Київський національний університет імені Тараса Шевченка
кафедра геометрії, топології і динамічних систем

О.О.Пришляк

ОСНОВИ СУЧАСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Київ 2018

УДК 514.7

О.О.Пришляк. Основи сучасної геометрії. Навчальний посібник – Київ. 2018, 164с.

Навчальний посібник присвячений дослідженню геометричних властивостей диференціально-геометричних структур на гладких многовидах. Детально описано властивості груп та алгебр Лі, які застосовуються для вивчення головних розшарувань. Векторні розшарування і їх геометричні властивості досліджуються за допомогою асоційованих з ними головних розшарувань реперів.

Для студентів та науковців, що бажають ознайомитися з основними геометричними конструкціями сучасної теорії многовидів.

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співр. Д.В.Болотов,
доктор фіз.-мат. наук, проф. А.П.Петравчук

Рекомендовано до друку Вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол 11 від 26.06.18

Зміст

ВСТУП **4**

Тема 1. **ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА** **5**

Тема 2. **ГРУПИ ТА АЛГЕБРИ ЛІ** **32**

Тема 3. **ДІЇ ГРУП НА МНОГВИДАХ** **66**

Тема 4. **ГОЛОВНІ РОЗШАРУВАННЯ** **83**

Тема 5. **АФІННА ЗВ'ЯЗНІСТЬ І ГОЛОВНЕ РОЗШАРУВАННЯ РЕПЕРІВ** **101**

Тема 6. **РІМАНОВІ ТА ПСЕВДОРІМАНОВІ ПРОСТОРИ** **136**

Тема 7.**КОМПЛЕКСНІ ТА ЕРМІТОВІ СТРУКТУРИ** **144**

ЛІТЕРАТУРА **158**

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК **162**

ВСТУП

Цей навчальний посібник присвячений застосуванню алгебраїчних конструкцій в геометрії многовидів. В першій темі, крім методів лінійної алгебри, використовуються диференційовані та градуйовані алгебри. В подальшому застосовуються теоретико-групові методи. В другій темі вивчаються геометричні властивості груп Лі та їх алгебр Лі. В третій і четвертій темі вони використовуються для дослідження головних розшарувань. Елі Картан заснував метод, який назвали методом рухомого репера. Він полягає в тому, що дослідження геометрії многовида M з фіксованою на ньому геометричною структурою, зводиться до дослідження геометрії простору розшарування реперів над многовидом M або підрозшарувань цього розшарування. Цей метод описано в п'ятій темі, а його застосування в шостій та сьомій темах.

Посібник написано на основі спеціальних курсів, які автор читав на механіко-математичному факультеті КНУ. В ньому наводяться необхідні означення (відповідне слово виділяється *курсивом*) та приклади, а більшість тверджень сформульовано у вигляді вправ. Їх доведення та розв'язки можна знайти у [15], [8] або [14] . Автор щиро вдячний В.Ф.Кириченку та В.М.Кузаконю за їх допомогу та співпрацю в написанні цього посібника та спільної монографії [15].

В посібнику використовуються основні означення та поняття, що читаються в нормативних курсах з алгебри, диференціального числення, диференціальної геометрії та топології для студентів механіко-математичних факультетів.

Тема 1

ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА

Векторні поля як диференціювання алгебри гладких функцій

Нехай M^n — гладкий многовид. Нагадаємо, що функція $f : M \to \mathbb{R}$ *гладка* на M, якщо для будь-якої карти (U, φ) на M відображення $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ є гладким відображенням областей евклідових просторів.

У множині $C^\infty(M)$ усіх гладких функцій на M, визначена структура нескінченновимірної алгебри (*алгебри гладких функцій* на многовиді M) над полем $\mathbb{R}$ з операціями

$$\begin{aligned}
&(1)\ (f+g)(p) = f(p) + g(p),\\
&(2)\ (\lambda f)(p) = \lambda \cdot f(p),\\
&(3)\ (f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p),
\end{aligned}$$

$(p \in M;\ f, g \in C^\infty(M);\ \lambda \in \mathbb{R})$.

Вправа 1.1. Довести, що це асоціативна, комутативна алгебра з одиницею (одиницею є функція $f(p) \equiv 1; \quad p \in M$).

Вправа 1.2. Довести, що елементи алгебри $C^\infty(M)$ мають такі властивості:

(F1) Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^\infty(M), \alpha$ — гладка функція на $\mathbb{R}^r$. Тоді $\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in C^\infty(M)$.

(F2) Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$, причому $\forall\, p \in M\, \exists\, g \in C^\infty(M)\, \exists\, U_p \quad \&$ $g|_{U_p} = f|_{U_p}$. Тоді $f \in C^\infty(M)$. Тут і надалі U_p — відкритий окіл точки p, $f|_{U_p}$ — звуження функції f на цей окіл.

(F3) $\forall p \in M\, \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^\infty(M)$ & відображення

$$q \to \big(\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q)\big), \qquad q \in U_p,$$

— гомеоморфізм області U_p на відкриту підмножину простору $\mathbb{R}^n$. При цьому U_p і $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ можна вибрати так, що кожну функцію $f \in C^\infty(M)$ на U_p можна подати у вигляді $f|_{U_p} = \alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, де α — гладка функція на $\mathbb{R}^n$.

Вправа 1.3. Довести, що задання гладкої структури на хаусдорфовому топологічному просторі M рівносильне заданню на ньому алгебри $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ дійсних функцій, що задовольняють умовам $(F1) - (F3)$.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка алгебра над полем F. Відображення $X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ є *диференціюванням* алгебри $\mathcal{A}$, якщо:

1) $X(f + g) = X(f) + X(g)$;
2) $X(\lambda f) = \lambda X(f)$;
3) $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g); \qquad f, g \in \mathcal{A},\ \lambda \in F.$

Гладке векторне поле на гладкому многовиді M — це довільне диференціювання алгебри $C^\infty(M)$. $C^\infty(M)$-модуль диференціювань $\mathrm{Diff}\big(\big(C^\infty(M)\big)\big)$ позначається $\mathfrak{X}(M)$ і називається *модулем гладких векторних полів* на многовиді M.

Вправа 1.4. Доведіть такі властивості векторних полів на гладкому многовиді.

- Нехай M — гладкий многовид, X — векторне поле на M. Тоді $X(const) = 0$.

- Нехай M — гладкий многовид, $U \subset M$ — відкритий підмноговид, $f \in C^\infty(M)$ & $f|_U = 0$. Тоді

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) \implies Xf|_U = 0.$$

- Усяке векторне поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ індукує векторне поле $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(U)$ на будь-якому відкритому підмноговиді $U \subset V$.

  Таким чином, усякому векторному полю $X \in \mathfrak{X}(M)$ зіставляється векторне поле на будь-якому відкритому підмноговиді $U \subset M$, яке називається *обмеженням*, або *звуженням*, або *локалізацією* векторного поля X на U і позначається $X|_U$. Довести, що це зіставлення є гомоморфізмом $\mathbb{R}$-лінійних просторів.

- Нехай $U \subset M$ — відкритий підмноговид гладкого многовида, X — векторне поле на U. Довести,що

  $$\forall\, p \in U\, \exists\, Y \in \mathfrak{X}(M)\, \exists\, V_p \subset U \;\;\&\;\; X|_{V_p} = Y|_{V_p},$$

  де V_p — деякий окіл точки p.

Вправа 1.5. Нехай (U, φ) — локальна карта на гладкому многовиді M з координатами $\{\, x^1, \ldots, x^n \,\}$. Довести,що модуль $\mathfrak{X}(U)$ є вільний модуль із твірними $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$. Зокрема,

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) \implies X|_U = \sum_{i=1}^{n} x|_U (x^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad \square$$

$\mathbb{R}$-лінійне відображення $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ є *Інфінітезимальним диференціюванням* або *і-диференціюванням* алгебри $C^\infty(M)$ у точці $p \in M$, якщо

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta(g); \qquad f, g \in C^\infty(M).$$

Усяке векторне поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ породжує i-диференціювання X_p у кожній точці $p \in M$, що називається *значенням* векторного поля X у точці p. Визначимо відображення $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ формулою $X_p(f) = X(f)(p)$. Тоді

$$\begin{aligned} X_p(f \cdot g) = X(f \cdot g)(p) = X(f)(p)g(p) + f(p)X(g)(p) = \\ = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g); \qquad f, g \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Позначимо через $\Delta_p(M)$ сукупність усіх i-диференціювань на гладкому многовиді M у точці $p \in M$. Визначимо операції додавання і множення на число елементів з $\Delta_p(M)$ так: якщо $\xi, \eta \in \Delta_p(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$(\xi + \eta)(f) = \xi(f) + \eta(f); \qquad (\lambda\xi)(f) = \lambda \cdot \xi(f); \qquad f \in C^\infty(M).$$

Вправа 1.6. Довести, що $\Delta_p(M)$ має природну структуру n-вимірного лінійного простору, де n — розмірність многовида.

Вправа 1.7. Довести, що якшо $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ — i-диференціювання на гладкому многовиді M у точці $p \in M$, то

$$\exists\, X \in \mathfrak{X}(M) \ \& \ \delta = X_p.$$

Вправа 1.8. Довести, що лінійні простори $T_p(M)$ і $\Delta_p(M)$ канонічно ізоморфні.

Вправа 1.9. Довести, що задання векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на n-вимірному гладкому многовиді M рівносильне заданню сім'ї дотичних векторів $\{\, X_p \in T_p(M) \,\}_{p \in M}$ на M, такої, що в кожній локальній карті (U, φ) з координатами $\{\, x^1, \dots, x^n \,\}$ на M функції $X^i(q) = X_q(x^i)$ належать алгебрі $C^\infty(U)$ і є компонентами цього векторного поля в натуральному базисі.

Алгебра Лі векторних полів

Нехай M — гладкий многовид, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль його гладких векторних полів, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Бінарна операція $X, Y \to [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ у модулі $\mathfrak{X}(M)$ називається *комутуванням*, а векторне поле $[X, Y]$ — *дужкою Лі* або *комутатором* векторних полів X і Y.

Вправа 1.10. Доведіть, що має місце рівність

$$X \circ Y(fg) = X \circ Y(f)g + f(X \circ Y)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g).$$

Отже, композиція $X \circ Y$, загалом кажучи, не є векторним полем, тобто диференціюванням алгебри $C^\infty(M)$.

Вправа 1.11. Доведіть, що

$$(X \circ Y - Y \circ X)(fg) = (X \circ Y - Y \circ X)(f)g + f(X \circ Y - Y \circ X)(g),$$

тобто відображення $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(M)$ є диференціюванням.

Вправа 1.12. Довести, що операція комутування має такі властивості:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикомутативність);
2) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$ (тотожність Якобі).

Алгебра Лі гладких векторних полів многовида M — це модуль $\mathfrak{X}(M)$, розглянутий як (нескінченновимірний) $\mathbb{R}$-лінійний простір, з природною структурою алгебри Лі щодо операції комутування.

Вправа 1.13. Доведіть рівність

$$[fx, gy] = fg[X, Y] + fx(g)Y - gy(f)X. \tag{2.1}$$

Вправа 1.14. Нехай (U, φ) — локальна карта на многовиді M з координатами $\{x^1, ..., x^n\}$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Девести, що i-та компонента комутанта може бути знайдена за формулою

$$[X, Y]^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j. \tag{2.2}$$

Вправа 1.15. Девести, що комутатор базисних полів $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Тензорна алгебра гладкого многовида

Нехай V — модуль над комутативним асоціативним кільцем K з одиницею, або K-модуль, V^* — дуальний модуль K-лінійних функцій на V зі значеннями в K. Модуль V ототожнюється з підмодулем модуля $V^{**} = (V^*)^*$ за допомогою відображення $\tau : V \to V^{**}$, заданого тотожністю

$$\tau(X)(\omega) = \omega(X); \qquad X \in V,\ \omega \in V^*.$$

Якщо V — вільний модуль, відображення τ є мономорфізмом. Модуль V *рефлексивний*, якщо відображення τ є ізоморфізмом.

Вправа 1.16. Перевірте, що всякий скінченновимірний лінійний простір є рефлексивним модулем [10].

Нехай V — рефлексивний K-модуль. Розглянемо K-модуль $\mathcal{T}_r^s(V)$ усіх відображень

$$t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ раз}} \to K,$$

K-лінійних за кожним аргументом. Його елементи називаються *r раз коваріантними й s раз контраваріантними тензорами на модулі V* або *тензорами типу* (r, s). Природно визначається операція *тензорного множення*:

$$\otimes : \mathcal{T}_{r_1}^{s_1}(V) \times \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}(V) \to \mathcal{T}_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}(V).$$

Якщо $t_1 \in \mathcal{T}_{r_1}^{s_1}(V),\ t_2 \in \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}(V)$, то $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}(V)$ визначається тотожністю

$$(t_1 \otimes t_2)(u_1, \ldots, u_{r_1+r_2}, v^1, \ldots, v^{s_1+s_2}) =$$
$$= t_1(u_2, \ldots, u_{r_1}, v^1, \ldots, v^{s_1}) t_2(u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_1+r_2}, v^{s_1+1}, \ldots, v^{s_1+s_2});$$

$(u_1, \ldots, u_{r_1+r_2} \in V, \quad v^1, \ldots, v^{s_1+s_2} \in V^*).$

Вправа 1.17. Перевірьте, що

(1) $t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3$;

(2) $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3$;

(3) $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$.

Тензорна алгебра модуля V — це K-модуль

$$\mathcal{T}(V) = \oplus_{r=0}^{\infty} \oplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{T}_r^s(V),$$

де $\mathcal{T}_0^0(V) = K$, з операцією тензорного множення. З рефлексивності цього модуля випливає, що компонента $\mathcal{T}_0^1(V)$ цієї прямої суми канонічно ототожнюється з V. Підмодулі $\mathcal{T}_*(V) = \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{T}_r^0(V)$ і $\mathcal{T}^*(V) = \oplus_{s=0}^{\infty}\mathcal{T}_0^s(V)$ утворюють підалгебри тензорної алгебри $\mathcal{T}(V)$, які є, відповідно, *коваріантною* і *контраваріантною* тензорними алгебрами модуля V.

Якщо V — скінченновимірний лінійний простір над полем K, $\{ e_1, \dots, e_n \}$ — будь-який базис цього простору, $\{ e^1, \dots, e^n \}$ — дуальний кобазис, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, то тензори вигляду

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r}; \qquad i_1, \dots, i_s,\ j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$$

утворюють базис лінійного простору $\mathcal{T}_r^s(V)$ ([10]). Зокрема,

$$\dim \mathcal{T}_r^s(V) = n^{r+s}.$$

Координати $\{ t^{i_1,\dots,i_s}_{j_1\dots j_r} \}$ тензора $t \in \mathcal{T}_r^s(V)$ у цьому базисі збігаються з його компонентами:

$$t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, e^{i_1}, \dots, e^{i_s}).$$

Тензор типу (r, s) *зі значеннями в* K*-модулі* $\mathcal{A}$ — це відображення

$$t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ раз}} \to \mathcal{A},$$

K-лінійне за кожним аргументом.

Нехай $\mathbb{K}$ — дійсна алгебра, W — N-вимірний дійсний лінійний простір, t — тензор типу (r, s) зі значеннями у модулі $\mathcal{A} = \mathbb{K} \otimes W$ (такий тензор називають *тензором зі значеннями в лінійному* *просторі* W). Зафіксуємо базис $b = \{ e_1, \ldots, e_N \}$ в W. Нехай $\{ e^1, \ldots, e^n \}$ — дуальний кобазис. Тоді $e^i \otimes e_i = \mathrm{id}$, а отже,

$$t = \mathrm{id} \circ t = (e^a \circ t) \otimes e_a = t^a \otimes e_a.$$

Відображення $t^a = e^a \circ t, \quad a = 1, \ldots, N$ є тензорами типу (r, s). Вони називаються *тензорними компонентами* тензора t у базисі b. Нехай $\beta = \{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \}$ — інший базис в W, $\{ \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n \}$ — дуальний йому кобазис, $C = (c^a_b)$ — матриця переходу від b до β, $H = (h^a_b) = C^{-1}$. Тоді $\varepsilon^a = h^a_b e^b$. Отже, якщо $\tilde{t}^a = \varepsilon^a \circ t$ — тензорний компонент тензора t у новому базисі, то

$$\tilde{t}^a = h^a_b t^b.$$

Теорема 1.1. *([15, стор. 103]) Модуль $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторних полів гладкого многовида M рефлексивний.*

Тензорна алгебра гладкого многовида M — це тезорна алгебра, що породжена модулем $\mathfrak{X}(M)$. *Модуль диференціальних 1-форм* на многовиді M — це модуль $\mathfrak{X}^*(M)$, що дуальний модулю $\mathfrak{X}(M)$.

Вправа 1.18. Нехай $X \in \mathfrak{X}(M) \quad \& \quad X|_U = 0$, де $U \subset M$ — відкритий підмноговид. Довести, що

$$\forall\, \omega \in \mathfrak{X}^*(M) \implies \omega(X)|_U = 0.$$

Нехай $U \subset M$ — відкритий підмноговид. Тоді усяка 1-форма $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ індукує 1-форму $\omega|_U = \tilde{\omega} \in \mathfrak{X}^*(U)$, що є *звуженням*, або *локалізацією* 1-форми ω на U.

Вправа 1.19. Нехай $X \in \mathfrak{X}(M)$ — векторне поле таке, що $X_p = 0$ у деякій точці $p \in M$. Довести, що

$$\forall\, \omega \in \mathfrak{X}^*(M) \implies \omega(X)(p) = 0.$$

Звуження ω_p 1-форми ω на точку $p \in M$ є лінійною функцією на просторі $T_p(M)$, тобто елементом дуального простору $T^*_p(M)$. Позначимо сукупність усіх таких елементів $\mathcal{D}(p)$.

Вправа 1.20. Довести, що $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$.

Простір $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$ називається *кодотичним простором* до многовида M у точці p.

Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, $p \in M$. Тензорна алгебра $\mathcal{T}\big(T_p(M)\big)$ позначається $\mathcal{T}(p)$ і є *тензорною алгеброю многовида M у точці p*. Тензорна алгебра $\mathcal{T}\big(\mathfrak{X}(M)\big)$ позначається $\mathcal{T}(M)$ і є *тензорною алгеброю многовида M*. Елементи цієї тензорної алгебри є *тензорними полями*, або просто *тензорами*, на многовиді M.

Вправа 1.21. Довести, що для тензорів довільного типу на гладкому многовиді M слушні ті ж властивості локалізації, як і для векторних полів. Більше того, нехай $t \in \mathcal{T}_r^s(M)$. Довести, що якщо хоча б один з аргументів $u_1, \ldots, u_r, v^1, \ldots, v^s$ цього тензорного поля обертається в нуль у точці $p \in M$, то $t(u_1, \ldots, u_r, v^1, \ldots, v^s)(p) = 0$, а отже, тензорне поле t можна розглядати як набір $t = \{\, t_p \mid p \in M,\ t_p \in \mathcal{T}_r^s(p) \,\}$ тензорів, заданих у кожній точці многовида M.

Теорема 1.2. *([15, стор. 104]) Задання тензорного поля $t \in \mathcal{T}_r^s(M)$ на n-вимірному гладкому многовиді M рівносильне заданню сім'ї тензорів $\{\, t_p \in \mathcal{T}_r^s\big(T_p(M)\big)\}_{p\in M}$ такої, що в кожній локальній карті (U,φ) з координатами $\{\, x^1, \ldots, x^n \,\}$ на M функції*

$$t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1,\ldots,j_s}(q) = t_q \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i^1}}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i^r}}\right|_q, \omega_q^{i_1}, \ldots, \omega_q^{j_s} \right),$$

де $\{\, \omega_q^1, \ldots, \omega_q^n \,\}$ — кобазис, дуальний натуральному базису простору $T_q(M)$ у точці $q \in M$, належать алгебрі $C^\infty(U)$. $\square$

Вправа 1.22. Довести цю теорему.

Алгебра Грассмана гладкого многовида.

Нехай $\mathcal{T}_*(V) = \oplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}_r^0(V)$ — коваріантна тензорна алгебра рефлексивного K-модуля V. У модулі $\mathcal{T}_r^0(V)$ природньо діє симетрична група S_r порядку r (група підстановок). Саме, якщо

$t \in \mathcal{T}_r^0(V),\ \sigma \in S_r$, то

$$(\sigma t)(X_1, \ldots, X_r) = t(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}).$$

Очевидно, якщо $\sigma, \tau \in S_r$, то $(\sigma \circ \tau)t = \sigma(\tau t)$, тобто цим визначається (ліва) дія групи S_r. Тензор $t \in \mathcal{T}_r^0(V)$ називається *симетричним*, якщо $\forall \sigma \in S_r \implies \sigma t = t$. Тензор $t \in \mathcal{T}_r^0(V)$ називається *кососиметричним*, якщо

$$\forall \sigma \in S_r \implies \sigma t = \varepsilon(\sigma) t,$$

де $\varepsilon(\sigma)$ — індекс підстановки σ, який дорівнює 1 для парної та -1 для непарної підстановок. Очевидно, тензор t симетричний (відп., кососиметричний) тоді й тільки тоді, коли він не змінює (відп., змінює) знак при будь-якій транспозиції своїх аргументів.

Очевидно, симетричні (відп., кососиметричні) тензори утворюють підмодулі модуля $\mathcal{T}_r^0(V)$, які позначуються відп., $\mathcal{S}_r(V)$ і $\Lambda_r(V)$. Легко перевірити, що ендоморфізми Sym і Alt модуля $\mathcal{T}_r^0(V)$, задані формулами

$$\mathrm{Sym}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma t; \qquad \mathrm{Alt}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma t,$$

є проекторами на підмодулі $\mathcal{S}_r(V)$ і $\Lambda_r(V)$ відповідно. Вони називаються *операторами симетризації* і *альтернування* відповідно. За допомогою оператора Alt природно визначається операція

$$\wedge : \Lambda_r(V) \times \Lambda_s(V) \to \Lambda_{r+s}(V).$$

Саме, якщо $\omega \in \Lambda_r(V),\ \theta \in \Lambda_s(V)$, то $\omega \wedge \theta \in \Lambda_{r+s}(V)$ визначається формулою

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \theta).$$

Вправа 1.23. Довести, що

(1) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$;

(2) $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$;

(3) $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.

Таким чином, операція "$\wedge$", яка називається *зовнішнім множенням*, продовжена за лінійностю, перетворює K-модуль

$$\Lambda(V) = \oplus_{r=0}^{\infty} \Lambda_r(V),$$

де $\Lambda_0(V) = K$, $\Lambda_1(V) = V^*$, в асоціативну алгебру, що називається *зовнішньою алгеброю* модуля V. Елементи зовнішньої алгебри називаються *зовнішніми формами*. Якщо $\omega \in \Lambda_r(V)$, то форма ω називається *однорідною формою степені* r або r-*формою*.

Нагадаємо [10], що якщо V — n-вимірний лінійний простір над полем $\mathbb{K}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис простору V, $\{e^1, \dots, e^n\}$ — дуальний кобазис, то r-форми вигляду $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_n}$, $i_1 < \dots < i_r$, утворюють базис лінійного простору $\Lambda_r(V)$. Звідси випливає, зокрема, що $\dim \Lambda_r(V) = C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Координати $\{\theta_{i_1 \dots i_r}\}$ r-форми $\theta \in \Lambda_r(V)$ у цьому базисі збігаються з її компонентами:

$$\theta_{i_1 \dots i_r} = \theta(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}).$$

Нехай $\mathbb{K}$ — дійсна алгебра, ω, θ — форми на $\mathbb{K}$-модулі V степенів r і s, відповідно, зі значеннями в модулі $\mathbb{K} \otimes \mathfrak{g}$, де $\mathfrak{g}$ — дійсна алгебра Лі. Тоді формулою

$$[\omega, \theta](X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \big[\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}), \theta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})\big],$$

$(X_1, \dots, X_{r+s} \in V)$, внутрішньо визначена $(r+s)$-форма $[\omega, \theta]$ зі значеннями в тому ж модулі. Ця форма називається *комутатором* форм ω і θ.

Приклад 1.1. Якщо θ є 1-формою на V, то

$$[\theta, \theta](X, Y) = \big\{[\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)]\big\} = 2[\theta(X), \theta(Y)].$$

Якщо в $\mathfrak{g}$ фіксований базис $\{ e_1, \dots, e_N \}$, то $\theta = \theta^a \otimes e_a$ і

$$[\theta,\theta](X,Y) = (\theta^a \wedge \theta^b) \otimes [e_a, e_b](X,Y), \text{ а отже, }$$
$$[\theta,\theta] = (\theta^a \wedge \theta^b) \otimes [e_a, e_b].$$

Нехай W — дійсний лінійний простір, θ і ω — форми на $\mathbb{K}$-модулі V зі значеннями в модулях $\mathbb{K} \otimes EndW$ і $\mathbb{K} \otimes W$, відповідно. Тоді формулою

$$\theta\omega(X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\theta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})\big(\omega(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})\big),$$

$(X_1, \dots, X_{r+s} \in V)$ внутрішньо визначена $(r+s)$-форма $\theta\omega$ зі значеннями в модулі $\mathbb{K} \otimes W$. Цю форму назвемо *операторним добутком* форми θ на форму ω.

Приклад 1.2. Нехай ω і θ — 1-форми зі значеннями в просторі $\mathbb{R}^n$ і повній матричній алгебрі $M_{n,n} = End(\mathbb{R}^n)$ відповідно, $\omega = \omega^k \otimes e_k$, $\theta = \theta^i_j \otimes e^j_i$. Тоді

$$\theta\omega(X,Y) = \big\{(\theta(X)\big(\omega(Y)\big) - (\theta(Y)\big(\omega(X)\big)\big\} = \\ = \{\theta^i_j(X)\omega^j(Y)\varepsilon_i - \theta^i_j(Y)\omega^j(X)\varepsilon_i\} = \\ = \big((\theta^i_j \otimes \omega^j)(X,Y)\varepsilon_i - (\theta^i_j \otimes \omega^j)(Y,X)\varepsilon_i\big) = \theta^i_j \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i(X,Y),$$

і, таким чином, $\theta\omega = \theta^i_j \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i$.

Нехай M — гладкий многовид. Зовнішня алгебра $\Lambda\big(\mathfrak{X}(M)\big)$ позначається $\Lambda(M)$ і називається *алгеброю Грассмана* гладкого многовида M, а її елементи називаються *диференціальними формами*. В алгебрі Грассмана внутрішньо визначений диференціальний оператор, двоїстий операції комутування векторних полів, важливий не тільки для диференціальної геометрії, але й для топології многовидів. Цей оператор описується в такій вправі:

Вправа 1.24. Нехай M — гладкий многовид. Довести, що існує єдине $\mathbb{R}$-лінійне відображення $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$, яке має такі властивості:

(d1) $d\big(\Lambda_r(M)\big) \subset \Lambda_{r+1}(M); \quad r = 0, 1, 2, \ldots;$

(d2) $df(X) = X(f); \quad \big(f \in C^\infty(M) = \Lambda_0(M),\ X \in \mathfrak{X}(M)\big);$

(d3) $d \circ d = 0;$

(d4) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta; \quad \big(\omega \in \Lambda_r(M),\ \theta \in \Lambda(M)\big).$

Оператор $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ називається *оператором зовнішнього диференціювання.* Диференціальна r-форма $\omega \in \Lambda_r(M)$ називається *замкненою*, або *r-вимірним коциклом*, якщо $d\omega = 0$, і називається *точною*, або *r-вимірної кограницею*, якщо $\exists\, \theta \in \Lambda(M)\ \&\ d\theta = \omega$.

Сукупність усіх замкнених (відп., точних) r-форм на M позначається $\mathcal{Z}_r(M)$ (відп., $\mathcal{B}_r(M)$). Із $\mathbb{R}$-лінійності оператора d випливає, що $\mathcal{Z}_r(M)$ і $\mathcal{B}_r(M)$ утворюють (нескінченновимірний) підпростір лінійного простору $\Lambda_r(M)$, а з $(d3)$ — той факт, що $\mathcal{B}_r(M) \subset \mathcal{Z}_r(M)$. Виявляється, що факторпростір $H^r(M) = \mathcal{Z}_r(M)/\mathcal{B}_r(M)$ завжди виявляється скінченновимірним для компактних многовидів. Цей факторпростір, розглянутий як абелева група щодо операції додавання, називається *групою r-вимірних когомологий де Рама*, а її ранг (тобто розмірність відповідного факторпростору) — *r-вимірним числом Бетті* многовида M і позначається β_r. Класична теорема де Рама [30] стверджує, зокрема, що групи когомологій де Рама канонічно ізоморфні групам сингулярних дійсних когомологій, зокрема, числа Бетті многовида є топологічними інваріантами цього многовида.

Вправа 1.25. Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, (U, φ) — локальна карта на V з координатами $\{\, x^1, \ldots, x^n \,\}$. Довести, що диференціальні 1-форми $\{\, dx^1, \ldots, dx^n\}$ на U утворюють кобазис модуля $\mathfrak{X}(U)$, дуальний натуральному базису. $\square$

Вправа 1.26. Довести, що якщо $f \in C^\infty(M)$, то у відповідній локальній карті

$$df(X) = X(f) = X(x^i \circ \varphi)\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1}) =$$
$$= d(x^i \circ \varphi)(X)\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1}) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})d(x^i \circ \varphi)(X) = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i(X); \qquad X \in \mathfrak{X}(M),$$

а отже, у цій карті

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i; \qquad f \in C^\infty(M). \tag{6.4}$$

Вправа 1.27. Вивести формулу для обчислення зовнішнього диференціала r-форми в даній локальній карті:

$$d\omega = \frac{1}{r!}\frac{\partial a_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^j}dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}. \tag{6.5}$$

Вправа 1.28. Довести, що якщо $r = 1$, то

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \tag{6.6}$$

Нехай θ — r-форма на M зі значеннями в лінійному просторі W. Фіксуємо в W базис $b = \{ e_1, \ldots, e_N \}$. Тоді $\theta = \theta^a \otimes e_a$, де $\{ \theta^a \}$ — тензорні компоненти форми θ. Визначимо $(r+1)$-форму $d\theta$ на M зі значеннями в просторі W формулою

$$d\theta = d\theta^a \otimes e_a.$$

Вправа 1.29. Довести, що форма $d\theta$ не залежить від вибору базису в W.

Побудована вище $(r+1)$-форма $d\theta$ називається *зовнішнім диференціалом* r-форми θ.

Диференціал відображення. Захоплення тензорів.

Нехай M^n і N^m — гладкі многовиди. Нагадаємо, що відображення $\phi : M \to N$ називається *гладким*, якщо

$$\forall\, f \in C^\infty(N) \implies f \circ \phi \in C^\infty(M).$$

Вправа 1.30. Довести, що це визначення рівносильне такому: відображення $\phi : M \to N$ називається *гладким*, якщо для будь-якої пари карт (U,φ) на M і (V,ψ) на N з координатами $\{ x^1,\dots,x^n \}$ і $\{ y^1,\dots,y^m \}$ відповідно відображення $\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U)\to\psi(V)$ гладке (як відображення областей евклідових просторів) у тій області, у якій воно визначене.

Фіксуємо точку $p \in M$. Тоді внутрішньо визначене відображення

$$(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N).$$

Нехай $\xi \in T_p(M)$. Покладемо

$$(\phi_*)_p(\xi)(f) = \xi(f\circ\phi); \qquad f \in C^\infty(N).$$

Вправа 1.31. Довести, що $\eta = (\phi_*)_p(\xi) \in T_{\phi(p)}(N)$.

Вправа 1.32. Довести, що $(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ — лінійне відображення.

Воно називається *диференціалом* відображення ϕ у точці p.

Вправа 1.33. Нехай (U,φ) — локальна карта з координатами $\{ x^1,\dots,x^n \}$ в околі точки p, (V,ψ) — локальна карта з координатами $\{ y^1,\dots,y^m \}$ в околі точки $\phi(p)$, $e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p; \quad i=1,\dots,n$ — натуральний базис простору $T_p(M)$, $\varepsilon_j = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}; \ j=1,\dots,m$ — натуральний базис простору $T_{\phi(p)}(N)$. Довести, що $(\phi_*)_p(e_i) = \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}\varepsilon_j$.

Отже, $\left(\left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)$ — матриця відображення $(\phi_*)_p$ щодо пари натуральних базисів. Вона називається *матрицею Якобі.*

Диференціал гладкого відображення можна описати й інакше — у термінах альтернативного опису дотичних векторів, як це робилося раніше. Нехай $\xi \in T_p(M)$ розглядається як клас $[\gamma]$ еквівалентних шляхів у точці $p \in M$. Тоді природно визначений клас $\eta = [\phi \circ \gamma] \in T_{\varphi(p)}(N)$. Виразимо відображення $\xi \overset{\tau}{\to} \eta$ у локальних координатах. Нехай у відповідному натуральному базисі вектор ξ має координати

$$\xi^i = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i \circ \gamma(t); \qquad i = 1, \dots, n,$$

а вектор η — координати η^j; $\quad j = 1, \dots, m$. Тоді

$$\eta^j = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y^j \circ (\phi \circ \gamma)^*(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y^j \circ (\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t) =$$
$$= \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i \circ (\varphi \circ \gamma)(t) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i \circ \gamma^*(t) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \xi^i,$$

звідки випливає, що відображення τ, що зіставляє вектору ξ вектор η, збігається з відображенням $(\phi_*)_p$. Уведемо позначення

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi \circ \gamma(t).$$

З використанням уведених визначень і позначень маємо

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial xi}\bigg|_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i \circ \gamma^*(t) \frac{\partial}{\partial xi}\bigg|_p$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x^i \circ \varphi \circ \gamma(t) \bigg| \frac{\partial}{\partial xi}_{\varphi(p)} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t).$$

Отже, $\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t), \quad \gamma(t) \in [\gamma] = \xi$. У цих позначеннях відображення $(\phi_*)_p$ запишеться так: $(\phi_*)_p \xi = \frac{t}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \gamma(t),\ \gamma(t) \in \xi$, або

$$(\phi_*)_p \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t) \right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi \circ \gamma(t). \tag{7.1}$$

Вправа 1.34. Показати, що *реперне відображення* $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$, що зіставляє дотичному вектору $\xi \in T_p(M)$ набір його координат у даній карті (U, φ) збігається з відображенням $(\varphi_*)_p$.

Захоплення й антизахоплення тензорів при гладких відображеннях

Нехай $\phi : M \to N$ — гладке відображення. Векторні поля $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$ називаються *ϕ-зв'язаними*, якщо

$$\forall\, f \in C^\infty(N) \implies X(f \circ \phi) = Y(f) \circ \phi.$$

Вправа 1.35. Довести, що векторні поля X і Y ϕ-зв'язані тоді й тільки тоді, коли $\forall\, p \in M \implies (\phi_*)_p X_p = Y_{\phi(p)}$.

У силу цього результату прийняте позначення $Y = \phi_* X$. Векторне поле $Y = \phi_* X$, якщо воно визначене, називається *захопленням* векторного поля X при відображенні ϕ.

Вправа 1.36. Довести, що якщо $Y_1 = \phi_* X_1$, $Y_2 = \phi_* X_2$, то

$$[Y_1, Y_2] = \phi_*[X_1, X_2].$$

Нехай $\phi : M \to N$ — гладке відображення, $\omega \in \Lambda_r(N)$. Тоді на M канонічно визначена r-форма $\phi^*(\omega) \in \Lambda_r(M)$, що має властивість

$$\phi^*(\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\phi_* X_1, \ldots, \phi_* X_r) \circ \phi;$$

$(X_i \in \mathfrak{X}(M); i = 1, \ldots, r)$, яка називається *антизахопленням* форми ω. Вона однозначно визначена співвідношенням

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \omega_{\phi(p)}\big((\phi_*)_p \xi_1, \ldots, (\phi_*)_p \xi_r\big),$$

$(p \in M,\ \xi_i \in T_p(M),\ i = 1, \ldots, r)$. Крім того, якщо f — довільна гладка функція на N, розглянута як 0-форма, то вважається

$$\phi^*(f) = f \circ \phi.$$

Тоді за лінійностю визначене відображення $\phi^* : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$, що є гомоморфізмом $\mathbb{R}$-лінійних просторів.

