X)$ сепарабельний. Якщо X – банахів простір, $\dim X = +\infty$, то за задачею 85 з розділу 1 існує базис Гамеля $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset X$, причому він незліченний. Для кожного $\alpha \in A$ покладемо $A_\alpha x := x_\alpha$, де x_α – коефіцієнт при e_α у розкладі $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\alpha_k} e_{\alpha_k}$. Тоді сім'я операторів $\{A_\alpha : \alpha \in A\} \subset L(X)$ незліченна і $||A_\alpha - A_\beta|| \ge ||(A_\alpha - A_\beta)e_\alpha|| = 1$ при $\alpha \ne \beta,\ \alpha, \beta \in A$. Отже, $L(X)$ несепарабельний. Якщо X неповний ЛНП, то $L(X)$ ізометрично ізоморфний $L(\overline{X})$, де $\overline{X}$ – поповнення X. **43.** 1) Ні. 2) Так. Так. **45.** Поклавши в нерівності з умови $y := Ax$, отримаємо включення $A \in L(H)$. Позначимо $c_A := \sup\limits_{||x||=1,\ ||y||=1} |(Ax, y)|$. Оскільки $|(Ax, y)| \le ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y|| = ||A||,\ x, y \in S(0, 1)$, то $c_A \le ||A||$. Навпаки, $\forall x \in S(0, 1)\ :\ ||Ax||^2 = ||Ax||(Ax, \frac{Ax}{||Ax||}) \le ||Ax|| \cdot c_A$, звідки $||A|| \le c_A$. **46.** 1) За допомогою теореми Фубіні та нерівності Коші – Буняковського довести, що $|(Ax, y)| \le (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} ||x|| \cdot ||y||,\ x, y \in L_2(T, \mu)$, і скористатись задачею 45. **47.** 3) Розв'язок див. [15] (гл. 5, §8). **48.** Нехай $f_y(x) := (Ax, y),\ x, y \in H$. Застосувати до множини функціоналів $\left\{f_y \mid y \in \overline{B}(0, 1)\right\}$ теорему Банаха – Штейнгауза.

РОЗДІЛ 7

4. Рівномірна збіжність в $L(X, \mathbf{K})$ рівносильна збіжності за нормою в X^*, а сильна та слабка – $*$-слабкій збіжності в X^*. **5.** Повторити міркування з доведення теореми 2 розділу 5. **6.** У формулюванні задачі 5 співвідношення $A_n x \to Ax,\ n \to \infty$, в X_2 замінити на $A_n x \xrightarrow{w} Ax,\ n \to \infty$, в X_2. **7.** Далі через A позначена границя послідовності $\{A_n : n \ge 1\}$, якщо вона існує. 1) При $p=1$ не збігається, а при $1<p<+\infty$ – слабко, $A=0$. 2) При $1\le p<+\infty$ – сильно, $A=0$, а при $p=+\infty$ не збігається. 3) Сильно, $A=0$. 4) Сильно, $A=0$. 5) При $p=1$ і $p=+\infty$ не збігається, а при $1<p<+\infty$ – слабко, $A=0$. 6) Сильно, $A=0$. 7) Не збігається. 8) Сильно, $Ax=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_ne_1$. 9) Рівномірно, $Ax=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots)$. 10) Рівномірно, $A=I$. 11) Сильно, $A=I$. 12) Рівномірно, $A=0$. 13) Рівномірно, $Ax=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots)$. 14) Рівномірно, $Ax=(x_1,\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_k}{k},0,0,\ldots)$. **8.** 3),6) Слабко, $A=0$. 11) Збіжності немає. **9.** 1) Рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ збігається. 2) При $1<p\le+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ – обмежена; при $p=1$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. 3) При $1\le p<+\infty$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ обмежена, рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. 4) При $1\le p<+\infty$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ збігається, рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. 5) При $1<p\le+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ обмежена; при $p=1$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$. 6) При $p=1$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$; при $1<p<+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ обмежена; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ – обмежена. 7) При $1\le p<+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ обмежена; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. 8) Рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ збігається. 9) При $1\le p<+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$, сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ збігається; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. 10) При $1\le p<+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, сильно $\Leftrightarrow$ слабко $\Leftrightarrow$ $\{\alpha_n:n\ge1\}$ збігається; при $p=+\infty$ рівномірно $\Leftrightarrow$ сильно $\Leftrightarrow$ $\alpha_n=0,\ n\ge1$, слабко $\Leftrightarrow$ $\alpha_n\to0,\ n\to\infty$. **10.** Далі через A позначається границя послідовності $\{A_n:n\ge1\}$, якщо вона існує. 1),6),8),13),16)-18),20) Рівномірно, $A=0$. 2)-5),7),19) Збіжності немає. 9) Рівномірно, $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)\sin s ds$. 10),21) Сильно, $A=I$. 11),15) Слабко, $A=0$. 12) Сильно, $(Ax)(t)=x(0)t$. 14) Рівномірно, $(Ax)(t)=\int\limits_0^{\frac12}tx(s)ds$. **11.** 1) При $1<p<+\infty$ слабко, $A=0$; при $p=1$ не збігається. 2),3),9) Сильно, $A=0$. 4) Рівномірно, $A=0$. 5)-8) Слабко, $A=0$. 10) Сильно, $A=I$. 11) При

$p = 1$ сильно, а при $1 < p < +\infty$ рівномірно, $A = 0$. **12.** Граничний оператор – це оператор множення на деяку функцію $p \in C([a, b])$. 1),2) $p_n \to p,\ n \to \infty$, в $C([a, b])$; 3) $p_n \xrightarrow{w} p,\ n \to \infty$, в $C([a, b])$ (тобто послідовність $\{p_n : n \geq 1\}$ обмежена в $C([a, b])$ і поточково збіжна до p). **13.** 2) Необхідно й достатньо, щоб X_2 був повний відносно слабкої збіжності. **16.** 1) Урахувати, що $S_n x$ – це часткова сума ряду Фур'є функції x. 2) Випливає з оцінок $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\frac{\pi k}{2n+1}}^{\frac{\pi(k+1)}{2n+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin u|}{u} \to +\infty,\ n \to \infty$. 3) Застосувати теорему Банаха – Штейнгауза, довівши, що $||S_n|| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$ у $\tilde{C}$ і в $L_1([-\pi, \pi])$. 4) Для довільного фіксованого $t \in [-\pi, \pi]$ розглянути послідовність функціоналів $f_n(x) := (S_n x)(t)$ і врахувати, що $||f_n|| = ||S_n||$. 5) Для послідовності функціоналів $f_n(y) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (S_n x)(t) y(t) dt = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \alpha_k + b_k \beta_k),\ y \in L_1([-\pi, \pi]),\ n \geq 1$, встановити, що $||f_n|| = \frac{1}{\pi} ||S_n x||_\infty,\ n \geq 1$. Далі скористатись п. 3) і теоремою Банаха – Штейнгауза. **17.** Встановити, що $\forall y_0 \in X\, \forall x \in X\, \exists C_x > 0\, \forall y \in \overline{B}(y_0, 1) \ :\ |B(x, y)| \leq C_x$ і застосувати теорему Банаха – Штейнгауза. **18.** Для доведення розривності B на $X \times X$ розглянути послідовність $\{p_n : n \geq 1\} \subset X$, що збігається в X до функції $(0, 1] \ni t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$, і, користуючись лемою Фату, отримати рівність $\varliminf\limits_{n \to \infty} B(p_n, p_n) = +\infty$. **19.** 3) $X := l_2,\ B_n x := (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_1, x_2, ...),\ A_n x := (x_n, x_{n+1}, ...),\ x \in l_2,\ n \geq 1$. **20.** 4) Див. розв'язок задачі 19.3. **21.** Скористатись критерієм Гаусдорфа та теоремою Банаха – Штейнгауза. **22.** Встановити, що $\forall x, y \in H\, \exists \lim\limits_{n \to \infty} (A_n x, y)$. Користуючись слабкою повнотою H, отримати, що $\forall x \in H\, \exists Ax \in H \ :\ A_n x \xrightarrow{w} Ax$. Далі довести включення $A \in L(H)$. **23.** Скористатись критерієм Коші. Нерівність $||\varphi(A)|| \leq \varphi(||A||)$ виконується, якщо, наприклад, $\lambda_k \geq 0,\ k \geq 0$. **26.** Необхідність. Якщо $A_n \xrightarrow{s} A$, то $R(A) \subset \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R(A_n)}$. Урахувати, що скінченновимірний простір сепарабельний. Достатність. Якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в H, то для $A \in L(H)$ розглянути $A_n x := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k A e_k$, де $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H,\ n \geq 1$. **27.** 2) Спочатку довести рівність для функцій з T_n, потім – для $\sin mt, \cos mt$ при $m > n$. Далі врахувати, що при фіксованому s права й ліва частини рівності є лінійними неперервними функціоналами на $\tilde{C}$, які рівні на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. 3) Скористатись п. 2) і оцінками з розв'язку задачі 16. **28.** 1) Див. вказівку до задачі 45.1 розділу 3. 2) Скористатись або задачею 41.1 з розділу 5 і монотонністю невід'ємного оператора, або методом від супротивного, теоремою Больцано – Вейєрштрасса і задачею 41.2 розділу 5. Відповідь на питання позитивна. **29.** 1) Можна скористатись задачею 28 або співвідношенням $||B_n x - K_n x|| \to 0,\ n \to \infty,\ x \in C([0,1])$, де $B_n x$ – многочлен Бернштейна. 2) Скористатись п. 1 і задачею 5. $K_n \overset{s}{\not\to} I$ в $L_\infty([0,1])$, бо інакше $L_\infty([0,1])$ був би сепарабельним. **30.** Для скрізь щільної в H послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ діагональним методом побудувати підпослідовність $\{A_{n_k} : k \geq 1\}$, слабко збіжну на кожному x_n. Далі, користуючись слабкою повнотою гільбертового простору, показати, що $\forall x \in H\, \exists y \in H : A_{n_k} x \xrightarrow{w} y$, покласти $Ax := y$ і довести, що $A \in L(H)$.

РОЗДІЛ 8

4. Скористатись рівністю $\dim \operatorname{Ker} A + \dim R(A) = m$, відомою з лінійної алгебри, і задачею 7 з розділу 6. **5.** 1) Див. задачу 1.2. 2) Урахувати, що $R(A)$ – скрізь щільна в l_2 (бо містить усі елементи виду $x = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$) і $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...) \notin R(A)$. **7.** 1) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1}$. Скористатись теоремою 4 і задачею 13. **8.** Необхідність випливає із задачі 13, а для доведення достатності перевірити умови теореми 2, урахувавши, що $||Ax|| \geq \frac{||A^2x||}{||A||} \geq \frac{m}{||A||}||x||,\ x \in X$, для деякого $m > 0$. **11.** $(A_i^{-1}y)(t) = y'(t),\ t \in [0,1],\ y \in X_i,\ i = 1, 2$. **12.** Скористатись методом розв'язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. 1) $(A^{-1}y)(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}\int\limits_0^t e^{-\frac{3}{2}s}y(s)ds$; 2) $(A^{-1}y)(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\int\limits_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}y(s)ds$; 3) $(A^{-1}y)(t) = e^{-e^t}\int\limits_0^t e^{e^s}y(s)ds$; 4) $(A^{-1}y)(t) =$

$e^{-\frac{2}{3}t^3}\int\limits_0^t e^{\frac{2}{3}s^3}y(s)ds$; 5) $(A^{-1}y)(t)=e^{-2te^{-t}-2e^{-t}}\int\limits_0^t e^{2se^{-s}+2e^{-s}-s}y(s)ds$; 6) $(A^{-1}y)(t) = e^{-t}(t+1)\int\limits_0^t \frac{e^s}{(s+1)^2}y(s)ds$; 7) $(A^{-1}y)(t) = e^{-\int\limits_0^t \alpha(s)ds}\int\limits_0^t e^{\int\limits_0^s \alpha(u)du}y(s)ds,\ t\in[0,1],\ y\in C([0,1])$. **13.** Перевірити, що $(AB)C = C(AB) = I$, де $C := B^{-1}A^{-1}$, і застосувати теорему 3. **14.** $((AB)^{-1}y)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+1}$, $((BA)^{-1}y)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{t+1}$, $t\in[0,1],\ y\in C([0,1])$. **15.** Урахувати, що $B=(BA)A^{-1}$. **16.** 1) Довести, що $(I-BA)C = C(I-BA)=I$, де $C := I + B(I-AB)^{-1}A$. 2) Розглянути $Ax := (x_2,x_3,...)$, $Bx := (0,x_1,x_2,...)$, $x\in l_2$. 3) Так. Довести, що $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = \{0\}$. **17.** Скористатись методом від супротивного. **19.** 1) Не існує для $i=0$, існує для $i=1,2$. 2) Не для всіх $i=0,1,2$. **20.** $(B^{-1}y)(t) = y(\sqrt[3]{t}),\ t\in[-1,1],\ y\in C([-1,1])$. **23.** 1) Так, $A^{-1}=A$. 2) Так, $A^{-1}y = (y_1-y_2-y_3, y_2+y_3, y_3, y_4, ...),\ y\in l_2$. 3)-5) Ні. 6) Так, $A^{-1}y = (y_1+y_2, y_2, y_3, ...),\ y\in l_2$. 7) Так, $A^{-1}y = \left(\frac{1}{2}(y_2+y_3), \frac{1}{2}(y_1-y_2), \frac{1}{2}(y_1-y_3), y_4, y_5, ...\right),\ y\in l_2$. **24.** $R(A)\subset$л.о.$(\{x_1,x_2\})$, де $x_k(t)=t^k,\ t\in[0,1],\ k=1,2$. **25.** Ні. **26.** Застосувати теорему 1 до тотожного оператора. Повнота істотна (див. задачу 36 з розділу 1).