Вправа 1.37. Довести, що відображення ϕ^* має властивості:

$$1)\ \phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*(\omega_1) \wedge \phi^*(\omega_2); \quad 2)\ \phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega). \qquad (8.2)$$

Вправа 1.38. Нехай $\phi : M \to N$ — гладке відображення. Довести, що

$$X\big((\phi^*\omega)(Y_1, \dots, Y_r)\big) = (\phi_* X)\big(\omega(\phi_* Y_1, \dots, \phi_* Y_r)\big) \circ \phi, \quad \omega \in \Lambda_r(N).$$

Аналогічно можна визначити антизахоплення будь-яких тензорів типу $(r, 0)$. При цьому, якщо $t_1 \in \mathcal{T}_r^0(N)$, $t_2 \in \mathcal{T}_s^0(N)$, то $\phi^*(t_1 \otimes t_2) = \phi^*(t_1) \otimes \phi^*(t_2)$.

Вправа 1.39. Нехай (U, φ) — локальна карта на M з координатами $\{ x^1, \dots, x^n \}$, (V, ψ) — локальна карта на N з координатами $\{ y^1, \dots, y^m \}$, $t \in \mathcal{T}_r^0(N)$ — деякий тензор, $t = a_{i_1 \dots i_r} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_r}$ — його вираз в карті (V, ψ). Довести, що $phi^* t = b_{j_1 \dots j_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$,
де $b_{j_1 \dots j_r} = (a_{i_1 \dots i_r} \circ \phi) \frac{\partial y^{i_1} \circ \phi}{\partial x j_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial y^{i_r} \circ \phi}{\partial x j_r}$.

Якщо $\phi : M \to N$ — дифеоморфізм, то для всякого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ визначене його захоплення $\phi_*(X)$. Відображення $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ є ізоморфізмом алгебр Лі як $\mathbb{R}$-векторних просторів. Відображення $\phi_*^{-1} : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ позначається ϕ^* і називається *антизахопленням* векторних полів. Аналогічно, відображення $\phi_* = (\phi^*)^{-1} : \Lambda(M) \to \Lambda(N)$ називається *захопленням* диференціальних форм. Нарешті, відображення

$$\phi_* : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(N),$$

задане формулою

$$\phi_*(t)(u_1, \dots, u_r, v^1, \dots, v^s) = t(\phi^* u_1, \dots, \phi^* u_r, \phi^* v^1, \dots, \phi^* v^s) \circ \phi^{-1},$$

називається *захопленням тензорних полів*, а відображення

$$\phi^* = (\phi_*)^{-1} : \mathcal{T}(N) \to \mathcal{T}(M),$$

задане формулою

$$\phi^*(t)(u_1, \dots, u_r, v^1, \dots, v^s) = t(\phi_* u_1, \dots, \phi_* u_r, \phi_* v^1, \dots, \phi_* v^s) \circ \phi,$$

називається *антизахопленням тензорних полів* при дифеоморфізмі ϕ.

Вправа 1.40. Довести, що ці відображення є ізоморфізмами тензорних алгебр $\mathcal{T}(M)$ і $\mathcal{T}(N)$, а також алгебр Грассмана $\Lambda(M)$ і $\Lambda(N)$.

Розподіл та інтегрованість

Нехай M — n-вимірний гладкий многовид.

Розподілом на M називається підмодуль D модуля $\mathfrak{X}(M)$. Розподіл D називається *r-вимірним*, якщо існує атлас на M, у кожній карті (U, φ) якого $D|_U = \{\, X|_U \mid X \in D \,\}$ є вільний модуль із r твірними, які є векторними полями, лінійно незалежними в кожній точці многовида. Якщо ці векторні поля визначені на M глобально, розподіл називається *паралелізуємим.* Многовид M називається *паралелізуємим*, якщо паралелізуємий модуль $\mathfrak{X}(M)$.

Задання r-вимірного розподілу на многовиді M рівносильне заданню сім'ї $\{\, D_p \subset T_p(M) \mid dim D_p = r \,\}_{p \in M}$ підпросторів такої, що у кожній карті (U, φ) деякого атласу існує система $\{\, X_1, \ldots, X_r \,\} \subset \mathfrak{X}(U)$ гладких векторних полів на U така, що $D_p = \mathcal{L}\big((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p\big)$, $p \in U$. Ці підпростори називаються *інтегральними елементами* розподілу. Карти зазначеного атласу називаються *припустимими картами* розподілу D, а система $\{\, X_1, \ldots, X_r \,\}$ — *локальним базисом* розподілу D.

Розподіл D називається *інволютивним*, якщо D — підалгебра Лі алгебри Лі $\mathfrak{X}(M)$, розглянутої як (нескінченновимірний) $\mathbb{R}$-лінійний простір, тобто

$$\forall\, X, Y \in D \implies [X, Y] \in D.$$

Корозподілом на M називається підмодуль $\mathcal{C}$ модуля $\mathfrak{X}^*(M)$. Як і вище, визначається r-вимірний корозподіл.

Кожний корозподіл $\mathcal{C}$ на M породжує ідеал

$$\mathfrak{I}(\mathcal{C}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \omega_i \wedge \Omega_i \mid \omega_i \in \mathcal{C},\ \Omega_i \in \Lambda(M) \right\} \subset \Lambda(M).$$

Ідеал $\mathfrak{I} \subset \Lambda(M)$ називається *диференціальним ідеалом*, якщо $d(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{I}$.

Нехай D — розподіл на M. Підмодуль

$$\mathcal{C}_D = \{ \omega \in \Lambda_1(M) \mid \omega(X) = 0 \; \forall X \in D \}$$

називається *корозподілом, асоційованим з розподілом* D.

Вправа 1.41. Довести, що якщо $dimD = r$, то $dim\mathcal{C}_D = n - r$.

Системою Пфаффа r-вимірного розподілу називається локальний базис асоційованого корозподілу.

Анулятором розподілу D називається множина

$$AnnD = \{ \Omega \in \Lambda(M) \mid \Omega(X_1, \dots, X_N) = 0; \quad X_1, \dots, X_N \in D \}.$$

Вправа 1.42. Довести, що $AnnD = \mathfrak{I}(\mathcal{C}_D)$.

Вправа 1.43. Довести, що розподіл D інволютивний тоді й тільки тоді, коли ідеал, породжений асоційованим корозподілом $\mathcal{C}_D$, є диференціальним ідеалом.

Вправа 1.44. Нехай $\{\omega^\alpha\}$ — система Пфаффа розподілу D. Довести, що D інволютивний в тому й тільки тому випадку, коли

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \beta, \qquad \omega^\alpha_\beta \subset \Lambda_1(U), \tag{9.1}$$

де $U \subset M$ — область визначення системи Пфаффа. □

Рівняння (9.1) іноді називаються *структурними рівняннями розподілу* D.

Нехай D — r-вимірний розподіл на M. Підмноговид $N \subset M$ називається *інтегральним многовидом розподілу* D, якщо $\Lambda_1(N) \subset D|_N$, і називається *інтегральним многовидом максимальної розмірності*, якщо $\Lambda_1(N) = D|_N$. Розподіл D називається *цілком інтегрованим*, якщо через кожну точку многовида M проходить інтегральний многовид максимальної розмірності.

Теорема. *(Фробеніуса, [30]). Розподіл на гладкому многовиді цілком інтегрований тоді й тільки тоді, коли він інволютивний.*

Теорема 1.3. *([30]) Нехай $f : N \to M$ — гладке відображення таке, що $f(N) \subset \varphi(P)$, де (P, φ) — інтегральний многовид максимальної розмірності інволютивного розподілу на M. Тоді відображення f, розглянуте як відображення з N в P (тобто відображення $\varphi^{-1} \circ f : N \to P$), є гладким відображенням. Іншими словами, природно визначене відображення $\tilde{f} : N \to P$, таке, що діаграма*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ M & = & M \end{array}$$

комутативна.

Локальні потоки на многовидах

Нехай D^1 — одновимірний розподіл на гладкому многовиді M. Оскільки такий розподіл завжди інволютивний, то, за теоремою Фробеніуса, він цілком інтегрований.

Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Нехай (U, φ) — локальна карта на M з координатами $\{x^1, ..., x^n\}$, $p \in U$. Нехай у цій карті $\varphi(p) = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Точка $p \in M$ називається *особливою точкою*, або *особливістю*, векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$, якщо $X_p = 0$.

Очевидно, сукупність усіх особливих точок векторного поля X є замкненою множиною, а отже, її доповнення M_0 — відкритим підмноговидом многовида M, який ми назвемо *неособливим підмноговидом.* Векторне поле X однозначно визначає на многовиді M_0 одновимірний розподіл $D^1 = \{\, fx \mid f \in C^\infty(M) \,\}$. Цілком інтегрованість цього розподілу в даному випадку випливає із класичної теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \ldots, x^n); \\ x^i(0) = x_0^i; \qquad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{10.1}$$

Теорема 1.4. *([15, стор. 127]) Задання векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладкому многовиді M рівносильне заданню гладкого відображення*

$$\Phi_X : M \times \big(-t(p), t(p)\big) \to M; \qquad \big(-t(p), t(p)\big) \subset \mathbb{R};\ p \in M,$$

однозначно обумовленого властивостями

$$1)\ \Phi_X(p, 0) = p; \qquad 2) \frac{d}{dt}\Phi_X(p, t) = X_{\Phi_X(p,t)}. \tag{10.2}$$

Відображення $\Phi_X : M \times \big(-t(p), t(p)\big) \to M$ називається *локальним потоком, породженим векторним полем X.*

Нехай Φ_X — локальний потік на M. Фіксуючи точку $p \in M$, одержимо гладку криву $\alpha : \big(-t(p), t(p)\big) \to M$, задану формулою $\alpha(t) = \Phi_X(p, t)$. Ця крива однозначно визначається умовами

$$1) \alpha(0) = p; \qquad 2) \frac{d\alpha(t)}{dt} = X_{\alpha(t)}. \tag{10.4}$$

Зокрема, на неособливому підмноговиді M_0 відображення α є регулярним, а пара $\big(((-t(p), t(p), \alpha)\big)$ — інтегральним многовидом розподілу D^1, що проходять через точку p. Таким чином, через кожну точку многовида M_0 проходить інтегральний многовид максимальної розмірності розподілу D^1, що проходить через точку p, тобто звуження цього розподілу на M_0 цілком інтегроване.

Побудована вище крива $\alpha(t) = \Phi_X(p, t)$ називається *траєкторією*, або *інтегральною кривою*, векторного поля X, (або потоку Φ_X) з початком у точці p. Траєкторія називається *максимальною*, якщо вона є об'єднанням усіх траєкторій поля X, які проходять через точку p.

Вправа 1.45. Довести, що

$$\begin{aligned} &1)\ \Phi_X\big(\Phi_X(p, t_1), t_2\big) = \Phi_X(p, t_1 + t_2); \\ &2)\ \Phi_{cx}(p, t) = \Phi_X(p, ct); \end{aligned}$$

для всіх $t_1, t_2, t, c \in \mathbb{R}$, для яких мають сенс обидві частини тотожностей.

Вправа 1.46. Нехай $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi : M \to M$ — дифеоморфізм. Довести, що

$$\Phi_{\varphi_* X}(p,t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p,t).$$

Нехай Φ_X — локальний потік на многовиді M. Фіксуючи число $t_0 \in \mathbb{R}$, одержимо відображення $F_{t_0} : M_{t_0} \to M$, задане на множині

$$M_{t_0} = \{\, p \in M \mid |t(p)| > |t_0| \,\} \tag{10.5}$$

формулою $F_{t_0}(p) = \Phi(p,t_0)$.

Вправа 1.47. Довести, що $M_{t_0} \subset M$ — відкритий підмноговид.

Відображення F_{t_0} гладке завдяки гладкості відображення Φ_X. Крім того,

$$1)\ F_0 = \mathrm{id}; \qquad 2)\ F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}, \tag{10.6}$$

причому остання рівність слушна для всіх $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, для яких мають сенс обидві його частини. Із (10.6) випливає, зокрема, що $\exists\, F_{t_0}^{-1} = F_{-t_0}$, а отже, відображення F_{t_0} є дифеоморфізмом відкритого підмноговида M_{t_0}.

Сім'я $\{\, F_t \,\}_{t\in\mathbb{R}}$ дифеоморфізмів відкритих підмноговидів M_t, $t \in \mathbb{R}$, називається *локальною однопараметричною групою дифеоморфізмів* многовида M.

Відзначимо, що

$$|t_1| < |t_2| \implies M_{t_2} \subset M_{t_1}. \tag{10.7}$$

Вправа 1.48. Довести що у випадку, коли $\exists\, t_0 \;\;\&\;\; M_{t_0} = M$, відображення Φ_X визначене, щонайменше, в області

$$W = M \times (-t_0, t_0),$$

причому $\forall\, t \in (-t_0,t_0) \implies F_t : M \to M$ — дифеоморфізм. Більше того, у цьому випадку відображення Φ_X визначене на всьому многовиді $M \times \mathbb{R}$ (а отже, $\forall\, t \in \mathbb{R} \implies F_t : M \to M$ — дифеоморфізм).

Відзначимо, що твердження про те, що відображення Φ_X визначене на усьому многовиді $M \times \mathbb{R}$ рівносильне твердженню про те, що усі максимальні траєкторії потоку Φ_X визначені на всій числовій осі, а також твердженню про те, що, принаймні, одне з відображень F_t, $(t \neq 0)$, а отже, і всі відображення $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ є дифеоморфізмом многовида M.

Векторне поле на гладкому многовиді називається *повним*, якщо будь-яка його максимальна траєкторія визначена на всій числовій осі. У цьому випадку локальний потік і локальна однопараметрична група дифеоморфізмів многовида, породжені цим полем, називаються *глобальним потоком* і *глобальною однопараметричною групою дифеоморфізмів*, відповідно.

Приклад 1.3. Нехай векторне поле X на многовиді $\mathbb{R}$ визначене співвідношенням $X(x) = x^{2/3}$. Його траєкторія з початком у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ задається як розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{2/3}; \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Використовуючи метод поділу змінних, послідовно знаходимо

$$\int \frac{dx}{x^{2/3}} = \int dt; \qquad 3x^{1/3} = t + C; \qquad x(t) = \frac{(t+C)^3}{27}.$$

З урахуванням початкових даних, $C^3/27 = x_0$, а отже, $C = 3\sqrt[3]{x_0}$, звідки

$$x(t) = \frac{1}{27}(t + 3\sqrt[3]{x_0})^3$$

— рівняння шуканої траєкторії. Очевидно, область визначення будь-якої максимальної траєкторії — уся числова вісь, а отже, векторне поле X повне.

Приклад 1.4. Нехай векторне поле Y на тому самому многовиді визначене співвідношенням $Y(x) = x^{4/3}$. Його траєкторія з початком у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{4/3}; \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Використовуючи метод поділу змінних, послідовно знаходимо:

$$\int \frac{dx}{x^{4/3}} = \int dt; \qquad -3x^{-1/3} = t + C; \qquad x(t) = -\frac{27}{(t+C)^3}.$$

З урахуванням початкових даних, $-27/C^3 = x_0$, а отже, $C = -3/\sqrt[3]{x_0}$, звідки

$$x(t) = -\frac{27}{\left(t - \frac{3}{\sqrt[3]{x_0}}\right)^3}$$

— рівняння шуканої траєкторії. Таким чином, траєкторії не визначені при $t = \frac{3}{\sqrt[3]{x_0}}$, а отже, векторне поле Y неповне.

Таким чином, на тому самому многовиді можуть існувати як повні, так і неповні векторні поля.

Вправа 1.49. Перевірте, чи повним на прямій є векторне поле $Y(x) = 1 + x^2$

Вправа 1.50. Довести, що усяке векторне поле X на компактному многовиді M повне.

Вправа 1.51. Довести, що максимальні траєкторії глобального потоку, що не гомеоморфні точці або прямій, є періодичними траєкторіями.

Диференціювання Лі

Нехай M — гладкий многовид, X — векторне поле на M, $\{ F_t \}$ — відповідна йому локальна однопараметрична група дифеоморфізмів многовида, T — тензорне поле типу (r,s) на M. *Похідною Лі* тензорного поля T у напрямку векторного поля X називається тензорне поле $\mathfrak{L}_X T$ на M, у кожної точці $p \in M$ задане формулою

$$(\mathfrak{L}_X T)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p \big). \tag{11.1}$$

Оператор $\mathfrak{L}_X : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$, що зіставляє тензорному полю $T \in \mathcal{T}(M)$ тензорне поле $\mathfrak{L}_X T$, називається *оператором диференціювання Лі в напрямку векторного поля* X.

Вивчимо властивості цього оператора. Насамперед, відзначимо, що тотожність (11.1), яка визначає оператор $\mathfrak{L}_X$, можна переписати у формі

$$\mathfrak{L}_X T = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big\{(F_{-t})_* T - T\big\}. \tag{11.2}$$

Заміняючи t на $-t$, одержимо ще одну версію визначення:

$$\mathfrak{L}_X T = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big\{T - (F_t)_* T\big\}. \tag{11.3}$$

Вправа 1.52. Довести, що оператор диференціювання Лі є диференціюванням тензорної алгебри многовида, що зберігає тип тензорів і переставляється зі згортками, тобто $\Gamma_{ji} \circ \mathfrak{L}_X = \mathfrak{L}_X \circ \Gamma_{ji}$, де Γ_{ji} — оператор згортки за j-м коваріантним та i-м контраваріантним аргументами.

Вправа 1.53. Нехай M — гладкий многовид, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\{\, F_t \,\}$ — відповідна локальна однопараметрична група дифеоморфізмів многовида M. Довести, що

$$\forall\, f \in C^\infty(M) \implies X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t - f).$$

Вправа 1.54. Довести, що

$$\mathfrak{L}_X(f) = X(f).$$

Вправа 1.55. Нехай f — дійсна функція на числовій осі, задана й гладка в деякому околі U нуля, причому $f(0) = 0$. Довести, що функція $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, довизначена в нулі за неперервністю, буде гладкою в тому самому околі нуля, причому $f'(0) = g(0)$.

Вправа 1.56. Нехай дійсна функція $f(t, p)$ визначена й гладка в деякій області $U \times M$, де U — деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, M — гладкий многовид, причому $f(0, p) = 0$ $(p \in M)$. Довести, що функція

$g(t) = \frac{1}{t} f(t,p)$, довизначена при $t = 0$ за неперервністю, буде гладкою в тій самій області, причому

$$\left.\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(0,p), \ \ (p \in M).$$

Вправа 1.57. Нехай M — гладкий многовид, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\{ F_t \}$ — відповідна локальна однопараметрична група дифеоморфізмів многовида M. Довести, що для кожної функції $f \in C^\infty(M)$ існує функція $g_t(p) = g(t,p)$, задана й гладка в області визначення потоку Φ_X, така, що $f \circ F_t = f + tg_t$, причому $g_0 = X(f)$.

Вправа 1.58. Нехай M — гладкий многовид. Довести, що

$$\mathfrak{L}_X Y = [X,Y]; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 1.5. *([15, стор. 140]) Оператор диференціювання Лі на гладкому многовиді M у напрямку векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ однозначно визначається такими своїми властивостями:*

(1) $\mathfrak{L}_X f = X(f), \quad (f \in C^\infty(M))$;

(2) $\mathfrak{L}_X Y = [X,Y], \quad (Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M}))$;

(3) оператор $\mathfrak{L}_X$ є диференціюванням тензорної алгебри $\mathcal{T}(M)$, що зберігає тип тензорів і переставляється з операторами згортки.

Вираз $\mathfrak{L}_X(t)(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)$, що є лінійним за аргументами $X_1, \ldots, u^s$, не є лінійним за аргументом X. Це видно вже на прикладі співвідношення $\mathfrak{L}_X Y = [X,Y]$.

ТЕМА 2

ГРУПИ ТА АЛГЕБРИ ЛІ

Групи Лі

Групою Лі називається гладкий многовид G, множину точок якого наділено структурою абстрактної групи такою, що групові операції $\mu : G\times G \to G; \quad \mu(x, y) = x\cdot y$ та $\alpha : G \to G; \quad \alpha(x) = x^{-1}$ є гладкими відображеннями.

Вправа 2.1. Довести, що гладкість групових операцій рівносильна гладкості відображення $\varphi : G \times G \to G, \quad \varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}$.

Приклади груп Лі.

Приклад 2.1. Евклідів простір $\mathbb{R}^n = \{ (x^1, \ldots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R} \}$ є групою Лі щодо операції додавання.

Приклад 2.2. Мультиплікативна група ненульових комплексних чисел $\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \}$ є групою Лі.

Приклад 2.3. *Одновимірний тор* $T^1 = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$ індукує з $\mathbb{C}^*$ структуру (абелевої) групи Лі, що є гладким одновимірним многовидом — колом S^1.

Приклад 2.4. Нехай G_1 і G_2 — групи Лі. Тоді гладкий многовид $G_1 \times G_2 = \{ (g_1, g_1) \mid g_i \in G_i : \; i = 1, 2 \}$ є групою Лі відносно покомпонентних групових операцій

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2); \qquad (g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}).$$

Група Лі G, побудована таким чином, називається *прямим добутком груп Лі* G_1 і G_2. Зокрема, прямий добуток n одновимірних торів

$$T^n = \underbrace{T^1 \times \ldots \times T^1}_{n \text{ разів}}$$

є абелева група Лі, що називаєтс *n-вимірним тором.*

Приклад 2.5. Нехай $M_{n,n}$ — повна матрична алгебра. Тоді

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ (g_{ij}) \in M_{n,n} \mid \det(g_{ij}) \neq 0 \}$$

— гладкий многовид (відкритий підмноговид евклідового простору $\mathbb{M}_{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$), що є групою Лі щодо операцій множення матриць і узяття зворотної матриці. Група Лі $GL(n, \mathbb{R})$ називається *повною лінійною групою порядку n.*

Приклад 2.6. Підгрупи повної лінійної групи.

1. Група Лі $O(n, \mathbb{R}) = \{ g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid g \cdot g^T = I_n \}$, що складається з матриць, які зберігають канонічний скалярний добуток $(X, Y) = \sum_{k=1}^n x^k y^k$ в арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$. Ця група Лі називається *ортогональною* групою порядку n. Тут і надалі I_n — одинична матриця порядку n, T — оператор транспонування матриць.

2. Група Лі $SL(n, \mathbb{R}) = \{ g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det g = 1 \}$, що називаєтьс *спеціальною лінійною*, або *унімодулярною*, групою порядку n.

3. Група Лі $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$, що називається *спеціальною ортогональною* групою порядку n. Легко бачити, що група $SO(2, \mathbb{R})$ природно ізоморфна групі T^1. Природній ізоморфізм задається зіставленням комплексному числу $z = \cos t + \sqrt{-1} \sin t$ одиничного модуля ($t \in \mathbb{R}$) матриці $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Легко бачити, що цей ізоморфізм є локальним дифеоморфізмом, а значить, і дифеоморфізмом, а отже, група Лі $SO(2, \mathbb{R})$ канонічно ототожнюється з одновимірним тором T^1.

Приклад 2.7. Група Лі

$$GL(n, \mathbb{C})^R = \{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid g \circ J = J \circ g \},$$

де $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ — стандартна комплексна структура на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Ця група Лі називається *дісною реалізацією повної комплексної лінійної групи порядку n*. Очевидно,

$$g \in GL(n, \mathbb{C})^R \iff g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \ \& \ \det g \neq 0,$$

де $A, B \in M_{n,n}$. Група Лі $GL(n, \mathbb{C})^R$, як абстрактна група, природно ізоморфна *повній комплексній лінійній групі порядку n*, тобто групі

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{ (g_{ij}) \in M^C_{n,n} \mid \det g \neq 0 \},$$

де $M^C_{n,n}$ — повна комплексна матрична алгебра. Канонічний ізоморфізм $\tau : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})^R$ задається так. Нехай $Z = (z_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C})$; $\quad z_{ij} = a_{ij} + \sqrt{-1} b_{ij}$; $\quad i, j = 1, \ldots, n$. Покладемо $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$. Тоді $\tau(Z) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.

Вправа 2.2. Перевірьте, що τ — ізоморфізм груп.

За його допомогою ці групи ототожнюються, і, таким чином, повна комплексна лінійна група $GL(n, \mathbb{C})$ може бути розглянута як група Лі. За її допомогою можна побудувати ще декілька важливих прикладів груп Лі:

1. Група Лі

$$O(n, \mathbb{C}) = \{ g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g \cdot g^t = I_n \},$$

що складається з матриць, які зберігають канонічний скалярний добуток $(X, Y) = \sum_{i=1}^n x^k y^k$ у комплексному арифметичному просторі $\mathbb{C}^n$. Ця група Лі називається *комплексною ортогональною* групою порядку n.

2. Група Лі

$$U(n) = g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g \cdot \overline{g}^t = I_n,$$

що складається з матриць, які зберігають канонічний *ермітовий скалярний добуток* $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x^k \overline{y}^k$t в $\mathbb{C}^n$. Ця група Лі називається *унітарною* групою порядку n.

3. Група Лі $SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(2n, \mathbb{R})$, а також група Лі $SU(n) = U(n) \cap SL(2n, \mathbb{R})$, що називаються, відповідно, *спеціальною комплексною ортогональною* і *унітарною унімодулярною* групами порядку n.

Приклад 2.8. Ми вже знаємо, що многовид $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ має природню структуру групи Лі — прямого добутку груп Лі $GL(n, \mathbb{R})$ і $\mathbb{R}^n$. Виявляється, що в ньому існує й інша природня структура групи Лі. Операції

$$(A, X) \cdot (B, Y) = (AB, AY + X); \quad (A, X)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}X);$$

$(A, B \in GL(n, \mathbb{R}),\ X, Y \in \mathbb{R}^n)$, визначають у цій множині структуру групи, що позначається A_n, причому $GL(n, \mathbb{R})$ і $\mathbb{R}^n$ вкладаються в цю групу як підгрупи за формулами $A \to (A, 0)$ і $X \to (I_n, X)$ відповідно, підгрупа $\mathbb{R}^n$ є нормальним дільником, а факторгрупа $A_n/\mathbb{R}^n$ ізоморфна групі $GL(n, \mathbb{R})$. (Група A_n називається *напівпрямим добутком* підгруп $GL(n, \mathbb{R})$ і $\mathbb{R}^n$). Відображення $\varphi : A_n \times A_n \to A_n$ у цьому випадку, очевидно, визначене формулою

$$\varphi\big((A, X), (B, Y)\big) = (AB^{-1}, -AB^{-1}Y + X),$$

і отже, задається системою гладких функцій

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} B_{jk}}{\det B}; \qquad z_i = -\sum_{j=1}^n c_{ij} y_j + x_i,$$

де $A = (a_{ij})$, $C = A \cdot B = (c_{ij})$, B_{ji} — алгебраїчне доповнення елемента b_{ji} матриці B, $X = (x_i)$,$Y = (y_i)$, $Z = -AB^{-1}Y + X = (z_i)$.

Таким чином, відображення φ гладке і A_n — група Лі, що називається *афіною групою порядку n*. Аналогічно будується напівпрямий добуток груп Лі $O(n,\mathbb{R})$ і $\mathbb{R}^n$, що називається *групою рухів n-вимірного евклідового простору*. Зі сказаного вище випливає, зокрема, що група рухів першого роду евклідової площини (тобто двовимірного евклідового простору) дифеоморфна гладкому многовиду $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Вправа 2.3. Доведіть, що групи, побудовані в наведених прикладах є групами Лі.

Побудуємо явно гладку структуру на групі $O(n,\mathbb{R})$.

Матрицю $A \in M_{n,n}$ назвемо *неособливою*, якщо матриця $A+I_n$ невироджена, тобто $\det(A+I_n) \neq 0$. Множина

$$M^0_{n.n} = \{\, A \in M_{n.n} \mid \det(A+I_n) \neq 0 \,\}$$

усіх таких матриць є відкритим підмноговидом евклідового простору $M_{n,n}$. Нехай $A \in M^0_{n,n}$. Зіставимо їй матрицю $A^\# \in M_{n,n}$ за формулою

$$A^\# = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}.$$

Матриця $A^\#$ називається *образом Келі* матриці A, а відображення многовида $M^0_{n,n}$ у себе, що зіставляє кожній неособливій матриці її образ Келі, називається *відображенням Келі*.

Вправа 2.4. Довести, що відображення Келі $A \to A^\#$ $(A \in M^0_{n,n})$ є інволютивним автодифеоморфізмом многовида $M^0_{n,n}$.

Тепер розглянемо групу $O(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in M_{n,n} \mid A^{-1} = A^T \,\}$. Нехай $A \in O^0(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap M^0_{n,n}$, $B = A^\#$.

Вправа 2.5. Довести, що

$$A \in O^0(n,\mathbb{R}) \implies \{\, (A^\#)^T = -A^\# \,\},$$

тобто матриця $A^\#$ кососиметрична.

Множина всіх кососиметричних матриць порядку n є лінійним простором розмірності $\frac{1}{2}n(n-1) = \dim O(n,\mathbb{R})$. Отже, образ Келі області $O^0(n,\mathbb{R}) \subset O(n,\mathbb{R})$ є областю у лінійному просторі і відображення Келі можна розглядати як локальну систему координат.

Нехай тепер $C \in O(n,\mathbb{R})$ — довільна матриця (не обов'язково неособлива). Розглянемо *відображення правого зсуву*

$$R_C : O(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R}),$$

задане формулою $R_C(X) = X \cdot C$. Очевидно, R_C — дифеоморфізм. Отже, підмножина

$$U = O^0(n,\mathbb{R}) \cdot C = R_C\big(O^0(n,\mathbb{R})\big) \subset O(n,\mathbb{R})$$

є областю (околом точки C), причому відображення $\psi : A \to (A \cdot C^{-1})^{\#}$ — локальна система координат в цій області.

Вправа 2.6. Довести, що такі карти визначають на $O(n,\mathbb{R})$ гладку структуру.

Алгебри Лі

Алгеброю Лі (над полем $\mathbb{F}$) називається лінійний простір $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$, у якому фіксована бінарна білінійна операція $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, що називається *операцією комутування* або *комутатором* і має такі властивості:

1) $[X,Y] = -[Y,X]$ (антикомутативність);
2) $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$ (тотожність Якобі).

Ми будемо вважати $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, якщо не сказано інше.

Приклади алгебр Лі.

Приклад 2.9. Нехай M — гладкий многовид. Тоді модуль $\mathfrak{X}(M)$, розглянутий як нескінченновимірний $\mathbb{R}$-лінійний простір, є нескінченновимірною алгеброю Лі.

Приклад 2.10. Будь-який дійсний лінійний простір V є алгеброю Лі щодо комутатора $[X, Y] = 0;\ X, Y \in V$. Така алгебра Лі називається *абелевою алгеброю Лі.*

Вправа 2.7. Перевірьте, що будь-яка асоціативна алгебра $(\mathfrak{A}, " \cdot ")$ є алгеброю Лі щодо комутатора

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X; \qquad X, Y \in \mathfrak{A}.$$

Зокрема, повна матрична алгебра $M_{n,n}$ є алгеброю Лі щодо комутатора $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$; $(A, B \in M_{n,n})$, де " $\cdot$ " — операція матричного множення. Ця алгебра Лі називається *повною матричною алгеброю Лі.* Аналогічно, алгебра ендоморфізмів $EndV$ довільного лінійного простору V є алгеброю Лі відносно комутатора

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f; \qquad (f, g \in End\, V),$$

де " $\circ$ " — операція композиції.

Приклад 2.11. Геометричний векторний простір — простір V^3 вільних векторів — є алгеброю Лі щодо операції векторного добутку.

Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі

Нехай G — група Лі, $g \in G$. Визначимо відображення

$$L_g : G \to G; L_g(h) = g \cdot h \qquad \text{(лівий зсув на елемент } g);$$
$$R_g : G \to G; R_g(h) = h \cdot g \qquad \text{(правий зсув на елемент } g).$$

Вправа 2.8. Довести, що ці відображення гладкі й мають властивості:

1. $L_g \circ L_h = L_{gh} \quad (g, h \in G)$.
2. $R_g \circ R_h = R_{hg} \quad (g, h \in G)$.
3. Відображення L_g і R_g — дифеоморфізми $\quad (g \in G)$.

Ці властивості означають, що всяка група Лі діє на собі зліва за допомогою лівих зсувів і зправа — за допомогою правих зсувів. Векторне поле $X \in \mathfrak{X}(G)$ називається *лівоінваріантним*, якщо $\forall g \in G \implies (L_g)_* X = X$.

Вправа 2.9. Довести, що сукупність $\mathfrak{g}$ усіх лівоінваріантних векторних полів на групі Лі G утворює дійсний лінійний простір, природно ізоморфний дотичному простору $T_e(G)$ до групи Лі G в одиниці. Зокрема, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Вправа 2.10. Довести, що лінійний простір $\mathfrak{g}$ усіх лівоінваріантних векторних полів групи Лі G є алгеброю Лі щодо операції комутування векторних полів.

Алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(G)$ усіх лівоінваріантних векторних полів групи Лі G називається *приєднаною алгеброю Лі*, або *алгеброю Лі групи Лі G*.

Дотримуючись загальноприйнятих домовленостей, ми й надалі будемо позначати групи Лі прописними буквами латинського алфавіту, а їх алгебри Лі — відповідними їм малими літерами готичного алфавіту. Очевидно, алгебру Лі групи Лі G можна ототожнити з лінійним простором $T_e(G)$, операція комутування в якому визначена формулою

$$[\xi, \eta] = \beta[\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta]; \qquad \xi, \eta \in T_e(G).$$

Лінійний простір $\mathfrak{g}$ стандартним чином породжує тензорну алгебру $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, елементи якої характеризуються як *лівоінваріантні тензорні поля* на групі Лі G, тобто

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \{\, t \in \mathcal{T}(G) \mid (L_g)_* t = t \ \forall\, g \in G \,\}.$$

Аналогічно визначається зовнішня алгебра $\Lambda(\mathfrak{g})$ лівоінваріантних диференціальних форм на G. Лівоінваріантні диференціальні 1-форми називаються *формами Маурера-Картана*.

Вправа 2.11. Довести, що якщо ω — форма Маурера-Картана, тобто $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, то $\omega(Y) \in \mathbb{R}$, і $X\big(\omega(Y)\big) = 0$.

Звідси випливає, що

$$d\omega(X, Y) = -\omega\big([X, Y]\big); \qquad \omega \in \mathfrak{g}^*,\ X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.1}$$

Нехай G — група Лі, $\dim G = n$, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі. Зафіксуємо базис $\{ e_1, \dots, e_n \}$ простору $T_e(G)$. Він породжує базис $\{ E_1, \dots, E_n \}$ лінійного простору $\mathfrak{g}$, де $E_k = \beta^{-1}(e_k); \quad k = 1, \dots, n$. Тоді

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k \, E_k, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

де $\{ C_{ij}^k \}$ — набір констант, які називаються *структурними константами алгебри Лі* $\mathfrak{g}$. Очевидно, ці константи є компонентами тензора $t(X, Y, u) = u\big([X, Y]\big); \quad (X, Y \in \mathfrak{g},\ u \in \mathfrak{g}^*)$ типу (2,1) на $\mathfrak{g}$, що задає на лінійному просторі g структуру алгебри Лі, і отже, при заміні базису змінюються за відповідним правилом. Співвідношення (3.2) називаються *контраваріантними структурними рівняннями групи Лі.*

Нехай $\{ \omega^1, \dots, \omega^n \}$ — дуальний базис в g. Тоді відповідно до (3.1)

$$\begin{aligned} d\omega^k(E_i, E_j) &= -\omega^k\big([E_i, E_j]\big) = -\omega^k(C_{ij}^m E_m) = \\ &= -C_{ij}^m \omega^k(E_m) = -C_{ij}^m \delta_m^k = -C_{ij}^k. \end{aligned}$$

Отже, $d\omega^k(E_i, E_j) = -C_{ij}^k$, звідки випливає, що $d\omega^k = -C_{ij}^k \omega^i \otimes \omega^j$. Застосуємо до обох частин цієї тотожності оператор альтернування, отримаємо, що

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \tag{3.3}$$

Ці рівняння, двоїсті рівнянням (3.2), називаються *коваріантними структурними рівняннями*, або *рівняннями Маурера-Картана*, групи Лі G.

Уведемо в розгляд на G 1-форму $\omega : \mathfrak{X}(G) \to C^\infty(G) \otimes \mathfrak{g}$ зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, поклавши $\omega = \omega^a \otimes E_a$, тобто

$$\omega(X) = \omega^i(X) E_i; \qquad X \in \mathfrak{X}(G).$$

Очевидно, ця форма не залежить від вибору базису $\{ e_1, \dots, e_n \}$. Назвемо її *фундаментальною формою групи Лі.* Для цієї форми

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{3.4}$$

Це рівняння називається *структурним рівнянням групи Лі в інваріантній формі*, або *інваріантним рівнянням Маурера-Картана*.