РОЗДІЛ 9

6. 5) Випливає з рівностей $(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I$ та $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I$. **8.** 2) Довести, що при фіксованому $x\in H$ функціонал $f(y) := \overline{(Ax,y)},\ y\in H$, є лінійним і неперервним, та застосувати теорему Рісса. **10.** Скористатись задачею 7. **11.** 1) Скористатись задачею 7. 2) $H=\mathbb{R}^2,\ A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **12.** 1) Скористатись задачею 10. 3) $H = \mathbb{C},\ Az := iz,\ z\in\mathbb{C}$. 10) $m := -||A||,\ M := ||A||$. 11) $H := \mathbb{R}^2,\ A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 15) Довести, що коли $y_n\in R(A),\ n\geq 1$, і $y_n\to y,\ n\to\infty$, то $Ay=y$. **13.** 1) Скористатись задачею 14 з розділу 2. 2) Довести, що коли $\{e_1,...,e_n\}\subset H$ – ортонормований базис в H, A – ізометричний оператор, то $\{Ae_k \mid 1\leq k\leq n\}$ – ортонормована система в H, а отже, є базисом. 5) Розглянути оператор із задачі 30.1 розділу 6. **14.** 4) $m := 2, \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **15.** 1) $A^*y = (\overline{\alpha_1}y_1, \overline{\alpha_2}y_2, ...)$; 2) $A^*y =$

$(0, y_1, y_2, ...)$; 3),6),9),10),12),13),15),16) $A^* = A$; 4) $A^*y = (y_j, 0, 0, ...)$; 5) $A^*y = (y_1 + ... + y_j, 0, 0, ...)$; 7) $A^*y = (\underbrace{0, ..., 0}_{j-1}, \overline{\alpha_j}y_1, \overline{\alpha_{j+1}}y_2, ...)$; 8) $A^*y = (\overline{\alpha_1}y_3, \overline{\alpha_2}y_4, ...)$; 11) $A^*y = (3y_1, -2y_1 + y_2, y_3, y_4, ...)$; 14) $(A^*y)(t) = \overline{a(t-s)}y(t - s)$; 17) $(A^*y)(t) = \int\limits_{\sqrt{t}}^{1} \tau^3 y(\tau)d\tau$; 18) $(A^*y)(t) = \int\limits_0^1 t^3\tau^2 x(\tau)d\tau$; 19) $(A^*y)(t) = \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha-1}}y(t^{\frac{1}{\alpha}})$; 20) $A^*u = \overline{(z, u)}y$. **16.** 1) $\alpha_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1$; 2) $\alpha_n \in \mathbb{C}$ – довільне, $n \geq 1$; 3),4) $|\alpha_n| = 1,\ n \geq 1$; 5) $\alpha_n \in \{0, 1\},\ n \geq 1$; 6) $\alpha_n \neq 0,\ n \geq 1$. **18.** 1) $(A_s^{-1}x)(t) = (A_s^*x)(t) = x(t-s),\ t \in \mathbb{R},\ x \in L_2(\mathbb{R})$. **19.** Тоді й тільки тоді, коли підпростір збігається з усім простором. **20.** 1) $Px := \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n,\ x \in H$. **21.** 1) $H = \mathbb{C},\ Az = iz,\ z \in \mathbb{C}$; 2),9) $H = \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3)-5) $H = \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6),7) $H = l_2,\ Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...),\ x \in l_2$; 8) $H = \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 10) $H = \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 11) $H = L_2(\mathbb{R}),\ (Ax)(t) = x(-t),\ (Bx)(t) = x(1-t),\ t \in \mathbb{R},\ x \in H$. **22.** 1) Розглянути функцію $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (A(x+\lambda y), x+\lambda y)$. **23.** 1) Ні. Нехай $H = \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ x = (-1, 2 + \sqrt{3}),\ y = (1, -2 + \sqrt{3})$. Тоді $x, y \in G$, але $x + y \notin G$. 2) Так. Для доведення того, що $x + y \in G$, коли $x, y \in G$, встановити, що $\mathrm{Re}(Ax, y) = 0$, урахувавши нерівність $(A(x \pm y), x \pm y) \geq 0$. **24.** Встановити, що $||A^nx||^2 \leq ||A^{n-1}x|| \cdot ||A^{n+1}x||,\ x \in H,\ n \geq 1$. **27.** Скористатись задачею 17 розділу 7 і теоремою 1. **29.** Для доведення достатності скористатись задачею 11.1 та самоспряженістю оператора $A^*A - AA^*$. **30.** 2) Довести, що $||A^*Ax||^2 = ||A^2x||^2,\ x \in H$, і скористатись задачею 25. 4) Скористатись задачею 6.5. **31.** 3) $\Rightarrow$ 4) Випливає із задач 12.15 і 30.1. 4) $\Rightarrow$ 5) Оскільки $\forall x \in H\ :\ Px - P^2x = 0$, то $(I - P)x \in \mathrm{Ker}\, P$, тому $(Px, x) = (Px, Px + (I - P)x) = (Px, Px)$. 5) $\Rightarrow$ 1) Див. доведення достатності в задачі 5.2. **32.** 5) $P_1AP_1 = AP_1$; 6) $AP_1 = P_1A$. **33.** 3) $H := l_2,\ A_nx := (x_n, x_{n+1}, ...),\ x \in l_2$. **34.** 5),6) $H := l_2(\mathbb{Z}) := \left\{x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},\ \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 < +\infty\right\}$,

$l_2(\mathbb{Z}) \ni x \mapsto A_n x := y$, де $y_k = x_{k-n},\ k \in \mathbb{Z}$. **35.** Скористатись задачею 22.2. **36.** З умови $A_n \geq A_{n+1} \geq 0$ вивести, що $\forall x \in H\ :\ \exists \lim\limits_{n\to\infty}(A_n x, x)$, звідки, урахувавши поляризаційну тотожність, отримати, що $\forall x, y \in H\ :\ \exists \lim\limits_{n\to\infty}(A_n x, y)$. Далі скористатись задачами 22 з розділу 7, 34.2 та 35. **37.** 1) Скористатись задачею 5 з розділу 7, поклавши $M := \left\{ x + y \mid x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n \right)^{\perp},\ y \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n \right\}$ і врахувавши, що $H_{n+1} \supset H_n,\ n \geq 1$ (задача 32.4). 2) Скористатись п.1, урахувавши, що $I - P_n$ – ортопроектор на $H_n^{\perp},\ n \geq 1$, і з.л.о.$\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n^{\perp} \right) = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n \right)^{\perp}$. 3) Застосувати п. 1 до ортопроекторів $P_n' := \sum\limits_{k=1}^{n} P_k$. 5) Істотна. Розглянути послідовність $P_n x := (x, y_n) y_n,\ x \in H,\ n \geq 1$, де $\{y, y_n\ :\ n \geq 1\} \subset H,\ ||y_n|| = 1,\ y_n \neq y,\ n \geq 1,\ y_n \to y,\ n \to \infty$. 6) $H = l_2,\ P_n x := (x, y_n) y_n$, де $y_n := (\frac{1}{2}, 0, ..., 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, ...),\ n \geq 1$. 7) Скористатись задачею 34.4. **38.** Розглянути оператор $Bx := (x, g) f,\ x \in H$, де $f, g \in H$ – довільні фіксовані елементи. **39.** Скористатись теоремою 2 з розділу 8. Для доведення рівності $R(A) = H$ встановити, що $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $\overline{R(A)} = R(A)$ і не існує такого $y \neq 0$, що $y \perp R(A)$. **40.** 1) Нехай $\exists A^{-1} \in L(H)$, але $\forall n \geq 1 \exists u_n \in H\ :\ 0 \leq (Au_n, u_n) < \frac{1}{n}||u_n||^2$. Тоді для $x_n := \frac{u_n}{||u_n||},\ n \geq 1$, за задачею 22.2 маємо, що $||Ax_n||^2 \leq \frac{||A||}{n},\ n \geq 1$, тобто $y_n := Ax_n \to 0,\ n \to \infty$, але $A^{-1} y_n = x_n \not\to 0,\ n \to \infty$. Суперечність. Для доведення достатності скористатися задачею 39. 2) Скористатись п. 1. 3) Скористатись п. 1 і нерівністю $mI \leq A \leq MI$. 4) Довести, що $||(A - \lambda I)x||^2 = ||(A - \alpha I)x||^2 + |\beta|^2 ||x||^2,\ x \in H$. 5) Скористатись п. 4 і задачею 39. **41.** Скористатись теоремою 2 з розділу 8, задачами 6.5, 28 та задачею 33 з розділу 6. **42.** 1) Див. розв'язок задачі 45 з розділу 6. 2) Покладемо $c_A := \sup\limits_{x \in S(0,1)} |(Ax, x)|$. Легко бачити, що $c_A \leq ||A||$. Навпаки, оскільки $|(Ay, y)| \leq c_A ||y||^2,\ y \in H$, то для кожного $x \in H,\ x \neq 0$, поклавши $\lambda := \left(\frac{||Ax||}{||x||} \right)^{\frac{1}{2}},\ u := \frac{1}{\lambda} Ax$, отримаємо, користуючись поляризаційною тотожністю та рівністю паралелограма, що $||Ax||^2 = (A(\lambda x), u) = \frac{1}{4}((A(\lambda x + u), \lambda x + u) - (A(\lambda x - u), \lambda x - u)) \leq \frac{1}{4} c_A (||\lambda x + u||^2 + ||\lambda x - u||^2) = \frac{1}{2} c_A (||\lambda x||^2 + ||u||^2) = c_A ||x|| \cdot ||Ax||$, звідки $||Ax|| \leq c_A ||x||$, отже, $||A|| \leq c_A$. **43.** Скористатись задачами 25 з розділу 7 та 1.3. **44.** $\alpha_k \in \mathbb{R},\ \gamma_k = \overline{\beta_k},\ k \geq 1$. **50.** 1) Для доведення другої нерівності скористатись задачею 22.2. 2) Скористатись методом математичної індукції. 3) Скористатись аналогом задачі 36 для неспадної послідовності самоспряжених операторів з рівномірно обмеженими нормами. 4) $B := \sqrt{||A||}(I - B_0)$. 6) Нехай також $C \in L(H),\ C \geq 0\ :\ C^2 = A$. Покладемо $y := (B - C)x,\ x \in H$. Для вектора y послідовно встановити, що $(B + C)y = 0,\ (By, y) = (Cy, y) = 0,\ By = Cy,\ ||y|| = 0$. **51.** 1) $\sqrt{A}x = (\sqrt{\alpha_1}x_1, \sqrt{\alpha_2}x_2, ...)$. 3) $\sqrt{A} = A$. 9) $\sqrt{A}x = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_3, 0, ...)$. 12),15) $\sqrt{A} = A$. 13) $(\sqrt{A}x)(t) = \sqrt{t}x(t)$. 16) $(\sqrt{A}x)(t) = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}\int\limits_0^1 e^{t+s}x(s)ds$.

52. 1) Припустивши, що такий оператор B існує, послідовно встановити рівності $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A =$л.о.$(\{e_1\}),\ B^3e_2 = 0,\ Be_2 = \lambda e_1$, звідки отримати суперечність. 2) Якщо $B^2 = A$, то $(B^*)^2 = A^*$, де A^* – оператор з п.1. **53.** Скористатись задачею 50. **54.** Скористатись задачею 1.3 або 42.2. **56.** 1),2) Ні. $H = \mathbb{C}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 3),4) Так. **57.** $B := \sqrt{AA^*}$. Для доведення єдиності скористатися задачами 11.1 і 50.6. **58.** За допомогою теореми 2 з розділу 8 довести, що $\exists(\sqrt{A})^{-1} =: A^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H)$, отже, $\exists A^{-1} = ((\sqrt{A})^{-1})^2 \in \mathcal{L}(H)$, причому $A^{-1} \leq I$. Далі застосувати цей результат до оператора $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$, попередньо встановивши, що $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \geq I$. Далі скористатись задачею 12.14. **62.** 2) Необхідно й достатньо, щоб: а) $\dim H_1^{\perp} \leq \dim H_2^{\perp}$; б) $\dim H_1^{\perp} = \dim H_2^{\perp}$. **63.** 1) Урахувати задачі 28 і 59. Потрібно довести коректність означення оператора U (якщо $|A|x = |A|y$, то $Ax = Ay$), те, що U – часткова ізометрія, і рівність $A = U|A|$. 2) Записати полярний розклад для оператора A^*. **64.** 1) $Bx = |A|x = (|\alpha_1|x_1, |\alpha_2|x_2, ...)$, $Ux = (x_1 \operatorname{sign}\alpha_1, x_2 \operatorname{sign}\alpha_2, ...),\ x \in l_2$. 2) $|A|$ – ортопроектор на з.л.о.$(\{e_n\ :\ n \geq 2\}),\ U = A$. Полярні розклади: $A = A|A|$ і $A = AI$. 3) $A = A \cdot A = IA = AI$. **65.** 1) Встановити, що $U\ :\ \overline{R(B)} \to H$ – ізометричний оператор, і врахувати, що $(A^*Ax, y) = (Ax, Ax) = (UBx, UBy) = (Bx, By) = (B^2x, y),\ x, y \in H$. Розглянути оператор з задачі 64.3. 2) Необхідно й достатньо, щоб: а) $\dim\operatorname{Ker} A \leq \dim\operatorname{Ker} A^*$; б) $\dim\operatorname{Ker} A = \dim\operatorname{Ker} A^*$; в) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$; г) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^* = \{0\}$. 4) Скористатись п.2 і задачами 30.1 та 50.5. 5) Установити, що $A^*C^{-1} = C^{-1}A^*$, і вивести звідси, що $A^*C = CA^*$. Далі скористатись задачею 50.5. Рівність $CU = UC$ довести окремо на $R(|A|)$ і $\operatorname{Ker} A$. 6) Ні. Для оператора A із задачі 64.2 розглянути $C := A,\ B := |A|$. **66.** 1) Скористатись задачами 4.2, 6 і 40.5, а також тим, що якщо $AB = BA$ і $\exists B^{-1} \in L(H)$, то $AB^{-1} = B^{-1}A$. 2) Враховуючи задачу 4.2, маємо $(A^* + iI)^{-1}(A - iI) = U^* = U^{-1} = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, звідки $(A^* - iI)(A + iI) = (A^* + iI)(A - iI)$, отже, $A = A^*$. **67.** Суперечності немає, бо вигляд спряженого оператора залежить від способу реалізації спряженого простору, тобто від того, за допомогою якого ізоморфізму описується простір, ізоморфний до даного спряженого простору. У задачі 2 цей ізоморфізм встановлюється теоремою 5 розділу 3, а в задачі 66 – теоремою 3 цього ж розділу. **68.** Формули залишаються ті самі, але, по-перше, оператор A' діє у випадках 1)-11) з l_q в l_q, а у випадках 12)-19) – з L_q в L_q, де q – спряжений індекс до p, і, по-друге, у випадках 1),7),8) слід замінити $\overline{\alpha_k}$ на α_k, а у випадку 14) $\overline{a(t-s)}$ на $a(t-s)$. **69.** Формули залишаються ті самі, але: 1) $A' : l_1 \to l_1$; 2) $A' : l_2 \to l_\infty$; 3) $A' : l_1 \to l_\infty$. **70.** 1) $A' : l_2 \to l_\infty,\ Ax = x,\ x \in l_2$. 2) $A' : BV_0([0,1]) \to BV_0([0,2]),\ (A'g)(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0,1], \\ g(1), & t \in (1,2]; \end{cases}$ 3) $A' : L_q([0,1]) \to L_q([0,2]),\ (A'y)(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [0,1], \\ 0, & t \in (1,2]; \end{cases}$ 4) $A' : BV_0([0,1]) \to BV_0([0,1]),\ (A'g)(t) = \int\limits_0^t a(u)dg(u),\ t \in [0,1],\ g \in BV_0([0,1])$; 5) $A' : BV_0([0,1]) \to BV_0([0,1]),\ (A'g)(t) = \int\limits_0^t (g(1) - g(u))du,\ t \in [0,1],\ g \in BV_0([0,1])$; 6) $A' : Y^* \to X^*,\ A'g = g(y_0)f_0,\ g \in Y^*$.

РОЗДІЛ 10

5. 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** Скористатись рівністю $R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$ і теоремою 4 з розділу 8. **7.** Показати, що якщо $B \in \mathcal{L}(X),\ \exists B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ і $AB = BA$, то $AB^{-1} = B^{-1}A$. **8.** 1) $\sigma_p(A) = \{a_n : n \geq 1\}$; 2) $\sigma(A) = \overline{\{a_n : n \geq 1\}},\ R_\lambda(A)y = \left\{\frac{1}{a_n - \lambda}y_n : n \geq 1\right\}$, $y \in l_p$; 3) $A^k x = \left\{a_n^k x_n : n \geq 1\right\},\ r(A) = \sup\limits_{n \geq 1}|a_n|$; 4) $\sigma_r(A) = \varnothing,\ \sigma_c(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_p(A)$. **9.** 1) $\sigma_p(A) = \sigma(A) = \{1\},\ \sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \varnothing,\ r(A) = 1,\ R_\lambda(A)y = (\frac{y_1}{1-\lambda} - \frac{y_2}{(1-\lambda)^2}, \frac{y_2}{1-\lambda}, \frac{y_3}{1-\lambda}, ...),\ y \in l_2$. 2) $\sigma_p(A) = \sigma(A) = \{1, \lambda_1, \lambda_2\}$, де $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma})$, $\sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \varnothing,\ r(A) = \max\{1, |\lambda_1|, |\lambda_2|\},\ R_\lambda(A)y = \left(\frac{(\alpha-\lambda)y_1 - \beta y_2}{(\alpha-\lambda)(\delta-\lambda) - \beta\gamma}, \frac{(\alpha-\lambda)y_2 - \gamma y_1}{(\alpha-\lambda)(\delta-\lambda) - \beta\gamma}, \frac{y_3}{1-\lambda}, \frac{y_4}{1-\lambda}, ...\right),\ y \in l_2$. 3) $\sigma_p(A) =$

$\sigma(A)=\{-2,1,1\pm i\sqrt{3}\},\ \sigma_r(A)=\sigma_c(A)=\varnothing,\ r(A)=2,\ R_\lambda(A)y=\left(\frac{8y_2+2\lambda y_3-\lambda^2 y_1}{\lambda^3+8},\frac{2y_3-\lambda y_1-\lambda^2 y_2}{\lambda^3+8},\frac{-\lambda^2 y_3-4y_1-4\lambda y_2}{\lambda^3+8},\frac{y_4}{1-\lambda},\frac{y_5}{1-\lambda},\ldots\right),\ y\in l_2;$ 4) $\sigma_p(A)=\sigma(A)=\{0,1\},\ \sigma_r(A)=\sigma_c(A)=\varnothing,\ r(A)=1,\ R_\lambda(A)y=(\frac{y_1}{1-\lambda},\ldots,\frac{y_k}{1-\lambda},-\frac{y_{k+1}}{\lambda},-\frac{y_{k+2}}{\lambda},\ldots),\ y\in l_2;$ 5) $\sigma_p(A)=\{\lambda\mid|\lambda|<1\}$, $\sigma(A)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$, $\sigma_r(A)=\varnothing$, $\sigma_c(A)=\{\lambda\mid|\lambda|=1\}$, $r(A)=1,\ R_\lambda(A)y=\left\{-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{y_{2k+n}}{\lambda^{k+1}}\ :\ n\ge 1\right\},\ y\in l_2;$ 6) $\sigma_p(A)=\sigma(A)=\{0\},\ \sigma_r(A)=\sigma_c(A)=\varnothing,\ r(A)=0,\ R_\lambda(A)y=(-\frac{y_1}{\lambda},-\frac{y_1}{\lambda^2}-\frac{y_2}{\lambda},-\frac{y_1}{\lambda^3}-\frac{y_2}{\lambda^2}-\frac{y_3}{\lambda},-\frac{y_4}{\lambda},-\frac{y_5}{\lambda},\ldots),\ y\in l_2;$ 7) $\sigma_p(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$, $\sigma_r(A)=\{\lambda\mid|\lambda|<1\}$, $\sigma_c(A)=\{\lambda\mid|\lambda|=1\}$, $r(A)=1,\ R_\lambda(A)y=x$, де $x_{2n-1}=-\frac{y_{2n-1}}{\lambda}-\frac{y_{2n-3}}{\lambda^2}-\ldots-\frac{y_1}{\lambda^n},\ x_{2n}=-\frac{y_{2n}}{\lambda}-\frac{y_{2n-2}}{\lambda^2}-\ldots-\frac{y^2}{\lambda^n},\ n\ge 1,\ y\in l_2.$ **10.** Якщо $1\le p<+\infty$, то відповідь така ж, як і в задачі 3. Якщо $p=+\infty$, то $\sigma_p(A)=\sigma(A)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$, $\sigma_c(A)=\sigma_r(A)=\varnothing,\ \sigma_p(B)=\varnothing,\ \sigma(B)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$, $\sigma_r(B)=\sigma(B)$, $\sigma_c(B)=\varnothing$. **11.** Якщо $p=+\infty$, то: 5) $\sigma_p(A)=\sigma(A)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$, $\sigma_c(A)=\sigma_r(A)=\varnothing$; 7) $\sigma_p(A)=\sigma_c(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\sigma_r(A)=\{\lambda\mid|\lambda|\le 1\}$. В інших випадках відповідь така ж, як і в задачі 9. **12.** 1) $\sigma_p(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\sigma_r(A)=[a,b],\ \sigma_c(A)=\varnothing,\ (R_\lambda(A)y)(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda},\ t\in[a,b],\ y\in C([a,b])$. 2) $\sigma_p(A)=\sigma_r(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\sigma_c(A)=[e^a,e^b],\ (R_\lambda(A)y)(t)=\frac{y(t)}{e^t-\lambda},\ t\in[a,b],\ y\in L_2([a,b])$. 3) $\sigma_p(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\sigma_r(A)=a([0,1]),\ \sigma_c(A)=\varnothing,\ (R_\lambda(A)y)(t)=\frac{y(t)}{a(t)-\lambda},\ t\in[0,1],\ y\in C([0,1])$. 4) $\sigma_p(A)=\varnothing,\ \sigma(A)=\sigma_c(A)=a([0,1]),\ \sigma_r(A)=\varnothing,\ (R_\lambda(A)y)(t)=\frac{y(t)}{a(t)-\lambda},\ t\in[0,1],\ y\in L_2([0,1])$. **13.** $\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\mu(\{t\in T\mid a(t)=\lambda\})>0\}$. **14.** Скористатись рівністю $A^{-1}-\mu I=-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A-\frac{1}{\mu}I)^{-1}$ і задачею 15 з розділу 8. **15.** 2) Включення $\sigma(A^2)\subset\left\{\lambda^2\mid\lambda\in\sigma(A)\right\}$ випливає з рівності $A^2-\lambda^2 I=(A-\lambda I)(A+\lambda I)$, а протилежне включення – з рівності $B(A-\lambda I)=(A-\lambda I)B=I$, де $B=(A+\lambda I)(A^2-\lambda^2 I)^{-1}$. 3),4) Розклавши відповідний многочлен на множники, повторити міркування п. 2. **16.** Так. Обидва твердження випливають із задачі 15.4. **17.** Скористатись задачею 15.4. 1) $A=0$; 2) $A=I$; 3) $X=\mathbb{C}^2,\ A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. **18.** $\sigma(A)=\sigma(B)=\{0,1\}$. **19.** Див. задачу 3. **20.** 1) Скористатись задачею 1.3 з розділу 9 і теоремою 2; випливає також із задач 40.3 і 42.2 розділу 9; 2) Скористатись задачею 6 з розділу 9; 3) Випливає з п.2 або із задачі 40.5 розділу 9; 4) Випливає із задачі 40.3 розділу 9. **21.** Розглянути оператор із задачі 1. **22.** Скористатись рівністю $U-\lambda I=U^{-1}(I-\lambda U)=-\lambda(I-\frac{1}{\lambda}U)$

і теоремою 4 з розділу 8. **23.** Нехай $\lambda \notin \{0,1\}$, $(P-\lambda I)x = y$. Оскільки $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, де $x_1, y_1 \in R(P)$, $x_2, y_2 \in (R(P))^{\perp}$, то $x_1 - \lambda x_1 - \lambda x_2 = y_1 + y_2$, звідки $x_1 = \frac{y_1}{1-\lambda}$, $x_2 = -\frac{1}{\lambda} y_2$. **26.** $\sigma_p(A) = \sigma(A) = \{0, (z,y)\}$, якщо $\dim H > 1$; $\sigma_p(A) = \sigma(A) = \{(z,y)\}$, якщо $\dim H = 1$; $r(A) = |(z,y)|$, $A^n x = (x,y)(z,y)^{n-1} z$; $R_\lambda(A)x = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(x,y)z}{(z,y)-\lambda} - x\right)$, якщо $\dim H > 1$, $R_\lambda(A)x = \frac{x}{(z,y)}$, якщо $\dim H = 1$, $x \in H$. **27.** Див. задачу 4. Для доведення рівності $\sigma_p(A) = \varnothing$ врахувати, що якщо $\lambda \in \sigma_p(A)$ і x – відповідний власний вектор, то $|\lambda| = 1$ і $|x|$ – періодична функція. **28.** 1) $\sigma(A) = \{0,1\}$, $r(A) = 1$; 2) $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{4}\}$, $r(A) = \frac{1}{4}$; 3) $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{5}\}$, $r(A) = \frac{1}{5}$; 4) $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{\alpha+\beta+1}\}$, $r(A) = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$; 5) $\sigma(A) = [1,2]$, $r(A) = 2$; 6),7) $\sigma(A) = \{0,1\}$, $r(A) = 1$; 8) $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{2}\ln 2\}$, $r(A) = \frac{1}{2}\ln 2$. **29.** 1) $\sigma(A) = \{0\}$, $(R_\lambda(A)y)(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t) - \frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{1}{\lambda}t} \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\lambda}s} y(s)ds$, $t \in [0,1]$, $y \in L_2([0,1])$; 2) $((A + A^*)y)(t) = \int\limits_0^1 y(s)ds$, $t \in [0,1]$, $y \in L_2([0,1])$. **30.** 1) $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{\alpha+1}\}$, $r(A) = \frac{1}{\alpha+1}$; 9) $\sigma(A) = \{0,1\}$, $r(A) = 1$; 10)$\sigma(A) = \{0\}$, $r(A) = 0$. Відповіді до задач 2)-8) такі ж, як до відповідних пп. 1-5,7,8 задачі 28. **31.** Скористатись задачею 6 з розділу 6 і теоремою 2. **32.** 1) Скористатися нерівністю $||(AB)^n|| \le ||A^n|| \cdot ||B^n||$. 2) Оскільки $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ : \ ||A^n||^{\frac{1}{n}} < r(A) + \varepsilon$, $||B^n||^{\frac{1}{n}} < r(B) + \varepsilon$, тому $\forall n > 2N \ : \ ||(A+B)^n|| \le \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k ||A^k|| \cdot ||B^{n-k}|| \le (r(A)+r(B)+2\varepsilon)^n + \sum\limits_{k=0}^{N} C_n^k ||A^k|| \cdot ||B^{n-k}|| + \sum\limits_{k=n-N}^{n} C_n^k ||A^k|| \cdot ||B^{n-k}|| \le (r(A)+r(B)+2\varepsilon)^n + \sum\limits_{k=0}^{N} C_n^k ||A^k|| (r(B)+\varepsilon)^{n-k} + \sum\limits_{k=n-N}^{n} C_n^k (r(A) + \varepsilon)^k ||B^{n-k}||$, звідки $\frac{||(A+B)^n||}{(r(A)+r(B)+2\varepsilon)^n} \le 1 + cq^n$ для деяких $c > 0$ і $0 < q < 1$. Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо, що $r(A+B) \le r(A) + r(B) + 2\varepsilon$. Умова комутовності операторів істотна, що показує приклад $X = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **33.** $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-1, 1\}$, власними функціями, що відповідають власним числам $\lambda = 1$ і $\lambda = -1$ є парні й непарні функції відповідно. **36.** Скористатись задачами 39 і 40.4 з розділу 9. **37.** Згідно з задачею 40.5 з розділу 9 досить розглянути випадок $\lambda \in \mathbb{R}$. Показати, що $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ і скористатися теоремою 1 з розділу 8. **38.** Скористатись задачею 30.2 з розділу 9.