Повна лінійна група

Повна лінійна група $GL(n,\mathbb{R})$ є одним з найважливіших прикладів груп Лі, по-перше, через свою фундаментальну роль в диференціальній геометрії (вона є структурною групою головного розшарування реперів над довільним многовидом), і по-друге, тому, що практично всі важливі для додатків групи Лі є підгрупами цієї групи (такі групи Лі називаються *лінійними групами*).

Як гладкий многовид, що є відкритим підмноговидом евклідового простору $M_{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$, вона має атлас, що складається з єдиної карти $\varphi : M_{n,n} \to \mathbb{R}^{n^2}$, заданої глобальними координатними функціями $\{ x_{ij} \}$, що зіставляють матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ її компоненту $a_{ij} \quad (i,j = 1,\dots,n)$. Наше найближче завдання — довести, що алгебра Лі $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ повної лінійної групи природно ізоморфна повній матричній алгебрі Лі $M_{n,n}$ (див. приклад 3.3). Насамперед, відмітимо, що в силу твердження 4.1 глави 2, має місце канонічний ізоморфізм лінійних просторів $\varkappa : T_e\big(GL(n,\mathbb{R})\big) = T_e(M_{n,n}) \to M_{n,n}$, що вектору $\xi \in T_e(M_{n,n})$ ставить у відповідність матрицю (a_{ij}), де

$$a_{ij} = \xi(x_{ij}) = dx_{ij}(\xi).$$

Тут $e = I_n$ — одинична матриця порядку n. Відображення $\gamma = \varkappa \circ \beta : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to M_{n,n}$ є ізоморфізмом лінійних просторів. Треба довести, що воно є ізоморфізмом алгебр Лі. Відзначимо, що за визначенням, $\gamma(X)_{ij} = \varkappa(X_e)_{ij} = X_e(x_{ij})$.

Вправа 2.12. Нехай $g,h \in GL(n,\mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Довести, що

$$1)\ x_{ij} \circ L_g = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) x_{kj}; \qquad 2)\ \big(Y(x_{ij})\big)(g) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g) Y_e(x_{kj}).$$

Вправа 2.13. Довести, що відображення $\gamma : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to M_{n,n}$ є ізоморфізмом алгебр Лі.

Розглянемо інваріантну версію цієї конструкції. Нехай V — n-вимірний лінійний простір, $EndV$ — алгебра його ендоморфізмів, $\mathrm{Aut}\, V = \{\, f \in EndV \mid \det f \neq 0 \,\}$ — група автоморфізмів простору V. Ця група є відкритим підмноговидом лінійного простору $EndV$ щодо його канонічної гладкої структури. Фіксація базису в просторі V визначає канонічний ізоморфізм τ лінійних просторів $EndV$ і $M_{n,n}$, що зіставляє лінійному операторові $f \in EndV$ його матрицю в цьому базисі. Цей ізоморфізм є локальною системою координат для канонічної гладкої структури на лінійному просторі $EndV$, а значить, і на його відкритому підмноговиді $\mathrm{Aut}\, V$, щодо якого відображення $\varphi : \mathrm{Aut}\, V \times \mathrm{Aut}\, V \to \mathrm{Aut}\, V$; $\varphi(f,g) = f \circ g^{-1}$ задається гладкими (раціональними) функціями і, отже, є гладким. Тоді група $\mathrm{Aut}\, V$ здобуває природню структуру групи Лі, що називається *групою автоморфізмів лінійного простору* V. Крім того, із лінійної алгебри відомо, що якщо $f, g \in EndV$, $\tau(f) = A$, $\tau(g) = B$, то $\tau(f \circ g) = A \cdot B$, тобто відображення τ є ізоморфізмом $EndV$ і $M_{n,n}$ як алгебр, а отже, і як алгебр Лі (див. приклад 3.3). Більше того, звідси відразу ж випливає, що $\tau|_{\mathrm{Aut}\, V}$ визначає ізоморфізм груп $\mathrm{Aut}\, V$ і $GL(n,\mathbb{R})$, що є їх дифеоморфізмом як гладких многовидів (тобто ізоморфізм груп Лі, див. п.5). Ототожнюючи групи Лі $\mathrm{Aut}\, V$ і $GL(n,\mathbb{R})$ за допомогою цього ізоморфізму, ми одержуємо ланцюжок ототожнень алгебр Лі

$$\mathfrak{g}(\mathrm{Aut}\, V) \overset{\tau_*}{\to} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \overset{\gamma}{\to} M_{n,n} \overset{\tau^{-1}}{\to} EndV.$$

Звідси випливає

Теорема 2.1. *([15, стор. 159]) Алгебра Лі групи Лі* $\mathrm{Aut}\, V$ *природно ізоморфна алгебрі Лі* $EndV$*.* □

Позначимо $GL(n,\mathbb{R}) = \{\, (a^i_j) \in M_{n,n} \mid \det(a^i_j) \neq 0 \,\}$.

Вправа 2.14. Довести, що рівняння Маурера-Картана групи Лі $GL(n,\mathbb{R})$ в стандартному базисі $\{ E^i_j \}$ мають вигляд

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j. \quad \square$$

Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі

Відображення $\varphi : G \to H$ груп Лі називається *гомоморфізмом груп Лі*, якщо:

(1) φ — гладке відображення;

(2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y); \qquad (x, y \in G)$.

Якщо $H = \operatorname{Aut} V$ для деякого лінійного простору V, φ називається *(лінійним) зображенням групи Лі G*. Гомоморфізм груп Лі, що є дифеоморфізмом, називається *ізоморфізмом груп Лі.*

Відображення $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ алгебр Лі називається *гомоморфізмом алгебр Лі*, якщо:

(1) ϕ — лінійне відображення;

(2) $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]; \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$.

Якщо $\mathfrak{h} = EndV$ для деякого лінійного простору V, ϕ називається *лінійним зображенням алгебри Лі $\mathfrak{g}$*.

Нехай $\varphi : G \to H$ — гомоморфізм груп Лі. Тоді $\varphi(e) = e$, і отже, φ_* задає лінійне відображення з $T_e(G)$ в $T_e(H)$. Це відображення індукує лінійне відображення приєднаних алгебр Лі $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ за формулою $\phi = \beta^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta$. Очевидно, відображення ϕ однозначно визначається співвідношенням

$$\phi(X)_e = \varphi_*(X_e); \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Вправа 2.15. Нехай G і H — групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно, і нехай $\varphi : G \to H$ — гомоморфізм Груп Лі. Доведіть, що

- $\forall X \in \mathfrak{g} \implies$ векторні поля X і $\phi(X)$ φ-пов'язані;

- $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — гомоморфізм алгебр Лі.

Підгрупи Лі

Нехай $\varphi : H \to G$ — гомоморфізм груп Лі. Пара (H, φ) називається *підгрупою Лі групи Лі* G, якщо вона є підмноговидом в G (тобто якщо відображення φ регулярне і ін'єктивне).

Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі. Підпростір $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ називається *підалгеброю Лі алгебри Лі* $\mathfrak{g}$, якщо

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{h} \implies [X, Y] \in \mathfrak{h}.$$

Вправа 2.16. Нехай G — зв'язна група Лі, U — деякий її окіл одиниці. Доведіть, що

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n, \qquad \text{де} U^n = \{\, g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \mid g_i \in U; \quad i = 1, \ldots, n \,\}.$$

Вправа 2.17. Доведіть, що, якщо (H, φ) — підгрупа Лі групи Лі G, то відображення $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ їх алгебр Лі, обумовлене співвідношенням $\phi(X)_e = \varphi_*(X_e), \quad X \in \mathfrak{g}$, задає ізоморфізм алгебри Лі $\mathfrak{h}$ на її образ — підалгебру Лі $\phi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$.

Теорема 2.2. *([15, стор. 163]) Нехай G — група Лі, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі, $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ — підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$. Тоді існує єдина з точністю до ізоморфізму, зв'язна підгрупа Лі (H, φ) групи Лі G, така, що $\phi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.*

Теорема 2.3. *([15, стор. 165]) Якщо абстрактна підгрупа A групи Лі G має структуру гладкого многовида такого, що пара (A, i) — підмноговид в G, де $i : A \subset G$ — відображення включення, то така структура єдина. Щодо цієї структури, A — група Лі, а (A, i) — підгрупа Лі групи Лі G.*

Вправа 2.18. Довести, що якщо деяку підмножину групи Лі можна зробити підгрупою Лі щодо включення, то це можна зробити однозначно — групова структура, топологія й гладка структура цієї підмножини визначені однозначно.

Теорема 2.4. *([30]) Нехай (H, φ) — підгрупа Лі групи Лі G. Відображення φ є вкладенням (тобто гомеоморфізмом H і $\varphi(H)$ в індукованій топології) тоді й тільки тоді, коли $(H, \varphi) \subset G$ — замкнена підгрупа, тобто підмножина $\varphi(H)$ замкнута в G.* □

Однопараметричні підгрупи груп Лі й експонентне відображення

Однопараметричною підгрупою групи Лі G називається гомоморфізм груп Лі $g : \mathbb{R} \to G$.

Інакше кажучи, гладке відображення $g : \mathbb{R} \to G$ називається *однопараметричною підгрупою* групи Лі G, якщо

$$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \implies g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2).$$

Звідси випливає, що $g(0) = e$, де $e \in G$ — одиниця групи Лі G. Однопараметричну підгрупу $g : \mathbb{R} \to G$ групи Лі G ми позначимо $g(t)$.

Вправа 2.19. Нехай $X \in \mathfrak{g}$ — ненульовий елемент алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи Лі G, тобто ненульове левоінваріантне векторне поле на G. Довести, що породжений ним локальний потік Φ_X на G має такі властивості:

(1) $\Phi_X\big(\Phi_X(a, t_1), t_2\big) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;

(2) $\Phi_{\lambda X}(a, t) = \Phi_X(a, \lambda t)$;

(3) $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$;

$(a, b \in G,\ \lambda, t_1, t_2, t \in \mathbb{R})$.

Вправа 2.20. Довести, що усяке лівоінваріантне векторне поле на групі Лі повне, і його траєкторія з початком в одиниці цієї групи Лі є однопараметричною підгрупою.

Вправа 2.21. Довести, що усяка однопараметрична підгрупа групи Лі є траєкторією деякого лівоінваріантного векторного поля на цій групі Лі з початком в одиниці групи.

Таким чином, існує природня взаємно однозначна відповідність між множиною $\mathfrak{g}$ і множиною однопараметричних підгруп групи Лі G, що зіставляє кожному елементу $X \in \mathfrak{g}$ однопараметричну підгрупу $g(t)$ групи Лі G, що є траєкторією потоку Φ_X з початком в одиниці групи Лі G. Ця однопараметрична підгрупа в силу теореми існування й однозначності розв'язку задачі Коші однозначно визначена умовами

$$1)\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g(t) = X_e; \qquad 2)\ g(0) = e.$$

Елемент алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи Лі G, що породжує однопараметричну підгрупу цієї групи Лі, називається *генератором* цієї однопараметричної підгрупи.

Нехай G — група Лі, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі лівоінваріантних векторних полів. *Експонентним відображенням* називається відображення $\exp : \mathfrak{g} \to G$, обумовлене співвідношенням $\exp X = \Phi_X(e, 1)$.

Усяка однопараметрична підгрупа $g(t)$ групи Лі G з генератором $X \in \mathfrak{g}$ у термінах експонентного відображення допускає зображення у вигляді $g(t) = \exp tx$. Дійсно, з урахуванням визначення й леми 7.1, $g(t) = \Phi_X(e, t) = \Phi_{tx}(e, 1) = \exp tx$.

Вправа 2.22. Довести, що відображення $\exp : \mathfrak{g} \to G$ є гладким відображенням щодо канонічної гладкої структури на $\mathfrak{g}$ і, більш того, є дифеоморфізмом деякого околу нуля $U_0(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ на деякий окіл одиниці $U_e(G)$ групи Лі G.

Околи $U_0 \subset \mathfrak{g}$ і $U_e \subset G$ називаються *нормальними*.

Вправа 2.23. Нехай $\varphi : H \to G$ — гомоморфізм груп Лі. Довести, що наступна діаграма комутативна:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{h} & \xrightarrow{\phi=\varphi_*|_{\mathfrak{h}}} & \mathfrak{g} \\
{\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\
H & \xrightarrow{\varphi} & G.
\end{array}$$

Вправа 2.24. Нехай (H, φ) — підгрупа Лі групи Лі G, і нехай $X \in \mathfrak{g}$. Довести, що якщо $X \in \phi(\mathfrak{h})$, то $\exp(tx) \in \varphi(H)$. Обернено, якщо $\forall\, t \in (a, b) \subset \mathbb{R} \implies \exp(tx) \in \varphi(H)$, то $X \in \phi(\mathfrak{h})$.

Вправа 2.25. Нехай $A \subset G$ — абстрактна підгрупа групи Лі, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ — підпростір відповідної алгебри Лі. Нехай U — окіл нуля в $\mathfrak{g}$, що відображається дифеоморфно на деякий окіл одиниці V групи Лі G при експонентному відображенні. Припустимо, що $\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A$. Довести, що підгрупа A, наділена індукованою топологією, є підгрупою Лі групи Лі G щодо відображення включення, а підпростір $\mathfrak{a}$ — підалгеброю Лі в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, при цьому $\mathfrak{a}$ — алгебра Лі групи Лі A.

Експонентне відображення для повної лінійної групи

Вправа 2.26. Нехай G — лінійна група, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі. Довести, що
$$\forall\, g \in G\, \forall\, X \in \mathfrak{g} \implies (L_g)_* X_e = g x_e.$$

Нехай тепер $n = 1$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Тоді $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \equiv M_{1,1} = \mathbb{R}$, $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$. Зафіксуємо $\xi \in \mathbb{R}$. Нехай $X = \beta^{-1}(\xi) \in \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R})$, $g(t) = \exp tx$. Тоді
$$\frac{dg(t)}{dt} = X_{g(t)} = L_{g(t)} X_e = L_{g(t)} \xi = g(t) \cdot \xi$$
і отже, $g(t)$ отримується як розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \dfrac{dg(t)}{dt} = g(t) \cdot \xi, \\ g(0) = 1. \end{cases}$$
Використовуючи метод поділу змінних, послідовно знаходимо
$$\int \frac{dg(t)}{g(t)} = \int \xi\, dt; \quad \ln g(t) = t\xi + \ln C; \quad g(t) e^{t\xi}.$$
З урахуванням початкових умов маємо $C = 1$, отже, $\exp tx = e^{t\xi}$. Зокрема, маючи на увазі канонічне ототожнення $X \equiv \beta(X) =$

$X_e = \xi$, ми одержуємо

$$\exp \xi = e^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \xi^k.$$

Нехай тепер n — довільне натуральне число. Фіксуємо $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \equiv M_{n,n}$. Розглянемо матричний ряд

$$e^a = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \ldots + \frac{1}{k!} A^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Вправа 2.27. Довести, що цей матричний ряд (точніше, кожний з функціональних рядів $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x_{ij}(A^k)$, заданих глобальними координатними функціями $\{ x_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n \}$) збігається абсолютно й рівномірно у будь-якій обмеженій області евклідового простору $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \equiv M_{n,n}$.

Сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ називається *експонентою* матриці A і позначається e^a.

Вправа 2.28. Довести, що однопараметрична підгрупа $g : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{F})$ з генератором $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \equiv M_{n,n}$ визначається формулою

$$g(t) = e^{ta} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ta)^k. \tag{8.1}$$

Вертаючись до інваріантної версії теорії повної лінійної групи як групи $\operatorname{Aut} V$ автоморфізмів лінійного простору V в фіксованому базисі цього простору (див. п.4), з урахуванням тільки що доведеного, переконуємося, що відображення $\exp : EndV \to \operatorname{Aut} V$ задається формулою

$$\exp L = \operatorname{id} + L + \frac{1}{2!} L^2 + \ldots + \frac{1}{k!} L^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k \equiv e^l; \qquad L \in EndV,$$

де $L^k = \underbrace{L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ разів}}$. Якщо φ — лінійне зображення групи Лі G, інакше кажучи, якщо $\varphi : G \to \operatorname{Aut} V$ — гомоморфізм груп Лі, то

$$\varphi(\exp X) = \exp(\phi X) = \mathrm{id} + \phi X + \frac{1}{2!}(\phi X)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(\phi X)^k + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi X)^k.$$

При цьому

$$\phi X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(\exp tx) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\exp tx) - 1}{t}. \tag{8.3}$$

Вправа 2.29. Нехай $A \in M_{n,n}$. Довести, що $\det e^a = e^{\operatorname{tr} A}$.

Вправа 2.30. Нехай $A, B \in M_{n,n}$ — дві комутуючі матриці, тобто $A \cdot B = B \cdot A$. Довести, що $e^{A+B} = e^a \cdot e^b$.

Розглянемо два приклади, які показують, що експонентне відображення $\exp : \mathfrak{g} \to G$, хоча є гладким і регулярним у нулі відображенням, загалом кажучи, не ін'єктивне та не сюр'єктивне навіть у випадку зв'язної групи Лі. Нехай

$$G = GL^+(2, \mathbb{R}) = \{\, A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A > 0 \,\}$$

— компонента звя'зності повної лінійної групи другого порядку, що містить одиницю. Очевидно, це — підгрупа Лі групи Лі $GL(2, \mathbb{R})$ відносно відображення включення, зокрема, зв'язна група Лі. Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. Припустимо, що $A = \exp X; X \in \mathfrak{gl}(2, R) \equiv M_{2,2}$. Нехай $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Тоді власні значення матриці X визначаються із характеристичного рівняння

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{pmatrix} \equiv \lambda^2 - \operatorname{tr} X + \det X = 0.$$

Оскільки матриця X дійсна, корені цього рівняння, λ_1 і λ_2, будуть дійсними або комплексно спряженими. Але тоді й власні значення матриці $A = e^X$ дорівнюють, відповідно, e^{λ_1} і e^{λ_2}, будуть додатні або комплексно спряжені, що суперечить тому, що вони дорівнюють -2 і -3. Отже, припущення хибне, тобто матриця A не є експонентним образом ніякої матриці, і отже, відображення exp у цьому випадку не є сюр'єктивним.

Розглянемо матрицю $Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_{2,2}$. Очевидно, $Y = \alpha I + \beta J$, де $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. У силу твердження 8.2,

$$e^y = e^{\alpha I} \cdot e^{\beta J} = e^{\alpha} I \cdot e^{\beta J} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta J}.$$

Відзначимо, що $J^2 = -I$, у силу чого

$$e^{\beta J} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} J^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{2m}}{(2m)!} J^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{2m+1}}{(2m+1)!} J^{2m+1} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\beta^{2m}}{(2m)!} I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\beta^{2m+1}}{(2m+1)!} J = (\cos\beta) I + (\sin\beta) J$$

і, отже, $e^y = e^{\alpha}\big((\cos\beta)I + (\sin\beta)J\big)$. Звідси випливає, зокрема, що $\exp Y = \exp(Y + 2\pi k j); \quad (k \in \mathbb{Z})$ і, отже, відображення

$$\exp : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \to GL^+(2, \mathbb{R})$$

не є взаємно однозначним.

Деякі підгрупи Лі в $GL(n, \mathbb{C})$ і їх алгебри Лі

Нехай $GL(n, \mathbb{C})$ — повна комплексна лінійна група порядку n. У її алгебрі Лі $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \equiv M_{n,n}^{\mathbb{C}}$ внутрішньо визначено два лінійні оператори: оператор $A \to A^T$ транспонування, заданий співвідношенням $x_{ij}(A^T) = x_{ji}(A); \quad (i, j = 1, \ldots, n)$ і оператор комплексного спряження $A \to \overline{A}$. Розглянемо такі абстрактні підгрупи в групі $GL(n, \mathbb{C})$:

(1) унітарна група

$$U(n) = \{\, A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T \,\};$$

(2) комплексна ортогональна група

$$O(n,\mathbb{C}\,) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^T \,\};$$

(3) спеціальна лінійна група

$$SL(n,\mathbb{C}\,) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}\,) \mid \det A = 1\}.$$

Вправа 2.31. Довести, що кожна з перерахованих підгруп є підгрупою Лі групи Лі $GL(n,\mathbb{C})$ із алгеброю Лі, відповідно:

(1) $\mathfrak{u}(n) = \{\, A \in M^{\mathbb{C}}_{n,n} \mid \overline{A} + A^T = 0 \,\}$ (алгебра Лі косоермітових матриць);

(2) $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in M^{\mathbb{C}}_{n,n} \mid A + A^T = 0 \,\}$ (алгебра Лі комплексних кососиметричних матриць);

(3) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in M^{\mathbb{C}}_{n,n} \mid \operatorname{tr} A = 0 \,\}$ (алгебра Лі безслідних матриць).

Вправа 2.32. Довести, що абстрактні підгрупи

(1) $SU(n) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$;

(2) $SO(n,\mathbb{C}) = SL(n,\mathbb{C}) \cap O(n,\mathbb{C})$;

(3) $SL(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{C}) \cap GL(n,\mathbb{R})$;

(4) $O(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{C}) \cap GL(n,\mathbb{R})$;

(5) $SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R})$

є підгрупами Лі груп Лі $GL(n,\mathbb{C})$ і $GL(n,\mathbb{R})$, відповідно, алгебри Лі яких є перетинами алгебр Лі груп Лі – співмножників. Довести, що розмірності алгебр Лі, а, отже, і розмірностям відповідних їм груп Лі, такі:

$$\dim SL(n,\mathbb{C}) = 2n^2 - 2;$$
$$\dim U(n) = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2;$$
$$\dim SU(n) = n^2 - 1;$$
$$\dim O(n,\mathbb{C}) = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1);$$
$$\dim SO(n,\mathbb{C}) = n(n-1) - 2;$$
$$\dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1;$$
$$\dim O(n,\mathbb{R}) = \dim SO(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad \square$$

Накриття груп Лі

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *локально лінійно зв'язним*, якщо всі його компоненти лінійної зв'язності є відкритими множинами, і *напівлокально однозв'язним*, якщо $\forall\, x \in X\, \exists\, U_x\, \forall\, \omega : I \to (U_x, x)$ гомотопна нулю в класі петель $\{\,\omega : I \to (X, x)\,\}$. Всякий локально евклідовий топологічний простір, зокрема, усякий гладкий многовид, локально лінійно зв'язний й напівлокально однозв'язний. Компоненти зв'язності лінійно зв'язного топологічного простору збігаються з його компонентами лінійної зв'язності, зокрема, зв'язний локально лінійно зв'язний топологічний простір — лінійно зв'язний.

Неперервне відображення $p : Y \to X$ топологічних просторів називається *відображенням, що накриває,* або *накриттям*, якщо

$$\forall\, x \in X\, \exists\, U_x : p^{-1}(U_x) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

де $U_\alpha \subset Y$ — відкрита підмножина така, що $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U_x$ — гомеоморфізм, причому $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \quad (\alpha \neq \beta)$. Говорять, що U_x *просто накрита*, або *добре накрита*, відображенням p. Топологічні простори Y і X називаються, відповідно, *простором, що накриває,* і *базою*. Потужність множини A називається *лисністю* відображення p, що накриває.

Теорема 2.5. *(див. [24]). 1. Нехай $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ — відображення, що накриває, топологічних просторів з відміченою точкою, і нехай $\alpha : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ — неперервне відображення, таке що*

$$\alpha_*\big(\pi(Z, z_0)\big) \subset p_*\big(\pi(Y, y_0)\big).$$

Тоді існує единe неперервне відображення

$$\tilde{\alpha} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$$

таке, що $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. (Говорять, що відображення $\tilde{\alpha}$ накриває відображення α, або є підняттям *цього відображення в простір Y).*

2. Зв'язний локально лінійно зв'язний топологічний простір має однозв'язний накриваючий простір тоді й тільки тоді, коли він напівлокально однозв'язний.

3. Нехай $p : Y \to X$ — відображення, що накриває. Якщо простір X однозв'язний, то p — гомеоморфізм. □

Однозв'язний простір, що накриває Y над зв'язним локально лінійно зв'язним напівлокально однозв'язним топологічним простором X, називається *універсальним простором, що накриває,* а відповідне йому відображення, що накриває, $p : Y \to X$ — *універсальним накриттям* простору X.

Відзначимо, що в силу п.3 теореми 10.1, універсальний простір, що накриває над даним топологічним простором, визначений однозначно з точністю до гомеоморфізму.

Вправа 2.33. Нехай $p : Y \to X$ — відображення, що накриває, базою якого є гладкий многовид. Довести, що на просторі, що накриває, внутрішньо індукується гладка структура, щодо якої відображення, що накриває, є гладким регулярним відображенням (тобто локальним дифеоморфізмом). Більше того, якщо Z — гладкий многовид, то підняття будь-якого гладкого відображення $\alpha : Z \to X$ в Y є гладким відображенням.

Вправа 2.34. Довести, що для усякого зв'язного гладкого многовида X існує однозв'язний простір Y, що накриває X, який сам є гладким многовидом, заданим однозначно з точністю до дифеоморфізма, причому відображення, що накриває, $p : Y \to X$ гладке й регулярне.

Теорема 2.6. *([15, стор. 186]) Кожна зв'язна група Лі має однозв'язний простір, що її накриває, який сам є групою Лі, заданою однозначно з точністю до ізоморфізму, причому відображення, що накриває, є гомоморфізмом груп Лі. Якщо вихідна група Лі абелева, то і її однозв'язне накриття — абелева група Лі.*

Теорема 2.7. *([15, стор. 188]) Нехай $\varphi : G \to H$ — гомоморфізм зв'язних груп Лі. Відображення φ є накриттям тоді й тільки тоді, коли $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — ізоморфізм алгебр Лі.*

Вправа 2.35. Довести, що однозв'язні групи Лі ізоморфні тоді й тільки тоді, коли їх алгебри Лі ізоморфні.

Теорема 2.8. *(Адо [22]) Усяка скінченновимірна алгебра Лі має точне лінійне зображення.*

Це значить, що існує мономорфізм будь-якої скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у повну матричну алгебру. Його образ — підалгебра цієї алгебри, якій відповідає зв'язна підгрупа групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$, що має своєю алгеброю Лі алгебру Лі, ізоморфну $\mathfrak{g}$.

Вправа 2.36. Довести, що для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі існує єдина з точністю до ізоморфізму однозв'язна група Лі, алгебра Лі якої ізоморфна даній алгебрі Лі.

Теорема 2.9. *([15, стор. 191]) Нехай G і H — групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно, причому G — однозв'язна група Лі. Нехай $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — гомоморфізм алгебр Лі. Тоді існує, і притому єдиний, гомоморфізм груп Лі $\varphi : G \to H$, такий, що $\phi = \Psi$.*

Наслідок 2.1. *Однозв'язні групи Лі ізоморфні тоді й тільки тоді, коли їх алгебри Лі ізоморфні.*

Отже, категорія однозв'язних груп Лі еквівалентна категорії скінченновимірних алгебр Лі.

Неперервні гомоморфізми

Вправа 2.37. Нехай $\varphi : \mathbb{R} \to G$ — неперервний гомоморфізм дійсної прямої (розглянутої як адитивна група, з метричною топологією) у групу Лі G. Довести, що відображення φ гладке.

Теорема 2.10. *([15, стор. 197]) Нехай $\varphi : G \to H$ — неперервний гомоморфізм груп Лі. Тоді відображення φ гладке.*

Абстрактна група G, наділена топологією, у якій відображення $\varphi : G \times G \to G$, задане формулою $\varphi(g, h) = g \cdot h^{-1}$, неперервне, називається *топологічною групою.*

Вправа 2.38. Довести, що локально евклідова топологічна група G, що задовольняє другій аксіомі зліченності, може мати не більше однієї гладкої структури, що перетворює цю групу в групу Лі.

Теорема 2.11. *(Глісон, Монтгомері, Циппін,1952) Локально евклідова топологічна група, що задовольняє другій аксіомі зліченності, завжди допускає єдину гладку структуру, перетворюючи цю групу в групу Лі.*

Л.С. Понтрягіним доведено, що в гладкій структурі цієї групи Лі існує аналітична структура, тобто такий атлас $\bigcup_{\alpha\in A}\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, що $\forall\, \alpha, \beta \in A \implies \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ є аналітичним дифеоморфізмом областей простору $\mathbb{R}^n$ (тобто дифеоморфізмом, заданим функціями, що є сумами статечних рядів). Отже, будь-який неперервний гомоморфізм груп Лі є аналітичним, і виходить, у гладкій структурі на групі Лі існує єдина аналітична структура.

Замкнені підгрупи групи Лі

Вправа 2.39. Нехай $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ — гладкі криві на групі Лі G з початком в одиниці $e \in G$, $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(t) = \xi$, $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \beta(t) = \eta$, $\gamma(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Довести, що $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = \xi + \eta$.

Вправа 2.40. Нехай G — група Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Довести, що

$$\exp tx \exp ty = \exp\{t(X+Y) + O(t^2)\}; \quad (t \to 0).$$

Вправа 2.41. Довести, що $\lim_{n\to\infty} \left(\exp \frac{t}{n} x \exp \frac{t}{n} y\right)^n = \exp t(X+Y)$; $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Теорема 2.12. *([15, стор. 200]) Нехай G — група Лі, $A \subset G$ — її замкнена абстрактна підгрупа. Тоді A має єдину структуру підмноговида в G, що перетворює A у підгрупу Лі групи Лі G.*

Приєднане зображення. Нехай M — гладкий многовид, G — група Лі. Гладке відображення $\mu : G \times M \to M$ таке, що:

$$1)\ \mu(gh, m) = \mu\big(g, \mu(h, m)\big); \quad 2)\ \mu(e, m) = m; \quad (g, h \in G,\ m \in M),$$

називається *лівою дією* групи Лі G на многовиді M.

Якщо μ — ліва дія, то кожний елемент $g_0 \in G$ породжує відображення $\mu_{g_0} : M \to M$, задане формулою $\mu_{g_0}(m) = \mu(g_0, m)$. Це відображення є дифеоморфізмом, оскільки зворотне відображення $\mu_{g_0}^{-1} : M \to M$, задане формулою $\mu_{g_0}^{-1}(m) = \mu(g_0^{-1}, m)$, є гладким.

Аналогічно, гладке відображення $\nu : M \times G \to M$ таке, що

$$1)\ \nu(m, gh) = \nu\big(\nu(m, g), h\big); \quad 2)\ \nu(m, e) = m; \quad (m \in M,\ g, h \in G),$$

називається *правою дією* групи Лі G на многовиді M.

Вправа 2.42. Нехай $\mu : G \times M \to M$ — ліва дія групи Лі G на многовиді M, m — *нерухома точка дії*, тобто

$$\forall g \in G \implies \mu(g, m) = m.$$

Довести, що відображення $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\big(T_m(M)\big)$, задане формулою

$$\varphi(g) = \big((\mu_g)_*\big)_m, \qquad g \in G,$$

є лінійним зображенням групи Лі G.

Нехай, G — довільна група Лі. Тоді внутрішнім образом визначене відображення $A : G \times G \to G$, що діє за формулою $A(g,h) = ghg^{-1}$. Безпосередньо перевіряється, що A — ліва дія групи Лі G на собі, а також, що дифеоморфізми $A_g : G \to G$, задані вище й діючі за формулою $A_g(h) = ghg^{-1}$; $\quad (g, h \in G)$, є гомоморфізмами групи G, а отже, автоморфізмами групи Лі G (ці автоморфізми називаються іt внутрішніми автоморфізмами групи Лі G). Зокрема, $\forall\, g \in G \implies A_g(e) = e$, тобто $e \in G$ — нерухома точка цієї дії. Відображення $\varphi : G \to \operatorname{Aut} T_e(G) \equiv \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, що діє за формулою $\varphi(g) = \big((A_g)_*\big)_e$; $\quad (g \in G)$, є лінійним зображенням групи Лі G. Воно називається *приєднаним зображенням* групи Лі G і позначається Ad. Таким чином, відображення $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ задається співвідношенням $\operatorname{Ad}(g) = \beta^{-1} \circ \big((A_g)_*\big)_e$, де $\beta : \mathfrak{g} \to T_e(G)$ — канонічний ізоморфізм ототожнення. Має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\operatorname{Ad}(g)} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{A_g} & G. \end{array} \tag{13.1}$$

Інакше кажучи, $\exp\big(t \operatorname{Ad}(g) X\big) = g \exp(tx) g^{-1}$. Диференціал гомоморфізму $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ породжує гомоморфізм $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(\operatorname{Aut} \mathfrak{g}) \equiv End\mathfrak{g}$ відповідних алгебр Лі. Таким чином, $\operatorname{ad} = (\operatorname{Ad})_*|_{\mathfrak{g}}$. Отже, має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\operatorname{ad}} & End\mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\operatorname{Ad}} & \operatorname{Aut} \mathfrak{g}. \end{array} \tag{3.2}$$

Зокрема, якщо $G = \operatorname{Aut} V$, де V — лінійний простір, ці комутативні діаграми мають, відповідно, вигляд:

$$\begin{array}{ccc} EndV & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(B)} & EndV \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathrm{Aut}\,V & \xrightarrow{A_B} & \mathrm{Aut}\,V, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} EndV & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & End(EndV) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathrm{Aut}\,V & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}(EndV), \end{array} \tag{13.3}$$

де $B \in \mathrm{Aut}\,V$.

Вправа 2.43. Нехай $B \in \mathrm{Aut}\,V$, $C \in EndV$. Довести, що

$$\mathrm{Ad}(B)C = B \circ C \circ B^{-1}.$$

Теорема 2.13. *([15, стор. 205]) Нехай G — група Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Тоді $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$.*

Теорема 2.14. *([15, стор. 205]) Нехай $A \subset G$ — зв'язна підгрупа Лі зв'язної групи Лі G, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ — їх алгебри Лі відповідно. Тоді*

$$A \subset G \text{ — нормальний дільник} \iff \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g} \text{ — ідеал.}$$

Теорема 2.15. *([15, стор. 206]) Нехай $\varphi : G \to H$ — гомоморфізм груп Лі, $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ — індукований ними гомоморфізм приєднаних алгебр Лі. Припустимо, що $A = \ker\varphi$, $\mathfrak{a} = \ker\phi$. Тоді $A \subset G$ — замкнена підгрупа Лі в G з алгеброю Лі $\mathfrak{a}$.*

Нехай G — група Лі, $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі. Їх *центри*, $\mathfrak{Z}(G)$ і $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ відповідно, визначаються так:

$$\mathfrak{Z}(G) = \{\, \sigma \in g \mid \forall\, \tau \in G \implies \sigma\tau = \tau\sigma \,\};$$
$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \forall\, Y \in \mathfrak{g} \implies [X, Y] = 0 \,\}.$$

Теорема 2.16. *([15, стор. 207]) Центр зв'язної групи Лі є ядром приєднаного зображення.*

Вправа 2.44. Нехай G — зв'язна група Лі, $\mathfrak{Z}(G)$ — її центр. Довести, що $\mathfrak{Z}(G) \subset G$ — замкнена підгрупа Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.

Вправа 2.45. Довести, що зв'язна група Лі абелева тоді й тільки тоді, коли її алгебра Лі абелева.

Вправа 2.46. Нехай G — група Лі, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі. Довести, що

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \;\;\&\;\; [X, Y] = 0 \implies \exp X \exp Y = \exp(X + Y).$$

Вправа 2.47. Нехай $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{\, 0 \,\}$. Довести, що відображення $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End\mathfrak{g}$, що зіставляє вектору $X \in \mathfrak{g}$ ендоморфізм $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, який діє за формулою $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$, є гомоморфізмом алгебр Лі.

Теорема 2.17. *([15, стор. 209]) Для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі з нульовим центром існує єдина з точністю до ізоморфізму однозв'язна група Лі, алгебра Лі якої ізоморфна даній алгебрі Лі.*

Автоморфізми й диференціювання білінійних операцій і форм

Нехай V — скінченновимірний лінійний простір (над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). *Білінійною операцією на* V називається білінійне відображення $\varphi : V \times V \to V$, або, що те ж саме, лінійне відображення $\varphi : V \otimes V \to V$. Нехай $X, Y \in V$. Позначимо $\varphi(X, Y) = X \cdot Y$.

Покладемо

$$A_\varphi = \{\, \alpha \in \mathrm{Aut}\, V \mid \alpha(X) \cdot \alpha(Y) = \alpha(X \cdot Y); \quad X, Y \in V \,\}.$$

Елементи множини A_φ називаються *автоморфізмами* операції φ.

Покладемо

$$\mathfrak{d}_\varphi = \{\, \beta \in EndV \mid \beta(X) \cdot Y + X \cdot \beta(Y) = \beta(X \cdot Y); \qquad X, Y \in V \,\}.$$

Елементи множини $\mathfrak{d}_\varphi$ називаються *диференціюваннями* операції φ.