39. Урахувати, що $||A|| \leq 1$, і розглянути функцію $x_0(t) = 1,\ t \in [0, 1]$. **44.** $\sigma(A) = \left\{\sqrt{2\pi}F[p](x) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, де F – перетворення Фур'є функції p (див. розділ 14). Скористатись задачею 43 і задачею 77 з розділу 14. **46.** Користуючись асоціативністю множення операторів, встановити нерівність $\sqrt[n]{||(AB)^n||} \leq \sqrt[n]{||A(BA)^{n-1}B||} \leq \sqrt[n]{||A||}\sqrt[n]{||(BA)^{n-1}||}\sqrt[n]{||B||}$, $n \geq 1$, і застосувати теорему 2. Доводжуване твердження випливає також із задачі 47. **47.** Довести, що при $\lambda \in \rho(BA)\backslash\{0\}$ оператор $C := \frac{1}{\lambda}(A(BA - \lambda I)^{-1}B - I)$ задовольняє рівності $(AB - \lambda I)C = C(AB - \lambda I) = I$. **48.** З умови випливає, що $\sigma(AB) = \sigma(BA) + c$. Далі скористатись задачею 47.

РОЗДІЛ 11

5. Скористатись критерієм компактності Больцано – Вейєрштрасса. **6.** Скористатись критерієм компактності Гаусдорфа. **13.** Якщо $\Phi_{\frac{\varepsilon}{2}} := \{x_1, ..., x_n\}$ – скінченна $\frac{\varepsilon}{2}$-сітка для M, то $M_k := M \cap \overline{B}(x_k, \frac{\varepsilon}{2}),\ 1 \leq k \leq n$. **14.** 1)-3) Так. 4) Ні. **15.** 1) Скористатись методом від супротивного і задачею 5; 2) Якщо M не компактна множина, то існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset M$, що складається з різних елементів і не має граничних точок. Покладемо $r_n := \frac{1}{3}\inf\{||x_n - x_m|| \mid m \in \mathbb{N},\ m \neq n\}$, $n \geq 1$, $f(x) := (-1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{||x - x_n||}{r_n}),\ x \in \overline{B}(x_n, r_n),\ f(x) := 0,\ x \in M\backslash\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n, r_n)\right)$. **16.** Ні. Наприклад, якщо $M = \mathbb{N}$ у банаховому просторі $\mathbb{R}$. **17.** Скористатись критерієм Гаусдорфа і передкомпактністю обмеженої множини у скінченновимірному просторі. **18.** Встановити, що якщо відповідна норма існує, то кожна обмежена множина буде передкомпактною, показавши за допомогою функціоналів $f_k(x) = x_k,\ x \in s$, що така множина буде покоординатно обмеженою. Шукану метрику можна задати формулою $\rho(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},\ x, y \in s$. **19.** У п. 4 скористатись формулою Ньютона – Лейбніца й нерівністю Коші – Буняковського. Компактними будуть множини з п.2 і, за умови замкненості, з пп. 8 і 9. **20.** Передкомпактними є множини з пп. 5, 8-10, а компактною – з п.5. **21.** Для передкомпактності (компактності) необхідно й достатньо, щоб A була: 1),2) обмеженою (компактною); 3) обмеженою знизу (компактною); 4) довільною (компактною). **22.** 1),4) Так. 2),3) Ні. **24.** Так. Скористатись компактністю $[a, b]$. **28.** Обернене твердження хибне. **29.** Відповідь на питання негативна. **30.** Множина M передкомпактна в $C^k([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли M рівномірно обмежена і множина $\left\{x^{(k)} \mid x \in M\right\}$ одностайно неперервна. **31.** Повторити міркування з доведення теореми

Асколі – Арцела. **32.** Скористатись критерієм Гаусдорфа. **33.** Множина M передкомпактна у просторі $B(T)$ тоді й тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена (тобто обмежена в $(B(T), ||\cdot||_\infty)$) і задовольняє умову п.2 із задачі 32 (із заміною норми $||\cdot||$ в Y на модуль (тобто норму в $\mathbb{R}$)). **34.** Скористатись критерієм Гаусдорфа. Якщо H – сепарабельний гільбертів простір, $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в H, то множина M передкомпактна в H тоді й тільки тоді, коли M – обмежена множина і $\forall \varepsilon > 0 \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in M \; : \; \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon$. **37.** 1),2) Необхідно й достатньо, щоб $a_n \to +\infty, \; n \to \infty$. **38.** Скористатись критерієм Гаусдорфа. **39.** У формулюванні попередньої задачі замінити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ на 0. **40.** 1)-4) Так. **41.** Треба, щоб зі збіжності в X_1 випливала збіжність в X_2 (тобто оператор вкладення $A : X_1 \to X_2, \; Ax = x$, був неперервним). **42.** 1)-3) Ні. У випадках 2),3) розглянути послідовність $x_n(t) = e^{int}, \; t \in [0,1], \; n \geq 1$. **44.** Показати, що коли передкомпактна множина ЛНП скрізь щільна у деякій кулі, то і ця куля є передкомпактною множиною. **45.** 1) Урахувати, що $C^1([a,b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n)$, де кулі беруться в просторі $C^1([a,b])$. Далі скористатись задачами 29 і 44. **46.** Розглядаючи на підпросторі M дві норми – рівномірну й норму простору $C^1([a,b])$, – отримаємо два ЛНП, які позначимо через M і M_1 відповідно. До тотожного оператора $I : M_1 \to M, \; Ix = x$, застосувати теорему Банаха про обернений оператор і отримати, що одинична куля в M обмежена за нормою з M_1, а отже, передкомпактна. **47.** Припустимо, що $M \subset L_\infty(T,\mu)$. За допомогою теореми Банаха про обернений оператор довести (див. розв'язок задачі 46), що $\exists C_1 > 0 \, \exists C_2 > 0 \, \forall x \in M \; : \; ||x||_\infty \leq C_1 ||x||_1 \leq C_2 ||x||_2$. Нехай $\{\varphi_n : n \geq 1\} \subset M$ – ортонормована система. Показати, що $\forall y \in l_2, \; \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2 \leq 1 \; : \; \left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \varphi_n(x) \right| \leq C_2 \pmod{\mu}$, звідки вивести нерівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) \leq C_2 \pmod{\mu}$ і отримати суперечність. **48.** 1) Припустимо, що існує ізометрія $f : M \to M_1$, де $M_1 \subset M, \; M_1 \neq M$. Покладемо $f^n := f(f^{n-1}), \; n \geq 2, \; x_n := f^n(x_0), n \geq 1$, де $x_0 \in M \backslash M_1$ – фіксований елемент. M_1 компакт, тому існує $y_0 \in M_1$ і підпослідовність $\{x_{n_k} : k \geq 1\}$ послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ така, що $x_{n_k} \to y_0, \; k \to \infty$. З послідовності $\{z_k = f^{n_1 + \ldots + n_k}(y_0) \; : \; k \geq 1\} \subset M_1$ виберемо фундаментальну підпослідовність $\left\{z_{k_j} \; : \; j \geq 1\right\}$. Тоді $||f^{n_{k_j}}(y_0) - y_0|| = ||z_{k_j} - z_{k_{j-1}}|| \to 0, \; j \to \infty$. Далі довести, що $||x_0 - y_0|| = ||f^{n_{k_j}}(y_0) - x_{n_{k_j}}|| \to 0, \; j \to \infty$, отже, $x_0 = y_0$. Звідси отримати суперечність. 2) Розглянути множину $\{(\cos n, \sin n) \; : \; n \geq 1\}$ і поворот навколо початку координат на кут 1. **50.** 1) Для доведення компактності застосувати теорему 4 з розділу 5. 2) При доведенні необхідності скористатись критерієм Гаусдорфа. Для доведення достатності до множини функцій $\{F_x \mid x \in M\} \subset C(B)$, де $F_x(f) = f(x),\ f \in B$, застосувати теорему Асколі – Арцела (задача 31), перевіряючи кожну з її умов методом від супротивного. **52.** Для доведення останнього твердження розглянути оператор $A : C([0,1]) \to C^1([0,1]), (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds,\ t \in [0,1],\ x \in C([0,1])$, якщо в $C^1([0,1])$ розглядається рівномірна норма. Для побудови рівномірно збіжної до A послідовності компактних операторів наблизити функцію $K := \chi_{\{(t,s) \mid 0 \le s \le t \le 1\}}$ функціями $K_n \in C([0,1]^2)$ так, щоб $\sup\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |K(t,s) - K_n(t,s)|ds \to 0,\ n \to \infty$, а потім кожну з функцій K_n рівномірно наблизити многочленами. **53.** 4) Якщо $A \in S_0(X_1, X_2)$, то $\exists\{f_1, ..., f_n\} \subset X_1^* \,\exists\{e_1, ..., e_n\} \subset X_2 \ :\ Ax = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)e_k,\ x \in X_1$, тому $\forall l \in X_2^* : (A^*l)(x) = l(Ax) = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)l(e_k)$, $x \in X_1$, тобто $R(A^*) \subset$ л.о.$(\{f_1, ..., f_n\})$. **54.** 1) Так. 2) Ні, бо A може не бути неперервним. **56.** 1) Не компактний. 2)-4) Компактні. **57.** 1)-4) $\alpha_n \to 0,\ n \to \infty$. **58.** $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + |\gamma_n|^2 \to 0,\ n \to \infty$. **59.** 1)-3),8) Компактні. 4)-7) Не компактні. **60.** 1),2),4),5) Компактні. 3) Не компактний. **61.** 1),2) Необхідно й достатньо, щоб $a = 0$. **62.** 1),4) Застосувати теорему Асколі – Арцела. 2) Наблизити K неперервними функціями в $L_2([a,b])$ і скористатись п. 1 та теоремою 2 (п.3). Включення $A \in S_\infty(L_2([a,b]^2))$ випливає ще й з того, що A – оператор Гільберта – Шмідта. 5) Урахувати, що $K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{\sqrt{|t-s|}}$, де $K_0 \in C([a,b]^2)$. 6) Урахувати, що $K \in C([a,b], L_1([a,b]))$ і застосувати міркування, аналогічні розв'язкам задачі 4. 7) Нехай A_n – інтегральний оператор з ядром $K_n(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha}\chi_{\left\{(t,s) \mid |t-s| \ge \frac{1}{n}\right\}}(t,s),\ (t,s) \in [a,b]^2,\ n \ge 1$. Далі для доведення того, що $||A_n - A|| \to 0,\ n \to \infty$, скористатись оцінкою норми оператора із задачі 46.1 розділу 6. **64.** 1)-4) Ні. **66.** 1),2) Ні. 3) Так. **68.** 2) $Ax = y$, де $y_{2k-1} := x_{2k},\ y_{2k} := 0,\ k \ge 1$. **69.** 1) Ні. 2)-4) Так. **70.** За допомогою критерію Гаусдорфа довести, що передкомпактна множина сепарабельна. **71.** Якщо $c_0 \ne 0$, то не може; якщо $c_0 = 0$, то може (розглянути випадок ортопроектора). **72.** 1) Ні. 2) Так. **73.** Необхідно й достатньо, щоб $\dim X < +\infty$. **74.** 1) Нехай H – гільбертів простір, $A \in S_\infty(H),\ M \subset R(A)$ – підпростір, $A^{-1}(M)$ – прообраз множини M при відображенні A. Показати, що $A : A^{-1}(M) \cap (\operatorname{Ker} A)^\perp \to M$ – бієкція. **75.** Користуючись теоремою Бера про категорії, із зображення $R(A) = \bigcup\limits_{n=1}^\infty A(\overline{B}(0,n))$ отримати, що $\exists n \in \mathbb{N}\, \exists B(x_0,r) \subset R(A) \ : \ A(\overline{B}(0,n)) \cap B(x_0,r)$ – скрізь щільна в $B(x_0,r)$, звідки вивести, що $B(x_0,r) \subset R(A)$. **76.** З припущення про хибність цього твердження вивести, що $\exists C > 0\, \forall x \in X_1 \ :$ $||Ax|| \geq C||x||$. Звідси отримати існування оберненого оператора $A^{-1} \in L(R(A), X_1)$. **77.** Нехай $\{x_1^{(n)},...,x_{m(n)}^{(n)}\}$ – скінченна $\frac{1}{n}$ -сітка для множини $A(B(0,1))$, $L_n :=$ л.о.$(\{x_1^{(n)},...,x_{m(n)}^{(n)}\})$, P_n – ортопроектор на L_n. Розглянути $\{P_nA \ : \ n \geq 1\}$. **78.** Для доведення необхідності скористатись існуванням ортонормованого базису в H, а при доведенні достатності врахувати, що коли $\{A_n \ : \ n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(H)$, $A_n \xrightarrow{s} A_0$, то $R(A_0) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} R(A_n)}$. **79.** Імплікацію $A \in S_\infty(H) \ \Rightarrow \ A^* \in S_\infty(H)$ можна довести, скориставшись задачами 53.4 і 77. Для встановлення імплікації $A^*A \in S_\infty(H) \ \Rightarrow \ A \in S_\infty(H)$ врахувати рівність $||A(x_n - x_m)||^2 = (A^*A(x_n - x_m), x_n - x_m)$, $m,n \geq 1$, $\{x_n : n \geq 1\} \subset H$, і нерівність Коші – Буняковського. **80.** 1) Розглянути $(A^2)^*A^2$ і скористатись задачею 79. 2) Спочатку розглянути випадок $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. **84.** Скористатись задачами 11 і 82.2. **85.** Для доведення достатності скористатись задачею 24 з розділу 5. **86.** Розглянути оператор із задачі 64.3. **87.** Скористатись задачами 22.2 з розділу 9 і 85. **89.** Для доведення необхідності врахувати рівність $||A^*f|| = \sup\left\{|f(x)| \mid x \in A(\overline{B}(0,1))\right\}$, $f \in X_2^*$, і застосувати теорему Асколі – Арцела (задача 31) до множини функцій $\left\{f_n \in C(\overline{A(\overline{B}(0,1))}) \ : \ n \geq 1\right\}$, де $\{f_n : n \geq 1\} \subset X_2^*$ – обмежена послідовність. Для доведення достатності врахувати, що звуження оператора A^{**} на $\varphi(X_1)$, де $\varphi : X_1 \to X_1^{**}$ – канонічне вкладення, є компактним оператором. **90.** Скористатись задачами: 1) 30 з розділу 5; 2) 21 з розділу 3. **91.** Для доведення достатності, користуючись теоремою 4 з розділу 5, показати, що A^* – компактний оператор. **92.** Для доведення замкненості скористатись задачею 24 з розділу 5. **93.** Скористатись властивостями неперервних на компакті функцій. **94.** 1) Ні. Для побудови контрприкладу до твердження задачі 92(93) розглянути оператор із задачі 59.2 (25 з розділу 6, де $p \in C([a,b])$, $p \neq 0$, $q(s) = \operatorname{sign}(s - \frac{a+b}{2})$, $s \in [a,b]$). 2) Так. **95.** Для фактор-простору $X_1 = X/\operatorname{Ker} B$ і оператора $B_1x_1 := Bx$, $x_1 \in X_1$, де $x \in x_1$, довести, що $B_1 \in S_\infty(X_1, Y)$, B_1 – ін'єкція, $R(A) \subset R(B_1)$, оператор $Cx := y$, $x \in X$, де $y \in X_1 \ : \ Ax = B_1y$, є коректно визначеним лінійним оператором. За допомогою теореми Бера про категорії довести, що $\exists m \in \mathbb{N} \ : \ X_0 = \{x \in X \mid ||Cx|| \leq m||x||\}$ – скрізь щільна в X. Далі показати, що звуження оператора B на X_0 є компактним оператором на X_0, звідки вивести компактність оператора B. **96.** Для доведення достатності умов 1),2) і необхідності умови 2) скористатись критерієм Гаусдорфа. **97.** 1),2) $A_n x := (x_1, ..., x_n, 0, ...),\ n \geq 1$. **98.** 1) Зробити заміну змінної і скористатись нерівністю Гельдера. 2) Довести спочатку для $p = 1$. 3) Спочатку розглянути випадок $x \in C([a, b])$, а потім скористатись щільністю цієї множини в $L_p([a, b])$. 4) Показати, що множина $A(\overline{B}(0, 1) \cap C([a, b]))$ утворює компактну ε-сітку для довільного $\varepsilon > 0$ (тут $\overline{B}(0, 1)$ – куля в $L_p([a, b])$). **99.** Скористатись задачами 96 і 98. **100.** 2) Показати, що $A_h^2 \in S_\infty(L_1([a, b]))$, де A_h – оператор із задачі 98. **101.** Для доведення необхідності умови 2) скористатись задачею 51 з розділу 1 і критерієм Гаусдорфа. Для доведення достатності врахувати, що з другої умови випливає умова 2) задачі 99. **103.** Або застосувати критерій компактності в $L_p([a, b])$, або скористатись задачами 82 і 85, описом слабкої збіжності в $C([a, b])$ і теоремою Лебега про граничний перехід. **104.** Ні. Див. задачу 96. **106.** 1) Урахувати, що з фундаментальності в $W_2^1([a, b])$ випливає фундаментальність в $L_2([a, b])$. 2) Скористатись задачею 105. **107.** 1) Проінтегрувати рівність $x(t) = x(s) - \int\limits_t^s x'(u)du$ за s у межах від t до b і змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі. Потім аналогічно проінтегрувати наведену рівність за s від a до t і додати отримані результати. 2) Скористатись нерівністю Гельдера. 3) Скористатись задачею 105. **108.** Скористатись задачами 19.5 і 105. **109.** 1) Довести, що $A_n \rightrightarrows A$, де $A_n x := \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k \right) e_j,\ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k,\ n \geq 1$. 2) Користуючись задачею 51 з розділу 2, довести, що якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в $L_2(T, \mu)$, то $||K||^2 = \sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2$, де $a_{jk} = (Ae_k, e_j),\ j, k \geq 1$. **110.** Скористатись задачею 85. **111.** 2) За допомогою нерівності Гельдера встановити нерівність $\int\limits_{T \times T} |K(t, s)x(t)\overline{y(t)}| d\mu \times \mu(t, s) \leq C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}} ||x||_p ||y||_q,\ x \in L_p(T, \mu),\ y \in L_q(T, \mu)$, і скористатись задачею 32.2 з розділу 5. 3) У просторі $L_p([0, 1])$, $1 \leq p < +\infty$, розглянути $K(t, s) = \begin{cases} 2^n, & (t, s) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]^2,\ n \geq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках}, \end{cases}$ $(t, s) \in [0, 1]^2$, і послідовність $x_n(t) := 2^{\frac{n}{p}} \cdot \chi_{[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]},\ t \in [0, 1],\ n \geq 1$, обмежену в $L_p([0, 1])$. 4) Довести, що $||A_n - A|| \to 0,\ n \to \infty$, де A_n – оператор із задачі 110 з ядром $K_n(t, s) := \begin{cases} n \cdot \operatorname{sign} K(t, s), & |K(t, s)| > n, \\ K(t, s), & |K(t, s)| \leq n. \end{cases}$ **112.** Скористатись задачею 111.4. **113.** Для доведення включення $A \in$

$\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ скористатись міркуваннями з розв'язку задачі 111.2. Оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли $p = 0$. І спосіб. Розглянути послідовність $x_n(t) := \chi_{[n,n+1)}(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \geq 1$, і скористатись задачею 84. ІІ спосіб. Скористатись задачею 44 з розділу 10 і теоремою 1 з розділу 12. **114.** Компактний лише коли $p = 0$. **115.** 2) Скористатись задачею 109.2. **116.** 1) Скористатись оцінкою $|(Ax,y)|^2 \leq \int\limits_{[0,+\infty)^2} \frac{|x(s)|^2}{t+s} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dtds \cdot \int\limits_{[0,+\infty)^2} \frac{|y(t)|^2}{t+s} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dtds,\ x, y \in L_2([0,+\infty))$. 2) Розглянути послідовність $x_n(t) = 2^{\frac{n}{2}} \chi_{[1,2]}(2^n t),\ t \geq 0,\ n \geq 1$, і скористатись задачею 84. **117.** 2) Розглянути випадок $K(t,s) = \frac{t}{1+t^2s^2}$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ x_n(t) = \chi_{[0,n]}(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \geq 1$. **118.** 3) Нехай $x \in L_p([0,+\infty)),\ x(t) \geq 0,\ y(t) := \int\limits_0^t x(s)ds,\ t \geq 0$. Довести, що $\int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{y(t)}{t}\right)^p dt = \frac{\alpha^{1-p}y(\alpha)}{p-1} - \frac{\beta^{1-p}y(\beta)}{p-1} + \frac{p}{p-1} \cdot \int\limits_\alpha^\beta t^{1-p}y^{p-1}(t)x(t)dt$, $0 < \alpha < \beta$, звідки отримати нерівності $\int\limits_0^\beta \left(\frac{y(t)}{t}\right)^p dt \leq \frac{p}{p-1} \int\limits_0^\beta \left(\frac{y(t)}{t}\right)^{p-1} \times x(t)dt \leq \frac{p}{p-1} \left(\int\limits_0^\beta \left(\frac{y(t)}{t}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^\beta x^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{y(t)}{t}\right)^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^{+\infty} x^p(t)dt$. 4) Розглянути послідовність $x_n(t) := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \chi_{[0,n]}(t),\ t \geq 0,\ n \geq 1$, і скористатись задачею 84.

РОЗДІЛ 12

3. Множини з пп. 2,3,6,7 . **4.** 1),2) A компактний, бо скінченновимірний. $\sigma(A) = \{0, \frac{1}{5}\}$. **5.** 1),2) A компактний. $\sigma(A) = \{0, \int\limits_0^1 p(s)q(s)ds\}$. **6.** A компактний у всіх пунктах. 1) $\sigma(A) = \{0, \pi\},\ ||A|| = \pi;$ 2)$\sigma(A) = \{0, -\pi, \pi\},\ ||A|| = \pi;$ 3)$\sigma(A) = \{0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\},\ ||A|| = \frac{\pi}{2};$ 4)$\sigma(A) = \{0, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\},\ ||A|| = \frac{4}{5};$ 5)$\sigma(A) = \{0, \frac{4}{15} \pm \frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{5}}\},\ ||A|| = \frac{4}{15} + \frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{5}}$. При знаходженні $||A||$ скористатись задачею 2.1 з розділу 9 і задачею 20.1 з розділу 10 і врахувати, що у п. 2 оператор iA самоспряжений. **7.** A не є компактним у всіх пунктах. 1) $\sigma(A) = \{1, \frac{5}{3}, \frac{11}{5}\};$ 2)$\sigma(A) = \{1, 1+\pi\}$. **8.** 1),2) $||A|| = 1;\ \sigma_p(A) = \varnothing;\ \sigma(A) = \{0\},\ r(A) = 0$. **9.** Нехай $(A - \lambda I)x_n = y_n \to y_0,\ n \to \infty$. Урахувати, що коли $\{x_n : n \geq 1\}$ містить обмежену підпослідовність, то деяка підпослідовність $\{Ax_{n_k} : k \geq 1\}$ збігається, отже, $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(Ax_{n_k} - y_{n_k}) \to x_0,\ n \to \infty$. Якщо $||x_n|| \to \infty$, то застосувати подібні міркування до послідовності $\left\{\frac{x_n}{||x_n||} : n \geq 1\right\}$. **10.** Розглянути діагональний оператор в l_2 і врахувати задачу 1 з розділу 10 і задачу 3 з розділу 11. **12.** 2) Скористатись методом від супротивного і врахувати, що якщо $\exists \mu \neq 0\, \exists y \neq 0 :$ $Ay = \mu y$, то $y = \frac{1}{\mu}Ay \in$ з.л.о.$\{e_n : n \geq 1\}$, тобто $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n$, звідки отримати рівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(y, e_n)e_n = \mu\sum\limits_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n$. Далі домножити її скалярно на $e_k,\ k \geq 1$, і дістати суперечність; 4) Встановити, що $A^*x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(x, e_n)e_n,\ x \in H$; A завжди нормальний. Необхідно й достатньо, щоб: 5) $\lambda_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1$; 6)$\lambda_n \geq 0,\ n \geq 1$; 7)$\lambda_n \to 0,\ n \to \infty$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2 < +\infty$. **13.** 1) Урахувати, що $||Ax - A_kx||^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|s_n(x, q_n)|^2 \leq \sup\limits_{n \geq k+1}|s_n|^2 \cdot ||x||^2,\ k \geq 1,\ x \in H$. **14.** $A^*y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{s_n}(y, e_n)g_n,\ y \in H;\ AA^*y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^2(y, e_n)e_n,\ y \in H;\ A^*Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^2(x, g_n)g_n,\ x \in H$. **16.** $K(t, s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\sin nt \sin ns,\ (t, s) \in [0, \pi]^2$. **20.** 1) Показати, що K – ермітово-симетричне ядро Гільберта – Шмідта; 2) $\sigma(A) = \left\{\lambda_n = \frac{1}{n^2} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$ (скористатись задачею 12), $r(A) = ||A|| = 1,\ \varphi_n(t) = \sin n\pi t$ – власна функція, що відповідає власному числу $\lambda_n,\ n \geq 1$; $\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \psi_n(t) = \cos \pi nt,\ n \geq 1,$ – власні функції, що відповідають власному числу $\lambda = 0$; 3) $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$. **21.** 2) $\sigma(A) = \{0\} \cup \{2\pi c_n : n \in \mathbb{Z}\}$, $r(A) = ||A|| = 2\pi\max\limits_{n \in \mathbb{Z}}|c_n|$; 3)$A = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}}2\pi c_n(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$. **22.** 2) $\sigma(A) = \{0, \pi a_0, \pm\pi a_n : n \geq 1\}$, $r(A) = ||A|| = \pi \cdot \max\limits_{n \geq 0}|a_n|$; 3)$A = \lambda_0(\cdot, \varphi_0)\varphi_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^{(1)}(\cdot, \varphi_n^{(1)})\varphi_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)}(\cdot, \varphi_n^{(2)})\varphi_n^{(2)})$. **23.** 1) $\sigma(A) = \{0, \pi\lambda_n,\ n = \overline{1, N}\},\ \varphi_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \varphi_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ n = \overline{1, N}$; 2)$\sigma(A) = \{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$, $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 4t,\ \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \varphi_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; 3)$\sigma(A) = \left\{0; n^{-2}\pi : n \geq 1\right\},\ \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ n \geq 1$; 4)$\sigma(A) =$