Вправа 2.48. Довести, що $A_\varphi \subset \mathrm{Aut}\, V$ — замкнена підгрупа Лі, алгебра Лі якої збігається з $\mathfrak{d}_\varphi$.

Нехай V — скінченновимірний лінійний простір над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$. *Білінійною формою* на V називається білінійне відображення $B : V \times V \to \mathbb{F}$, або, що те ж саме, лінійне відображення $B : V \otimes V \to \mathbb{F}$. Нехай $X, Y \in V$. Позначимо $B(X,Y) =< X, Y >$.

Покладемо

$$A_B = \alpha \in \operatorname{Aut} V \mid < \alpha(u), \alpha(v) >=< u, v >.$$

Елементи множини A_B називаються *автоморфізмами* форми B.

Покладемо

$$\mathfrak{d}_B = \beta \in EndV \mid < \beta(u), v > + < u, \beta(v) >= 0.$$

Елементи множини $\mathfrak{d}_B$ називаються *диференціюваннями* форми B.

Вправа 2.49. Довести, що $A_B \subset \operatorname{Aut} V$ — замкнена підгрупа Лі, алгебра Лі якої збігається з $\mathfrak{d}_B$.

Зафіксуємо базис $\{ e_i \}$ простору V. Тоді група Лі $\operatorname{Aut} V$ канонічно ототожнюється з повною лінійною групою $GL(n, \mathbb{F})$ за допомогою зіставлення елементу $f \in \operatorname{Aut} V$ його матриці в даному базисі, причому алгебра Лі $EndV$ цієї групи Лі аналогічно ототожнюється з повною матричною алгеброю Лі $M_{n,n}(\mathbb{F})$. Якщо базис вибрати ортонормованим відносно білінійної форми B, то при цьому ототожненні підгрупі Лі $A_B \subset \operatorname{Aut} V$ відповідає підгрупа Лі $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$, а її алгебрі Лі $\mathfrak{d}_B \subset EndV$ — підалгебра Лі $\mathfrak{o}(n, \mathbb{F})$ алгебри Лі $M_{n,n}(\mathbb{F})$.

Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі. Її комутатор $[\cdot,\cdot]$ є білінійною операцією на лінійному просторі $\mathfrak{g}$. У цьому випадку група $A_{[\cdot,\cdot]}$ є не що інше, як група всіх автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$, яка позначається $A(\mathfrak{g})$. За теоремою 4.1, $A(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — замкнена підгрупа Лі, алгебра Лі якої складається з диференціювань комутатора й позначається $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Таким чином,

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \{ f \in End(\mathfrak{g}) \mid f([X,Y]) = [f(X), Y] + [X, f(Y)]; X, Y \in \mathfrak{g} \}.$$

Нехай G — однозв'язна група Лі, $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі. Позначимо $A(G)$ групу всіх автоморфізмів групи Лі G. Побудуємо бієктивне відображення $\tau : A(G) \to A(\mathfrak{g})$, поклавши $\tau(\varphi) = \phi \equiv \varphi_*|_{\mathfrak{g}}$.

Теорема 2.18. *([15, стор. 212]) Група автоморфізмів однозв'язної групи Лі має природну структуру групи Лі, ізоморфну групі Лі автоморфізмів приєднаної алгебри Лі.*

Приєднана група. Нехай $\mathfrak{g}$ — (скінченновимірна) алгебра Лі. Розглянемо відображення $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End\mathfrak{g}$. Це — гомоморфізм алгебр Лі. Отже, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset End\mathfrak{g}$ — підалгебра Лі і існує єдина з точністю до ізоморфізму зв'язна підгрупа Лі групи Лі $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, алгебра Лі якої ізоморфна $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Вона позначається $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ і називається *приєднаною групою* алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Помітимо, що $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Справді, за тотожністю Якобі $\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$; $\quad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$, звідки $\big[X,[Y,Z]\big] = \big[[X,Y],Z\big] + \big[Y,[X,Z]\big]$, або

$$\mathrm{ad}_X\big([Y,Z]\big) = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z]; \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g}),$$

і, отже, $\forall X \in \mathfrak{g} \implies \mathrm{ad}_X \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Отже, $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ є підгрупа Лі групи Лі $A(\mathfrak{g})$ автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тому елементи групи Лі $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ називаються *внутрішніми автоморфізмами* алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а елементи її алгебри Лі $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ — *внутрішніми диференціюваннями* цієї алгебри Лі.

Нехай $\mathfrak{g}$ — (скінченновимірна) алгебра Лі, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — її підалгебра Лі, K^* — підгрупа Лі групи Лі $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$, що відповідає підалгебрі Лі $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \subset \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

Підалгебра Лі $\mathfrak{k}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ називається *компактно вкладеною*, якщо K^* — компактна група Лі. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ називається *компактною*, якщо вона компактно вкладена у себе, тобто якщо група Лі $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ компактна.

Вправа 2.50. Нехай G — зв'язна група Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$, $K \subset G$ — підгрупа Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{k}$. Довести, що $K^* = \mathrm{Ad}_G(K)$. Зокрема,

$$\mathrm{Ad}\,G = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}.$$

Таким чином, у випадку, коли g — алгебра Лі зв'язної групи Лі, приєднана група $\operatorname{Int} g$ є не що інше, як образ цієї групи Лі в приєднаному зображенні.

Форма Кіллінга. Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0 (можна уважати, що $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). *Формою Кіллінга* на $\mathfrak{g}$ називається симетрична білінійна форма $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$, задана формулою

$$B(X, Y) = -\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y); \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Форма Кіллінга має першочергове значення у структурній теорії алгебр Лі (а значить, і груп Лі).

Вправа 2.51. Довести, що форма Кіллінга має такі властивості:

1. Форма Кіллінга на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ визначена внутрішньо, тобто інваріантна відносно автоморфізмів цієї алгебри Лі.

2. $B\big([X, Y], Z\big) = B\big(X, [Y, Z]\big); \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$. (Ця властивість називається *інваріантністю форми Кіллінга*).

3. Нехай $\mathfrak{a}$ — ідеал алгебри Лі $\mathfrak{g}$, B — форма Кіллінга на $\mathfrak{g}$, $\tilde{B}$ — форма Кіллінга на $\mathfrak{a}$. Тоді $\tilde{B} = B|_{\mathfrak{a}}$.

Напівпрості алгебри Лі.

Алгебра Лі над полем характеристики 0 називається *напівпростою*, якщо вона не містить ненульових абелевих ідеалів.

Алгебра Лі називається *простою*, якщо вона напівпроста й не містить нетривіальних ідеалів.

Група Лі називається *напівпростою* (*простою*), якщо її алгебра Лі напівпроста (проста).

Із визначення випливає, що центр напівпростої алгебри Лі, що є абелевим ідеалом, нульовий, а центр напівпростої групи Лі дискретний. Зокрема, приєднане зображення напівпростої алгебри Лі точне.

Теорема 2.19. *(Критерій Картана) Алгебра Лі напівпроста тоді й тільки тоді, коли її форма Кіллінга невироджена.*

Вправа 2.52. Нехай $\mathfrak{g}$ — напівпроста алгебра Лі, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ — ідеал, $\mathfrak{a}^{\perp}$ — його ортогональне доповнення щодо форми Кіллінга. Довести, що $\mathfrak{a}$ — напівпростий ідеал, $\mathfrak{a}^{\perp}$ — ідеал (за необхідністю напівпростий), причому $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$.

Вправа 2.53. Нехай $\mathfrak{a}$ — ідеал напівпростої алгебри Лі $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — ідеал алгебри Лі $\mathfrak{a}$. Довести, що $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ — ідеал.

Теорема 2.20. *Напівпроста скінченновимірна алгебра Лі розпадається в пряму суму простих ідеалів, і притому однозначно з точністю до порядку доданків.*

Теорема 2.21. *([15, стор. 218]) Нехай $\mathfrak{g}$ — напівпроста алгебра Лі. Тоді*

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \mathfrak{d}(\mathfrak{g}),$$

тобто усяке диференціювання напівпростої алгебри Лі є внутрішнім.

Вправа 2.54. Нехай $\mathfrak{g}$ — дійсна напівпроста алгебра Лі. Довести, що $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ — компонента одиниці в групі Лі $A(\mathfrak{g})$.

Вправа 2.55. Нехай $\mathfrak{g}$ — дійсна напівпроста алгебра Лі. Довести, що $A(\mathfrak{g})$ — група Лі з алгеброю Лі $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$, ізоморфній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$. Компонента одиниці цієї групи Лі збігається з $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$. $\square$

Компактні групи Лі. Група Лі називається *компактною*, якщо вона компактна як топологічний простір, тобто із усякого її відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Серед відомих нам прикладів груп Лі компактними є групи Лі $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$. Доведемо, наприклад, компактність групи Лі $O(n, \mathbb{R})$. Ми знаємо (п.1), що $O(n, \mathbb{R}) \subset M_{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ — замкнена підмножина. Нехай $A = (a_{ij}) \in O(n, \mathbb{R})$. Тоді $AA^T = I_n$, тобто $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta^i_j$. Зокрема,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik} = n, \text{ тобто} \|A\|^2 = n.$$

Значить, у стандартній метриці евклідового простору $\mathbb{R}^{n^2}$ відстань від нульової матриці до довільного елемента $A \in O(n, \mathbb{R})$ не перевершує $\sqrt{n}$. Таким чином, $O(n, \mathbb{R}) \subset M_{n,n}$ — обмежена замкнена підмножина евклідового простору. Зокрема, $O(n, \mathbb{R})$ — компактна група Лі. Компактність інших з перерахованих груп Лі доводиться аналогічно. *Інваріантним інтегруванням* на групі Лі G називається відображення алгебри $C(G)$ усіх неперервних на G функцій у поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел, що зіставляє функції $f \in C(G)$ дійсне число $\int_G f(x)d\mu(x)$ (що називається *інтегралом* функції f за групою Лі G), яке має такі властивості:

1) $\int_G \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} d\mu(x) = \alpha \int_G f(x)d\mu(x) + \beta \int_G g(x)d\mu(x)$; $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in C(G))$ (лінійність);

2) $\forall f \in C(G)\ \ \&\ \ f \geq 0 \implies \int_G f(x)d\mu(x) \geq 0$ (додатна визначеність);

3) $\int_G 1 d\mu(x) = 1$ (нормованість);

4) $\forall g \in G \implies \int_G f(gx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$ (лівоінваріантність).

Теорема 2.22. *([21]) Нехай G — компактна група Лі. Тоді на ній однозначно визначене інваріантне інтегрування. Воно має властивість*

$$\forall g \in G \implies \int_G f(xg)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x). \quad \square$$

Теорема 2.23. *(([15, стор. 221])) Нехай $\varphi : G \to \operatorname{Aut} V$ лінійне зображення компактної групи Лі G. Тоді на лінійному просторі V існує евклідова структура, інваріантна щодо дії групи Лі G.*

Біінваріантною метрикою, або *метрикою Хаара*, на групі Лі G називається ріманова метрика на G, інваріантна відносно лівих і правих зсувів. Інакше, біінваріантна метрика на G — це поле симетричного тензора $\beta \in \mathcal{T}_2^0\big(\mathfrak{X}(G)\big)$, такого, що:

1) $\forall X \in \mathfrak{X}(G) \implies \beta(X, X) \geq 0$, причому$\beta(X, X) = 0 \iff X = 0$;

2) $\forall g \in G \implies L_g^* \beta = R_g^* \beta = \beta$.

Вправа 2.56. Довести, що на всякій компактній груп Ліі існує біінваріантна метрика.

Компактні алгебри Лі. Нагадаємо, що алгебра Лі $\mathfrak{g}$ називається компактною, якщо її приєднана група $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ компактна.

Вправа 2.57. Нехай $\mathfrak{g}$ — дійсна напівпроста алгебра Лі. Довести, що $\mathfrak{g}$ компактна в тому й тільки тому випадку, коли її форма Кіллінга B додатньо визначена.

Теорема 2.24. *([15, стор. 223]) Нехай $\mathfrak{g}$ — компактна алгебра Лі. Тоді*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

причому $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ — напівпростий компактний ідеал.

Вправа 2.58. Довести, що дійсна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ компактна тоді й тільки тоді, коли існує компактна група Лі, алгебра Лі якої ізоморфна $\mathfrak{g}$.

Вправа 2.59. Нехай $\mathfrak{g}$ — дійсна алгебра Лі, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — компактно вкладена підалгебра така, що $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{ 0 \}$. Довести, що форма Кіллінга B алгебри Лі $\mathfrak{g}$ додатньо визначена на $\mathfrak{k}$.

ТЕМА 3

ДІЇ ГРУП НА МНОГВИДАХ

Дія груп на многовидах. Відображення $\Phi : G \times M \to M$ називається *лівою дією* групу G на множині M, якщо воно має такі властивості:

(1) $\Phi(e, m) = m$;

(2) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m), \qquad (\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m))$;

(3) $\forall\, g \in G \implies$ відображення $m \mapsto \varphi_g m \equiv \Phi(g, m)$ — перетворення множини M.

Зображенням групи G на множині M називається гомоморфізм φ цієї групи в групу G_M перетворень цієї множини. Зображення φ і дія Φ називаються *асоційованими*, якщо $\Phi(g, m) = \varphi(g)(m)$. Задання дії рівносильне заданню зображення.

Якщо φ — мономорфізм, то дія *ефективна*, а зображення — *точне*.

Якщо позначити φ_g образ елемента $g \in G$ при відображенні φ, то

$$\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h, \qquad (\varphi_{gh} = \varphi_h \circ \varphi_g). \tag{1.1}$$

Вправа 3.1. Перевірте, що група перетворень G_M множини M і будь-яка підгрупа $H \subset G_M$ цієї групи, ефективно діє на M ліворуч. Гомоморфізмами φ у цьому випадку є відображення вкладення $i : H \subset G_M$. Дія $\Phi : H \times M \to M$ задається формулою $\Phi(h, m) = h(m)$.

Вправа 3.2. Перевірте, що усяка дія групи G на множині M породжує ефективну дію групи $G/\ker\varphi$ на цій множині.

Якщо дія ефективна, то елемент $g \in G$ можна ототожнити з його образом $\varphi(g)$. Тому у випадку лівої ефективноїдії групи G на M елемент $\varphi_g m$ часто позначають gm.При цьому умови (1.1) запишуться у вигляді

$$g(hm) = (gh)m; \qquad g, h \in G, \; m \in M. \tag{1.1'}$$

Аналогічно визначається права дія групи на множині. У цьому випадку $m(gh) = (mg)h \qquad g, h \in G, \; m \in M$.

Кажуть, що група G діє на множині M *транзитивно*, якщо

$$\forall\, x, y \in M \exists\, g \in G \;\; \& \;\; \varphi_g x = y.$$

Кажуть, що група G діє на множині M *вільно*, якщо

$$(\exists m \in M \exists g \in G \;\; \& \;\; \varphi_g m = m) \implies g = e,$$

де $e \in G$ — нейтральний елемент (одиниця) групи.

Усяка вільна дія ефективна.

Нехай група G діє на множині M. Тоді кожний елемент $m \in M$ породжує відображення $\sigma_m : G \to M$, що зіставляє елементу $g \in G$ елемент $\sigma_m(g) = \varphi_g m = \Phi(g, m) \in M$. Образ цього відображення називається *орбітою* елемента m і позначається $\operatorname{Orb} m$.

Вправа 3.3. Перевірте, що дія транзитивна тоді й тільки тоді, коли $\forall\, m \in M \implies \operatorname{Orb} m = M$. Якщо дія вільна, то відображення σ_m є біекцією групи G на відповідну орбіту.

Якщо G — група Лі, φ — її гомоморфізм (як абстрактної групи) у групу $\operatorname{Diff} M$ дифеоморфізмів гладкого многовида M, і Φ — гладке відображення, то G *гладко діє на многовиді* M.

Приклад 3.1. Нехай $M = \mathcal{A}$ — n-вимірний афінний простір, наділений канонічною гладкою структурою, $\operatorname{Aff} \mathcal{A}$ — група його афінних перетворень, V — простір трансляцій. Нагадаємо, що група

$\operatorname{Aff}\mathcal{A}$ канонічно ізоморфна напівпрямому добутку груп Лі $\operatorname{Aut}V$ і V, а отже, несе природню структуру групи Лі, яка, як підгрупа групи перетворень множини $\mathcal{A}$, діє на ньому ліворуч. У цьому випадку дія $\Phi : \operatorname{Aff}\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, що зіставляє парі (F, m) точку $F(m)$, задається у природній карті $(\mathcal{A}, r)$, породженої репером r, рівняннями

$$\tilde{x}^i = A^i_j x^j + v^i; \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

де (A^i_j) — матриця диференціала афінного перетворення F, v^j — координати вектора трансляції, що відповідає канонічному розкладу перетворення F. Очевидно, ці функції гладкі за всіма змінними A^i_j, v^k і x^r і, отже, Φ — гладке відображення. Більше того, із цих рівнянь випливає, що при фіксованому $F \in \operatorname{Aff}\mathcal{A}$ відображення φ_F є дифеоморфізмом многовида $\mathcal{A}$. Отже, група Лі $\operatorname{Aff}\mathcal{A}$ гладко діє на цьому многовиді.

Вправа 3.4. Показати, що ця дія транзитивна та невільна.

Приклад 3.2. Із попереднього прикладу випливає, що на афінному просторі $\mathcal{A}$ гладко діє будь-яка підгрупа групи $\operatorname{Aff}\mathcal{A}$, зокрема, центроафінна щодо якої-небудь точки $O \in \mathcal{A}$ група $\operatorname{Aff}_O\mathcal{A}$, що складається з афінних перетворень простору $\mathcal{A}$, які зберігають точку O. Ця група природно ізоморфна групі $\operatorname{Aut}V$ автоморфізмів простору трансляцій. У той же час сам лінійний простір V має природню структуру центроафінного простору $(V, 0)$, а отже, і гладкого многовида. Після цих ототожнень одержуємо, що група Лі $\operatorname{Aut}V$ автоморфізмів n-вимірного лінійного простору V гладко діє ліворуч на гладкому многовиді V. Очевидно, ця дія нетранзитивна й невільна, оскільки будь-який елемент групи $\operatorname{Aut}V$ зберігає елемент $0 \in V$.

Приклад 3.3. Нехай G — r-вимірна група Лі, φ — її лінійне зображення, тобто гомоморфізм цієї групи Лі в групу Лі автоморфізмів n-вимірного лінійного простору V. Фіксуємо локальну карту (U, ψ) на G з координатами $\{\, x^1, \dots, x^r \,\}$, а також глобальну карту на V, породжену базисом b. Цей базис канонічно породжує базис, а отже, і глобальну карту, на лінійному просторі $\mathcal{T}_1^1(V)$ тензорів типу (1,1) на V, розглянутих як лінійні оператори на V. Нехай гомоморфізм φ у цій парі карт задається рівняннями $t_j^i = t_j^i(x^1, \dots, x^r)$ $\; i = 1, \dots, n$. Тоді дія $\Phi : G \times V \to V$ задається рівняннями

$$\tilde{X}^i = t_j^i(x^1, \dots, x^r) X^j; \qquad i = 1, \dots, n.$$

Звідси випливає, що Φ — гладке відображення, і отже, група Лі G гладко діє на гладкому многовиді V. Важливим частковим випадком такої дії є дія довільної групи Лі G на своїй алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ за допомогою приєднаного зображени Ad.

Приклад 3.4. Нехай V — n-вимірний лінійний простір, $\mathcal{B}$ — множина його базисів. На ній внутрішньо визначена дія групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$. А саме, якщо $b = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{B}$, $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$, то покладемо

$$\varphi_g(b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, g_n^{i_n} e_{i_n}).$$

У зв'язку з невиродженостю матриці g вектори $\varepsilon_k = g_k^{i_k} e_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$, утворюють базис і, отже, $\varphi_g(b) \in \mathcal{B}$. Очевидно, відображення φ_g бієктивне. Нехай тепер $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ — дві такі матриці. Тоді

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = \varphi_h\big(\varphi_g(b)\big) = \varphi_h(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (h_1^{i_1} \varepsilon_{i_1}, \dots, h_n^{i_n} \varepsilon_{i_n}) =$$
$$= (h_1^{i_1} g_{i_1}^{j_1} e_{j_1}, \dots, h_n^{i_n} g_{i_n}^{j_n} e_{j_n}) = \big((gh)_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, (gh)_n^{j_n} e_{j_n}\big) = \varphi_{gh}(b),$$

а отже, відображення φ визначає *праву* дію групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$ на множині $\mathcal{B}$. Більше того, оскільки для будь-якої пари базисів $b, \beta \in \mathcal{B}$ існує єдина матриця $g \in GL(n, \mathbb{R})$, така, що $\varphi_g(b) = \beta$ (а саме, матриця $C(b, \beta)$ переходу від базису b до базису β), ця дія вільна й транзитивна. Це дозволяє природно визначити на множині $\mathcal{B}$ структуру гладкого многовида, дифеоморфного групі Лі $GL(n, \mathbb{R})$. Справді, фіксуємо $b_0 \in \mathcal{B}$. Тоді природно виникає бієктивне відображення ψ множини $\mathcal{B}$ на область $GL(n,\mathbb{R})$ евклідового простору $\mathbb{R}^{n^2} \equiv M_{n,n}$, що зіставляє базису $b \in \mathcal{B}$ матрицю $C = C(b_0, b)$ переходу від базису b_0 до базису b. Внесемо в $\mathcal{B}$ топологію, зажадавши, щоб це відображення було гомеоморфізмом. Покажемо, що ця топологія не залежить від вибору b_0. Справді, нехай $\beta_0 \in \mathcal{B}$ — інший базис. Розглянемо відповідну бієкцію $\tilde{\psi}$, що зіставляє базису b матрицю $\tilde{C} = C(\beta_0, b)$ Маємо $\varphi_C b_0 = b$, $\varphi_{\tilde{C}}\beta_0 = b$. Нехай $C_0 = C(\beta_0, b_0)$, а отже, $\varphi_{C_0}\beta_0 = b_0$. Тоді

$$\varphi_{\tilde{C}}\beta_0 = b = \varphi_C b_0 = \varphi_C \circ \varphi_{C_0}\beta_0 = \varphi_{C_0 C}\beta_0.$$

У зв'язку з вільністю дії, $C_0 C = \tilde{C}$, а отже, $\tilde{\psi} = L_{C_0} \circ \psi$. Оскільки відображення $M_{n,n}$ у себе, що задається множенням ліворуч (лівим зсувом L_{C_0}) на невироджену матрицю C_0, є гомеоморфізмом, топологія в $\mathcal{B}$ не залежить від вибору базису. Отже, пари $(\mathcal{B}, \psi)$ утворюють глобальні карти на $\mathcal{B}$. Покажемо, що вони гладко зв'язані. Позначимо $\tilde{C} = (\tilde{x}^i_j)$, $C = (x^i_j)$, $C_0 = (c^i_j)$. Тоді відображення $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ задається рівняннями

$$\tilde{x}^i_j = c^i_k x^k_j$$

і, значить, є дифеоморфізмом областей евклідових просторів. Таким чином, ці карти гладко зв'язані і, отже, визначають на $\mathcal{B}$ гладку структуру. Оскільки локальна система координат є дифеоморфізмом області карти на свій образ, вона задає дифеоморфізм многовида $\mathcal{B}$ на $GL(n,\mathbb{R})$.

Вправа 3.5. Покажіть, що розглянута дія гладка.

Приклад 3.5. Нехай X — повне векторне поле без особливостей на гладкому многовиді M (нагадаємо, що прикладами таких векторних полів є лівоінваріантні векторні поля на групах Лі, а також векторні поля на компактних многовидах). Задання такого векторного поля рівносильне заданню глобальної 1-параметричної групи F_t дифеоморфізмів, або, в іншій термінології, глобального потоку, на цьому многовиді, тобто дії групи Лі $\mathbb{R}$ на многовиді M.

Очевидно, якщо $dimM > 1$, ця дія нетранзитивна, а його орбіти є не що інше, як інтегральні лінії цього векторного поля.

Дія групи G на множині M визначає на M відношення еквівалентності: якщо $a, b \in M$, то

$$a \sim b \iff \exists\, g \in G \;\;\&\;\; \varphi_g(a) = b.$$

Елементи відповідної фактормножини є не що інше, як орбіти дії. Множина орбіт дії групи G на множині M позначається $\operatorname{Orb}_G M$, або, просто, $\operatorname{Orb} M$. Якщо дія гладка, ця множина забезпечується фактортопологією, однак, загалом кажучи, не є гладким многовидм [23].

Вправа 3.6. Нехай група Лі G гладко діє на многовиді M. Довести, що природня проекція $\pi : M \to \operatorname{Orb}_G M$ є неперервним відкритим відображенням.

Гладка дія групи Лі G на многовиді M називається *дискретною*, якщо:

(1) G — дискретна група;

(2) $\forall\, p \in M\, \exists\, U_p\, \forall\, g \in G \setminus \{\, e \,\} \implies U_p \cap g(U_p) = \emptyset$.

Вправа 3.7. Довести, що якщо група Лі G дискретно діє на многовиді M, то $\pi : M \to \operatorname{Orb} M$ — відображення, що накриває.

Вправа 3.8. Довести, що якщо група Лі G дискретно діє на гладкому многовиді M, то на множині $\operatorname{Orb} M$ існує природня гладка структура така, що природня проекція $\pi : M \to \operatorname{Orb} M$ є гладким відображенням, що накриває.

Приклад 3.6. Група $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{id}, –\mathrm{id}\}$ дискретно діє на гіперсфері $S_R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{Orb}_{\mathbb{Z}_2} S_R^{n-1} = \mathbb{R}P^{n-1}.$$

Приклад 3.7. Група $\mathbb{Z}$ дискретно діє на евклідовому просторі $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{R} = S^1.$$

Аналогічно, з точністю до дифеоморфізма,

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{Z}^n}\,\mathbb{R}^n = T^n \equiv S^1 \times \ldots \times S^1,$$

де $\mathbb{R}^n$ розглядається як простір відповідної групи Лі, а $\mathbb{Z}^n$ — як дискретна підгрупа цієї групи Лі.

Однорідні простори. *Однорідним простором* називається гладкий многовид, на якому фіксована гладка транзитивна дія групи Лі. Ця група Лі називається *фундаментальною групою перетворень* однорідного простору.

Для визначеності й без обмеження загальності в цьому параграфі всі розглянуті дії уважаються лівими.

Нехай M — (зв'язний) однорідний простір, G — його фундаментальна група перетворень. Фіксуємо точку $p \in M$ і розглянемо підмножину $H_p = \{\, g \in G \mid \varphi_g p = p \,\}$. Очевидно, H_p — замкнена підгрупа, а отже, і підгрупа Лі групи Лі G. Вона називається *групою ізотропії однорідного простору M у точці p*. Групи ізотропії однорідного зв'язного простору в різних його точках ізоморфні (і навіть сполучені), тобто, можна говорити просто про групу ізотропії H зв'язкового однорідного простору, заданої з точністю до ізоморфізму.

Теорема 3.1. *(див. [30], стор.141). Нехай G — група Лі, $H \subset G$ — її замкнена підгрупа, і нехай $G/H = \{\, gh \mid g \in G \,\}$ — множина лівих суміжних класів групи G за підгрупою H, $\pi : G \to G/H$ — природня проекція, $\pi(g) = gh; \quad g \in G$. Тоді на множині G/H є єдина гладка структура така, що:*

(1) π — гладке відображення;

(2) існують локальні гладкі перетини проекції, тобто для всякого елемента $gh \in G/H$ знайдуться околи U_{gh} точки gh і гладке відображення $s : U_{gh} \to G$ таке, що $\pi \circ s = \mathrm{id}$. $\square$

Гладка структура на многовиді G/H, визначена у теоремі 2.1, називається *канонічною.*

Вправа 3.9. Нехай N — гладкий многовид. Довести, що $f : G/H \to N$ — гладке відображення тоді й тільки тоді, коли $f \circ \pi : G \to N$ — гладке відображення.

Нехай група Лі G гладко діє на многовиді M. Фіксуємо точку $p \in M$. Нехай H — група ізотропії в точці p. Визначимо відображення $\beta : G/H \to M$, поклавши $\beta(gh) = g(p); \quad g \in G$. Це відображення сюр'єктивне, ін'єктивне, гладке. Диференціал відображення β невироджений у кожній точці. Таким чином, відображення β — гладка бієкція, що є локальним дифеоморфізмом. Отже, відображення β^{-1} також гладке, тобто $\beta : G/H \to M$ — дифеоморфізм. Цей дифеоморфізм називається *канонічним.*

Теорема 3.2. *([15, стор. 238]) Нехай M — однорідний простір, G — його фундаментальна група перетворень, H — його група ізотропії. Тоді M канонічно дифеоморфний многовиду G/H, наділеного канонічною гладкою структурою.* □

Легко бачити, що многовид G/H є однорідним простором, у якого G — фундаментальна група перетворень, а H — група ізотропії.

Вправа 3.10. Перевірте, що відображення $\Phi : G \times G/H \to G/H$, задане формулою

$$\Phi(a, bh) = (ab)H; \qquad a, b \in G,$$

є лівою дією і ця дія гладка,

Многовид G/H, що наділений канонічною гладкою структурою, називається *канонічною моделлю однорідного простору M.* Відзначимо, що многовид G/H, загалом кажучи, структури групи Лі не має. Проте, слушна

Теорема 3.3. *([15, стор. 239]) Нехай G — група Лі, $H \subset G$ — замкнений нормальний дільник в G. Тоді однорідний простір $M = G/H$ має природньою структурою групи Лі. Якщо $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ і $\mathfrak{m}$ — алгебри Лі груп Лі G, H і M, відповідно, то алгебра Лі $\mathfrak{m}$ природно ізоморфна факторалгебрі $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Природній ізоморфізм задається формулою $\tilde{\Pi}(X + \mathfrak{h}) = \Pi(X); \quad X \in \mathfrak{g}$.*

Група Лі G/H називається *факторгрупою* групи Лі G за її (замкненим) нормальним дільником.

Теорема 3.4. *([15, стор. 239]) Нехай $\varphi : G \to K$ — епіморфізм груп Лі, $H = \ker \varphi$. Тоді φ природно індукує ізоморфізм груп Лі $\tilde{\varphi} : G/H \to K$. Цей ізоморфізм задається формулою $\tilde{\varphi}(gh) = \varphi(g); \quad g \in G$.*

Таким чином, гомоморфізм $\tilde{\varphi}$ груп Лі індукує ізоморфізм $\tilde{\Phi}$ відповідних алгебр Лі і є відображенням, що накриває. Але, оскільки $\tilde{\varphi}$ є бієкцієюй, то $\tilde{\varphi}$ — ізоморфізм груп Лі. Цей ізоморфізм задається співвідношенням $\tilde{\varphi}(gh) = \varphi(g); \quad g \in G$.

Розглянемо деякі приклади однорідних просторів.

Приклад 3.8. Група Лі $\mathbb{R}$ діє на колі

$$S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\},$$

за формулою

$$a(e^{2\pi\sqrt{-1}t}) = e^{2\pi\sqrt{-1}(t+a)}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, ця дія є транзитивною і гладкою. $H_p = \mathbb{Z}$, коло S^1, а значить, і многовид $\operatorname{Orb}_{\mathbb{Z}} R$, є однорідними просторами з фундаментальною групою перетворень $\mathbb{R}$, канонічною моделлю яких є многовид $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \operatorname{Orb}_{\mathbb{Z}^n} \mathbb{R}^n$ є однорідним простором з фундаментальною групою перетворень $\mathbb{R}^n$, канонічною моделлю якого є многовид $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Приклад 3.9. Ггрупа Лі $\operatorname{Aut} V$ гладко діє на лінійному просторі V. Якщо $V = \mathbb{R}^n$, то група Лі $\operatorname{Aut} V$ є не що інше як повна лінійна група $GL(n, \mathbb{R})$, що діє на $\mathbb{R}^n$ за допомогою матричного множення. Відображення $\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ зіставляє парі (A, X), де $A = (A^i_j) \in GL(n, \mathbb{R})$, $X = (X^i) \in \mathbb{R}^n$, елемент $Y = (Y^i) \in \mathbb{R}^n$ за формулою

$$Y^i = A^i_j x^j; \qquad j = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Розглядаючи X і Y як матриці розміру $n \times 1$, тобто як вектори-стовпці, співвідношення (2.2) можна переписати в матричному вигляді

$$Y = AX.$$

Відзначимо, що в матричному вигляді можна записати й канонічний скалярний добуток $< \cdot, \cdot >_0$ в $\mathbb{R}^n$:

$$< X, Y >_0 = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = X^T Y.$$

Звідси випливає, що якщо $A \in GL(n, \mathbb{R})$, то

$$< AX, AY >_0 = (AX)^T (AY) = X^T (A^T A) Y. \tag{2.3}$$

Вправа 3.11. Нехай $\{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \}$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$. Довести, що

$$\forall B = (B^i_j) \in M_{n,n} \implies (\varepsilon_i)^T B \varepsilon_j = B^i_j.$$

Вправа 3.12. Довести, що група Лі $O(n, \mathbb{R})$ збігається із групою автоморфізмів стандартного скалярного добутку в $\mathbb{R}^n$. Інакше кажучи, перетворення $A \in GL(n, \mathbb{R})$ зберігає стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$ тоді й тільки тоді, коли $A \in O(n, \mathbb{R})$.

Із цього твердження випливає, зокрема, що дія групи Лі $O(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ зберігає гіперсферу

$$S^{n-1}_R = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid < X, X >_0 = R^2 \},$$

тобто $\forall\, A \in O(n,\mathbb{R}) \implies \varphi_A(S_R^{n-1}) \subset S_R^{n-1}$. Більше того, оскільки $S_R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — вкладений підмноговид, то відображення $\Psi : O(n,\mathbb{R}) \times S_R^{n-1} \to S_R^{n-1}$, що доповнює діаграму

$$\begin{tikzcd} O(n,\mathbb{R}) \times S_R^{n-1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathbb{R}^n \\ S_R^{n-1} \arrow[r, equal] & S_R^{n-1} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

до комутативної (простіше говорячи, звуження дії Φ на гіперсферу), є гладким і, таким чином, визначає гладку дію на гіперсфері (тут $i : S_R^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ — відображення вкладення).

Вправа 3.13. Покажіть, що ця дія транзитивна.

Група ізотропії H_p складається з матриць вигляду (2.4).

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} \in O(n-1,\mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Оскільки формула (2.4) описує вкладення групи Лі $O(n-1,\mathbb{R})$ у групу Лі $O(n,\mathbb{R})$ як підгрупи Лі, а образом цього вкладення є група ізотропії H_p, то гіперсфера S_R^{n-1} є однорідним простором з фундаментальною групою перетворень $O(n,\mathbb{R})$, канонічною моделлю якого є многовид $O(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R})$.

Вправа 3.14. Довести, що однорідний простір $O(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R})$ дифеоморфний гіперсфері S_R^{n-1}. □

Вправа 3.15. Довести, що однорідний простір $SO(n,\mathbb{R})/SO(n-1,\mathbb{R})$ дифеоморфний гіперсфері $S_R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Вправа 3.16. Довести, що група Лі $SO(2,\mathbb{R})$ дифеоморфна колу S_1.

Приклад 3.10. Повна комплексна лінійна група Лі $GL(n,\mathbb{C})$ діє на комплексному арифметичному просторі $\mathbb{C}^n$ за допомогою матричного множення. Відображення $\Phi : GL(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ зіставляє парі (C,Z), де $C = (C^i_j) \in GL(n,\mathbb{C})$, $Z = (Z^i) \in \mathbb{C}^n$, елемент

$W = (W^i) \in \mathbb{C}^n$ за формулою

$$W^i = C^i_j z^j; \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Розглядаючи Z і W як матриці розміру $n \times 1$, тобто як вектори-стовпці, співвідношення (2.5) можна переписати в матричному вигляді

$$W = CZ. \tag{2.5$'$}$$

Відзначимо, що в матричному вигляді можна записати й канонічний ермітовий скалярний добуток $<< \cdot, \cdot >>$ в $\mathbb{C}^n$:

$$<< X, Y >>_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{X}^i y^i = \overline{X}^T Y.$$

Звідси випливає, що якщо $C \in GL(n, \mathbb{C})$, то

$$< CX, CY >_0 = \overline{(CX)}^T (CY) = \overline{X}^T (\overline{A}^T A) Y. \tag{2.6}$$

Вправа 3.17. Нехай $\{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \}$ — стандартний базис простору $\mathbb{C}^n$. Довести, що

$$\forall\, B = (B^i_j) \in M^c_{n,n} \implies (\varepsilon_i)^T B \varepsilon_j = B^i_j.$$

Вправа 3.18. Довести, що група Лі $U(n)$ збігається із групою автоморфізмів стандартного скалярного добутку в $\mathbb{C}^n$. Інакше кажучи, перетворення $C \in GL(n, \mathbb{C})$ зберігає стандартний ермітовий скалярний добуток в $\mathbb{C}^n$ тоді й тільки тоді, коли $C \in U(n)$.