$\left\{0; n^{-2}\pi \,:\, n \geq 1\right\}$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)t,\ n \geq 1;$ 5)$\sigma(A) = \left\{0; (2n+1)^{-2}\pi \,:\, n \geq 0\right\}$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2n+1)t,\ n \geq 0;$ 6)$\sigma(A) = \left\{0; (2n+1)^{-2}\pi \,:\, n \geq 0\right\}$, $\varphi_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2n+1)t,\ n \geq 0,\ \varphi_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)t,\ n \geq 0.$ **24.** 1) $\sigma(A) = \left\{0; n^{-2}\pi^{-2} \,:\, n \geq 1\right\}$, $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t,\ n \geq 1;$ 2)$\sigma(A) = \left\{0; [(n+\frac{1}{2})^2 - 1]^{-1} \,:\, n \geq 0\right\}$, $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n+\frac{1}{2})t,\ n \geq 0;$ 3)$\sigma(A) = \left\{0; [1-(n+\frac{1}{2})^2]^{-1} \,:\, n \geq 0\right\}$, $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+\frac{1}{2})t,\ n \geq 0;$ 4)$\sigma(A) = \left\{0; 1; -n^{-2}\pi^{-2} \,:\, n \geq 1\right\}$, $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^t,\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{1+n^2\pi^2}}(\sin n\pi t + n\pi\cos n\pi t),\ n \geq 1;$ 5)$\sigma(A) = \left\{0; (n^2\pi^2-1)^{-1}\sin 1 \,:\, n \geq 1\right\}$, $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t,\ n \geq 1;$ 6)$\sigma(A) = \{0; 2(n\pi)^{-2}, n \geq 1;\ 2(n+\frac{1}{2})^{-2}\pi^{-2}, n \geq 0\}$, $\varphi_n^{(1)}(t) = \sin n\pi t,\ n \geq 1;\ \varphi_n^{(2)}(t) = \cos(n+\frac{1}{2})\pi t,\ n \geq 0.$ **25.** $||V|| = \frac{2}{\pi}$. Визначити $\sigma(V^*V),\ r(V^*V)$ і скористатись задачами 20.1 з розділу 10 та 42.2 з розділу 9. **26.** Скористатись теоремою 2. **27.** 2) Урахувати, що коли φ, ψ – власні вектори, які відповідають власним числам λ і μ, то $\lambda(\varphi,\psi) = (A\varphi,\psi) = (\varphi, A\psi) = \mu(\varphi,\psi)$. 4) Нехай $\left\{\lambda_n \,:\, n = \overline{1,N}\right\} = \sigma(A)\backslash\{0\},\ N \leq +\infty,\ L_n$ – власний підпростір, що відповідає власному числу λ_n, а P_n – ортопроектор на $L_n,\ n = \overline{1,N}$, причому $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$. Установивши рівності $\sigma(A - A_n) = \{\lambda_k \,:\, n+1 \leq k \leq N\} \cup \{0\}$ і $(A - A_n)^* = A - A_n$, зробити висновок, що $||A - A_n|| = |\lambda_{n+1}| \to 0,\ n \to \infty$, (коли $N = +\infty$) або $A \in S_0(H)$ (коли $n \in \mathbb{N}$). 5) Урахувати, що $Ax = 0,\ x \in L^{\perp}$, де L – власний підпростір оператора A, що відповідає власному числу $\lambda = 1$. **28.** Скористатись задачею 15 з розділу 10. При доведенні імплікації $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\} \ \Rightarrow\ \lambda \in \sigma_p(A)$ спочатку розглянути випадок $\lambda = 1$. Урахувавши включення $A^n \in S_\infty(X),\ n \geq k$, показати, що $M_n := \{\xi_0^{(n)} = 1, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{n-1}^{(n)}\} \cap \sigma_p(A) \neq \varnothing$, де $\{\xi_0^{(n)} = 1, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{n-1}^{(n)}\}$ – сукупність коренів n-го степеня з одиниці. Звідси, припустивши, що $1 \notin \sigma_p(A)$, отримати існування безлічі власних чисел оператора A^k, рівних за модулем одиниці. **29.** 1) Урахувати попередню задачу й отримати, що $||x|| \leq C||(A - I)^{-1}||,\ x \in M$. 2) Показати, що $1 \notin \sigma_p(A_h)$, де A_h – оператор із задачі 98 розділу 11. **30.** Урахувавши, що $L^{\perp} \subset \operatorname{Ker}|A| \subset \operatorname{Ker} A$, де $L :=$з.л.о.$(\{\varphi_n \,:\, n \geq 1\})$, отримати зображення $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,\varphi_n)A\varphi_n,\ x \in H$, і покласти $\psi_n := \frac{1}{s_n}A\varphi_n,\ n \geq 1$. **31.** Для послідовності $\{s_n : n \geq 1\}$ сингулярних чисел оператора A (див. попередню задачу) визначимо послідовність $\{n_k \,:\, k \geq 0\} \subset \mathbb{N}$ так: $n_0 := 0,\ s_1 = \ldots = s_{n_1} > s_{n_1+1} = \ldots = s_{n_2} > s_{n_2+1} = \ldots$. Покладемо $L_k :=$л.о.$(\{\varphi_{n_k+1},...,\varphi_{n_{k+1}}\})$, $k\geq 0$, де $\{\varphi_n : n\geq 1\}$ – ортонормовані власні функції оператора $|A|$. Користуючись попередньою задачею, нерівністю з умови, методом математичної індукції довести, що $\{\psi_{n_k+1},...,\psi_{n_{k+1}}\}\subset L_k,\ k\geq 0$. Далі перевірити виконання рівності $AA^*=A^*A$ на кожному підпросторі $L_k, k\geq 0$, і на $\mathrm{Ker}\,A$. **32.** Скористатись теоремами 1,2 і задачами 20.1 з розділу 10 та 42.2 з розділу 9. **33.** Згідно з рівністю $\lambda_n^-\equiv\lambda_n^-(A)=\lambda_n^+(-A)$ досить розглянути числа $\lambda_n^+,\ n\geq 1$. Для доведення нерівності $\lambda_n^+\leq\max\limits_{x\in L\setminus\{0\}}\frac{(Ax,x)}{||x||^2},\ \mathrm{def}L\leq n-1$, припустити, що існує підпростір $L,\ \mathrm{def}L\leq n-1$, для якого $\lambda_n^+>\max\limits_{x\in L\setminus\{0\}}\frac{(Ax,x)}{||x||^2}$, звідки отримати існування елемента $x_0\in L\cap$л.о.$(\{e_1,...,e_n\})$, $x_0\neq 0$, і показати, що $(Ax_0,x_0)\geq\lambda_n||x_0||^2$. Для знаходження підпростору, який реалізує рівність у доведеній нерівності, скористатись задачею 32. **34.** Скористатись задачею 33 та нерівностями $\sup\limits_{x\in L}\frac{(PAPx,x)}{||x||^2}=\sup\limits_{x\in L}\frac{(APx,Px)}{||Px||^2}\cdot\frac{||Px||^2}{||x||^2}\leq\sup\limits_{y\in PL}\frac{(Ay,y)}{||y||^2}$, $\sup\limits_{x\in L}\frac{(PAPx,x)}{||x||^2}\geq\sup\limits_{x\in L\cap PH}\frac{(PAPx,x)}{||x||^2}=\sup\limits_{x\in L\cap PH}\frac{(Ax,x)}{||x||^2}$. **35.** 1) Скористатись задачею 33 і врахувати, що $s_n^2(A)=\lambda_n(A^*A)=\lambda_n^2(A),\ n\geq 1$. 3) Для доведення другої нерівності врахувати, що $s_n(A^*)=s_n(A),\ n\geq 1$. 4) Для доведення нерівності $s_n(A)\leq||A-T||,\ \mathrm{rank}T\leq n-1$, розглянути підпростір $L:=\mathrm{Ker}\,T$ і скористатись задачею 33. Для знаходження оператора T, що реалізує рівність у цій нерівності, скористатись задачею 30.

РОЗДІЛ 13

5. Довести, що розв'язком буде функція $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda A)^n y$. **6.** 1) $x(t)=e^{\mathrm{arctg}\,t}-1$; 2) $x(t)=1+t$; 3) $x(t)=\mathrm{ch}\,t$; 4) $x(t)=1+2e^{-t}(1-e^{-1})(1-e^{-2})^{-1}$; 5) $x(t)=\mathrm{arctg}\,t+\frac{\pi^2}{32-8\pi}$; 6) $x(t)=1$; 7) $x(t)=2$; 8) $x(t)=1+t\ln 2$. **7.** 1) $x_1(t)=1;\ x_2(t)=1+\frac{1}{(1+t)}-\frac{1}{(2+t)}$; 2) $x_1(t)=t;\ x_2(t)=\frac{10t}{9}+\frac{1}{12}$; 3) $x_1(t)=1;\ x_2(t)=1+\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{\pi t}{4}-\frac{t}{2}\ln\left(1+\frac{t^2\pi^2}{16}\right)\right)$
9. Довести, що рівняння $x=A^n x+\sum\limits_{k=0}^{n-1}A^k y$ і $x=Ax+y$ рівносильні та застосувати теорему Банаха про стискаючі відображення. **11.** 3) Переконатися, що функції $x(t)=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial R_\lambda(t,v)}{d\lambda}+R_\lambda(t,v), y(t)=R_\lambda(t,v),\ t,v\in[a,b]$, задовольняють інтегральне рівняння, а потім підставити їх у форму-

лу для розв'язку. **12.** 1) $R_\lambda(t,s)=e^{t^2-s^2+\lambda(t-s)}$, $x(t)=e^{2t^2+2t}(1+2t)$; 2) $R_\lambda(t,s)=e^{(\lambda+1)(t-s)}$, $x(t)=\frac{1}{5}e^{3t}-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t$; 3) $R_\lambda(t,s)=\frac{1+t^2}{1+s^2}e^{\lambda(t-s)}$, $x(t)=e^t(1+t^2)$; 4) $R_\lambda(t,s)=3^{t-s}e^{\lambda(t-s)}$, $x(t)=3^t(1-e^{-t})$; 5) $R_\lambda(t,s)=\frac{2+\cos t}{2+\cos s}e^{\lambda(t-s)}$, $x(t)=e^t\sin t+(2+\cos t)e^t\ln\frac{3}{2+\cos t}$; 6) $R_\lambda(t,s)=\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s}e^{\lambda(t-s)}$, $x(t)=\operatorname{ch} t(1-e^{-t})$; 7) $R_\lambda(t,s)=e^{(\lambda-1)(t-s)}$, $x(t)=e^{\frac{t^2}{2}}(t+1)-1$. **13.** 1) $R_\lambda(t,s)=\frac{e^{t+s}}{2-(e^2-1)\lambda}$, $|\lambda|<\frac{2}{e^2-1}$, $x(t)=\frac{2\pi e^t}{(e-1)(\pi^2+1)}+\sin\pi t$; 2) $R_\lambda(t,s)=\frac{2\sin t\cos s}{2-\lambda}$, $|\lambda|<2$, $x(t)=\cos t-\frac{\pi}{6}\sin t$; 3) $R_\lambda(t,s)=\frac{te^{s+1}}{e-2\lambda}$, $|\lambda|<\frac{e}{2}$, $x(t)=4et+(3t^2+1)e^{-t}$; 4) $R_\lambda(t,s)=\frac{5t^2s^2}{5-2\lambda}$, $|\lambda|<\frac{5}{2}$, $x(t)=e^t+10(e-\frac{5}{e})t^2$; 5) $R_\lambda(t,s)=\frac{3(1+t)(1-s)}{3-2\lambda}$, $|\lambda|<\frac{3}{2}$, $x(t)=\pi\cos\pi t-\frac{6}{\pi}(1+t)$; 6) $R_\lambda(t,s)=\frac{3ts}{3-2\lambda}+\frac{5t^2s^2}{5-2\lambda}$, $|\lambda|<\frac{3}{2}$, $x(t)=3+9t+\frac{10}{3}t^2$; 7) $R_\lambda(t,s)=\frac{1}{1-\lambda}+\frac{3(2t-1)(2s-1)}{3-\lambda}$, $|\lambda|<1$, $x(t)=\frac{7}{10}+\frac{3}{5}t+3t^2$; 8) $R_\lambda(t,s)=\sin t\cos s+\cos 2t\sin 2s$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $x(t)=\cos t$; 9) $R_\lambda(t,s)=\frac{1}{1-\pi\lambda}(\sin t\sin s+\cos 2t\cos 2s)$, $|\lambda|<\frac{1}{\pi}$, $x(t)=2\cos 2t$; 10) $R_\lambda(t,s)=\frac{1}{1-\pi\lambda}\cos t\cos s+\frac{3}{1-3\pi\lambda}\sin 2t\sin 2s$, $|\lambda|<\frac{1}{3\pi}$, $x(t)=6\cos t$; 11) $R_\lambda(t,s)=\frac{2}{1-4\pi\lambda}+\frac{1}{1-\pi\lambda}\cos t\cos s$, $|\lambda|<\frac{1}{4\pi}$, $x(t)=2(t-\frac{\pi}{3})$; 12) $R_\lambda(t,s)=\frac{2}{2-(e^\pi+1)\lambda}e^t\cos s$, $|\lambda|<\frac{2}{e^\pi+1}$, $x(t)=\frac{t}{4}-\frac{e^t}{e^\pi+1}$. **14.** Надалі через C, C_k позначаються довільні комплексні сталі. 1) $x(t)=\frac{1}{1-2\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2}\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\frac{1}{2}$; 2) $x(t)=\frac{5(7+2\lambda)}{7(5-2\lambda)}t^2+t^4$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\frac{3}{2},\frac{5}{2}\}$; $x(t)=Ct+\frac{25}{7}t^2+t^4$, $\lambda=\frac{3}{2}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\frac{5}{2}$. 3) $x(t)=\frac{3\pi\lambda}{2(2\lambda+3)}\sin t+\cos 2t$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\}$; $x(t)=C\cos t+\cos 2t-\frac{3\pi}{4}\sin t$, $\lambda=-\frac{3}{4}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=-\frac{3}{2}$. 4) $x(t)=\frac{2\lambda}{12\lambda^2-5}(5\sqrt[3]{t}+6\lambda)+1-6t^2$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\pm\sqrt{\frac{5}{12}}\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\pm\sqrt{\frac{5}{12}}$. 5) $x(t)=\frac{5(2\lambda-3)}{3(5-2\lambda)}t^4+t^2$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\}$; $x(t)=Ct^3+t^2-\frac{5}{6}t^4$, $\lambda=\frac{1}{2}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\frac{5}{2}$. 6) $x(t)=\frac{20\lambda}{1-2\lambda}t^2+7t^4+3$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\frac{5}{4},\frac{1}{2}\}$; $x(t)=7t^4+3-\frac{50}{3}t^2+Ct$, $\lambda=\frac{5}{4}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\frac{1}{2}$. 7) $x(t)=\frac{3t^2}{3-2\lambda}+\frac{3t}{3+2\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{3}{2}\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. 8) $x(t)=\frac{12\lambda}{3-4\lambda}\sin 2t+\pi-2t$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\}$; $x(t)=C\cos t-2\sin 2t+\pi-2t$, $\lambda=-\frac{3}{2}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\frac{3}{4}$. 9) $x(t)=\frac{3\pi\lambda}{8\lambda^2-9}(2\lambda\cos 2t+\frac{3}{2}\sin 2t)+\sin t$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$. 10) $x(t)=\frac{\pi\lambda}{2}\sin 3t+\cos t$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 11) $x(t)=1-\frac{2t}{\pi}-\frac{\pi^2\lambda\cos t}{6(1+2\lambda)}$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{1}{2}\}$; $x(t)=\frac{4}{3}-\frac{2t}{\pi}+C(8+\pi^2\cos t)$, $\lambda=\frac{1}{2}$; $x\in\varnothing$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. 12) $x(t)=\frac{\pi\lambda}{2-\pi\lambda}+1+\cos 4t$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\frac{2}{\pi},\frac{4}{\pi}\}$; $x(t)=\cos 4t-1+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$, $\lambda=$