Із цього твердження випливає, зокрема, що дія групи Лі $U(n)$ на $\mathbb{C}^n$ зберігає підмножину

$$S^{2n-1}_R = \{ Z \in \mathbb{C}^n \mid << Z, Z >>_0 = R^2 \},$$

тобто $\forall\, A \in U(n) \implies \varphi_A(S^{2n-1}_R) \subset S^{2n-1}_R$. Відзначимо, що ця підмножина є не що інше, як гіперсфера в уречевленні $\mathbb{R}^{2n}$ комплексного простору $\mathbb{C}^n$. Відзначимо також, що зазначена дія групи $GL(n,\mathbb{C})$ канонічно породжує гладку дію її дійсної форми $GL(n,\mathbb{C})^R$ на просторі $\mathbb{R}^{2n}$, розглянутому як уречевлення простору $\mathbb{C}^n$. Саме, якщо $C = A+\sqrt{-1}B$, $Z = X+\sqrt{-1}Y$, $W = U+\sqrt{-1}V$ — розклад відповідних об'єктів на дійсну й уявну частини, то ця гладка дія в матричному вигляді запишеться співвідношеннями

$$U = AX - BY; \qquad V = BX + AY.$$

Назвемо цю дію *уречевленою дією групи Лі* $GL(n,\mathbb{C})$. Оскільки $S_R^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ — вкладений підмноговид, то, відповідно до твердження 1.32 в [30], відображення $\Psi : U(n) \times S_R^{2n-1} \to S_R^{2n-1}$, що доповнює діаграму

$$\begin{tikzcd} U(n) \times S_R^{2n-1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathbb{C}^n \\ S_R^{2n-1} \arrow[r, equal] & S_R^{2n-1} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

до комутативної (простіше кажучи, звуження дії Φ на гіперсферу), є гладким і, таким чином, визначає гладку дію на гіперсфері (тут $i : S_R^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ — відображення вкладення).

Вправа 3.19. Покажемо, що ця дія транзитивна.

Групу ізотропії щодо якої-небудь точки з S_R^{2n-1}, наприклад, точки $p = \varepsilon_n$ складається з матриць вигляду (2.7).

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C} \in U(n-1). \tag{2.7}$$

Вправа 3.20. Довести, що однорідний простір $U(n)/U(n-1)$ дифеоморфний гіперсфері S_R^{2n-1}.

Вправа 3.21. Довести, що однорідний простір $SU(n)/SU(n-1)$ дифеоморфний гіперсфері S_R^{2n-1}.

Вправа 3.22. Довести, що група Лі $SU(2)$ дифеоморфна сфері S^3

Отже, сфери S^1 і S^3 допускають структури груп Лі $SO(1,\mathbb{R})$ і $SU(2)$, відповідно. Цікаво відзначити, що сфери ніяких інших розмірностей структури групи Лі не допускають [38].

Приклад 3.11. Дія групи Лі $\operatorname{Aut} V$ автоморфізмів n-вимірного $\mathbb{R}$-лінійного простору V на цьому просторі породжує її дію на множині всіх одновимірних підпросторів цього простору, тобто на $(n-1)$-вимірному проективному просторі $P(V)$. А саме, якщо $x = [X] \in P(V)$ — довільна точка, де $X \in V$ — ненульовий вектор, що породжує підпростір x, $g \in \operatorname{Aut} V$, то покладемо $\Phi(g, [X]) = [gx]$. У зв'язку з лінійністю перетворення g це визначення коректне в сенсі незалежності від вибору $X \in [X]$. Безпосередньо перевіряється, що Φ — ліва дія на множині $P(V)$. Ця дія, однак, не є ефективною. Дійсно,

$$\begin{aligned} &g \in \ker\varphi \iff gx = x \quad (x = [X] \in P(V)) \iff \\ &\iff [gx] = [X] \quad (X \in V) \iff g = \lambda\,\mathrm{id} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}) \end{aligned}$$

і, отже, $\ker\varphi$ збігається із групою Лі гомотетій простору V

$$\operatorname{Ht} V = \{\,\lambda\,\mathrm{id} \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}\,\}.$$

Тоді факторгрупа $\operatorname{Aut} V/ \operatorname{Ht} V$ є групою Лі. Ця група Лі ефективно діє на $P(V)$, називається *групою проективних перетворень* простору $P(V)$ і позначається $GP(V)$.

Вправа 3.23. Довести, що група Лі $GP(V)$ гладко, ефективно й транзитивно діє на многовиді $P(V)$.

Побудуємо тепер стандартні моделі проективного простору. Нехай $V = \mathbb{R}^n$. Приймемо позначення $P(V) = \mathbb{R}P^{n-1}$, $GP(V) = GP(n-1,\mathbb{R})$. Гладка дія Φ групи Лі $GL(n,\mathbb{R})$ на многовиді $\mathbb{R}P^{n-1}$ індукує гладку дію її підгрупи Лі $O(n,\mathbb{R})$ на цьому многовиді. Ця дія також транзитивна (що доводиться цілком аналогічно випадку групи $GP(V)$, з тою лише різницею, що базиси b і $\tilde{b}$ вибираються ортонормованими щодо стандартного скалярного добутку).

Вправа 3.24. Довести, що групу ізотропії H_p щодо точки $x = [e_n] \in \mathbb{R}P^{n-1}$ складається з матриць вигляду (2.9).

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} \in O(n-1,\mathbb{R}), \quad a = \pm 1. \tag{2.9}$$

Вправа 3.25. Довести, що однорідний простір $O(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R}) \times O(1,\mathbb{R})$ дифеоморфний проективному простору $\mathbb{R}P^{n-1}$. $\square$

Аналогічно, гладка дія Φ групи Лі $GL(n,\mathbb{R})$ на многовиді $\mathbb{R}P^{n-1}$ індукує гладку транзитивну дію її підгрупи Лі $SO(n,\mathbb{R})$ на цьому многовиді.

Вправа 3.26. Довести, що у випадку парновимірного проективного простору ця дія ефективна.

Матриця $A \in H_p$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \det \tilde{A} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} \in O(n-1,\mathbb{R}).$$

Вправа 3.27. Довести, що однорідний простір $SO(n,\mathbb{R})/O(n-1,\mathbb{R})$ дифеоморфний проективному простору $\mathbb{R}P^{n-1}$. $\square$

Приклад 3.12. Дія групи $\operatorname{Aut} V$ автоморфізмів n-вимірного комплексного лінійного простору V на цьому просторі породжує її дію на множині всіх одновимірних підпросторів цього простору, тобто на $(n-1)$-вимірному *комплексному* проективному просторі $\mathbb{C}P(V)$.

Вправа 3.28. Довести, що однорідний простір $U(n)/U(n-1) \times U(1)$ дифеоморфний комплексному проективному простору $\mathbb{C}P^{n-1}$. $\square$

Вправа 3.29. Довести, що однорідний простір $SU(n)/U(n-1)$ дифеоморфний комплексному проективному простору $\mathbb{C}P^{n-1}$. $\square$

Фундаментальні векторні поля

Нехай група Лі G гладко діє на многовиді P (для визначеності, праворуч), Φ — відповідна дія. Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі групи Лі G. Тоді внутрішньо визначений гомоморфізм λ лінійного простору $\mathfrak{g}$ у лінійний простір $\mathfrak{X}(P)$. Кожна точка $p \in P$ визначає гладке відображення $\sigma_p : G \to P$ за формулою

$$\sigma_p(g) = pg = \Phi(g, p); \qquad g \in G.$$

Якщо $X \in \mathfrak{g}$ — лівоінваріантне векторне поле $g(t) = \exp tx$ — відповідна йому однопараметрична підгрупа в G, то

$$\Psi(p, t) = \sigma_p(\exp tx) = \Phi(\exp tx, p)$$

— глобальний потік на многовиді P, що породжує повне векторне поле $X^\flat = \lambda(X) \in \mathfrak{X}(P)$. Інакше кажучи,

$$(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma_p(\exp tx) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi(p, t).$$

Очевидно, що $X^\flat$ — гладке векторне поле на многовиді P. Крім того,

$$(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma_p(\exp tx) = (\sigma_p)_* \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp tx = (\sigma_p)_*(X_e),$$

звідки випливає, що λ — гомоморфізм $\mathbb{R}$-лінійних просторів.

Теорема 3.5. *([15, стор. 253]) Лінійне відображення $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ є гомоморфізмом алгебр Лі.*

Векторне поле $X^\flat = \lambda X, \quad X \in \mathfrak{g}$, називається *фундаментальним векторним полем* дії групи Лі G на многовиді P.

Сукупність усіх фундаментальних векторних полів на P утворює скінченновимірну підалгебру Лі $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{X}(P)$, що називається *алгеброю Лі фундаментальних векторних полів на многовиді P*.

Вправа 3.30. Довести, що якщо група Лі G діє ефективно на многовиді P, то λ — мономорфізм, а отже, алгебри Лі $\mathfrak{f}$ і $\mathfrak{g}$ ізоморфні. Якщо G діє вільно, то ненульові фундаментальні векторні поля не мають особливих точок.

Теорема 3.6. *([15, стор. 255]) Нехай група Лі G гладко діє на многовиді P. Тоді для будь-якого елемента $g \in G$ наступна діаграма комутативна:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g^{-1})"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathfrak{f} \arrow[r, "(\varphi_g)_*"] & \mathfrak{f} \end{tikzcd}$$

Тема 4

ГОЛОВНІ РОЗШАРУВАННЯ

Визначення та приклади головних розшарувань

Головним розшаруванням називається четвірка (P, M, π, G), де:

1) P — гладкий многовид;

2) G — група Лі, що гладко й вільно діє праворуч на P;

3) $M = \operatorname{Orb}_G P$ — простір орбіт цієї дії, що також є гладким многовидом;

4) $\pi : P \to M$ — природня проекція, що зіставляє точці $p \in P$ її орбіту.

При цьому повинна виконуватися властивість *локальної тривіальності*:

5) многовид M допускає відкрите покриття $\mathfrak{U}$, що називається *покриттям локальної тривіальності*, таке, що $\forall U \in \mathfrak{U} \, \exists \, F_U : \pi^{-1}(U) \to G$, де F_U — гладке відображення таке, що:

F1) $F_U(pg) = F_U(p)g \qquad (p \in P, g \in G)$;

F2) відображення $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, задане формулою $\psi_U(p) = \big(\pi(p), F_U(p)\big)$, є дифеоморфізмом.

Многовид P називається *простором розшарування*, многовид M — *базою розшарування*, група Лі G — *структурною групою*. Елементи U покриття $\mathfrak{U}$ називаються *областями локальної тривіальності*, а відповідні їм дифеоморфізми ψ_U — *дифеоморфізмами локальної тривіальності*.

Приклад 4.1. Нехай M — гладкий многовид, G — група Лі. Розглянемо четвірку (P, M, p_1, G), де $P = M \times G$, відображення $p_1 : P \to M$ є проекцією на перший співмножник, тобто $p_1(m, g) = m$. Група Лі G діє праворуч на P за формулою

$$(m, g)h = (m, gh); \qquad m \in M, \; g, h \in G.$$

Будь-яка орбіта

$$(m,h)G = \cup_{g\in G}(m,h)g = \cup_{g\in G}(m,hg) = \cup_{g\in G}(m,g) = (m,G)$$

цієї дії канонічно ототожнюється із точкою m многовида M і, у зв'язку з цим ототожненням, відображення p_1 збігається із природньою проекцією π на простір орбіт. Нарешті, за покриття локальної тривіальності вибирається покриття, що складається з єдиного елемента $U = M$, а в якості відображення $F_U : P \to G$ — проекція на другий співмножник: $F_U(m,g) = p_2(m,g) = g$. Гладкість відображення F_U очевидна. Очевидно також, що

$$F_U\big((m,g)h\big) = F_U(m,gh) = p_2(m,gh) = gh = F_U(m,g)h.$$

При цьому $\psi_U : P \to P\times G$ є не що інше, як тотожне відображення

$$\psi_U(m,g) = \big(\pi(m,g), F_U(m,g)\big) = \big(p_1(m,g), p_2(m,g)\big) = (m,g).$$

Отже, $(M\times G, M, p_1, G)$ — головне розшарування.

Головне розшарування $(M\times G, M, p_1, G)$ називається *тривіальним головним розшаруванням.*

Нехай $\mathcal{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1), \mathcal{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$ — два головні розшарування з однаковою базою. *Гомоморфізмом* розшарування $\mathcal{B}_1$ у розшарування $\mathcal{B}_2$ називається пара (f,ρ), де $f : P_1 \to P_2$ — гладке відображення, $\rho : G_1 \to G_2$ — гомоморфізм груп Лі. При цьому:

1) відображення f повинне бути *пошаровим*, тобто наступна діаграма повинна бути комутативною

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ M & = & M \end{array} \tag{1.1}$$

2) $f(pg) = f(p)\rho(g) \qquad (p\in P_1,\ g\in G).$

Якщо f — вкладення, а (G_1, ρ) — підгрупа Лі групи Лі G_1, то $\mathcal{B}_1$ називається *підрозшаруванням* головного розшарування $\mathcal{B}_2$.

Якщо f — дифеоморфізм, а ρ — ізоморфізм груп Лі, то гомоморфізм (f, ρ) називається *ізоморфізмом* або *еквівалентністю* головних розшарувань.

Перерізом головного розшарування (P, M, π, G) називається гладке відображення $s : M \to P$ таке, що

$$\pi \circ s = id.$$

Теорема 4.1. *([15, стор. 259]) Головне розшарування $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ допускає переріз тоді й тільки тоді, коли воно еквівалентне тривіальному головному розшаруванню.*

Приклад 4.2. Нехай $M = G/H$ — однорідний простір. Розглянемо четвірку $\mathcal{B} = (G, G/H, \pi, H)$. Права дія групи Лі H на G визначається формулою

$$\Phi(h, g) = gh; \qquad h \in H, g \in G.$$

Очевидно, це — гладка й вільна дія, причому простір її орбіт збігається з G/H. У якості покриття локальної тривіальності виберемо покриття многовида G/H околами його точок, у яких існують локальні перерізи $s : G/H \to M$. Так само, як і в теоремі 1.1, доводиться що якщо $U \subset G/H$ — такий окіл, то $(\pi^{-1}(U), U, \pi|_U, H)$ — еквівалентне тривіальному головному розшаруванню, а отже, аксіоми F1 і F2 для $\mathcal{B}$ виконані. Таким чином, $\mathcal{B}$ — головне розшарування.

Приклад 4.3. Нехай група Лі G дискретно діє на гладкому многовиді M. Розглянемо четвірку $\mathcal{B} = (M, \operatorname{Orb} M, \pi, G)$. Тоді на множині $\operatorname{Orb} M$ існує канонічна гладка структура, щодо якої $\pi : M \to \operatorname{Orb} M$ — гладке відображення, що накриває. Оскільки дія дискретна, вона, зокрема, вільна. З визначення накриття випливає існування перерізу над будь-яким добре накритим околом довільної точки з $\operatorname{Orb} M$, а отже, виконується властивість локальної тривіальності. Таким чином, $\mathcal{B}$ — головне розшарування.

Структурні рівняння головного розшарування

Гладке сюр'єктивне відображення $f : M \to N$ називається *субмерсією*, якщо

$$\forall\, m \in M \implies \operatorname{rg}(f_*)_m = \dim N.$$

Теорема 4.2. *([15, стор. 261]) Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування. Тоді відображення $\pi : P \to M$ є субмерсією.*

Нехай (P, M, π, G) — головне розшарування. Позначимо через $\mathfrak{X}_\pi(P)$ лінійний простір векторних полів на P, π-пов'язаних з векторними полями на M (такі векторні поля називаються *проектованими*). Таким чином,

$$\mathfrak{X}_\pi(P) = \{\, X \in \mathfrak{X}(P) \mid \exists\, Y \in \mathfrak{X}(M) \;\;\&\;\; Y = \pi_* X \,\}.$$

Позначимо $\tilde{\mathcal{V}} = \ker \pi_*$. Тоді на P виникає розподіл $\mathcal{V} = C^\infty(P) \otimes \tilde{\mathcal{V}}$, що називається *вертикальним розподілом.* Відзначимо, що за теоремою 2.1, у фіксованій точці $p \in P$,

$$\dim \tilde{\mathcal{V}}_p = \dim \ker(\pi_*)_p = \dim P - \operatorname{rg}(\pi_*)_p = \dim P - \dim M. \qquad (*)$$

Вертикальний розподіл можна описати й інакше. Розглянемо підпростір $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{X}(P)$ фундаментальних векторних полів на P. Тоді відображення $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$ — ізоморфізм лінійних просторів (і навіть алгебр Лі), причому фундаментальні векторні поля на P не мають особливостей, а отже, будь-який базис $\{\, E_1, \ldots, E_r \,\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ визначає базис $\{\, E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat \,\}$ лінійного простору $\mathfrak{f}$ і розподілу $\mathcal{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Теорема 4.3. *([15, стор. 262]) Розподіли $\mathcal{F}$ і $\mathcal{V}$ збігаються. Зокрема, $\mathcal{V}$ — паралелізуємий розподіл розмірності* $\dim G = \dim P - \dim M$.

Наслідок. *В уведених позначеннях, $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathcal{V}$.* □

Вправа 4.1. Довести, що вертикальний розподіл $\mathcal{V}$ головного розшарування (P, M, π, G) цілком інтегрований, а його максимальним інтегральним многовидом, що проходять через точку $p \in P$, є підмноговид (G, σ_p).

Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування, $\mathcal{V}$ — його вертикальний розподіл. Домовимося, що індекси $a, b, c, d \dots$ пробігають значення від 1 до $r = \dim G$, індекси $i, j, k \dots$ — значення від $r+1$ до $r+n$, а індекси $\alpha, \beta, \gamma \dots$ — значення від 1 до $r+n$, де $n = \dim M$. Фіксуємо базис $\{ E_1, \dots, E_r \}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ структурної групи розшарування. Нехай $\{ \sigma^1, \dots, \sigma^r \}$ — дуальний базис. Рівняння Маурера-Картана групи Лі G мають вигляд

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c.$$

Зуважимо, що фундаментальні векторні поля

$$\{ E^\flat_1, \dots, E^\flat_r \}; \quad E^\flat_a = \lambda(E_a); \qquad a = 1, \dots, r,$$

утворюють базис лінійного простору $\mathfrak{f}$, а також $C^\infty(P)$-модуля $\mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Вправа 4.2. Нехай D — r-вимірний розподіл на гладкому n-вимірному многовиді M. Довести, що кожний (локальний) базис розподілу D можна доповнити до локального базису модуля $\mathfrak{X}(M)$.

Повернемося до розгляду головного розшарування $\mathcal{B}$. Доповнимо побудований вище базис $\{ E^\flat_1, \dots, E^\flat_r \}$ розподілу $\mathcal{V}$ гладкими векторними полями $\{ Y_{r+1}, \dots, Y_{r+n} \}$ до локального базису модуля $\mathfrak{X}(P)$. Нехай $\{ \omega^1, \dots, \omega^{r+n} \}$ — дуальний базис. Тоді

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma,$$

де $R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(E^\flat_\beta, E^\flat_\gamma)$ — компоненти форми $d\omega^\alpha$ у зазначеному базисі. Відзначимо, що форми $\omega^i; \quad i = r+1, \dots, r+n$ утворюють систему Пфаффа розподілу $\mathcal{V}$, і

$$d\omega^i = \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + R^i_{bk}\omega^b \wedge \omega^k = \omega^i_k \wedge \omega^k, \tag{2.1}$$

де $\omega^i_k = \frac{1}{2}R^i_{jk}\omega^j + R^i_{bk}\omega^b$ — локально задані 1-форми на многовиді P. Аналогічно,

$$d\omega^a = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + R^a_{bk}\omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j \wedge \omega^k = \frac{1}{2}R^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k, \tag{2.2}$$

де $\omega^a_k = \frac{1}{2}R^a_{jk}\omega^j + R^a_{bk}\omega^b$ — локально задані 1-форми на многовиді P.

Вправа 4.3. Перевірте, що $\lambda^*(\omega^a) = \sigma^a$.

Мають місце такі співвідношення

$$1) d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j;\ 2) d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j. \tag{2.3}$$

Співвідношення (2.3) називаються *структурними рівняннями головного розшарування*

Зв'язності в головних розшаруваннях

Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування, $\mathcal{V}$ — його вертикальний розподіл. Уведемо позначення

$$R_g(p) = pg \equiv \Phi(p, g); \qquad p \in P, g \in G.$$

Проектор $C^\infty(P)$-модуля $\mathfrak{X}(P)$ на підмодуль $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}(P)$ називається *вертикальним*, а доповняльний до нього проектор — *псевдогоризонтальним*. Ядро вертикального проектора або, що те ж саме, образ псевдогоризонтального проектора називається *псевдогоризонтальним розподілом.*

Ендоморфізм f модуля $\mathfrak{X}(P)$ називається *інваріантним щодо дії структурної групи*, якщо

$$\forall\, g \in G \implies (R_g)_* \circ f = f \circ (R_g)_*.$$

Зв'язністю у головному розшаруванні називається вертикальний проектор, інваріантний щодо дії структурної групи.

Очевидно, якщо Π_V — зв'язність, то відповідний псевдогоризонтальний проектор $\Pi_H = id - \Pi_V$ також інваріантний щодо дії структурної групи. Звідси легко випливає, що відповідний псевдогоризонтальний розподіл $\mathcal{H} = \ker \Pi_V = \operatorname{Im} \Pi_H$ інваріантний щодо дії структурної групи. Справді, якщо $X \in \mathcal{H}$, $g \in G$, то

$$(R_g)_* X = (R_g)_* \circ \Pi_H X = \Pi_H \circ (R_g)_* X \in \operatorname{Im} \Pi_H = \mathcal{H}.$$

Обернено, нехай $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ — розподіл, доповняльний до вертикального розподілу й інваріантний щодо дії структурної групи, тобто

(1) $\mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = \mathfrak{X}(P)$;

(2) $\forall\, g \in G \implies (R_g)_* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

Нехай Π_V — вертикальний проектор, що відповідає розкладу модуля $\mathfrak{X}(P)$ у пряму суму підмодулів $\mathcal{V}$ і $\mathcal{H}$ *([10], гл.1, п.7). Тоді Π_V інваріантний щодо дії структурної групи, тобто є зв'язністю.

Теорема 4.4. *([15, стор. 266]) Задання зв'язності в головному розшаруванні рівносильне заданню розподілу $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ такого, що*

$$1) \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = \mathfrak{X}(P); 2) \forall\, g \in G \implies (R_g)_* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}. \quad \square \tag{3.1}$$

Розподіл $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$, що має властивості (3.1), називається *горизонтальним розподілом.*

Отже, горизонтальний розподіл — це псевдогоризонтальний розподіл деякої зв'язності, що однозначно задається цим розподілом і однозначно його визначає. Таким чином, зв'язність альтернативно може бути визначена як горизонтальний розподіл.

Виявляється, зв'язність допускає ще одне визначення. Щоб підійти до нього, відзначимо, що ізоморфізм $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$ $\mathbb{R}$-лінійних просторів індукує ізоморфізм $C^\infty(P)$-модулів

$$\Lambda = id \otimes \lambda : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathcal{F} = \mathcal{V},$$

однозначно заданий формулою

$$\Lambda(1 \otimes X) = \lambda(X), \qquad X \in \mathfrak{g}. \tag{3.2$'$}$$

Таким чином,

$$\Lambda(f \otimes X) = \Lambda(1 \otimes fX) = f\big(\Lambda(1 \otimes X)\big) = f\lambda(X); \;\; f \in C^\infty(P), \; X \in \mathfrak{g}. \tag{3.2$''$}$$

Отже, визначений $C^\infty(P)$-гомоморфізм

$$\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi : \mathfrak{X}(P) \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g},$$

який є 1-формою на P із значеннями в алгебрі Лі структурної групи. Ця форма називається *формою зв'язності*. Вивчимо властивості цієї форми.

Вправа 4.4. Довести, що в уведених позначеннях,

$$\theta \circ \Lambda = \mathrm{id}\,. \text{ Зокрема,} \theta \circ \lambda = 1 \otimes \mathrm{id}\,. \tag{3.3}$$

Вправа 4.5. Довести, що $\theta(fX^\flat) = f \otimes X, \quad \big(X \in \mathfrak{g}, \; f \in C^\infty(P)\big)$.

Приєднане зображення Ad структурної групи на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ індукує зображення цієї групи на модулі $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ (яке ми будемо позначати тим самим символом), задане формулою

$$\mathrm{Ad}(g)(f \otimes X) = (f \circ R_g) \otimes \mathrm{Ad}(g)X. \tag{3.4}$$

Теорема 4.5. *([15, стор. 268]) Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування, θ — форма зв'язності на $\mathcal{B}$. Тоді наступна діаграма комутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(P) & \xrightarrow{(R_g)_*} & \mathfrak{X}(P) \\ {\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g^{-1})} & C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \end{array} .$$

Інакше кажучи, має місце формула

$$\theta \circ (R_g)_* = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \theta; \qquad g \in G. \tag{3.5}$$

Нехай $X_V \in \mathcal{V}$. Зафіксуємо базис $E_1, \dots, E_r$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Нехай $X_V = f^a E_a^\flat$; $f^a \in C^\infty(P)$. Відзначимо, що

$$(R_g)_*(fx) = (f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* X; \qquad f \in C^\infty(P),\ X \in \mathfrak{X}(P). \tag{3.6}$$

Теорема 4.6. *([15, стор. 269]) Задання зв'язності в головному розшаруванні $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ рівносильне заданню 1-форми θ на просторі розшарування, зі значеннями у алгебрі Лі структурної групи, що має такі властивості:*

$$\begin{aligned} &1)\ \theta \circ \Lambda = \mathrm{id}; \quad \textit{зокрема,} \quad \theta(fX^\flat) = f \otimes X; \\ &2)\ \theta \circ (R_g)_* = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \theta; \quad f \in C^\infty(P),\ X \in \mathfrak{g},\ g \in G. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Горизонтальний ліфт

Вправа 4.6. Нехай Π_V — вертикальний проектор у головному розшаруванні (P, M, π, G), $\mathcal{H}$ — відповідний псевдогоризонтальний розподіл. Довести, що $\forall\, p \in P \implies (\pi_*)_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}(M)$ — ізоморфізм лінійних просторів.

Теорема 4.7. *([15, стор. 272]) Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування, $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ — (псевдо)горизонтальний розподіл на P. Тоді*

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(M)\, \exists!\, Y \in \mathcal{H} \ \&\ \pi_* Y = X.$$

Нехай $\mathcal{H}$ — (псевдо)горизонтальний розподіл на P, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Векторне поле $Y \in \mathfrak{X}(P)$, однозначно задане умовами

$$1)\ Y \in \mathcal{H}; \qquad 2)\ \pi_* Y = X, \tag{4.2}$$

називається *горизонтальним ліфтом векторного поля X* (відносно $\mathcal{H}$) і позначається $X^\#$.

З визначення головного розшарування випливає, що $\forall\, g \in G \implies \pi \circ R_g = \pi$, а отже,

$$\forall\, g \in G \implies \pi_* \circ (R_g)_* = \pi_*.$$

Звідси й з (4.2) випливає, що якщо $\mathcal{H}$ — *горизонтальний* розподіл, тобто він інваріантний щодо дії структурної групи, то горизонтальні ліфти векторних полів інваріантні щодо дії цієї групи, тобто

$$\forall\, g \in G \implies (R_g)_*(X^{\#}) = X^{\#}.$$

Вправа 4.7. Довести, що якщо $\mathcal{H}$ — горизонтальний розподіл, то відображення $\# : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P)$ є гомоморфізмом $\mathbb{R}$-лінійних просторів. Більше того,

$$\Pi_H\big([X^{\#}, Y^{\#}]\big) = [X, Y]^{\#}; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

де Π_H — горизонтальний проектор.

Через те, що відображення $\# : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ є гомоморфізмом $\mathbb{R}$-лінійних просторів, воно індукує гомоморфізм $C^\infty(P)$-модулів

$$\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(P),$$

однозначно заданий формулою $(1 \otimes X)^\natural = X^{\#}$, а отже,

$$(f \otimes X)^\natural = f X^{\#}; \qquad f \in C^\infty(P),\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Твердження теореми 4.1 означає, зокрема, що при фіксації зв'язності в головному розшаруванні

$$\pi_* \circ \# = \mathrm{id}\,. \tag{4.3}$$

Звідси, зокрема, випливає, що гомоморфізм $\#$, а отже, і гомоморфізм $\natural$, є мономорфізмами.

Вправа 4.8. Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування з фіксованою на ньому зв'язністю. Довести, що гомоморфізм $\# : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathcal{H}$ $\mathbb{R}$-лінійних просторів є ізоморфізмом.

Теорема 4.8. *([15, стор. 274]) Нехай X — горизонтальне векторне поле. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) X — ліфт деякого векторного поля з бази розшарування.

(2) X проектоване;

(2) X інваріантне щодо дії структурної групи;

Вправа 4.9. Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування з фіксованою на ньому зв'язністю. Довести, що будь-який горизонтальний вектор $X_p \in \mathcal{H}_p$ можна добудувати до ліфта деякого векторного поля з бази розшарування.

Вправа 4.10. Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування з фіксованою зв'язністю. Довести, що гомоморфізм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{H}$ є ізоморфізмом.

Теорема 4.9. *([15, стор. 275]) Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування. Тоді*

$$\mathfrak{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P).$$

З теореми 4.3 безпосередньо випливає, що гомоморфізм $\mathbb{R}$-лінійних просторів $\pi_* : \mathfrak{X}_\pi(P) \to \mathfrak{X}(M)$ індукує гомоморфізм $C^\infty(P)$-модулів

$$\varpi = id \otimes \pi_* : \mathfrak{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M),$$

однозначно заданий формулою

$$\varpi(X) = 1 \otimes \pi_* X; \qquad X \in \mathfrak{X}_\pi(P).$$

З (4.3) випливає, що

$$\varpi \circ \natural = id. \tag{4.5}$$

Тоді гомоморфізм ϖ є епіморфізмом, причому

$$\ker \varpi = C^\infty(P) \otimes \ker \pi_* = C^\infty(P) \otimes \tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}.$$

Поєднуючи отримані дані, бачимо, що визначена коротка точна послідовність $C^\infty(P)$-модулів

$$0 \to C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{\Lambda} \mathfrak{X}(P) \xrightarrow{\varpi} C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \to 0. \qquad (4.6)$$

Її точність означає, що:

1) Λ — мономорфізм;

2) ϖ — епіморфізм;

3) $im\Lambda = \mathcal{F} = \mathcal{V} = \ker \varpi$.

Послідовність (4.6) називається *фундаментальною послідовністю головного розшарування.*

Теорема 4.10. *([15, стор. 277]) Задання зв'язності в головному розшаруванні $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ рівносильне заданню гомоморфізму i_H, що розщеплює фундаментальну послідовність (4.6) і такого, що*

$$(R_g)_* \circ i_H = i_H; \qquad g \in G. \qquad (4.7)$$

Теорема 4.11. *([15, стор. 278]) Нехай заданий гомоморфізм (f, ρ) головного розшарування $\mathcal{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ у головне розшарування $\mathcal{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$. Нехай Π_1 — зв'язність у головному розшаруванні $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{H}_1$ — її горизонтальний розподіл. Тоді $f_*(\mathcal{H}_1)$ канонічно породжує горизонтальний розподіл деякої зв'язності Π_2 у головному розшаруванні $\mathcal{B}_2$.*

Відображення сім'ї всіх зв'язностей у головному розшаруванні $\mathcal{B}_1$ у сім'ю всіх зв'язностей у головному розшаруванні $\mathcal{B}_2$, що зіставляє зв'язності Π_1 у розшаруванні $\mathcal{B}_1$ зв'язність Π_2 у головному розшаруванні $\mathcal{B}_2$, породжену горизонтальним розподілом D, називається *гомоморфізмом зв'язностей, породженим даним гомоморфізмом (f, ρ) головних розшарувань*, і позначається $(f, \rho)_*$. Якщо $\mathcal{B}_1$ — підрозшарування головного розшарування $\mathcal{B}_2$, причому зв'язності Π_1 відображення вкладення зіставляє зв'язність Π_2, то говорять, що зв'язність Π_2 *переводиться* у зв'язності Π_1.

Якщо (f, ρ) — автоморфізм головного розшарування, що переводить зв'язність П у себе, то $(f, \rho)_*$ називається *автоморфізмом зв'язності* П.

Структурні рівняння зв'язності. Теорема Картана-Лаптєва

Теорема 4.12. *([15, стор. 281]) Нехай $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ — головне розшарування зі зв'язною структурною групою. Псевдогоризонтальний розподіл $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ є горизонтальним тоді й тільки тоді, коли $[\mathfrak{f}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$.*

Повернемося до розгляду структурних рівнянь головного розшарування $\mathcal{B}$. Нагадаємо (п.5), що якщо фіксувати базис $\{ E_1, \dots, E_r \}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то векторні поля $\{ E_1^\flat, \dots, E_r^\flat \}$ утворюють базис лінійного простору $\mathfrak{f}$, а також $C^\infty(P)$-модуля $\mathcal{F} = \mathcal{V}$, який можна доповнити до локального базису модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладкими векторними полями $\{ E_{r+1}, \dots, E_{r+n} \}$. У випадку, коли на многовиді P фіксоване псевдогоризонтальний розподіл $\mathcal{H}$, за решту n векторів цього базису можна вибрати горизонтальні ліфти векторних полів бази, що утворюють локальний базис модуля $\mathfrak{X}(M)$, наприклад, горизонтальні ліфти векторних полів натурального базису:

$$E_{r+1} = X_1^{\#}, \dots, E_{r+n} = X_n^{\#}. \tag{6.4}$$

Назвемо такий базис *базисом, адаптованим зв'язністю*, або CA-*базисом.*

Нехай $\{ \omega^1, \dots, \omega^{r+n} \}$ — дуальний базис. Тоді 1-форми $\{ \omega^1, \dots, \omega^r \}$ утворюють систему Пфаффа розподілу $\mathcal{H}$, яку ми назвемо *спеціальною.*

Теорема 4.13. *(Теорема Картана-Лаптєва) Псевдогоризонтальний розподіл на просторі головного розшарування $\mathcal{B}$ є горизонтальним, а отже, визначає зв'язність на $\mathcal{B}$, тоді й тільки тоді, коли його спеціальна система Пфаффа $\{ \omega^1, \dots, \omega^r \}$ задовольняє співвідношенням*

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R^a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j. \qquad \square$$

Співвідношення

$$1)d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j; 2)d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \qquad (6.5)$$

називаються *структурними рівняннями Картана*, або *структурними рівняннями зв'язності* (першою та другою групою, відповідно).

Нехай $X \in \mathfrak{X}(P)$. Тоді $X = \omega^a(X)E^\flat_a + \omega^i(X)E_i$, звідки випливає, що

$$\theta(X) = \omega^a(X)\theta(E^\flat_a) = \omega^a(X)E_a = (\omega^a \otimes E_a)(X)$$

і, таким чином,

$$\theta = \omega^a \otimes E_a. \qquad (6.6)$$

Але тоді $d\theta = d\omega^a \otimes E_a$ і, з урахуванням (6.5),

$$\begin{aligned} d\theta &= -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a \\ &= -\frac{1}{2}\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi, \end{aligned}$$

де $\Phi = \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$ — 2-форма на P зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, що називається *формою кривини зв'язності*. Таким чином, структурні рівняння зв'язності (6.5_2) можна записати у термінах форм зв'язності й кривини у вигляді

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi. \qquad (6.7)$$

Зокрема, форма кривини зв'язності визначена внутрішньо, а саме, $\Phi = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$.

Зв'язність на головному розшаруванні називається *плоскою*, якщо її форма кривини тотожно дорівнює нулю.

Вправа 4.11. Довести, що зв'язність у головному розшаруванні плоска тоді й тільки тоді, коли її горизонтальний розподіл інволютивний.

r-форма $\omega \in \Lambda(P)$ називається *горизонтальною*, якщо хоча б один з її аргументів вертикальний, або, що рівносильне,

$$\Pi_H^* \omega = \omega.$$

Аналогічно визначаються вертикальні форми. Відзначимо, однак, що горизонтальні форми визначені внутрішньо, тоді як властивість форми бути вертикальною залежить від вибору зв'язності в головному розшаруванні.

Вправа 4.12. Довести, що r-форма ω на просторі P головного розшарування горизонтальна тоді й тільки тоді, коли в CA-базисі

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_r} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_r}. \tag{6.8}$$

Вправа 4.13. Довести, що форма кривини зв'язності є горизонтальною 2-формою.

В алгебрі Грассмана $\Lambda(P)$ визначений оператор

$$D = \Pi_H^* \circ d,$$

який називається *оператором зовнішнього коваріантного диференціювання.*

Вправа 4.14. Довести, що $\Phi = D\theta$.

Вправа 4.15. Довести, що структурне рівняння (6.7) можна записати у формі

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + D\theta. \tag{6.9}$$

Зокрема, друга група структурних рівнянь Картана визначена внутрішньо. $\square$

Вправа 4.16. (Тотожність Біанкі) Довести, що $D\Phi = 0$.

Існування та приклади зв'язностей. Розглянемо тривіальне головне розшарування $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ із простором розшарування $P = M \times G$. Тут $\pi = p_1$ — проекція на перший співмножник. Відзначимо, що для кожної точки $p_0 = (m_0, g_0) \in P$ природно визначені гладкі регулярні відображення

$$i_{p_0} : M \to P, \qquad i_{p_0}(m) = (m, g_0);$$
$$j_{p_0} : G \to P, \qquad j_{p_0}(g) = (m_0, g).$$

Очевидно, (M, i_p) і (G, j_p) — підмноговиди в P, що проходять через точку $p \in P$. Вони є максимальними інтегральними многовидами деяких цілком інтегрувальних розподілів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{V}$. Очевидно, що $\mathfrak{X}(P) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, причому максимальні інтегральні многовиди розподілу $\mathcal{V}$ є не що інше, як шари розшарування $\mathcal{B}$, звідки випливає, що $\mathcal{V}$ — вертикальни розподіл, а отже, $\mathcal{H}$ — псевдогоризонтальний розподіл. Далі, $R_g(m, a) = (m, ag)$, а отже,

$$(R_g)_*(X, Y) = (X, (R_g)_* Y); \qquad X \in \mathcal{H},\ Y \in \mathcal{V}. \tag{7.1}$$

Звідси випливає, що якщо $Y \in \mathfrak{g}$, то в точці $p = (m, g)$

$$(\lambda Y)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{\exp ty}(m, g) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(m, g \exp ty) =$$
$$= (0, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g \exp ty) = (0, (L_g)_* Y_e) = (0, Y_g).$$

Таким чином, $\lambda Y = Y^\flat$, де $Y^\flat_p = (0, Y_g)$, зокрема,

$$(p_2)_* \circ \lambda = id.$$

Далі, нехай $X \in \mathfrak{X}(M)$. Очевидно, що $i_p \circ \pi = id$, а отже, векторне поле $X^\#$ визначене векторами $X^\#_p = (i_p)_*(X_m) = (X_m, 0)$ і, згідно з (7.1),

$$(R_g)_* X^\# = X^\#; \qquad g \in G.$$

Зокрема, лінійний простір $\mathcal{H}_\pi$, а отже, і модуль $C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$, інваріантні щодо дії структурної групи. Таким чином, $\mathcal{H}$ — горизонтальний розподіл деякої зв'язності на $\mathcal{B}$. Назвемо цю зв'язність *тривіальною*. Відзначимо, що горизонтальний розподіл тривіальної зв'язності інволютивний, а отже, ця зв'язність плоска. Зрозуміло, плоска зв'язність індукує зв'язність і на будь-якому головному розшаруванні (P, M, π, G), еквівалентному тривіальному головному розшаруванню, за допомогою дифеоморфізма тривіалізації $\psi : P \to M \times G$. Цю зв'язність ми також будемо називати тривіальною.

Теорема 4.14. *([15, стор. 288]) На всякому головному розшаруванні існує зв'язність.*

Розглянемо ще одну важливу конструкцію зв'язностей. Нехай G — група Лі, $H \subset G$ — її замкнена підгрупа Лі, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — підалгебра Лі, що відповідає цій підгрупі Лі. Розглянемо однорідний простір G/H. Як ми вже знаємо (див. приклад 4.2), він породжує головне розшарування $\mathcal{B} = (G, G/H, \pi, H)$. У цьому випадку фундаментальні векторні поля на G — це не що інше, як елементи підалгебри Лі $\mathfrak{h}$, тобто $\mathfrak{f} = \mathfrak{h}$ і, більше того, $\lambda = \mathrm{id}$. Справді, нехай $X \in \mathfrak{h}$, $X^\flat = \lambda(X) \in \mathfrak{f}$. Тоді

$$X^\flat_g = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \exp tx = (L_g)_* X_e = X_g; \qquad (g \in G).$$

Отже, $X^\flat = X \quad (X \in \mathfrak{h})$ і $\lambda = \mathrm{id}$. Звідси випливає, що $\mathcal{V} = \mathcal{F} = C^\infty(G) \otimes \mathfrak{f} = C^\infty(G) \otimes \mathfrak{h}$, тобто

$$\mathcal{V} = C^\infty(G) \otimes \mathfrak{h}.$$

Однорідний простір G/H називається *редуктивним*, якщо в $\mathfrak{g}$ існує підпростір $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, що має такі властивості:

$$1)\ \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}; \qquad 2)\ \mathrm{ad}(\mathfrak{h})\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}. \tag{7.2}$$

Підпростір $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ називається *редуктивним доповненням* підалгебри $\mathfrak{h}$.

Достатньою умовою редуктивності однорідного простору є компактність його групи ізотропії. У цьому випадку за редуктивне доповнення підалгебри $\mathfrak{h}$ можна вибрати ортогональне доповнення цієї підалгебри щодо форми Кіллінга.

Нехай $\mathfrak{m}$ — редуктивне доповнення підалгебри $\mathfrak{h}$. Цей підпростір породжує розподіл $\mathcal{H} = C^\infty(G) \otimes \mathfrak{m}$ на G, причому

$$\mathfrak{X}(G) = C^\infty(G) \otimes (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) = \big(C^\infty(G) \otimes \mathfrak{h}\big) \oplus \big(C^\infty(G) \otimes \mathfrak{m}\big) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}.$$

Отже, $\mathcal{H}$ — псевдогоризонтальний розподіл на G. Крім того, якщо $f \in C^\infty(G)$, $X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{f}$, $Y \in \mathfrak{m}$, то $[X, fy] = f[X,Y] + X(f)Y \in \mathcal{H}$, а отже, $[\mathfrak{f}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. За теоремою 8.1, $\mathcal{H}$ — горизонтальний розподіл деякої зв'язності на $\mathcal{B}$. Відзначимо, що будь-який базис $\{ E_1, \dots, E_n \}$ в $\mathfrak{m}$ є одночасно й базисом в $\mathcal{H}$, а тому $\forall\, X \in \mathcal{H} \implies X = f^i e_i$. Але тоді

$$(L_g)_* X = (L_g)_*(f^i e_i) = (f^i \circ L_{g^{-1}})(L_g)_* E_i = (f^i \circ L_{g^{-1}}) E_i \in \mathcal{H};$$

$(g \in G)$. Отже, розподіл $\mathcal{H}$ інваріантний щодо дії групи Лі G за допомогою лівих зсувів.

Теорема 4.15. *([15, стор. 291]) Задання зв'язності в головному розшаруванні $(G, G/H, \pi, H)$, інваріантної щодо дії групи Лі G за допомогою лівих зсувів, рівносильне заданню редуктивного доповнення підалгебри $\mathfrak{h}$.* $\square$

Тема 5

АФІННА ЗВ'ЯЗНІСТЬ І ГОЛОВНЕ РОЗШАРУВАННЯ РЕПЕРІВ

Головне розшарування реперів

Нехай M — n-вимірний гладкий многовид. Розглянемо множину

$$BM = \bigcup_{m\in M} (m, e_1, \ldots, e_n),$$

де $(e_1, \ldots, e_n)$ — довільний базис дотичного простору $T_p(M)$ до многовида M у точці $m \in M$. Елементи цієї множини називаються *реперами* на многовиді M, причому точка m називається *початком*, або *вершиною*, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — *базисною частиною* репера $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$. Існує внутрішньо задане відображення $\pi : BM \to M$, що зіставляє кожному реперу його початок. Це відображення називається *природньою проекцією.* Якщо $m \in M$ — довільна точка, то $\pi^{-1}(m)$ є не що інше, як множина базисів дотичного простору $T_m(M)$. Ця множина має природню структуру гладкого многовида, на якому вільно й транзитивно діє праворуч повна лінійна група $GL(n, \mathbb{R})$. Назвемо многовид $\pi^{-1}(m)$ *шаром* над точкою m. Оскільки $BM = \cup_{m\in M}\pi^{-1}(m)$, права вільна дія групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$ на шарах визначає її праву вільну дію на всій множині BM. У явному вигляді ця дія задається формулою

$$R_g(m, e_1, \ldots, e_n) = (m, g_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n}). \tag{1.1}$$

Із цих співвідношень випливає, що коли p_1, $p_2 \in BM$, то

$$\pi(p_1) = \pi(p_2) \iff \exists\, g \in GL(n, \mathbb{R}) \;\;\&\;\; p_1 g = p_2.$$

Таким чином, шари множини BM є не що інше, як орбіти дії цієї групи Лі.

Нехай (U, φ) — карта на M з координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Побудуємо відображення

$$F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

поклавши $F_U(p) = g$, де $g = C(p_0, p)$ — матриця переходу від натурального репера $p_0 = \left(m, e_1^0 = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_m, \ldots, e_n^0 = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_m\right)$ цієї карти до репера $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(U)$, тобто $p_0 g = p$. Відмітимо, що, згідно з визначенням матриці переходу, її елементи обчислюються за формулою

$$g^i_j = dx^i(e_j); \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, відображення $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbb{R})$, задане формулою $\psi_U(p) = \big(\pi(p), F_U(p)\big)$, — бієкція. Внесемо в BM топологію, зажадавши, щоб усі такі бієкції були гомеоморфізмами. Легко перевірити, наприклад, що в такій топології природня проекція буде неперервним відображенням.

Нехай $p \in BM$ — довільна точка (репер), (g^i_j) — значення глобальних координатних функцій на елементі $g \in GL(n, \mathbb{R})$ (простіше кажучи, елементи матриці g). Нехай (U, φ) — довільна карта на M з координатами $\{\, x^1, \ldots, x^n \,\}$. Розглянемо пари (W, χ), де $W = \pi^{-1}(U)$, $\chi : W \to \mathbb{R}^{n^2+n}$ — відображення, задане формулою

$$\chi(p) = \big(\varphi \circ \pi(p), F_U(p)\big); \qquad p \in BM.$$

З визначення побудованої на BM топології випливає, що $W \subset BM$ — відкрита підмножина, χ — гомеоморфізм на образ, а отже, (W, χ) — локальна карта на BM. Її координатні функції обчислюються за формулами

$$y^i = x^i \circ \pi; \qquad y^i_j = g^i_j \circ F_U. \tag{1.2}$$

Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ — інша локальна карта в околі точки $m = \pi(p)$ з координатами $\{\, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n \,\}$, причому дифеоморфізм $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ задається рівняннями

$$\tilde{x}^i = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n); \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Нехай $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ — відповідна локальна карта в околі точки p. Тоді дифеоморфізм $\tilde{\chi} \circ \chi^{-1} : \mathbb{R}^{n^2+n} \to \mathbb{R}^{n^2+n}$ задається співвідношеннями

$$\tilde{y}^i = \alpha^i(y^1, \dots, y^n); \quad \tilde{y}^i_j = c^i_k y^k_j, \qquad i = 1, \dots, n,$$

де (c^i_j) — матриця переходу від натурального репера першої карти в точці m до натурального репера другої карти в цій точці. Отже, карти (W, χ) і $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ гладко зв'язані і, оскільки їх області утворюють покриття простору BM, ці карти утворюють атлас, що породжує гладку структуру на цьому просторі. Згідно з (1.2) дія групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$ у цих картах задається співвідношеннями

$$\tilde{y}^i = y^i; \quad \tilde{y}^i_j = y^i_k g^k_j; \qquad i, j = 1, \dots, n,$$

і тому є гладкою.

Нехай, нарешті, $p \in BM$, $g \in G$. Позначимо $F_U(p) = h$. Це означає, що $p_0 h = p$. Отже, $pg = (p_0 h)g = p_0(hg)$, а отже,

$$F_U(pg) = hg = F_U(p)g; \qquad p \in BM, \ g \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Підсумовуючи сказане, отримаємо, що сукупність

$$B(M) = \big(BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R})\big)$$

має структуру головного розшарування. Це головне розшарування називається *головним розшаруванням реперів над многовидом* M.

Відмітимо, що репер $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$ можна ототожнити з ізоморфізмом $p : \mathbb{R}^n \to T_m(M)$ лінійних просторів, що зіставляють вектору $(X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$ вектор $X = X^i e_i \in T_m(M)$.

Вправа 5.1. Довести, що при зазначеному ототожненні права дія Φ групи Лі $GL(n, \mathbb{R})$ на многовиді BM визначається формулою

$$\Phi(g, p) \equiv pg = p \circ g; \qquad p \in BM, \ g \in GL(n, \mathbb{R}).$$

На многовиді BM внутрішньо визначена гладка 1-форма ω зі значеннями в лінійному просторі $\mathbb{R}^n$ за формулою

$$\omega_p(X) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(X); \qquad p \in BM,\ X \in T_p(BM). \tag{1.3}$$

Оскільки в просторі $\mathbb{R}^n$ фіксований стандартний базис $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, форма ω цілком визначена своїми тензорними компонентами, а саме, $\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i$.

Вправа 5.2. Довести, що співвідношення (1.3) визначає гладку 1-форму.

Побудована вище форма ω на многовиді BM називається *формою зсуву.*

Теорема 5.1. *([15, стор. 296]) Форма зсуву ω має такі властивості:*

(1) ω — горизонтальна форма, тобто вона обертається в нуль на будь-якому вертикальному векторі;

(2) $(R_g)^*(\omega) = g^{-1} \circ \omega$; $\quad \big(g \in GL(n, \mathbb{R})\big)$.

Нехай у головному розшаруванні $B(M)$ фіксована зв'язність, $\mathcal{H}$ — її горизонтальний розподіл. Нехай $\xi \in \mathbb{R}^n$ — довільний вектор. У кожній точці $p \in BM$ визначений єдиний горизонтальний вектор $X_p \in \mathcal{H}_p$ такий, що $(\pi_*)_p(X_p) = p(\xi)$ (горизонтальний ліфт вектора $p(\xi)$). Очевидно, сім'я $X_\xi = \{\, X_p \mid p \in BM \,\}$ усіх таких векторів однозначно задане умовою $\omega(X_\xi) = \xi$, а отже, якщо фіксувати локальний базис $\{\, X_1^{\#}, \ldots, X_n^{\#} \,\}$ розподілу $\mathcal{H}$, то функції $X_\xi^i(p) = (X_\xi)_p^i$, що є компонентами розкладу векторів сімейства X_ξ за цим базисом, є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$(\omega^i)_j x_\xi^j = \xi^i; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Відзначимо, що якщо ввести позначення $\omega_j = \omega(X_j^{\#})$, то

$$(\omega_j)_p = \omega(X_j^{\#})_p = p^{-1} \circ (\pi_*)_p (X_j^{\#})_p = p^{-1}(X_j)_{\pi(p)} = (X_j)^i\big(\pi(p)\big)\varepsilon_i,$$

тобто $(\omega_j)_p$ — набір координат вектора $(X_j)_{\pi(p)}$ у реперу p. Зокрема, якщо покласти $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$; $j = 1, \ldots, n$, то $\omega_j = (\tilde{y}_j^1, \ldots, \tilde{y}_j^n)$ і система (1.5) набуває вигляду

$$\tilde{y}_j^i x^j = \xi^i; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Таким чином, функції $p \mapsto X^j(p)$ гладкі, а отже, сім'я X_ξ є гладким горизонтальним векторним полем на многовиді BM. Воно називається *базисним векторним полем, породженим вектором* ξ.

Вправа 5.3. Довести, що сукупність $\mathfrak{b}$ усіх базисних векторних полів на BM утворює n-вимірний лінійний простір, а форма зсуву задає природній ізоморфізм $\omega : \mathfrak{b} \to \mathbb{R}^n$. При цьому

$$(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}; \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \; g \in GL(n, \mathbb{R}). \tag{1.7}$$

Зокрема, ненульові базисні векторні поля не мають особливих точок.

Вправа 5.4. Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, $\mathcal{H}$ — горизонтальний розподіл деякої зв'язності на головному розшаруванні BM. Довести, що $C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b} = \mathcal{H}$. Зокрема, $\mathcal{H}$ — n-вимірний паралелізуємий розподіл. При цьому

$$C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(BM). \tag{1.8}$$

Вправа 5.5. Довести, що простір розшарування реперів над будь-яким гладким многовидом M паралелізуємий.

Теорема 5.2. *(Узагальнена лема Картана). Нехай $\Lambda(V)$ — зовнішня алгебра вільного модуля V зі скінченним числом твірних. Рівняння*

$$\theta_a \wedge \omega^a = 0; \qquad a = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

де θ_a — зовнішні форми довільного ступеня r, ω^a — лінійно незалежні 1-форми, які можна доповнити до базису модуля V^*, дуального модулю V, виконується тоді й тільки тоді, коли

$$\theta_a = \theta_{ab} \wedge \omega^b, \tag{2.2}$$

де $\{\, \theta_{ab} \,\}$ — деякі $(r-1)$-форми такі, що

$$\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b = 0. \tag{2.3}$$

Вправа 5.6. (Лема Картана). Нехай $\Lambda(V)$ — зовнішня алгебра вільного модуля V зі скінченним числом твірних. Довести, що рівняння

$$\theta_a \wedge \omega^a = 0; \qquad a = 1, \dots, n,$$

де θ_a — 1-форми, ω^a — лінійно незалежні 1-форми, які можна доповнити до базису модуля V^*, виконується тоді й тільки тоді, коли

$$\theta_a = A_{ab}\omega^b,$$

де $\{\, A_{ab} \,\}$ — деякі скаляри такі, що $A_{ab} = A_{ba}$.

Вправа 5.7. Довести, що

$$\theta_{[ab]} \equiv 0 \underset{\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^n}{.}$$

Вправа 5.8. Довести, що якщо $\{\, \theta_a \,\}$ — 2-форми, то

$$\theta_{[ab]} = A_{abc}\omega^c,$$

де $\{\, A_{abc} \,\}$ — деякі скаляри.

Структурні рівняння головного розшарування реперів. Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, (U, φ) — його локальна карта з координатами $(x^1, \dots, x^n)$, $W = \pi^{-1}(U) \subset BM$. Нагадаємо, що

$$F_U(pg) = F_U(p)g; \qquad p \in BM,\ g \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Нехай $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ — довільний елемент, $g(t) = \exp tx$. Застосуємо до обох частин тотожності $F_U\big(p, g(t)\big) = F_U(p)g(t)$ оператор $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}$:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_U\big(pg(t)\big) = (F_U)_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} pg(t) = (F_U)_*(X_p^\flat);$$
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_U(p)g(t) = \big(L_{F_U(p)}\big)_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t) = \big(L_{F_U(p)}\big)_* X_e = X_{F_U(p)}.$$

Таким чином,

$$(F_U)_*\big(X^\flat|_W\big) = X|_{F_U(W)}. \tag{3.1}$$

Нехай $b = \{\, E^i_j \,\}$ — стандартний базис алгебри Лі $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, отриманий рознесенням за допомогою лівих зсувів стандартного базису $\{\, e^i_j \,\}$ повної матричної алгебри $M_{n,n} = T_e\big(GL(n,\mathbb{R})\big)$, $(e^i_j)^k_m = \delta^i_m \delta^k_j$. Позначимо $\mathcal{E}^i_j = (E^i_j)^\flat$. Тоді векторні поля $\{\, \mathcal{E}^i_j \,\}$ утворюють базис лінійного простору $\mathfrak{f}$, а також розподілу $\mathcal{V}$. Далі, нехай $\{\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \,\}$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$. Як ми бачили у п.1, векторні поля $\{\, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \,\}$; $\mathcal{E}_i = X_{\varepsilon_i}$, утворюють базис лінійного простору $\mathfrak{b}$, а також локальний базис розподілу $\mathcal{H}$ (при фіксації тривіальної зв'язності в головному розшаруванні $(W, U, \pi|_U, GL(n,\mathbb{R}))$). Отже, векторні поля

$$\{\, \mathcal{E}^i_j,\ \mathcal{E}_k \mid i,j,k = 1, \dots, n \,\} \tag{3.2}$$

утворюють локальний базис модуля $\mathfrak{X}(BM)$. Нехай

$$\{\, \omega^i_j,\ \omega^k \mid i,j,k = 1, \dots, n \,\} \tag{3.3}$$

— дуальний кобазис.

Вправа 5.9. Довести, що якщо $\{\, \pi^i_j \,\}$ — кобазис, дуальний базису b, то

$$(F_U)^* \pi^i_j = \omega^i_j; \qquad i,j = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Вправа 5.10. Довести, що в уведених позначеннях,

$$(E^i_j)_g = g^r_j e^i_r; \qquad g \in GL(n,\mathbb{R}),\ i,j = 1, \dots, n.$$

Далі, оскільки

$$(\pi^i_j)_e = dg^i_j, \tag{3.5}$$

то

$$\mathrm{id} = (\pi^i_j)_g \otimes (E^j_i)_g = (\pi^i_j)_g \otimes g^r_i e^j_r = g^r_i (\pi^i_j)_g \otimes e^j_r.$$

З іншого боку, оскільки 1-форми $\{ (\pi^i_j)_e \}$ утворюють кобазис, дуальний базису $\{ e^i_j \}$,

$$\mathrm{id} = dg^r_j \otimes e^j_r.$$

Порівнюючи ці співвідношення, отримаємо

$$(\pi^i_j)_g = \tilde{g}^i_r dg^r_j. \tag{3.6}$$

Застосовуючи до обох частин цього співвідношення оператор $(F_U)^*$, з урахуванням (3.4), отримаємо

$$(\omega^i_j)_p = (F_U)^*(\pi^i_j)_g = (F_U)^*(\tilde{g})^i_r (F_U)^*(dg^r_j) = \tilde{y}^i_r(p)(dy^r_j)_p,$$

а отже,

$$\omega^i_j = \tilde{y}^i_r dy^r_j. \tag{3.7}$$

Більше того, оскільки $\tilde{y}^i_r y^r_j = \delta^i_j$, то, диференціюючи цю тотожність зовні, отримаємо, що $y^r_j d\tilde{y}^i_r + \tilde{y}^i_r dy^r_j = 0$ і, згідно з (3.7),

$$\omega^i_j = -y^r_j d\tilde{y}^i_r. \tag{3.8}$$

Вправа 5.11. Покажіть, що 1-форми $\{ \omega^i \}$ є тензорні компоненти форми зсуву ω відносно стандартного базису простору $\mathbb{R}^n$, для яких

$$\omega^i = \tilde{y}^i_j dy^j; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Має місце *перша група структурних рівнянь головного розшарування реперів*:

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Друга група структурних рівнянь головного розшарування реперів має вигляд

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_{jk}^i \wedge \omega^j; \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.11}$$

де $\{\, \omega_{jk}^i \,\}$ — локально задані 1-форми на многовиді BM такі, що $\omega_{[jk]}^i = A_{jkl}^i \omega^l$, $\{\, A_{jkl}^i \,\}$ — локально задані гладкі функції на BM. Проводячи процедуру диференціального продовження цих співвідношень, можна одержати формулу для обчислення зовнішнього диференціала трьохіндексних форм і т.д.

Покомпонентне задання тензорів. Нехай M — n-вимірний гладкий многовид. Фіксуємо точку $m \in M$. Тоді на підмноговиді $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутрішньо визначені n функцій $\{\, e_1, \ldots, e_n \,\}$ (0-форм) зі значеннями у векторному просторі $T_m(M)$ такі, що функція e_i співставляє точці $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ вектор $e_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Очевидно, у карті (W, χ),

$$e_i(p) = y_i^j(p)(e_j)_0, \tag{4.1}$$

де $(e_i)_0 = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_m, \quad i = 1, \ldots, n$ — вектори натурального репера p_0. Отже, відображення $(e_i \circ \chi^{-1})^j$ задаються рівняннями $(e_i)^j = y_i^j$, а отже, вектор-функції e_i є гладкими. Продиференціюємо (4.1) зовнішньо з урахуванням (3.7):

$$de_i = dy_i^j \otimes (e_j)_0 = dy_i^j \otimes \tilde{y}_j^k e_k = \tilde{y}_j^k dy_i^j \otimes e_k = \omega_i^k \otimes e_k.$$

Таким чином,

$$de_i = \omega_i^j \otimes e_j; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Аналогічно, на підмноговиді $\pi^{-1}(m)$ внутрішньо визначені n функцій $\{\, e^1, \ldots, e^n \,\}$ (0-форм) зі значеннями у векторному просторі $T_m^*(M)$ такі, що функція e^i співставляє точці $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ ковектор $e^i, \quad i = 1, \ldots, n$. Очевидно, у карті (W, χ),

$$e^i(p) = \tilde{y}_j^i(p)(e^j)_0, \tag{4.3}$$

де $(e^i)_0 = dx^i$, $\quad i = 1, \dots, n$ — вектори корепера, дуального реперу p_0. Отже, відображення $(e^i \circ \chi^{-1})^j$ задаються рівняннями $(e^i)_j = \tilde{y}^i_j$, а отже, вектор-функції e^i є гладкими. Продиференціюємо (4.3) зовнішньо з урахуванням (3.8):

$$de^i = d\tilde{y}^i_j \otimes (e^j)_0 = d\tilde{y}^i_j \otimes y^j_k e^k = y^j_k d\tilde{y}^i_j \otimes e^k = -\omega^i_k \otimes e^k.$$

Таким чином,

$$de^i = -\omega^i_j \otimes e^j; \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$

Нехай t — поле тензора типу (r, s) на M. Воно породжує сім'ю функцій $\widehat{t} = \{\, t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \,\}$ на многовиді BM, заданих формулою

$$t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(p) = (t_{\pi(p)})^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}; \qquad p \in BM.$$

Покажемо, що $t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(BM)$. Дійсно, у карті (W, χ) маємо:

$$t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = y^{k_1}_{i_1} \dots y^{k_r}_{i_r} \tilde{y}^{j_1}_{m_1} \dots y^{j_s}_{m_s} \big(\hat{t}^{m_1 \dots m_s}_{k_1 \dots k_r} \circ \pi\big),$$

де $\hat{t}^{m_1 \dots m_s}_{k_1 \dots k_r} = t\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^{k_r}}, dx^{m_1}, \dots, dx^{m_s}\right)$ — компоненти тензорного поля t в натуральному базисі. Отже, $t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ — гладкі функції.

Нехай, зокрема, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\{\, X^i \,\}$ — відповідні функції на многовиді BM. Фіксуємо точку $m \in M$. Тоді на підмноговиді $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутрішньо породжується функція X_m зі значеннями у векторному просторі $T_m(M)$, задана у точці $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ формулою

$$X_m(p) = X^i(p) e_i.$$

Крім того, ця функція стала: її значення в кожній точці p дорівнює значенню векторного поля X у точці $\pi(p)$. Отже, $d(X_m) = 0$. З іншого боку, $d(X_m) = dx^i \otimes e_i + X^i de_i$ і, з урахуванням (4.2),

$$0 = dx^i \otimes e_i + X^i \omega^j_i \otimes e_j = (dx^i + X^j \omega^i_j) \otimes e_i.$$

Із урахування лінійної незалежності базисних векторів випливає, що $(dx^i + X^j \omega^i_j)\big|_{\pi^{-1} m} = 0$. Зокрема, ці форми належать корозподілу $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$, асоційованому вертикальному розподілу.

Вправа 5.12. Довести, що форми $\{\,\omega^i; \quad i = 1,\dots,n\,\}$ утворюють систему Пфаффа вертикального розподілу. □

Вправа 5.13. Довести, що

$$dx^i + X^j\omega^i_j = X^i_j\omega^j; \qquad X^i_j \in C^\infty(W). \tag{4.5}$$

Вправа 5.14. Довести, що задання векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладкому многовиді M рівносильне заданню системи функцій $\{\,X^i \mid i = 1,\dots,n\,\}$ на многовиді BM, що задовольняють умовам (4.5).

Вправа 5.15. Довести, що задання ковекторного поля $u \in \mathfrak{X}^*(M)$ на гладкому многовиді M рівносильне заданню системи функцій $\{\,u_i \mid i = 1,\dots,n\,\}$ на многовиді BM, що в області W задовольняють умовам

$$du_i - u_j\omega^j_i = u_{ij}\omega^j; \qquad u_{ij} \in C^\infty(W). \quad \square \tag{4.7}$$

Теорема 5.3. *([15, стор. 310]) Задання тензорного поля типу (r,s) на гладкому многовиді M рівносильне заданню системи гладких функцій $\{\,t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\,\}$ на просторі BM головного розшарування реперів над M, що задовольняють в області W співвідношенням*

$$\begin{aligned} dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} - t^{j_1\dots j_s}_{k i_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} - \dots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} + t^{k j_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k + \dots \\ + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k, \end{aligned}$$

де $\{\,t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\,\}$ — деяка система гладких функцій в області W. Значення функцій $\{\,t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\,\}$у точці $p \in BM$ дорівнюють відповідним компонентам тензора $t_{\pi(p)}$ у репері p. □

Зв'язність у головному розшаруванні реперів. Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, $B(M)$ — головне розшарування реперів над M, (U,φ) — локальна карта на M з координатами $\{\,x^1,\dots,x^n\,\}$. Як зазначалося раніше, U — область локальної тривіальності головного розшарування $B(M)$. Розглянемо базис $b = \{\, \mathcal{E}^i_j, \widetilde{\mathcal{E}}_k \,\}$ модуля $\mathfrak{X}(W)$, де

$$\mathcal{E}^i_j = (E^i_j)^\flat, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_k = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^\#; \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Як ми вже знаємо,

$$E^i_j = (F_U)_*(\mathcal{E}^i_j) = (p_2 \circ \psi_U)_*(\mathcal{E}^i_j); \quad \frac{\partial}{\partial x^k} = \pi_*(\widetilde{\mathcal{E}}_k) = (p_1 \circ \psi_U)_*(\widetilde{\mathcal{E}}_k),$$

і, таким чином, $\{\, E^i_j; \dfrac{\partial}{\partial x^k} \,\}$ — образ базису b при дифеоморфізмі, ψ_U — базис модуля $\mathfrak{X}(U \times G)$. У ньому тривіальна зв'язність головного розшарування $\big(U \times G, U, p_1, G)\big)$ задається формою $\Theta = p_2^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i$. Тут $G = GL(n, \mathbb{R})$. Відповідно, тривіальна зв'язність головного розшарування (W, U, π, G) задається формою

$$\theta_U = \psi_U^* \circ p_2^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = (p_2 \circ \psi_U)^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = F_U^*(\pi^i_j) \otimes E^j_i = \omega^i_j \otimes E^j_i.$$

Таким чином, *геометричний зміст форм* $\{\, \omega^i_j \,\}$ *полягає у тому, що ці форми є не що інше, як тензорні компоненти в базисі* $\{\, E^i_j \,\}$ *форми тривіальної зв'язності, заданої на звуженні головного розшарування реперів на область карти.*

Вправа 5.16. Нехай (P, M, π, G) — головне розшарування, θ_1 і θ_2 — дві форми зв'язностей на ньому. Довести, що $\zeta = \theta_2 - \theta_1$ — горизонтальна форма.

З урахуванням цього, якщо в головному розшаруванні реперів над M фіксована зв'язність із формою θ, то в області $W \subset BM$ мають місце співвідношення

$$\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k; \qquad \{\, \gamma^i_{jk} \,\} \subset C^\infty(W). \tag{5.1}$$

Підставляючи їх в першу групу структурних рівнянь головного розшарування реперів (3.10), отримаємо

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \tag{5.2}$$

де $S^i_{jk} = 2\gamma^i_{[jk]}$. Ці рівняння називаються *першою групою структурних рівнянь зв'язності*. Щоб записати їх у безіндексній формі, нагадаємо (п.1), що форма ω зсуву може бути записана у вигляді

$$\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i.$$

Диференціюючи це співвідношення зовнішні, з урахуванням (5.2) отримаємо

$$d\omega = d\omega^i \otimes \varepsilon_i = -\theta^i_j \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i + \frac{1}{2} S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i = -\theta\omega + \Omega,$$

де $\Omega = \frac{1}{2} S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i$ — 2-форма на BM зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, що називається *формою скруту зв'язності*. Таким чином, перша група структурних рівняння зв'язності може бути записана у термінах форм зсуву й скруту у вигляді

$$d\omega = -\theta\omega + \Omega \tag{5.3}$$

(це рівняння називають *додатковим рівнянням зв'язності*). Зокрема, форма скруту зв'язності визначена внутрішньо, а саме, $\Omega = d\omega + \theta\omega$. Відмітимо, що форма скруту зв'язності є горизонтальною 2-формою, що випливає з її визначення.

Вправа 5.17. Довести, що $\Omega = D\omega$.

Вправа 5.18. Довести, що структурне рівняння (5.3) можна записати у формі

$$d\omega = -\theta\omega + D\omega. \quad \square \tag{5.4}$$

Теорема 5.4. *([15, стор. 312]) Повна група структурних рівнянь зв'язності у головному розшаруванні реперів має вигляд*

$$1)\ d\omega = -\theta\omega + \Omega; \qquad 2)\ d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi, \tag{5.5}$$

де $\Omega = \frac{1}{2} S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i$, $\Phi = \frac{1}{2} R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l \otimes E^j_i$ — форми скруту й кривини зв'язності, задані внутрішньо. $\square$

Відмітимо, що ці співвідношення в розгорнутому вигляді, згідно з (5.2) та з (6.5_2) глави 5, в CA-базисі набувають вигляду

$$\begin{aligned} &1)\ d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k; \\ &2)\ d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^k_j + \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Згідно з теоремою Картана-Лаптєва, виконання співвідношення (5.6_2) необхідно й достатньо для того, щоб псевдогоризонтальний розподіл, заданий деякими формами Пфаффа $\{\, \theta^i_j \,\}$, був горизонтальним розподілом деякої зв'язності в розшаруванні $B(M)$.

Важливо відзначити, що, хоча функції S^i_{jk} і R^i_{jkl} були визначені нами локально, у термінах відповідних карт, у дійсності, будучи компонентами тензорів $D\omega$ і $D\theta$, відповідно, в глобально заданому базисі $\{\, \mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k \,\}$, вони також визначені глобально, тобто належать алгебрі $C^\infty(BM)$.

Вправа 5.19. (Додаткова тотожність Біанкі). Довести, що

$$D\Omega = \Phi\omega.$$

Уведемо такі позначення

$$\Omega^i = \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \qquad \Phi^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l \tag{5.7}$$

для тензорних компонент форм скруту й кривини зв'язності, відповідно.

Вправа 5.20. Довести, що набір функцій $\{\, S^i_{jk} \,\}$ визначає поле тензора S типу (2,1) на многовиді M.

Цей тензор називається *тензором скруту зв'язності.*

Вправа 5.21. Довести, що набір функцій $\{\, R^i_{jkl} \,\}$ визначає поле тензора R типу (3,1) на многовиді M.

Цей тензор називається *тензором кривини зв'язності.*

1. У кожній точці $m \in M$ внутрішньо визначений тензор S_m типу (2,1) за формулою

$$S_m(X, Y) = p \circ \Omega_p(X_p^{\#}, Y_p^{\#}); \qquad p \in \pi^{-1}(m). \tag{5.13}$$

Вправа 5.22. Довести, що це визначення коректне, тобто не залежить від вибору точки $p \in \pi^{-1}(m)$.

Вправа 5.23. Довести, що сім'я тензорів $\widetilde{S} = \{ S_m \mid m \in M \}$ утворює тензорне поле на многовиді M, що збігається з полем тензора скруту зв'язності.

2. У кожній точці $m \in M$ визначений тензор R_m типу (3,1) за формулою

$$R_m(X, Y)Z = p\big(\Phi_p(X_p^{\#}, Y_p^{\#})\omega_p(Z_p^{\#})\big); \qquad p \in \pi^{-1}(m). \tag{5.14}$$

Вправа 5.24. Довести, що це визначення коректне, тобто не залежить від вибору точки $p \in \pi^{-1}(m)$.