$\frac{4}{\pi};\ x \in \varnothing,\ \lambda = \frac{2}{\pi}$. 13) $x(t) = \cos 3t,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{\pi}\};\ x(t) = C_1\cos t + C_2\cos 2t + \cos 3t$. 14) $x(t) = \frac{\cos t}{1-\pi\lambda},\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\};\ x(t) = C\sin 2t + 2\cos t,\ \lambda = \frac{1}{2\pi};\ x \in \varnothing,\ \lambda = \frac{1}{\pi}$. 15) $x(t) = \frac{\sin t}{1-\pi\lambda},\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{\pi}\};\ x(t) = C\cos 2t + \frac{3}{2}\sin t,\ \lambda = \frac{1}{3\pi};\ x \in \varnothing,\ \lambda = \frac{1}{\pi}$. **15.** 1) $x(t) = \sin\sqrt{2}t + \sum\limits_{k=1}^{100}\frac{\sin kt}{\sqrt{k}}C_k,\ C_k = \frac{2(-1)^{k-1}\sqrt{k^3}\sin(\sqrt{2}\pi)}{(k^2-2)(2\sqrt{k}-\pi)}$. 2) $x(t) = \frac{10+19i}{4+19i}e^{2it} - \frac{38+4i}{42+11i}$. 3) $x(t) = 1$. 4) $x(t) = 1 + \frac{484}{1057}x - \frac{2470}{3171}x^2$. 5) $x(t) = \frac{15}{391} - \frac{45}{1564}x^2$. **16.** 1) $x(t) \approx -\frac{5}{3} - 2t$; 2) $x(t) \approx \frac{3225}{2171}t - \frac{4515}{93353}t^3$; 3) $x(t) \approx \frac{32}{143} + \frac{120}{143}t$. 4) $x(t) \approx \frac{18}{13}t - \frac{4}{13}$; 5) $x(t) \approx \frac{12\ln 2}{28-25\ln 2} - t\frac{24-24\ln 2}{28-25\ln 2}$; 6) $x(t) \approx 1 - \frac{258}{109}t - \frac{975}{218}t\sqrt{t}$. **17.** Скористатись альтернативою Фредгольма. 1) $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{(b-a)^{-1}\}$. 2) При $a \neq -b\ :\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{4}{e^{-a^4}-e^{-b^4}}\}$, при $a = -b\ :\ \lambda \in \mathbb{C}$. **20.** 1) $q = 0, 3p + 5r = 0$. 2),7) $p + 3r = 0, q = 0$. 3),12) $q = 0$. 4),5),9),10) $p = q = 0$. 6) $5p + 3q = 0$. 8),13) $p = 0$. 11) $\pi p + 4q = 0$. **21.** При всіх. **22.** $\frac{1}{3} < p < 3$. **23.** 1) $\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\}$; 2) $\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{i}{\pi}\}$; 3) $\mathbb{C}\backslash\{-45, \frac{45}{8}\}$; 4) $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\}$. **25.** 1) $\lambda = \frac{3}{7}, \varphi(t) = \sqrt{\frac{3}{7}}t$. 2) $\lambda_n = \frac{2}{\pi}(n^2+n), \varphi_n(t) = \sqrt{2}\pi\sin nt,\ n \in \mathbb{N}$. 3) $\lambda_{1,2}$ – корені рівняння $(\frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right))\lambda^2 - (\frac{\pi+\ln 3}{2})\lambda + 1 = 0, \varphi_{1,2}(t) = \frac{C}{t+1} + \frac{3C\sqrt{3}(2-\lambda_{1,2}\pi)}{2\pi\lambda_{1,2}}\frac{1}{t+3}$. 4) $\lambda_{1,2}$ – корені рівняння $(\frac{\pi^2}{16} - \frac{13\pi}{24} + \frac{13}{12})\lambda^2 - (2 - \frac{\pi}{2})\lambda + 1 = 0$, $\varphi_{1,2}(t) = \frac{3C}{\lambda t^2}(1 - \lambda_{1,2}(1 - \frac{\pi}{4})) + \frac{C}{1+t^2}$. 5) $\lambda_k = -\frac{1}{2}a_k^2$, де $a_k \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння $2 + 2\cos a_k + a_k\sin a_k = 0,\ \varphi_k(t) = Ce^{ia_kt} + \frac{e^{2ia_k}+e^{ia_k}}{1+e^{ia_k}}Ce^{-ia_kt}$. 6) $\lambda_k = \frac{1}{2}(1 + a_k^2)$, де $a_k \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння $2\operatorname{ctg} a_k = a_k - \frac{1}{a_k},\ \varphi_k(t) = C(\sin a_kt + a_k\cos a_kt)$. **26.** 1) $\lambda_1 = \frac{1}{\pi},\ \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t;\ x(t) = \cos t + \frac{\sin t}{1-\pi\lambda},\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda_1\};\ x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_1$. 2) $\lambda_1 = \frac{1}{\pi},\ \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{2}{\pi},\ \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi_2(t) = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\ \varphi_3(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}};\ x(t) = \frac{2\sin 2t}{2-\pi\lambda},\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda_1, \lambda_2\};\ x(t) = C + 2\sin 2t,\ \lambda = \lambda_1;\ x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_2$. 3) $\lambda_n = n^2\pi^2,\ \varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t,\ n \geq 1;\ x(t) = \frac{\pi^2}{4\pi^2-\lambda}\sin 2\pi t + \frac{\pi^2}{9\pi^2-\lambda}\sin 3\pi t,\quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda_n : n \geq 1\};$ $x(t) = C\sin n\pi t + \frac{\sin 2\pi t}{4-n^2} + \frac{\sin 3\pi t}{9-n^2},\ \lambda = \lambda_n,\ n = 1, 4, 5, ...;\ x \in \varnothing,\ \lambda \in \{\lambda_2, \lambda_3\}$. 4) $\lambda_0 = 1,\ \lambda_n = -n^2\pi^2,\ \varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^t,\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{1+n^2\pi^2}}(\sin n\pi t + n\pi\cos n\pi t),\ n \geq 1;\ x(t) = \frac{\pi^2}{\pi^2+\lambda}(\sin\pi t + \pi\cos\pi t)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda_n : n \geq 0\};\ x(t) = Ce^t + \frac{\pi^2}{1+\pi^2}(\sin\pi t + \pi\sin\pi t),\ \lambda = \lambda_0;$ $x(t) = C(\sin n\pi t + n\pi\cos n\pi t) + \frac{1}{1-n^2}(\sin\pi t + \pi\cos\pi t),\ \lambda = \lambda_n,\ n \geq$

2; $x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_1$. 5) $\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{8},\ n \geq 1,\ \varphi_{2k} = \sin \pi k t,\ \varphi_{2k-1} = \cos \frac{\pi(2k-1)t}{2},\ k \geq 1;\ x(t) = -\frac{32\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{8\lambda + \pi^2(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} + 1$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 1\}$; $x(t) = -\frac{32\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{8\lambda + \pi^2(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} + C \sin \pi k t + 1,\ \lambda = \lambda_{2k},\ k \geq 1;\ x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_{2k-1},\ k \geq 1$. 6) $\lambda_n = \frac{4 + (2n+1)^2\pi^2}{8(e^2+1)},\ \varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin(n + \frac{1}{2})\pi t,\ n \geq 0;\ x(t) = \frac{2\lambda}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{(n+\frac{1}{2})^2(\lambda_n - \lambda)} + t,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 0\};\ x \in \varnothing$, $\lambda \in \{\lambda_n : n \geq 0\}$. 7) $\lambda_n = 4n^2 - 1,\ \varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 2nt,\ n \geq 1;\ x(t) = \frac{8\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nt}{(4n^2-1)(4n^2-1-\lambda)} + \cos t,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 1\};\ x \in \varnothing,\ \lambda \in \{\lambda_n : n \geq 1\}$. 8) $\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2 - 1,\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n + \frac{1}{2})t,\ n \geq 0;\ x(t) = \frac{5}{5 - 4\lambda} \sin \frac{3}{2}t,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 0\};\ x(t) = \frac{5}{9 - 4(n+\frac{1}{2})^2} \sin \frac{3}{2}t + C \sin(n + \frac{1}{2})t,\ \lambda = \lambda_n,\ n = 0, 2, 3, ...;\ x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_1$. 9) $\lambda_n = 1 - (n + \frac{1}{2})^2,\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n + \frac{1}{2})t,\ n \geq 0;\ x(t) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+\frac{1}{2}) - 1}{1 - \lambda - (n+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})^2} + t,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 0\};\ x \in \varnothing,\ \lambda \in \{\lambda_n : n \geq 0\}$. 10) $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 - 1}{\sin 1},\ \varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t,\ n \geq 1;\ x(t) = \cos \pi t - \frac{4\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 1 \sin 2n\pi t}{(4n^2-1)(4n^2\pi^2 - 1 - \lambda \sin 1)},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 1\};\ x(t) = C \sin(2k - 1)\pi t + \cos \pi t - \frac{4(2k-1)^2\pi^2 - 4}{\pi^3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{(4n^2-1)(4n^2 - (2k-1)^2)}$, $\lambda = \lambda_{2k-1},\ k \geq 1; x \in \varnothing,\ \lambda = \lambda_{2k},\ k \geq 1$. 11) $\lambda_n = \pi^2(n + \frac{1}{2})^2$, $\varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi(n + \frac{1}{2})t,\ t \in [0, 1],\ n \geq 0;\ x(t) = \sin \pi t + \frac{2\lambda}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(\lambda - (n+\frac{1}{2})^2\pi^2)},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \geq 0\};\ x \in \varnothing$, $\lambda \in \{\lambda_n : n \geq 0\}$. **27.** 1) $x''(t) + \frac{\pi^2}{4}x(t) = 0,\ x(t) = \sin \frac{\pi x}{2}$. 2) $x''(t) = 2e^t,\ x(t) = 2e^t - 2 + (2 - e)t$. 3) $x(t) = 3\pi^2 \sin \pi t(3 \sin^2 \pi t - 2)$. 4) $x'(t) = 0,\ x(t) = 1$. **28.** 1) $x(t) = 16 \int\limits_0^1 \frac{x(s)ds}{(|t-s|+4)^3} - 8f''(t)$. 2) $2x(t) = \int\limits_1^2 \sin|t - s| x(s)ds + f''(t)$ 3) $\int\limits_0^1 \frac{e^{i|t-s|}}{1+|t-s|}(\frac{2}{(1+|t-s|)^2} - \frac{2i}{1+|t-s|} - 1)x(s)ds = f''(t) + 2(1 - i)x(t)$. 4) $\int\limits_0^1 x(s)ds + 4x(t) = f'(t)$.

29. 1) $x(t)+\int\limits_0^t x(s)ds=1$. 2) $e^{t^2}x(t)+\int\limits_0^t e^{ts}sx(s)ds=e^t$. 3) $x(t)-\int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)ds=-\cos t$. **30.** 1) $x(t)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{t}$. 2) $(3t+3t\sqrt[3]{t^2})x(t)+\int\limits_0^t x(s)ds=4t+3t\sqrt[3]{t^2}$. 3) $\frac{1+t+t^2}{2t}x(t)+\int\limits_1^t x(s)ds=t^2+\frac{t}{2}$. **31.** $\lambda_0=\frac{1}{\pi^2}$, $\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$, $\lambda_n^{\pm}=\pm(n+\frac{1}{2})^2$, $\varphi_n^+(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)t$, $\varphi_n^-(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2n+1)t$, $n\geq 0$. 1) $x(t)=\frac{1}{1-\pi^2\lambda}+\frac{2\sin t}{1-4\lambda}-\frac{\cos t}{1+4\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_0,\lambda_n^{\pm}\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{2\sin t}{1-(2n+1)^2}-\frac{\cos t}{1+(2n+1)^2}+\frac{4}{4-(2n+1)^2\pi^2}+C\sin(2n+1)t$, $\lambda\in\{\lambda_n^+\,:\,n\geq 1\}$; $x(t)=\frac{4}{4+(2n+1)^2\pi^2}+\frac{2\sin t}{1+(2n+1)^2}-\frac{\cos t}{1-(2n+1)^2}+C\cos(2n+1)t$, $\lambda\in\{\lambda_n^-\,:\,n\geq 1\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda\in\{\lambda_0,\lambda_0^{\pm}\}$. 2) $x(t)=\frac{9}{9-4\lambda}\sin 3t+\cos 2t$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_0,\lambda_n^{\pm}\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{9}{9-(2n+1)^2}\sin 3t+\cos 2t+C\sin(2n+1)t$, $\lambda\in\{\lambda_n^+\,:\,n\geq 0,\ n\neq 1\}$; $x(t)=\frac{9}{9+(2n+1)^2}\sin 3t+\cos 2t+C\cos(2n+1)t$, $\lambda\in\{\lambda_n^-\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{9\pi^2}{9\pi^2-4}\sin 3t+\cos 2t+C$, $\lambda=\lambda_0$; $x\in\varnothing$, $\lambda=\lambda_1^+$. 3) $x(t)=\frac{16\lambda}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3-4(2n+1)\lambda}+\operatorname{sign}t$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_0,\lambda_n^{\pm}\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3\pi^2-4(2n+1)}+\operatorname{sign}t+C$, $\lambda=\lambda_0 x(t)=-\frac{4}{\pi}(2k+1)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+(2k+1)^2}\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}+\operatorname{sign}t+C\cos(2k+1)t$, $\lambda=\lambda_k^-$, $k\geq 0$; $x\in\varnothing$, $\lambda\in\{\lambda_n^+\,:\,n\geq 0\}$. 4) $x(t)=16\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^4+4(2n+1)^2\lambda}+\frac{\pi^4\lambda}{3(1-\pi^2\lambda)}+t^2$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_0,\lambda_n^{\pm}\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=4(2k+1)^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^4+(2k+1)^2(2n+1)^2}+\frac{(2k+1)^2\pi^4}{3(4-(2k+1)^2\pi^2)}+t^2+C\sin(2k+1)t$, $\lambda\in\left\{\lambda_k^+\,:\,k\geq 0\right\}$; $x\in\varnothing$, $\lambda\in\{\lambda_0,\lambda_n^-\,:\,n\geq 0\}$. **32.** $\lambda_0=\frac{1}{\pi^2}$, $\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\lambda_{n+1}=-(n+\frac{1}{2})^2$, $\varphi_{n+1}^{(1)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)t$, $\varphi_{n+1}^{(2)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2n+1)t$, $n\geq 0$. 1) $x(t)=\frac{1}{1-\pi^2\lambda}+\frac{\sin t}{1+4\lambda}-2\cos 2t$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{\sin t}{1+(2n+1)^2}+\frac{4}{4+(2n+1)^2\pi^2}-2\cos 2t+C_1\sin(2n+1)t+C_2\cos(2n+1)t$, $\lambda=\lambda_n$, $n\geq 2$; $x\in\varnothing$, $\lambda\in\{\lambda_0,\lambda_1\}$. 2) $x(t)=\frac{\sin t}{1+4\lambda}+\frac{9\sin 3t}{9+4\lambda}+\sin 2t+\sin 4t$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=\frac{\pi^2\sin t}{\pi^2+4}+\frac{9\pi^2\sin 3t}{9\pi^2+4}+\sin 2t+\sin 4t+C$, $\lambda=\lambda_0$; $x(t)=\frac{\sin t}{1-(2n+1)^2}+$

$\frac{9\sin 3t}{9-(2n+1)^2}+\sin 2t+\sin 4t+C_1\sin(2n+1)t+C_2\cos(2n+1)t,\ \lambda\in\{\lambda_n\,:\,n\geq 3\}$; $x\in\varnothing,\ \lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$. 3) $x(t)=\operatorname{sign}t-\frac{16\lambda}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3+4(2n+1)\lambda},\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\,:\,n\geq 0\}$; $x(t)=C+\operatorname{sign}t-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3\pi^2+4(2n+1)},\ \lambda=\lambda_0$; $x\in\varnothing,\ \lambda\in\{\lambda_n\,:\,n\geq 1\}$. 4) $x(t)=16\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^4+4(2n+1)^2\lambda}+\frac{\pi^4\lambda}{3(1-\pi^2\lambda)}+t^2,\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\,:\,n\geq 0\}$; $x\in\varnothing,\ \lambda\in\{\lambda_n\,:\,n\geq 0\}$.