Вправа 5.25. Довести, що сім'я тензорів $\widetilde{S} = \{ S_m \mid m \in M \}$ утворює тензорне поле на многовиді M, що збігається з полем тензора кривини зв'язності.

Контраваріантна форма структурних рівнянь.

Теорема 5.5. *([15, стор. 318]) Нехай M — n-вимірний гладкий многовид, $B(M)$ — головне розшарування реперів над M, $A^\flat, B^\flat \in \mathfrak{f}$, $X_\xi, Y_\eta \in \mathfrak{b}$. Тоді*

$$\begin{aligned} &1)[A^\flat, B^\flat] = [A, B]^\flat; \\ &2)[A^\flat, X_\xi] = X_{A\xi}; \\ &3)[X_\xi, X_\eta] = -\Lambda \circ \Phi(X_\xi, X_\xi) - X_{\Omega(X_\xi, X_\eta)}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Вправа 5.26. Довести, що у базисі $\{\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k\}$ алгебра Лі $\mathfrak{X}(BM)$ має таку таблицю множення:

$$\begin{aligned}
&1)\ [\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}^l_k] = \delta^i_k \mathcal{E}^l_j - \delta^l_j \mathcal{E}^i_k;\\
&2)\ [\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k] = \delta^i_k \mathcal{E}_j;\\
&3)\ [\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j] = -R^l_{kij}\mathcal{E}^k_l - S^k_{ij}\mathcal{E}_k.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Співвідношення (5.16) еквівалентні структурним рівнянням (5.5) або (5.6). Вони називаються *контраваріантними структурними рівняннями зв'язності*.

Коваріантне диференціювання. Гладкий многовид, у головному розшаруванні реперів якого фіксована зв'язність, називається *простором афінної зв'язності*.

Нехай M — n-вимірний простір афінної зв'язності, θ — форма зв'язності, t — тензорне поле (для стислості, ми будемо говорити тензор) типу (r, s) на M. Нагадаємо, що задання тензора t на M рівносильне заданню сім'ї гладких функцій $\widehat{t} = \{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ на многовиді BM, що задовольняють рівнянню

$$\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k, \tag{6.1}$$

де $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\}$ — гладкі функції, задані в області $W \subset BM$ (див. п. 4). З урахуванням співвідношень (5.1), рівняння (6.1) можна переписати у формі

$$\nabla t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r, k}\omega^k, \tag{6.2}$$

де $\nabla t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} - t^{j_1\dots j_s}_{k i_2\dots i_r}\theta^k_{i_1} - \dots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r} + t^{k j_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\theta^{j_1}_k + \dots + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\theta^{j_s}_k$ — глобально задана 1-форма на многовиді BM. Оскільки форми ω^k визначені глобально й лінійно незалежні в кожній точці, функції $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r, k}$ належать алгебрі $C^\infty(BM)$. Продиференціювавши (6.1) зовнішньо, з урахуванням співвідношень (5.6) і використовуючи лему Картана, переконуємося, що 1-форми $\nabla t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r, k}$ горизонтальні і, згідно з основною теоремою тензорного аналізу, визначають тензор типу $(r+1, s)$ на многовиді M, який позначається ∇t і називається *коваріантним диференціалом* тензора t (у даній зв'язності).

Згідно з (6.2) і вертикальністю форми θ,

$$Dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\omega^k.$$

Щоб з'ясувати геометричний зміст тензора ∇t, відмітимо, що довільний репер $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$, розглянутий як відображення $p : \mathbb{R}^n \to T_m(M)$ (див. п.1), природно поширюється до відображення $p : \mathcal{T}^s_r(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{T}^s_r\big(T_m(M)\big)$, заданого формулою

$$p\big(\{\,\tau^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\,\}\big) = \tau^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}.$$

Відповідно, визначається *розширена форма зсуву* $\omega_p = p^{-1} \circ (\pi_*)_p$. Зокрема,

$$\widehat{t} \equiv \{\,t^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}\,\} = \omega(t^{\#}). \tag{6.3}$$

Далі, якщо $t \in \mathcal{T}^s_r(M)$, то

$$t_m = p(\widehat{t}_p), \qquad m \in M,\ p \in \pi^{-1}(m). \tag{6.4}$$

Зокрема, якщо $g \in GL(n, \mathbb{R})$, то $(pg)\widehat{t}_{pg} = p\widehat{t}_p$, а отже, $g\widehat{t}_{pg} = \widehat{t}_p$, звідки випливає, що

$$\widehat{t}_{pg} = g^{-1}\widehat{t}_p; \qquad p \in BM,\ g \in GL(n, \mathbb{R}). \tag{6.5}$$

Зафіксуємо $X \in \mathfrak{X}(M)$ і зіставимо тензору $t \in \mathcal{T}^s_r(M)$ новий тензор $\nabla_X t \in \mathcal{T}^s_r(M)$ у такий спосіб. Нехай $m \in M$, $p \in \pi^{-1}(m)$. Покладемо

$$(\nabla_X t)_m = p(X^{\#}_p \widehat{t}). \tag{6.6}$$

У зв'язку з вертикальністю форми θ,

$$\begin{aligned} X^{\#}_p(t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}) = dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(X^{\#}_p) = \nabla t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(X^{\#}_p) = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\omega^k(X^{\#}_p) = \\ = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\big(p^{-1} \circ \pi_*(X^{\#}_p)\big)^k = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k} X^k(p), \end{aligned}$$

і, таким чином, сім'я функцій $\{\, X_p^{\#}(t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r})\,\}$ визначає тензор типу (r,s) на M, що збігається з тензором $C^{(s+1)}_{(r+1)}(\nabla t\otimes X)$. З іншого боку, згідно з (6.4) і (6.6), компоненти тензора $(\nabla_X t)_m$ у репері p збігаються зі значеннями функцій $\{\, X_p^{\#}(t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r})\,\}$ на цьому репері, і, таким чином, сім'я $\nabla_X t = \{\,(\nabla_X t)_m \mid m\in M\,\}$ визначає тензорне поле на M, що збігається з тензорним полем $C^{(s+1)}_{(r+1)}(\nabla t\otimes X)$. Тензорне поле $\nabla_X t$ називається *коваріантною похідною тензорного поля t у напрямку векторного поля X*, а оператор $\nabla_X : \mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M)$ — *оператором коваріантного диференціювання в напрямку векторного поля X*.

Аналогічно визначається коваріантна похідна $\nabla_\xi t$ тензорного поля t у точці $m\in M$ у напрямку вектора $\xi\in T_m(M)$:

$$\nabla_\xi t = p(\xi^{\#}\widehat{t}).$$

Теорема 5.6. *([15, стор. 323]) Оператор ∇_X $\big(X\in\mathfrak{X}(M)\big)$ має такі властивості:*

(1) $\nabla_X f = Xf$;

(2) ∇_X *зберігає тип тензорів;*

(3) $\nabla_X\circ C^{(i)}_{(j)} = C^{(i)}_{(j)}\circ\nabla_X$;

(4) $\nabla_{fx+gy} t = f\nabla_X t + f\nabla_Y t$;

(5) $\nabla_X(t_1+t_2) = \nabla_X t_1 + \nabla_X t_2$;

(6) $\nabla_X(t_1\otimes t_2) = \nabla_X(t_1)\otimes t_2 + t_1\otimes\nabla_X(t_2)$

$\big(X,Y\in\mathfrak{X}(M);\ f,g\in C^\infty(M);\ t_1,t_2,t\in\mathcal{T}(M)\big)$. *Інакше кажучи, оператор ∇_X є диференціюванням тензорної алгебри многовида M, який переставляється з операторами згортки й зберігає тип тензорів.*

Вправа 5.27. Довести, що у просторі M афінної зв'язності внутрішньо визначений оператор $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, який має такі властивості:

$$\begin{aligned} &1)\nabla(fx+gy,Z)=f\nabla(X,Z)+g\nabla(Y,Z);\\ &2)\nabla(X,Y+Z)=\nabla(X,Y)+\nabla(X,Z);\\ &3)\nabla(X,fy)=X(f)Y+f\nabla(X,Y) \end{aligned} \tag{6.7}$$

$\big(X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),\ f,g\in C^\infty(M)\big)$.

Теорема 5.7. *([15, стор. 324]) Оператор коваріантного диференціювання в просторі M афінної зв'язності в напрямку векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$ однозначно визначається такими своїми властивостями:*

(1) $\nabla_X f = X(f), \quad (f\in C^\infty(M))$;

(2) $\nabla_X Y=\nabla(X,Y), \quad (Y\in\mathfrak{X}(M))$;

(3) оператор ∇_X є диференціюванням тензорної алгебри многовида M, що зберігає тип тензорів і переставляється з операторами згортки.

Точний вираз тензора $\nabla_X t, \quad t\in\mathcal{T}^s_r(M)$, дається формулою

$$\begin{aligned}\nabla_X t(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^r)&=X(t(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s))-\\ &-\sum_{k=1}^{r} t(X_1,\dots,X_{k-1},\nabla_X X_k,X_{k+1},\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)-\\ &-\sum_{k=1}^{s} t(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^{k-1},\nabla_X u^k,u^{k+1},\dots,u^s). \quad \square\end{aligned}$$

Задання оператора $\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ на многовиді M, що має властивості (6.7), рівносильне заданню зв'язності в головному розшаруванні реперів, що породжує цей оператор. Тому цю зв'язність ототожнюють із оператором ∇, що має властивості (6.7) і називається *оператором Кошуля.* При цьому саму зв'язність називають *афінною*, або *лінійною*, зв'язністю на многовиді M.

Теорема 5.8. *([15, стор. 325]) Нехай M — простір афінної зв'язності ∇, S і R — тензори скруту й кривини цієї зв'язності, відповідно. Тоді*

$$\begin{aligned} &1)\ S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y];\\ &2)\ R(X,Y)Z = \big([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\big)Z; \end{aligned} \tag{6.8}$$

$\big(X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)\big)$. $\square$

Вправа 5.28. Нехай $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, Z — векторне поле на M. Довести, що

$$X^\flat_p(\widehat{Z}) = -X_e\big(\widehat{Z}_p\big); \qquad p \in BM.$$

Тут $X^\flat_p$ діє як i-диференціювання в точці p, а X_e — як лінійний оператор простору R^n.

Альтернативне визначення афінної зв'язності. Нехай (M,∇) — n-вимірний простір афінної зв'язності, (U,φ) — локальна карта на M з координатами $\{\,x^1,\dots,x^n\,\}$. Як ми знаємо, векторні поля $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ утворюють базис модуля $\mathfrak{X}(U)$, або локальний базис модуля $\mathfrak{X}(M)$. Фіксуємо $i,j = 1,\dots,n$. Розкладемо векторне поле $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ за цим базисом:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Функції $\{\,\Gamma^k_{ij}\,\} \subset C^\infty(U)$ називаються *узагальненими коефіцієнтами Крістоффеля зв'язності ∇ у даній карті.* Їхнє знання дозволяє, з урахуванням співвідношень (6.7), обчислити звуження векторного поля $\nabla_X Y$; $\quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, на область карти за формулою

$$\nabla_X Y = X^j\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}Y^i\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{7.1}$$

Якщо (V, ψ) — інша карта на M з координатами $\{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n\}$, то в області V маємо: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a} \right) = \tilde{\Gamma}^c_{ab} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^c}$. Порівнюючи ці співвідношення, з урахуванням того, що в області $U \cap V$ виконується співвідношення $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}$, а також з урахуванням співвідношень (6.7) і лінійної незалежності базисних векторів, отримаємо

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^b} \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^k}. \tag{7.2}$$

Таким чином, задання афінної зв'язності на многовиді M індукує задання системи $\{\Gamma^k_{ij}\}$ гладких функцій в області кожної карти на M, які перетворяться при заміні карти за законом (7.2). Обернено, кожний набір систем функцій $\{\Gamma^k_{ij}\}$, заданий на координатних областях многовида M, що покривають M, при заміні карти, що перетвориться за формулами (7.2), однозначно визначає оператор $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, що має властивості (6.7) (тобто оператор Кошуля). Справді, нехай $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Визначимо сім'ю векторів $\mathcal{K} = \{(\nabla_X Y)|_p \mid p \in M\}$ у такий спосіб. Нехай $p \in M$, (U, φ) — локальна карта з координатами $\{x^1, \dots, x^n\}$ в околі точки p. Нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ — локальні розклади даних векторних полів за натуральним базисом. Покладемо

$$(\nabla_X Y)_p = X^j(p) \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} Y^i \right)(p) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p. \tag{7.3}$$

Покажемо, що це визначення коректне в сенсі незалежності від вибору локальної карти. Нехай (V, ψ) — інша карта з координатами $\{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n\}$ в околі точки p. У ній

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = \tilde{X}^b(p) \left(\frac{\partial \tilde{Y}^c}{\partial \tilde{x}^b} + \Gamma^{\tilde{c}}_{ab} \tilde{Y}^a \right)(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^c}\bigg|_p. \tag{7.4}$$

Відзначимо, що $\tilde{Y}^c = \dfrac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i} y^i$, а отже,

$$\frac{\partial \tilde{Y}^c}{\partial \tilde{x}^b} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b}\left(\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i} y^i\right) \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i} y^i\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 \tilde{x}^c}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^b} y^i + \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}.$$

Підставимо ці співвідношення, а також (7.2), в (7.4):

$$\tilde{\nabla_X} Y = \frac{\partial \tilde{x^b}}{\partial x^k} X^k \Big(\frac{\partial^2 \tilde{x^c}}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^b} Y^i + \frac{\partial x^j}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial x^i}\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + $$
$$+ \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^b}\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^k} Y^k + \Gamma^i_{pj}\frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^r} Y^r \Big)\frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^c}\frac{\partial}{\partial x^s}. \tag{7.5}$$

Відзначимо, що, диференціюючи тотожність $\dfrac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^b} = \delta^c_b$ за змінною x^j, одержуємо

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^c}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^b} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^b}\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^j} = 0.$$

З урахуванням цього, (7.5) можна записати у вигляді

$$\tilde{\nabla_X} Y = X^k\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\delta^j_k \delta^s_i + \Gamma^i_{pj}\delta^j_k\delta^s_i\delta^p_r y^r\right)\frac{\partial}{\partial x^s} =$$
$$= X^k\left(\frac{\partial Y^s}{\partial x^k} + \Gamma^s_{pk} Y^p\right)\frac{\partial}{\partial x^s} = \nabla_X Y.$$

Зокрема, сім'я $\mathcal{K}$ не залежить від вибору карти. Крім того, співвідношення (7.3) показують, що ця сім'я визначає гладке векторне поле $\nabla_X Y$ на M, причому виконані співвідношення (6.7).

Покажемо, нарешті, що задання оператора Кошуля на многовиді M рівносильне фіксації афінної зв'язності в розшаруванні BM. Нехай ∇ — оператор Кошуля афінної зв'язності ∇ на M, θ — форма цієї зв'язності. Нехай $p \in BM$ — довільний елемент. Фіксуємо локальну карту (U, φ) на M з координатами $\{\, x^1, \dots, x^n \,\}$ в околі точки $m = \pi(p)$. Нехай $W = \pi^{-1}(U)$. Як ми знаємо (п.1), область U є областю локальної тривіальності розшарування $B(M)$, а отже, у ній визначений локальний переріз $s : U \to W$ цього розшарування. Через транзитивність дії структурної групи в шарі, без обмеження загальності можна вважати, що цей переріз проходить через точку p. Нехай $s(U) = \{ e_1, \dots, e_n \}$. Оскільки e_j — векторні поля на U, за основною теоремою тензорного аналізу

$$d(e_j)^i + (e_j)^k \theta^i_k = (e_j)^i_{,k} \omega^k.$$

Зокрема, у точках з $s(U)$, $(e_j)^k = \delta^k_j$, а отже,

$$\theta^i_j = (e_j)^i_{,k} \omega^k.$$

З іншого боку, згідно з формулою (5.1), $\theta^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$. Порівнюючи значення цих виразів на горизонтальних векторах тривіальної зв'язності розшарування $B(U)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\gamma^i_{jk}(p) &= e^i\big(\nabla_{e_k}(e_j)\big)(p) = \tilde{y}^i_a(p) e^a_0 \left(\nabla_{y^b_k(p)e^0_b}(y^c_j(p)e^0_c)\right) = \\ &= y^b_k(p) y^c_j(p) \tilde{y}^i_a(p) \left(\nabla_{\dfrac{\partial}{\partial x^b}} \left(\frac{\partial}{\partial x^c}\right)\right)^a \big(\pi(p)\big) = \\ &= \Gamma^a_{cb}\big(\pi(p)\big) y^b_k(p) y^c_j(p) \tilde{y}^i_a(p).\end{aligned}$$

Отже, з урахуванням співвідношень (3.7) і (3.9),

$$\begin{aligned}\theta^i_j &= \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k = \tilde{y}^i_k dy^k_j + (\Gamma^a_{cb} \circ \pi) y^b_k y^c_j \tilde{y}^i_a \tilde{y}^k_h dy^h = \\ &= \tilde{y}^i_k dy^k_j + (\Gamma^a_{bc} \circ \pi) y^b_j \tilde{y}^i_a dy^c.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Таким чином, форма зв'язності однозначно визначається узагальненими коефіцієнтами Крістоффеля, а отже, і оператором Кошуля. Більше того, нехай на гладкому многовиді M заданий оператор Кошуля ∇, $\{ \Gamma^i_{jk} \}$ — відповідні узагальнені коефіцієнти Крістоффеля у деякій карті. Визначимо у відповідній області $W \subset BM$ 1-форму

$$\theta_W = \big(\tilde{y}^i_k dy^k_j + (\Gamma^a_{bc} \circ \pi) y^b_j \tilde{y}^i_a dy^c\big) E^j_i$$

зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Безпосередня перевірка показує, що ця форма не залежить від вибору карти на M, а отже, глобально визначає 1-форму θ на BM за формулою $\theta_p = (\theta_W)_p$, причому форма θ є формою зв'язності, що породжує заданий оператор Кошуля. Доведена

Теорема 5.9. *([15, стор. 331]) Задання афінної зв'язності на гладкому многовиді M рівносильне заданню оператора Кошуля, або, іншими словами, відображення $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, що має властивості:*

$$\begin{aligned} &1)\ \nabla_{fx+gy} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z; \\ &2)\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z; \\ &3)\ \nabla_X(fy) = X(f)Y + f\nabla_X Y; \end{aligned}$$

$\big(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),\ f, g \in C^\infty(M)\big)$. □

Компоненти тензорів скруту й кривини. Обчислимо компоненти тензорів скруту й кривини афінної зв'язності в заданій карті (U, φ) з координатами $\{\, x^1, \ldots, x^n \,\}$ на многовиді M. Нехай $s : U \to \pi^{-1}(U)$ — локальний переріз розшарування $B(M)$ над координатним околом, що співставляє точці $m \in U$ натуральний репер $p_0 = (m, e_1^0, \ldots, e_n^0)$; $\quad e_k^0 = \dfrac{\partial}{\partial x^k} \quad (k = 1, \ldots, n)$. Як і раніше, уведемо позначення $\hat{S}^i_{jk} = S^i_{jk} \circ s$ і $\hat{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} \circ s$ для компонентів тензорів S і R, відповідно, у натуральному репері p_0. Помітимо, що в натуральному репері $y^i_j = \delta^i_j$, і, згідно з (6.7) і (6.9), (5.1) і (7.6),

$$\omega^i_j(p_0) = 0; \qquad \omega^i(p_0) = dy^i; \qquad \theta^i_j(p_0) = \big(\Gamma^i_{jk} \circ \pi(p_0)\big) dy^k. \quad (7.7)$$

Згідно із цими співвідношеннями, звуження структурних рівнянь

(5.6) на зазначений локальний переріз набуває вигляду:

$$\begin{aligned}&1)\ 0=-(\Gamma^i_{[jk]}\circ\pi)dy^k\wedge dy^j+\frac{1}{2}S^i_{jk}dy^j\wedge dy^k;\\&2)\ d(\Gamma^i_{jk}\circ\pi)\wedge dy^k=-\left(\Gamma^i_{m[k}\circ\pi\right)\left(\Gamma^m_{|j|l]}\circ\pi\right)dy^k\wedge dy^l+\\&\quad+\frac{1}{2}R^i_{jkl}dy^k\wedge dy^l.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Розглянемо співвідношення (7.8_1). Очевидно, його можна переписати у формі

$$\pi^*\big((\Gamma^i_{[jk]})dx^k\wedge dx^j-\frac{1}{2}(S^i_{jk}\circ s)dx^j\wedge dx^k\big)=0.$$

Через ін'єктивність відображення π^* ця тотожність на многовиді BM рівносильна такій тотожності на многовиді M:

$$\Gamma^i_{[jk]}dx^k\wedge dx^j-\frac{1}{2}(S^i_{jk}\circ s)dx^j\wedge dx^k=0.$$

Через лінійну незалежність базисних форм одержуємо $\frac{1}{2}\hat{S}^i_{jk}+\Gamma^i_{[jk]}=0$, і, таким чином,

$$\hat{S}^i_{jk}=-(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}).\tag{7.9}$$

Розглянемо тепер співвідношення (7.8_2). Враховуючи, що $d\Gamma^i_{jk}=\dfrac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}dx^l$, отримаємо

$$d(\Gamma^i_{jk}\circ\pi)=d(\pi^*\Gamma^i_{jk})=\pi^*(d\Gamma^i_{jk})=\pi^*\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}dx^l\right)=\frac{\partial(\Gamma^i_{jk}\circ\pi)}{\partial y^l}dy^l.$$

Отже, (7.8_2) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\Gamma^i_{jk}\circ\pi)}{\partial y^l}-\frac{\partial(\Gamma^i_{jl}\circ\pi)}{\partial y^k}\right)dy^l\wedge dy^k=\\&=-\left(\Gamma^i_{m[k}\circ\pi\right)\left(\Gamma^m_{|j|l]}\circ\pi\right)dy^k\wedge dy^l+\frac{1}{2}R^i_{jkl}dy^k\wedge dy^l.\end{aligned}$$

Через ін'єктивність оператора π^* ця тотожність на многовиді BM рівносильна такій тотожності на многовиді M:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}\right)dx^l\wedge dx^k=-\Gamma^i_{m[k}\Gamma^m_{|j|l]}dx^k\wedge dx^l+\frac{1}{2}(R^i_{jkl}\circ s)dx^k\wedge dx^l.$$

З урахуванням лінійної незалежності базисних форм, звідси одержуємо

$$\hat{R}^i_{jkl}=\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl}-\Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk}. \tag{7.10}$$

Ці співвідношення дають вираз компонентів тензора $\mathcal{R}$ у заданій карті. Відповідні компоненти тензора R відрізняються від них лише знаком.

Тотожності Біанкі. Перейдемо до виведення фундаментальних тотожностей, що пов'язують тензори скруту, кривини і їх коваріантні диференціали. З урахуванням (6.2), маємо $\nabla S^i_{jk} = S^i_{jk,r}\omega^r$. Підставимо це співвідношення в (5.10):

$$\big(S^i_{jk,r}+(S^i_{t[k}S^t_{rj]}-R^i_{[rjk]})\big)\omega^r\wedge\omega^j\wedge\omega^k=0.$$

З урахуванням лінійної незалежності базисних форм, маємо

$$S^i_{[jk,r]}+(S^i_{t[k}S^t_{rj]}-R^i_{[rjk]})=0.$$

Відмітимо, що це — тотожність на многовиді BM. Щоб знайти відповідну їй тотожність на многовиді M, перейдемо від величин $t^{j_1\ldots j_r}_{i_1\ldots i_r}(p)\quad(p=(m,e_1,\ldots,e_n)\in BM)$ до відповідних компонентів тензора $(t_m)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}=t_m(e_{i_1},\ldots e_{i_r},e^{j_1},\ldots,e^{j_s})$ у репері p:

$$\underset{jkr}{\rightarrow}\mathfrak{S}\big\{\nabla_{e_r}(S)(e_j,e_k)+S\big(S(e_r,e_j)e_k\big)-R(e_j,e_k)e_r\big\}=0.$$

Тут і надалі символ $\underset{\alpha\beta\gamma}{\rightarrow}\mathfrak{S}$ означає симетризацію за символами α,β,γ. Нехай $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ — довільні векторні поля. Розкладемо їх значення в точці m за репером p: $X_m = X^j(p)e_j$,

$Y_m = Y^k(p)e_k$, $Z_m = Z^r(p)e_r$. З урахуванням лінійності тензора за своїми аргументами, маємо

$$\underset{XYZ}{\overrightarrow{\mathfrak{S}}}\{\nabla_{Z_m}(S)(X_m, Y_m)+ \\ + S_m\big(S_m(Z_m, X_m)Y_m\big) - R_m(X_m, Y_m)Z_m\} = 0,$$

і, за рахунок довільності вибору $m \in M$,

$$\underset{XYZ}{\overrightarrow{\mathfrak{S}}}\left\{\nabla_Z(S)(X,Y) + S\big(S(Z,X)Y\big) - R(X,Y)Z\right\} = 0; \quad (7.11)$$

$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$. Ця тотожність називається *тотожністю Річчі*, або *першою тотожністю Біанкі.* У важливому окремому випадку, коли тензор скруту дорівнює нулю (зв'язність без скруту), вона набуває класичного вигляду

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \quad (7.12)$$

Вправа 5.29. Довести, що перша тотожність Біанкі на многовиді M рівносильна додатковій тотожності Біанкі $D\Omega = \Phi\omega$ на многовиді BM.

Має місце тотожність

$$\underset{XYZ}{\overrightarrow{\mathfrak{S}}}\big\{\nabla_X(R)(Y,Z)W + R\big(S(X,Y),Z\big)W\big\} = 0; \quad (7.13)$$

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Ця тотожність називається *(другою) тотожністю Біанкі.* У важливому частковому випадку зв'язності без скруту вона набуває класичного вигляду

$$\nabla_X(R)(Y,Z)W + \nabla_Y(R)(Z,X)W + \nabla_Z(R)(X,Y)W = 0. \quad (7.14)$$

Вправа 5.30. Довести, що друга тотожність Біанкі на многовиді M рівносильна тотожності Біанкі $D\Phi = 0$ на многовиді BM.

Використовуючи (6.2) і (7.7), можна обчислити компоненти коваріантного диференціала довільного тензора t типу (r,s) у заданій карті. Нехай $\widehat{t} = \{\, t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} \}$ — відповідна до тензора t сім'я функцій на многовиді BM. Тоді

$$\hat{t}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\frac{\partial \hat{t}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\partial x^k} - \hat{t}^{j_1\dots j_s}_{pi_2\dots i_r}\Gamma^p_{i_1k} - \dots\dots - \hat{t}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}p}\Gamma^p_{i_rk} +$$
$$+\,\hat{t}^{pj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_1}_{pk} + \dots + \hat{t}^{j_1\dots j_{s-1}p}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_s}_{pk}.$$

Тотожність Річчі.

$$[\nabla_X,\nabla_Y](t)(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) =$$
$$= -\nabla_{S(X,Y)}(t)(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) -$$
$$-\sum_{k=1}^{r} t(X_1,\dots,X_{k-1},R(X,Y)X_k,X_{k+1},\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) +$$
$$+\sum_{k=1}^{s} t(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^{k-1},R^*(X,Y)u^k,u^{k+1},\dots,u^s),$$

де $R^*(X,Y)$ — оператор, контраградієнтний оператору $R(X,Y)$. Ця тотожність називається *тотожністю Річчі.*

Тензор афінної деформації.

Нехай (P,M,π,G) — головне розшарування, θ — форма зв'язності на P, і $\tilde{\theta}$ — деяка 1-форма на P зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ структурної групи. Розглянемо 1-форму $\zeta = \tilde{\theta} - \theta$ зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$.

Вправа 5.31. Довести, що $\tilde{\theta}$ — форма зв'язності тоді й тільки тоді, коли:

$$\begin{aligned} &1)\zeta \text{ — горизонтальна форма;}\\ &2)\zeta\circ(R_g)_* = \mathrm{Ad}(g^{-1})\circ\zeta. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Нехай тепер M — гладкий многовид, $B(M)$ — головне розшарування реперів над M.

Теорема 5.10. *([15, стор. 338]) Задання на многовиді BM 1-форми ζ зі значеннями в алгебрі Лі $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, що має властивості (8.1), рівносильне заданню на многовиді M тензора T типу (1,1).*

Виразимо тензор афінної деформації мовою альтернативного визначення зв'язності.

Теорема 5.11. *([15, стор. 341]) У прийнятих позначеннях*

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = T(X,Y); \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{8.2}$$

Наслідок. *Сукупність усіх (афінних) зв'язностей на гладкому многовиді M має природню структуру (нескінченновимірного) афінного простору, асоційованого лінійному простору $\mathcal{T}^1_2(M)$ тензорних полів типу (2,1) на многовиді M. Відповідна операція додавання вектора і точки ([10],гл.3, п.1) визначаєтьcя формулою $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, де T — тензор афіної деформації від зв'язності ∇ до зв'язності $\tilde{\nabla}$.* □

Наслідок. *Нехай $\tilde{\nabla} = \nabla + T$. Тоді тензори скруту зв'язностей $\tilde{\nabla}$ і ∇ на многовиді M пов'язані співвідношенням*

$$\tilde{S}(X,Y) - S(X,Y) = T(X,Y) - T(Y,X) \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{8.4}$$

Зокрема, дві зв'язності на M мають однаковий скрут тоді й тільки тоді, коли їх тензор афінної деформації симетричний за коваріантними аргументами.

Наслідок. *На всякому многовиді M існує зв'язність без скруту.*

Вправа 5.32. Показати, що компоненти тензора афінної деформації від зв'язності $\tilde{\nabla}$ до зв'язності ∇ обчислюються за формулою

$$\hat{T}^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{kj} - \Gamma^i_{kj}. \tag{8.5}$$

Паралелізм і геодезичні. Нехай (M,∇) — простір афінної зв'язності. Тензорне поле $T \in \mathcal{T}^s_r(M)$ називається *паралельним*, або *коваріантно постійним*, якщо $\nabla T = 0$.

Нехай $T \in \mathcal{T}_r^s(M)$ — паралельне тензорне поле. Згідно з (6.2), це рівносильне тому, що система $\widehat{T} = \{\, T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \,\}$ функцій, що представляють на многовиді BM тензорне поле T, задовольняє системі Пфаффа

$$\begin{gathered} dt^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} - T^{j_1 \dots j_s}_{k i_2 \dots i_r} \theta^k_{i_1} - \ldots - T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_{r-1} k} \theta^k_{i_r} + \\ + T^{k j_2 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \theta^{j_1}_k + \ldots + T^{j_1 \dots j_{s-1} k}_{i_1 \dots i_r} \theta^{j_s}_k = 0. \end{gathered} \tag{9.1}$$

Помітимо, що ця система Пфаффа, загалом кажучи, не є цілком інтегрованою. Саме, диференціюючи її зовнішньо з урахуванням (5.6), знаходимо, що система (9.1) цілком інтегрована тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{gathered} T^{j_1 \dots j_s}_{k i_2 \dots i_r} R^k_{i_1 ab} + \ldots + T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_{r-1} k} R^k_{i_r ab} - \\ - T^{k j_2 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} R^{j_1}_{kab} - \ldots - T^{j_1 \dots j_{s-1} k}_{i_1 \dots i_r} R^{j_s}_{kab} = 0. \end{gathered} \tag{9.2}$$

Проте, виявляється, що ця система Пфаффа має досить багато одновимірних інтегральних многовидів. Щоб уточнити це твердження, виберемо довільну (кусково-) гладку криву $\gamma : I \to M$, $\gamma(t_0) = m$, задану в даній карті (U, φ) рівняннями $x^i = x^i(t), \quad i = 1, \dots, n$, і введемо Тензорне поле $T \in \mathcal{T}_r^s(M)$ називається *паралельним уздовж кривої* γ, якщо

$$\forall \tau \in I \implies \nabla_{\dot{\to}\gamma(\tau)} T = 0,$$

де $\xi = \dot{\to} \gamma(\tau) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=\tau} \gamma(t)$.

Теорема 5.12. *([15, стор. 345]) Для кожної (кусково-) гладкої кривої $\gamma : I \to M$ такої, що $\gamma(t_0) = m$ і для будь-якого тензора $T_0 \in (\mathcal{T}_r^s)_m(M)$ існує єдина сім'я T_γ тензорів, паралельних уздовж γ така, що $T_{\gamma(t_0)} = T_0$.* □

Теорема 5.13. *([15, стор. 346]) Для будь-якої кусково-гладкої кривої γ з початком у точці m на многовиді M існує єдина горизонтальна крива $\gamma^\#$ з початком у довільній точці $p \in \pi^{-1}(m)$, що проектується в криву γ.* □

Крива $\gamma^{\#}$, що має зазначені властивості, називається *горизонтальним ліфтом кривої* γ *через точку* p.

У термінах горизонтального ліфта кривих можна одержати нове, більш зручне визначення паралельного переносу уздовж кривої і більш наочну інтерпретацію коваріантної похідної. Нехай $\gamma : I \to M$ — кусково-гладка крива на многовиді M; $\gamma(I) = \{\, m_t \mid t \in I \,\}$; $\gamma^{\#} : I \to BM$ — її горизонтальний ліфт; $\gamma^{\#}(I) = \{\, p_t \mid t \in I \,\}$. Тоді

$$\Pi_{m_0 m_t} = p_t \circ p_0^{-1}. \tag{9.6}$$

Нехай тепер $m \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X_m \neq 0$, $T \in \mathcal{T}^s_r(M)$, γ — інтегральна крива поля X з початком у точці m, тобто $m_0 = m$. Тоді $\gamma^{\#}$ — інтегральна крива поля $X^{\#}$. З урахуванням (9.6), маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{(\Pi_{m_0 m_t})^{-1} T_{m_t} - T_{m_0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(p_0 \circ p_t^{-1}) T_{m_t} - T_{m_0}}{t} = \\
&= p_0 \left(\lim_{t\to 0} \frac{p_t^{-1} T_{m_t} - p_0^{-1} T_{m_0}}{t} \right) = p_0 \left(\lim_{t\to 0} \frac{\widehat{T}_{p_t} - \widehat{T}_{p_0}}{t} \right) = \\
&= p_0\big(X^{\#}_{p_0}(\widehat{T}) \big) = (\nabla_X T)_m.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$(\nabla_X T)_m = \lim_{t\to 0} \frac{(\Pi_{m_0 m_t})^{-1} T_{m_t} - T_{m_0}}{t}; \qquad m \in M.$$

Це — найбільш наочне визначення коваріантної похідній, що пояснює зміст даного терміну. Крива $\gamma : I \to M$ називається *геодезичною*, якщо сім'я векторів $\dot{\to} \gamma = \{ \dot{\to} \gamma_s = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \gamma(t) \mid s \in I \}$ паралельна уздовж γ.

Припустимо, що в деякій карті крива γ задається системою рівнянь $x^i = x^i(t); \quad i = 1, \ldots, n$. Тоді $\dot{\to} \gamma_s = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=s} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Оскільки, згідно з (9.3), умова паралельності сім'ї векторів $X_\gamma = \hat{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ уздовж кривої γ задається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d\hat{X}^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \hat{X}^j \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{9.6}$$

крива γ є геодезичною тоді й тільки тоді, коли її рівняння є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}. \tag{9.7}$$

Це — нормальна система диференціальних рівнянь. З теореми існування і однозначності розв'язку задачі Коші випливає, що задача Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt}; \\ x^i(0) = x^i_0; \\ \left.\dfrac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = X^i_0; \end{cases}$$

має єдиний розв'язок при будь-яких початкових даних. Геометрично це означає, що через будь-яку точку m з координатами $(x^1_0, \dots, x^n_0)$ многовида проходить єдина геодезична, дотичний вектор до якої у її початку збігається із заданим початковим вектором $X_0 = X^i_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$. Нижче, опираючись на зв'язок між геодезичними лініями і базисними векторними полями, ми приведемо чисто геометричне доведення цього факту.

Теорема 5.14. *([15, стор. 348]) Наступні твердження еквівалентні:*

(1) Крива $\gamma : I \to M$ — геодезична.

(2) Крива γ є проекцією інтегральної кривої деякого базисного векторного поля на многовиді BM.

(2) Горизонтальний ліфт кривої γ є інтегральною кривою деякого базисного поля на многовиді BM.

Вправа 5.33. Довести, що для будь-якої точки $m_0 \in M$ і будь-якого дотичного вектора $X_0 \in T_{m_o}(M)$ існує єдина геодезична $\gamma : I \to M$ така, що:

$$1)\ \gamma(0) = m_0; \qquad 2) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t) = X_0.$$

G-структури першого порядку на многовиді. Нехай M — гладкий многовид розмірності n, $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ — замкнена підгрупа Лі. *G-структурою на M* називається редукція головного розшарування реперів над M за підгрупою G, тобто підрозшарування $(B_G, M, \tilde{\pi}, G)$ цього головного розшарування таке, що $B_G \subset BM$ — вкладений підмноговид, $\tilde{\pi} = \pi|_{B_G}$.