РОЗДІЛ 14

20. 1) Так. 2),3) Ні. **28.** 1) Сингулярна, носій $\{0,1\}$. 2) Сингулярна, носій $\{0\}$. 3) Регулярна, носій $\mathbb{R}$. 4) Регулярна, носій $[-1,1]$. 5) Сингулярна, носій $\{-2,0,2\}$. 6)-8) Регулярні, носій $\mathbb{R}$. 9) Сингулярна, носій $[0,2\pi]$. 10) Сингулярна, носій $\{1,3\}$. **35.** $C\delta(x)$. **39.** 1) $\operatorname{sign}x$; 2) $2\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta(x-k\pi)$. **41.** 1) $\delta_a^{(n-1)}$; 2) $\theta(x)\cos x$; 3) $\delta_0-\theta(x)\sin x$; 4) $\delta_0^{(n-1)}+a\delta_0^{(n-2)}+\ldots+a^{n-1}\delta_0+a^n\theta(x)e^{ax}$; 5) $2\delta_0^{(n-1)}$; 6) $\operatorname{sign}x$; 7) $\operatorname{sign}x, n=1$; $2\delta_0^{(n-2)}$; 8) $2\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k+1}\delta^{(n-1)}_{(k+\frac{1}{2})\pi}$; 9) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k^{(n-1)}$. **42.** 1) $f'=\theta(x)\cos x,\ f''=\delta_0-\theta(x)\sin x,\ f'''=\delta_0'-\theta(x)\cos x$. 2) $f'=\delta_0-\theta(x)\sin x,\ f''=\delta_0'-\theta(x)\cos x,\ f'''=\delta_0''-\delta_0+\theta(x)\sin x$. 3) $f'=2\theta(1-|x|)x+\delta_{-1}-\delta_1,\ f''=2\theta(1-|x|)-2\delta_{-1}-2\delta_1+\delta_{-1}'-\delta_1',\ f'''=2\delta_{-1}-2\delta_1-2\delta_{-1}'-2\delta_1'+\delta_{-1}''-\delta_1''$. 4) $f'=\theta(x)-\theta(x-1)+2\theta(x-1)x,\ f''=\delta_0+\delta_1+2\theta(x-1),\ f'''=\delta_0'+\delta_1'+2\delta_1$. 5) $f'=2\theta(x+1)\cdot(x+1)-2\theta(x),\ f''=2\theta(x+1)-2\delta_0,\ f'''=2\delta_{-1}-2\delta_0'$. 6) $f'=\theta(\pi-|x|)\cos x,\ f''=-\theta(\pi-|x|)\sin x+\delta_\pi-\delta_{-\pi},\ f'''=-\theta(\pi-|x|)\cos x+\delta_\pi'-\delta_{-\pi}'$. 7) $f'=2x\theta(x)-4\theta(x-1)-2(x-2)\theta(x-2),\ f''=2\theta(x)-2\theta(x-2)-4\delta_1,\ f'''=2\delta_0-2\delta_2-4\delta_1'$. 8) $f'=\theta(\pi-|x|)\operatorname{sign}x\cos x,\ f''=-\theta(\pi-|x|)\operatorname{sign}x\sin x+2\delta_0+\delta_{-\pi}+\delta_\pi,\ f'''=-\theta(\pi-|x|)\operatorname{sign}x\cos x+2\delta_0'+\delta_{-\pi}'+\delta_\pi'$. **44.** $\alpha'\theta+\alpha(0)\delta$. **46.** Нехай $\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\delta_0^{(k)}=0$. Довести, що тоді $c_0=0$ і $0=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\delta_0^{(k)}=(\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\delta_0^{(k-1)})'$, $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\delta_0^{(k-1)}=\mathrm{const}$, але внаслідок сингулярності похідних від δ-функції ця стала дорівнює 0. **50.** C_1x+C_2. **52.** 1) $C\delta_1$; 2) $C_1\delta_1+C_2\delta_{-1}$; 3) $C\delta_0+\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$; 4) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}C_k\delta_{(k+\frac{1}{2})\pi}$; 5) $C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta_0$; 6) $C_0+C_1x+C_2\theta(x+1)+C_3(x+1)\theta(x+1)$;

7) $C_1\delta_1 + C_2\delta_0$; 8) $C\delta_0 + \mathcal{P}\frac{1}{x}$; 9) $C_1\delta_0 + C_2\delta_0'$; 10) $C_1 + C_2\theta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$; 11) $C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta_0-\mathcal{P}\frac{1}{x}$; 12) $C_0+C_1x+C_2x^2+C_3(x+1)^2\theta(x+1)$. **53.** Скористатись задачею 11. **57.** $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{-ax}$, $u(x) = Ce^{-ax} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-a(x-y)}\varphi(y)dy$. **58.** 1) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{a}\theta(x)\operatorname{sh} ax$, $u(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \operatorname{sh} a(x-y)\varphi(y)dy$. 2) $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{\mp ax}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_kx^{k-1}e^{\mp ax} + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\mp a(x-y)}\varphi(y)dy$. 3) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{4}\theta(x)(1 - e^{-4x})$, $u(x) = C_1 + C_2e^{-4x} + \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} (1 - e^{-4(x-y)})\varphi(y)dy$. 4) $\mathcal{E}(x) = xe^x\theta(x)$, $u(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \int\limits_{-\infty}^{x} (x-y)e^{x-y}\varphi(y)dy$. 5) $\mathcal{E}(x) = \theta(x)(e^{-x}-e^{-2x})$, $u(x) = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\int\limits_{-\infty}^{x}(e^{-(x-y)}-e^{-2(x-y)})\varphi(y)dy$. 6) $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{2x}\sin x$, $u(x) = (C_1\sin x + C_2\cos x)e^{2x} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{2(x-y)}\cdot \sin(x-y)\varphi(y)dy$. 7) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{3a^2}\theta(x)(e^{ax}-e^{-\frac{ax}{2}}(\cos\frac{a\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{a\sqrt{3}}{2}x))$, $u(x) = C_1e^{ax} + (C_2\cos\frac{a\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{a\sqrt{3}}{2}x)e^{-\frac{ax}{2}} + \frac{1}{3a^2}\int\limits_{-\infty}^{x} (e^{a(x-y)} - e^{-\frac{a}{2}(x-y)}$ $(\cos\frac{a\sqrt{3}}{2}(x-y) + \sqrt{3}\sin\frac{a\sqrt{3}}{2}(x-y)))\operatorname{sh} a(x-y)\varphi(y)dy$. 8) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\theta(x)(1-e^x)^2$, $u(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} (1-e^{x-y})^2\varphi(y)dy$. 9) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2a^3}\theta(x)(\operatorname{sh} ax-\sin ax)$, $u(x) = C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax+\frac{1}{2a^3}\int\limits_{-\infty}^{x} (\operatorname{sh} a(x-y)-\sin a(x-y))\varphi(y)dy$. 10) $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\theta(x)\cdot(x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$, $u(x) = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} ((x-y)\operatorname{ch}(x-y)-\operatorname{sh}(x-y))\varphi(y)dy$. **60.** 1) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{x^2-y^2\}$; 2) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{x^3-y^3\}$; 3) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)(\cos y - \cos x)$; 4) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)(\sin y - \sin x)$; 5) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)(2\cos(x^2 + \frac{\pi}{3}) - 2\cos(y^2 + \frac{\pi}{3}))$; 6) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2 x - \operatorname{arctg}^2 y)\}$; 7) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{x^4 - 2x^2 + x - y^4 + 2y^2 - y\}$; 8) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{\frac{1}{\ln 2}(2^x - 2^y)\}$; 9) $\mathcal{E}(x,y) = \theta(x-y)\exp\{\frac{1}{\ln 3}(3^{y^3} - 3^{x^3})\}$. **61.** Так. Ні. Так. Ні. **64.** Скористатись задачами 15 і 22.3. **65.** Так. Ні.

Ні. **71.** 2) Проінтегрувати частинами. **73.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$. 2) $\frac{iy}{(2a)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$.

74. 1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-iy)}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}$; 3) $\frac{-4iay}{\sqrt{2\pi}(a^2+y^2)^2}$; 4) $e^{-a|y|}$; 5) $\frac{e^{iay}-1}{iy\sqrt{2\pi}}$; 6) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ay}{y}$; 7) $(2a)^{-\frac{5}{2}}(2a-y^2)e^{-\frac{y^2}{4a}}$; 8) $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\operatorname{ch}(ay)$. **75.** Використайте рівність $F^4 = I$. Насправді $\sigma(F) = \sigma_p(F) = \{1, -1, i, -i\}$, (див. [17]). **77.** При $h \in L_2(\mathbb{R})$ доведіть нерівність $\int\limits_{\mathbb{R}} |h(x)|(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy)dx \leq ||f||_{L_1} \cdot ||g||_{L_2} \cdot ||h||_{L_2}$. **82.** 1) $\delta(x-1, y-1) - \delta(x, y-1) - \delta(x-1, y) + \delta(x, y)$; 2) $2(-\delta(x+1, y) + \delta(x, y+1) + \delta(x-1, y) - \delta(x, y-1))$. Застосувати формулу Гріна до інтегралу $\int\limits_S (\varphi''_{yy} - \varphi''_{xx})dxdy$.

83. Перша й третя.

ЛІТЕРАТУРА

1) Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск, 1978.

2) Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анадиз и интегральные уравнения. – Минск, 1984.

3) Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М., 1976.

4) Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. В 2 т. – Х., 1977-78.

5) Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К., 1990.

6) Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М., 1989.

7) Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1979.

8) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1971.

9) Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. – М., 1969.

10) Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К., 1990.

11) Городецький В.В., Нагнибіда М.І. Узагальнені функції. Теореми і задачі. – К., 1996.

12) Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. У 2 ч. – К., 1997.

13) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. – Т.1. Общая теория. – М., 1962.

14) Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К., 1987.

15) Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1984.

16) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., 1988.

17) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989.

18) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М., 1984.

19) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М., 1965.

20) Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М., 1948.

21) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т.1. Функциональный анализ. – М., 1977.

22) Рудин У. Функциональный анализ. – М., 1975.

23) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., 1984.

24) Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М., 1970.

25) Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1984.

26) Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – М., 1960.

ПЕРЕЛІК ПОМИЛОК, ДОПУЩЕНИХ У РОЗДІЛАХ 1-10

1. Стор. 6, 2-й рядок знизу. Замість "$||x||_p = \int\limits_T |x(t)|^p d\mu(t)$" треба читати "$||x||_p = \left(\int\limits_T |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$" .

2. Стор. 7, 2-й рядок знизу. Замість
"$\left(\int\limits_T |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_T |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_T |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$"
треба читати
"$\left(\int\limits_T |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_T |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$" .

3. Стор. 10, 11-й рядок знизу. Замість "$t \in [0,1]$" треба читати "$t \in (0,1]$" .

4. Стор. 17, 11-й рядок зверху. Замість "$||x|| = Var(x,[a,b])$" треба читати "$||x|| = V(x,[a,b])$" .

5. Стор. 26, 8-й рядок зверху. Замість "$(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y^n}$" треба читати "$(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$" .

6. Стор. 26, 10,11-й рядок зверху. Замість "Цей простір має базис $\left\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ " треба читати "Простір $L_2([-1,1])$ має ортонормований базис $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int},\ t \in [-\pi,\pi] : n \in \mathbb{Z}\right\}$ " .

7. Стор. 26, 10-й рядок зверху. Замість "$(x,y) = \int\limits_T x(t)\overline{y(t)}d\mu$" треба читати "$(x,y) = \int\limits_T x(t)\overline{y(t)}d\mu(t)$" .

8. Стор. 27, 11-й рядок знизу. Замість "$S : X \times X \to \mathbb{R}$" треба читати "$S : X \times X \to \mathbb{C}$" .

9. Стор. 52, 12-й рядок зверху. Замість "$f \in X^*, F \in G^*$" треба читати "$f \in G^*, F \in X^*$" .

10. Стор. 74, 7-й рядок зверху. Замість "$F_n \in BV([a, b])$" треба читати "$F_n \in BV_0([a, b])$" .

11. Стор. 74, 14-й рядок знизу. Замість "збігається на $[0, 1]$" треба читати "збігається майже скрізь на $[0, 1]$ відносно міри Лебега" .

12. Стор. 80, 14-й рядок зверху. Замість "$x \in Y$" треба читати "$x \in X$" .

13. Стор. 94, 8-й рядок знизу. Замість "$K : X \to X$" треба читати "$K_n : X \to X$" .

14. Стор. 103, 3-й,5-й рядки знизу. Замість "і" треба читати "при цьому " .

15. Стор. 105, 4-й рядок знизу. Замість "$H = L_2(\mathbb{R})$" треба читати "$H = L_2([0, 1])$" .

16. Стор. 106, 8-й рядок знизу. Замість "проектор" треба читати "ортопроектор" .

17. Стор. 106, 6-й рядок знизу. Замість "$\sigma : H \to H$" треба читати "$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$" .

18. Стор. 110, 10-й рядок знизу. Замість "ОНБ " треба читати "ортонормований базис " .

19. Стор. 119, 17-й рядок знизу. Замість "проектор" треба читати "ортопроектор" .