Нехай (B_G, M, π, G) — G-структура на M, $\dim G = r$. Будемо припускати, що індекси $i, j, k...$ пробігають значення від 1 до n, а індекси $\alpha, \beta, \gamma...$ — значення від 1 до r. Рівняння Маурера-Картана групи Лі G мають вигляд

$$d\sigma^\alpha = -\frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma. \tag{10.1}$$

Тут $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^r\}$ — лівоінваріантні форми на G, утворюючі кобазис, дуальний базису $\{F_1, \ldots, F_r\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи Лі G. З іншого боку, як ми знаємо, рівняння Маурера-Картана групи Лі $GL(n,\mathbb{R})$ мають вигляд

$$d\pi^i_j = -\pi^i_k \wedge \pi^k_j. \tag{10.2}$$

Нехай вкладення $j : \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ задається рівняннями

$$\tilde{\pi}^i_j = a^i_{j\alpha} \sigma^\alpha, \tag{10.3}$$

де $\{a^i_{j\alpha}\}$ — константи, що визначають вкладення, $\tilde{\pi}^i_j = j^*(\pi^i_j)$. Підставляючи співвідношення (10.3) в (10.2), з урахуванням (1.1), отримаємо

$$\frac{1}{2} a^i_{j\alpha} C^\alpha_{\beta\gamma} = a^i_{k[\beta} a^k_{|j|\gamma]}. \tag{10.4}$$

Оскільки $G \subset GL(n,\mathbb{R})$, форми $\tilde{\pi}^i_j$ є не що інше як обмеження форм π^i_j на G, і тому їх можна ототожнити з формами π^i_j.

Перейдемо до розгляду простору G-структури. На ньому природно визначений базис $\{F^\flat_1, \ldots, F^\flat_r\}$ розподілу $\mathcal{V}$, Доповнимо його до базису $\{F^\flat_\alpha, Y_i\}$ модуля $\mathfrak{X}(\pi^{-1}(U))$, де $U \subset M$ — область локальної тривіальності G-структури. Нехай $\{\theta^\alpha, \omega^i\}$ — дуальний кобазис. Як відзначалося в п.5, $\sigma^\alpha = \lambda^*\theta^\alpha$. Аналогічно, $\pi^i_j = \lambda^*\omega^i_j$. Отже, $\lambda^*(\omega^i_j - a^i_{j\alpha}\theta^\alpha) = 0$. Зокрема,

$$(\omega^i_j - a^i_{j\alpha}\theta^\alpha)(F^\flat_\beta) = 0; \qquad \beta = 1, \dots, r,$$

а отже, $\omega^i_j - a^i_{j\alpha}\theta^\alpha$ — горизонтальні форми на B_G. За лемою 8.1,

$$\omega^i_j = a^i_{j\alpha}\theta^\alpha + \tilde{b}^i_{jk}\omega^k, \tag{10.5}$$

де $\{\,\tilde{b}^i_{jk}\,\}$ — деякі локально задані на B_G гладкі функції. Підставимо (10.5) у першу групу структурних рівнянь головного розшарування реперів (див. (3.10)):

$$d\omega^i = -a^i_{j\alpha}\omega^j \wedge \theta^\alpha + \frac{1}{2}b^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{10.6}$$

де $b^i_{jk} = \tilde{b}^i_{jk} - \tilde{b}^i_{kj}$. Крім того, згідно з (5.3_2),

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \theta^a_j \wedge \omega^j. \tag{10.7}$$

Рівняння (10.6) і (10.7) називаються *структурними рівняннями G-структури*, а величини b^i_{jk} визначають так званий *перший структурний об'єкт G-структури*. Далі, продиференціюємо зовнішньо співвідношення (10.6) з урахуванням (10.4):

$$(\Delta b^i_{jk} + 2a^i_{[j|\alpha|}\theta^\alpha_{k]}) \wedge \omega^j \wedge \omega^k + b^i_{r[l}b^r_{jk]}\omega^l \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0, \tag{10.8}$$

де $\Delta b^i_{jk} = db^i_{jk} + (b^r_{jk}a^i_{r\beta} - b^i_{rk}a^r_{j\beta} - b^i_{jr}a^r_{k\beta})\theta^\beta$. Розкладаючи форму $\Delta b^i_{jk} + 2a^i_{[j|\alpha|}\theta^\alpha_{k]}$ за базисом $\{\,\theta^\alpha, \omega^i\,\}$, з урахуванням лінійної незалежності базисних форм і леми 8.1, переконуємося, що ця форма горизонтальна:

$$\Delta b^i_{jk} + 2a^i_{[j|\alpha|}\theta^\alpha_{k]} = b^i_{jkl}\omega^l, \tag{10.9}$$

де $\{\,b^i_{jkl}\,\}$ — деякі локально задані на B_G гладкі функції. Функції $\{\,b^i_{jk}, b^p_{qsl}\,\}$ визначають *другий структурний об'єкт G-структури*. Нарешті, підставляючи (10.9) в (10.8), з урахуванням лінійної незалежності базисних форм, отримаємо тотожність

$$b^i_{[jkl]} + b^i_{r[j}b^r_{kl]} = 0.$$

Ця тотожність називається *тотожністю Біанкі-Картана.*

Значення G-структур на многовидах у диференціальній геометрії відзначаються тим, що задання тензорної структури (тобто системи тензорних полів) на многовиді часто буває рівносильне заданню деякої G-структури на цьому многовиді. У цьому випадку вивчення геометрії тензорної структури на многовиді зводиться до вивчення чисто геометричного об'єкта — простору розшарування відповідної G-структури. Відзначимо, що, оскільки G-структура є головним розшаруванням реперів (спеціального типу), уся інформація, отримана нами в цій главі для головного розшарування реперів, залишається слушною й для довільної G-структури. Більше того, всяка зв'язність на G-структурі канонічно поширюється до зв'язності на всьому головному розшаруванні реперів, тобто до афінної зв'язності на самому многовиді, породжуючи тим самим апарат коваріантного диференціювання на цьому многовиді.

ТЕМА 6

РІМАНОВІ ТА ПСЕВДОРІМАНОВІ ПРОСТОРИ

Псевдорімановою структурою на гладкому многовиді M називається поле двічі коваріантного симетричного тензора g на цьому многовиді, що є невиродженою білінійною формою на модулі $\mathfrak{X}(M)$. Тензор g називається також *метричним тензором*, або *псевдорімановою метрикою*, а пара (M, g) — *псевдорімановим многовидом*. Гладке відображення $f : M_1 \to M_2$ псевдоріманового многовиду (M_1, g_1) на псевдорімановий многовид (M_2, g_2) називається *ізометричним*, якщо $f^*(g_2) = g_1$. Ізометричний дифеоморфізм називається *ізометрією*.

Очевидно, задання псевдоріманової структури g на M канонічно породжує задання псевдоевклідової структури g_m у дотичному просторі $T_m(M)$ у кожній точці многовида M. Якщо (M, g) — зв'язний многовид, то індекс псевдоевклідової структури g_m (тобто її негативний індекс інерції) не залежить від вибору точки $m \in M$. Це число називається *індексом псевдоріманової структури*. Псевдоріманова структура індексу 0 (тобто додатньовизначена білінійна форма g) називається *рімановою структурою*, а структура індексу 1 — *лоренцевою структурою*.

Теорема 6.1. *На кожному n-вимірному гладкому многовиді M існує ріманова структура.*

Вправа 6.1. Довести цю теорему, використовуючи розбиття одиниці, за допомогою якого склеюються стандартні евклідові структури, задані в кожній карті на многовиді (див., наприклад, [15, стор. 365]).

Вправа 6.2. Довести цю теорему, використовуючи теорему вкладення Уітні і обмеження стандартного скалярного добутку евклідового простору на дотичний простір в кожній точці вкладеного многовида.

Теорема 6.2. *([15, стор. 366]) На n-вимірному гладкому орієнтованому многовиді M існує лоренцева структура тоді й тільки тоді, коли його эйлерова характеристика $\chi(M) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \beta_r(M)$ дорівнює нулю.*

Теорема 6.3. *([15, стор. 367]) Задання псевдоріманової структури індексу s на n-вимірному многовиді M рівносильне заданню G-структури на цьому многовиді зі структурної групою $G = O(n, s, \mathbb{R})$, де $O(n, s, \mathbb{R})$ — псевдоортогональна група індексу s, тобто група інваріантності квадратичної форми*

$$g_0(X, X) = -\sum_{k=1}^{s}(X^k)^2 + \sum_{k=s+1}^{n}(X^k)^2; \qquad X = (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

$O(n, s, \mathbb{R})$-структура, побудована як вище на n-вимірному псевдорімановому многовиді (M, g) індексу s, називається *G-структурою, приєднаною до псевдоріманової структури g.*

Теорема 6.4. *(Леві-Чевіта) На псевдорімановому многовиді (M, g) однозначно визначена лінійна зв'язність ∇, що має такі властивості:*

$$1)\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]; \qquad 2)\ \nabla g = 0. \quad \square \tag{3.9}$$

Лінійна зв'язність ∇ на псевдорімановому многовиді (M, g), що має властивість (3.9_2), називається *метричною зв'язністью.*

Лінійна зв'язность ∇ на псевдорімановому многовиді (M, g), що задовольняє властивостям (3.9), називається *рімановою зв'язністю*, або *зв'язністю Леві-Чівіта.*

Вправа 6.3. Довести, що функція $s = s(m)$ на зв'язному псевдорімановому многовиді (M, g) є константою.

Знайдемо коефіцієнти Кристоффеля ріманової зв'язності. Для цього відмітимо, що співвідношення $\nabla g = 0$ можна записати у формі

$$X\big(g(Y, Z)\big) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Двічі зробивши циклічну перестановку аргументів у цій тотожності, та додаючи перші дві тотожності і віднімаючи третю, з урахуванням (3.9_1), одержимо

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big\{ Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + \\
+ g\big([X,Z],Y\big) + g\big([Y,Z],X\big) - g\big([X,Y],Z\big)\big\},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

звідки, у силу невиродженості метрики g, однозначно визначається векторне поле $\nabla_X Y$, а отже, і оператор Кошуля. Більше того, обмежуючись областю якої-небудь локальної карти на M, покладемо $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ і відзначимо, що ці векторні поля попарно комутирують. Справді, наприклад,

$$
[X,Y](f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0; \qquad f \in C^\infty(M).
$$

З урахуванням цього співвідношення (3.10) на цій системі аргументів набуває вигляду

$$
\Gamma_{ij,k} \equiv g_{mk}\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \tag{3.11}
$$

Функції $\Gamma_{ij,k}$ і Γ^i_{jk}, задані в координатному околі псевдоріманового многовиду, називаються *коефіцієнтами Кристоффеля першого й другого роду* ріманової зв'язності (щодо даної карти), відповідно.

Тензор кривини ріманової зв'язності називається *тензором Рімана-Кристоффеля.*

Теорема 6.5. *([15, стор. 374]) Нехай ∇ — ріманова зв'язність псевдоріманового многовиду $(M, g =< \cdot, \cdot >)$, R — тензор Рімана-Кристоффеля. Тоді мають місце такі тотожності:*

$$
\begin{aligned}
&(R1) \quad < R(X,Y)Z, W >= - < R(Y,X)Z, W >; \\
&(R2) \quad < R(X,Y)Z, W >= - < R(X,Y)W, Z >; \\
&(R3) \quad < R(X,Y)Z, W >=< R(Z,W)X, Y >; \\
&(R4) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0; \\
&(R5) \quad \nabla_X(R)(Y,Z)W + \nabla_Y(R)(Z,X)W + \nabla_Z(R)(X,Y)W = 0.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Тотожності $R1$–$R5$ називаються *стандартними властивостями симетрії* тензора Рімана-Кристоффеля. Тотожності $R4$ і $R5$ називаються *тотожністю Річчі* і *тотожністю Біанкі*, відповідно.

На просторі приєднаної G-структури тотожності $R1$–$R5$ задаються співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&1) R_{ijkl} = -R_{ijlk}; \quad 2) \; R_{ijkl} = -R_{jikl}; \quad 3) R_{ijkl} = R_{klij}; \\
&4) R_{i[jkl]} = 0; \quad 5) \; R_{ij[kl,t]} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

відповідно. Тут $R_{ijkl}(p) =< R_m(e_k, e_l)e_j, e_i >$ — коваріантні компоненти тензора R у репері $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$.

Тензор типу (3,1) на псевдорімановому многовиді (M, g) називається *алгебраїчним тензором кривини*, або ac-тензором, якщо для нього виконуються тотожності $R1$–$R4$.

У силу лінійності цих тотожностей за кожним аргументом, сукупність усіх ac-тензорів утворює підмодуль модуля $\mathcal{T}_3^1(M)$. Прикладами ac-тензорів є, у силу (4.1), тензор Рімана-Кристоффеля R, а також, як показує безпосередня перевірка, тензор

$$R_1(X,Y)Z =< Y, Z > X- < X, Z > Y. \tag{4.10}$$

У силу тотожностей $R1$–$R3$ кожний ac-тензор R можна розглядати як симетричну білінійну форму на $C^\infty(M)$-модулі $\Lambda^2(M)$, задану формулою

$$R(\alpha, \beta) = R_{ijkl}\alpha^{ij}\beta^{kl}; \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^2(M), \tag{4.11}$$

якій відповідає квадратична форма

$$Q(\alpha) = R(\alpha, \alpha) = R_{ijkl}\alpha^{ij}\alpha^{kl}; \qquad \alpha \in \Lambda^2(M).$$

Ця квадратична форма дозволяє коректно визначити відображення $k : G_M \to R$, де $G_M = \cup_{m \in M} L^2_m$ — об'єднання усіх двовимірних підпросторів усіх дотичних просторів до многовида M (двовимірних майданчиків), яке називається *2-грассманіаном* многовида M. Нехай $\sigma = L^2_m \in G_M$ — двовимірний майданчик. Відомо [10], що задання такого майданчика рівносильне заданню ненульового розкладеного бівектора $X \wedge Y \in \Lambda^2\big(T_m(M)\big)$, заданого з точністю до пропорційності. А саме,

$$Z \in L^2_m \iff Z \wedge X \wedge Y = 0.$$

Умова $X \wedge Y \neq 0$ рівносильна тому, що пара векторів $\{ X, Y \}$ утворює базис b простору L^2_m. Нехай $\tilde{b} = \{ \tilde{X}, \tilde{Y} \}$ — інший базис цього простору. Тоді $\tilde{X} \wedge \tilde{Y} = cx \wedge Y$, де c — визначник матриці переходу від базису b до базису $\tilde{b}$. Отже, $Q_m(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) = c^2 Q_m(X \wedge Y)$. З іншого боку, оскільки R_1 — також *ас*-тензор, для відповідної йому квадратичної форми Q_1 маємо $Q_1(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) = c^2 Q_1(X \wedge Y)$. Отже, число

$$k_\sigma = \frac{Q_m(X \wedge Y)}{Q_1(X \wedge Y)}$$

не залежить від вибору бівектора $X \wedge Y$, що визначає майданчик σ. Для явного знаходження цього числа відзначимо, що

$$\begin{aligned} &Q_m(X \wedge Y) = \frac{1}{4} R_{ijkl}(X^i y^j - x^j y^i)(X^k y^l - x^l y^k) = \\ &= R_{ijkl} X^i y^j x^k y^l = < R_m(X, Y)Y, X >, \\ &Q_1(X \wedge Y) = < R_1(X, Y)Y, X > = |X|^2 |Y|^2 - < X, Y >^2 \end{aligned}$$

і, таким чином,

$$k_\sigma = \frac{< R_m(X, Y)Y, X >}{|X|^2 |Y|^2 - < X, Y >^2}. \tag{4.12}$$

Цей вираз має сенс, якщо $|X|^2|Y|^2 - < X, Y >^2 \neq 0$, що, як відомо, рівносильне неізотропності майданчика σ. Наприклад, це завжди виконується для ріманових метрик.

Число k_σ називається *секційною кривиною многовида M в двовимірному напрямку σ*. Псевдорімановий многовид (M, g) називається *многовидом точково постійної кривини*, якщо величина k_σ в довільній точці $m \in M$ не залежить від вибору неізотропного майданчика σ. Якщо до того ж k_σ не залежить від вибору точки $m \in M$, многовид (M, g) називається *многовидом глобально постійної кривини*, або *просторовою формою.*

Теорема 6.6. *([15, стор. 378]) Псевдорімановий многовид $(M, g =< \cdot, \cdot >)$ є многовидом точково постійної кривини k тоді й тільки тоді, коли його тензор Рімана-Кристоффеля R має вигляд*

$$R(X,Y)Z = k\big(< Y, Z > X - < X, Z > Y\big); \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.13}$$

Теорема 6.7. *(Шура) Точкова сталість кривини зв'язного псевдоріманового многовида розмірності понад два рівносильна її глобальній сталості.*

Тензором Річчі псевдоріманового многовида (M, g) називається білінійна форма r на модулі $\mathfrak{X}(M)$, задана формулою

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}\big(Z \to R(Z,X)Y\big); \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Це означає, що якщо $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in BM$ — довільний репер многовида M, то в точці $m \in M$

$$\begin{aligned} r(X,Y) &= e^i\big(R(e_i, X)Y\big) = \\ &= g^{ij} l_{e_j}\big(R(e_i,X)Y\big) = g^{ij} < R(e_i,X)Y, e_j >, \end{aligned} \tag{4.14}$$

де $l : T_m(M) \to (T_m(M))^*$ — класичний оператор дуальності (опускання індексу), $l_X(Y) =< X, Y >$ (див. [10], стор. 39-42).

Вправа 6.4. Довести, що тензор Річчі є симетричною білінійною формою.d

Помітимо, що компоненти цієї форми, з урахуванням співвідношень (4.9),

$$r_{kl} = r(e_k, e_l) = g^{ij} < R(e_i, e_k)e_l, e_j >= g^{ij} R_{jlik} = -R^i{}_{kli},$$

і, таким чином,

$$r_{kl} = -R^i{}_{kli}. \tag{4.15}$$

У силу твердження 4.1, білінійній формі r відповідає самоспряжений ендоморфізм ric модуля $\mathfrak{X}(M)$, який отриманий з неї операцією підняття індексу та називається *ендоморфізмом Річчі*. Таким чином, за визначенням,

$$r(X, Y) =< \operatorname{ric} X, Y >=< X, \operatorname{ric} Y >; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.16}$$

Відзначимо, що з (4.14) і (4.16), у силу тотожностей $R1$–$R2$ і невиродженості метрики g, випливає таке корисне співвідношення:

$$\operatorname{ric} X = g^{ij} R(X, e_i) e_j. \tag{4.17}$$

Слід $\varkappa = \operatorname{tr}(\operatorname{ric})$ ендоморфізма Річчі називається *скалярною кривиною* псевдоріманового многовида.

Таким чином, на просторі розшарування реперів

$$\pi^* \varkappa = g^{ij} r_{ij} = r_i^i. \tag{4.18}$$

Нехай $q(X) = r(X, X)$ — квадратична форма, що відповідає білінійній формі r, $m \in M$, $\sigma = L_m^1 \subset T_m(M)$ — одновимірний підпростір. Тоді якщо $X \in \sigma$ — ненульовий вектор, то число $\varepsilon_m(X) = \frac{q_m(X)}{\|X_m\|^2}$ не залежить від вибору вектора X. Воно називається *кривиною Річчі* многовида M у точці m у напрямку σ. Відома така

Теорема 6.8. *(*Майерс*, [37]) Повний рімановий многовид, кривина Річчі якого додатна та віддідлена від нуля, компактний та має скінченну фундаментальну групу.*

Якщо число ε_m не залежить від вибору σ у кожній точці многовида M, то ε_m — функція на M, причому $r(X,X) = \varepsilon < X, X >$. Поляризуючи це співвідношення, одержимо

$$r(X,Y) = \varepsilon < X, Y >; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Таким чином, тензор Річчі в цьому випадку задовольняє співвідношенню

$$r = \varepsilon g, \tag{4.19}$$

або, що рівносильне, $\mathrm{ric} = \varepsilon\,\mathrm{id}$. Псевдорімановий многовид, який задовольняє цій умові, називається *многовидом Ейнштейна*. Уперше рівняння (4.19) було запропоновано Альбертом Ейнштейном як рівняння гравітаційного поля у вакуумі. Добре відомо [14], що якщо M складний, то $\varepsilon = \mathrm{const}$. Ця константа називається *космологічною константою* многовида M.

Прикладом многовидів Ейнштейна є простір постійної кривини. Дійсно, якщо M^n — многовид постійної кривини k, то, з урахуванням теореми 4.2,

$$R(X,Y)Z = k\big(< Y, Z > X- < X, Z > Y\big); \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Користуючись тотожністю (4.14) на просторі приєднаної G-структури (тобто в ортонормованому репері), одержимо

$$r(Y,Z) = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 < R(e_i, Y)Z, e_i >= \sum_{i=1}^{n} \big(< Y, Z >< e_i, e_i > -$$
$$- < e_i, Z >< Y, e_i > \big) = (n-1)k < Y, Z > .$$

Таким чином, M^n — многовид Ейнштейна з космологічною константою

$$\varepsilon = (n-1)k.$$

Більш докладно про многовиди Енштейна див. в [4].

ТЕМА 7

КОМПЛЕКСНІ ТА ЕРМІТОВІ СТРУКТУРИ

Нагадаємо конструкцію тензорного добутку модулів. Нехай A і B — модулі над комутативним асоціативним кільцем $\mathbb{K}$ з одиницею. Розглянемо вільну абелеву групу $A \circ B$, множиною твірних якої є множина усіх символів вигляду $a \circ b$; $a \in A, b \in B$. Її елементами є всі формальні (скінченні) суми таких символів, тобто записи вигляду $a_1 \circ b_1 + \ldots + a_N \circ b_N$; $\quad N \in \mathbb{N}$. Розглянемо її підгрупу $S \subset A \circ B$, породжену елементами вигляду $(a' + a'') \circ b - a' \circ b - \alpha'' \circ b$, $a \circ (b' + b'') - a \circ b' - a \circ b''$, $(\alpha a) \circ b - a \circ (\alpha b)$; $\quad \alpha \in \mathbb{K}$. Розглянемо абелеву групу $A \otimes B = A \circ B / S$. Її елементами є скінченні формальні суми символів вигляду $a \otimes b = (a \circ b) + S$. У ній природно вводиться структура $\mathbb{K}$-модуля із зовнішньою операцією композиції

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) \otimes b_i \left(= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \alpha b_i \right).$$

Цей $\mathbb{K}$-модуль називається *тензорним добутком* $\mathbb{K}$-модулів A і B.

Якщо A або B мають структуру модуля над яким-небудь кільцем $\mathbb{K}_1$, то $A \otimes B$ також має природню структуру $\mathbb{K}_1$-модуля. Зокрема, якщо A — алгебра, то $A \otimes B$ має природню структуру A-модуля.

Тепер перейдемо до комплексифікації лінійного простору. Нехай $A = \mathbb{C}$ — поле комплексних чисел, $B = V$ — $\mathbb{R}$-лінійний простір. Тоді $\mathbb{C}$-лінійний простір ($\mathbb{C}$-модуль) $\mathbb{C} \otimes V$ позначається V^c і називається *комплексифікацією* лінійного простору V. Його елементами, як ми вже відзначали, є записи вигляду $\sum_{k=1}^{N} z_k \otimes$

X_k; $z_k \in \mathbb{C}$, $X_k \in V$, N — довільне натуральне число. *Сумою* елементів $\sum_{k=1}^{N_1} z_k \otimes X_k$ і $\sum_{p=1}^{N_2} z_p \otimes X_p$ буде запис вигляду $\sum_{k=1}^{N_1} z_k \otimes X_k + \sum_{p=1}^{N_2} z_p \otimes X_p$, а *добутком* елемента $\sum_{k=1}^{N} z_k \otimes X_k$ на комплексне число $z \in \mathbb{C}$ — запис вигляду $\sum_{k=1}^{N} (zz_k) \otimes X_k$.

У $\mathbb{C}$-лінійному просторі V^c канонічно визначене відображення $\tau : V^c \to V^c$, що діє за формулою

$$\tau\left(\sum_{k=1}^{N} z_k \otimes X_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \overline{z_k} \otimes X_k,$$

де $z \to \overline{z}$ — звичайне комплексне спряження в полі комплексних чисел.

Вправа 7.1. Перевірте, що τ — інволютивний антиавтоморфізм $\mathbb{C}$-лінійного простору V^c, тобто бієкція, що має такі властивості:

$$\begin{aligned} &1)\tau^2 = id; \\ &2)\tau(X+Y) = \tau(X) + \tau(Y); \\ &3)\tau(zx) = \overline{z}\tau(X); \qquad z \in \mathbb{C},\ X, Y \in V^c. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Антиавтоморфізм τ називається *оператором комплексного сполучення.*

Відмітимо, що V допускає природнє вкладення j у V^c за допомогою ототожнення

$$X \equiv j(X) = 1 \otimes X; \qquad X \in V.$$

При цьому $\tau(X) \equiv \tau(1 \otimes X) = 1 \otimes X \equiv X$.

Вправа 7.2. Нехай $Y = \sum_{k=1}^{N} z_k \otimes X_k \in V^c$. Довести, що $Y \in V \iff \tau(Y) = Y$.

Якщо V — n-вимірний $\mathbb{R}$-лінійний простір, то V^c — n-вимірний $\mathbb{C}$-лінійний простір. Крім того, якщо $b = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис $\mathbb{R}$-лінійного простору V, то при зазначеному вище канонічному ототожненні елементів $e_k \in V$ з елементами $1 \otimes e_k \in V^c$ множина b є також базисом $\mathbb{C}$-лінійного простору V^c.

Вправа 7.3. (див. [7], стор. 171) Нехай $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ — базис дійсного лінійного простору V, $\{ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \}$ — базис $\mathbb{R}$-лінійного простору W. Тоді

$$\{ e_l \otimes \varepsilon_a \mid i = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, m \}$$

— базис $\mathbb{R}$-лінійного простору $V \otimes W$. □

Елементи

$$\{ 1 \otimes e_k, \sqrt{-1} \otimes e_k \mid k = 1, \ldots, n \}$$

утворюють базис $\mathbb{R}$-лінійного простору V^c, а перші n елементів цього базису утворюють базис V^c як $\mathbb{C}$-лінійного простору.

Усякий лінійний оператор $f : V \to V$ канонічно визначає $\mathbb{C}$-лінійне відображення $f^c = id \otimes f : V^c \to V^c$ за формулою

$$f^c \left(\sum_{k=1}^{n} z_k \otimes X_k \right) = \sum_{k=1}^{n} z_k \otimes f(X_k).$$

Очевидно, з урахуванням зазначеного ототожнення, $f^c\big|_V = f$, через що відображення f^c називається *поширенням за лінійністю* оператора f.

Вправа 7.4. Довести, що $\mathbb{C}$-лінійний оператор $F : V^c \to V^c$ є поширенням за лінійністю деякого $\mathbb{R}$-лінійного оператора $f : V \to V$ тоді й тільки тоді, коли

$$\tau \circ F = F \circ \tau.$$

Вправа 7.5. Довести, що $\mathbb{C}$-лінійне відображення $T : V^c \times \ldots \times V^c \to V^c$ є поширенням за лінійністю $\mathbb{R}$-лінійного відображення $T : V \times \ldots \times V \to V$ тоді й тільки тоді, коли

$$\tau \circ T(X_1, \ldots, X_r) = T(\tau X_1, \ldots, \tau X_r); \qquad X_1, \ldots, X_r \in V^c. \quad \square$$

Існує інше визначення комплексифікації, еквівалентне наведеному. Нехай V — $\mathbb{R}$-лінійний простір. Уведемо в множині $V \times V$ такі операції:

1) Додавання. Якщо $X_1 = (A_1, B_1)$, $X_2 = (A_2, B_2)$ — елементи з $V \times V$, то пара $(A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ називається їх *сумою* і позначається $X_1 + X_2$.

2) Множення на комплексне число. Якщо $X = (A, B) \in V \times V$, $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, то покладемо $zx = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$. Назвемо елемент zx *добутком* комплексного числа z на елемент X.

Безпосередньо перевіряється, що тим самим у множині $V \times V$ уводиться структура $\mathbb{C}$-лінійного простору $\tilde{V}^c$, природно ізоморфного $\mathbb{C}$-лінійному простору V^c. Природній ізоморфізм $\varphi : V^c \to \tilde{V}^c$ зіставляє елементу $\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k + \sqrt{-1}\beta_k)X_k \in V^c$ пару $(A, B) \in \tilde{V}^c$, де $A = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k$, $B = \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k$. При цьому ізоморфізмі описаному вище вкладенню $j : V \subset V^c$ відповідає вкладення $\tilde{j} : V \subset \tilde{V}^c$, задане формулою

$$\tilde{j}(X) = (X, 0); \qquad X \in V,$$

операторові τ комплексного сполучення — оператор $\tilde{\tau} : \tilde{V}^c \to \tilde{V}^c$, заданий формулою

$$\tilde{\tau}(X, Y) = (X, -Y); \qquad X, Y \in V,$$

а $\mathbb{C}$-лінійному операторові $f^c = id \otimes f$ — $\mathbb{C}$-лінійний оператор $\tilde{f}^c : \tilde{V}^c \to \tilde{V}^c$, заданий формулою

$$\tilde{f}^c(X, Y) = (fx, fy); \qquad X.Y \in V.$$

Нехай V — комплексний лінійний простір. Його можна розглядати як дійсний лінійний простір V^R (що називається *уречевленням* простору V), у якому заданий $\mathbb{R}$-лінійний ендоморфізм $J_0 : V^R \to V^R$ за формулою $J_0(X) = \sqrt{-1}X; \quad X \in V^R$. Цей ендоморфізм дозволяє повністю відновити в V структуру комплексного лінійного простору. А саме, якщо $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, $X \in V$, то

$zx = \alpha X + \beta J_0(X)$. Крім того, ендоморфізм J_0 антиінволютивний, тобто $J_0^2 = -id$.

Нехай тепер V — дійсний лінійний простір.

Комплексною структурою в V називається ендоморфізм $J : V \to V$, такий, що

$$J^2 = -id.$$

Інакше кажучи, комплексна структура — це антиінволютивний автоморфізм дійсного лінійного простору.

Фіксація комплексної структури в V канонічно визначає в V структуру комплексного лінійного простору (тобто $\mathbb{C}$-модуля). Дійсно, якщо $X \in V$, $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, то покладемо

$$zx = \alpha X + \beta(JX). \tag{1.2}$$

Вправа 7.6. Перевірте, що при цьому виконуються всі 8 аксіом $\mathbb{C}$-лінійного простору, який будемо позначати тим же символом V. V як $\mathbb{R}$-лінійний простір є його уречевленням V^R.

Нехай розмірність $\dim_c V$ лінійного простору V як комплексного простору дорівнює n, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис цього простору, $X \in V$. Тоді $X = z^k e_k$, де $z^k = \alpha^k + \sqrt{-1}\beta^k \in \mathbb{C}$; $\quad k = 1, \dots, n$. З урахуванням (1.2), $X = \alpha^k e_k + \beta^k(Je_k)$, тобто всякий вектор $X \in V^R$ є лінійною комбінацією векторів $e_1, \dots, e_n$, $Je_1, \dots, Je_n$. З іншого боку, нехай $\lambda^k e_k + \mu^k je_k = 0, \quad \lambda^k, \mu^k \in \mathbb{R}$. Тоді, у силу (1.2), $(\lambda^k + \sqrt{-1}\mu^k)e_k = 0$, і в силу $\mathbb{C}$-лінійної незалежності векторів $e_1, \dots, e_n$, $\lambda^k + \sqrt{-1}\mu^k = 0$, а отже, $\lambda^k = \mu^k = 0; \quad k = 1, \dots, n$. Таким чином, вектори $\{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$ утворюють базис простору V як $\mathbb{R}$-лінійного простору (тобто базис простору V^R). Назвемо такий базис *дійсно адаптованим комплексній структурі*, коротше, *RA-базисом.*

Усяка комплексна структура задається в RA-базисі матрицею вигляду

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ i_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

Вправа 7.7. Довести, що скінченновимірний дійсний лінійний простір допускає комплексну структуру тоді й тільки тоді, коли він парновимірний.

Нехай J — комплексна структура в $\mathbb{R}$-лінійному просторі V. Розглянемо ендоморфізм $\sigma : V^c \to V^c$, заданий формулою

$$\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^c).$$

Очевидно, $\sigma^2 = \sigma$, тобто σ — проектор. Доповняльний до нього проектор $\overline{\sigma}$ визначиться формулою

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^c).$$

Надалі ендоморфізм J^c ми будемо позначати просто J.

Теорема 7.1. *([15, стор. 390]) Лінійний простір V^c розпадається на пряму суму власних підпросторів ендоморфізма J, які відповідають власним значенням $\sqrt{-1}$ та $-\sqrt{-1}$, тобто*

$$V^c = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}},$$

причому ендоморфізми σ і $\overline{\sigma}$ є проекторами на підпростори $D_J^{\sqrt{-1}}$ і $D_J^{-\sqrt{-1}}$, відповідно. □

Теорема 7.2. *([15, стор. 390]) Задання комплексної структури на $\mathbb{R}$-лінійному просторі V рівносильне розкладу V^c у пряму суму двох комплексно сполучених підпросторів, які є власними підпросторами цієї комплексної структури.*

Вправа 7.8. Довести, що в уведених позначеннях

$$1)\ \tau \circ \sigma = \overline{\sigma} \circ \tau, \qquad 2)\ \tau \circ \overline{\sigma} = \sigma \circ \tau.$$

Теорема 7.3. *([15, стор. 391]) Відображення $\sigma\big|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ і $\overline{\sigma}\big|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ є, відповідно, ізоморфізмом і антиізоморфізмом $\mathbb{C}$-лінійних просторів.*

Нехай V — скінченновимірний $\mathbb{R}$-лінійний простір, $\dim V = 2n$, $b = \{\, e_1, \ldots, e_n \,\}$ — його базис як $\mathbb{C}$-модуля. Розглянемо систему векторів $b_A = \{\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}} \,\}$, де $\varepsilon_a = \sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \overline{\sigma}(e_a)$; $a = 1, \ldots, n$. У силу теореми 1.3, вектори $\{\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \,\}$ утворюють базис $\mathbb{C}$-лінійного простору $D_J^{\sqrt{-1}}$, а вектори $\{\, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}} \,\}$ — базис $\mathbb{C}$-лінійного простору $D_J^{-\sqrt{-1}}$, причому, у силу леми 1.1 і твердження 1.1,

$$\tau\varepsilon_a = (\tau \circ \sigma)e_a = (\overline{\sigma} \circ \tau)e_a = \overline{\sigma}e_a = \varepsilon_{\hat{a}}.$$

Більше того, за теоремою 1.1, система векторів b_A утворює базис простору V^c, що характеризується тим, що матриця ендоморфізма J у цьому базисі має вигляд

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

Назвемо такий базис *адаптованим комплексній структурі*, коротше, *A-базисом.*

Висновок. Фіксація комплексної структури J в $2n$-вимірному дійсному лінійному просторі V^R індукує задання в V^R структури n-вимірного комплексного лінійного простору V. Кожний базис $b = \{\, e_1, \ldots, e_n \,\}$ простору V канонічно індукує два базиси:

1) RA-базис $b_{RA} = \{\, e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n \,\}$ простору V^R. Зрозуміло, з урахуванням канонічного ототожнення $X \equiv 1 \otimes X$ цей базис можна розглядати і як базис $\mathbb{C}$-лінійного простору $(V^R)^c$.

2) A-базис $b_A = \{\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}} \,\}$ $\mathbb{C}$-лінійного простору $(V^R)^c$.

Нехай тепер $b = \{\, e_1, \ldots, e_n \,\}$ і $\tilde{b} = \{\, \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n \,\}$ — два базиси простору V, $C = C_{b\tilde{b}} = (c^a_b)$ — матриця переходу від базису b до базису $\tilde{b}$, $C = A + \sqrt{-1}B$, де $A = (\alpha^a_b)$ і $B = (\beta^a_b)$ — дійсна та уявна частини матриці C, відповідно. Оскільки, з урахуванням (1.2), $\tilde{e}_a = c^b_a e_b = \alpha^b_a e_b + \beta^b_a (Je_b)$, маємо

$$J\tilde{e}_a = \alpha^b_a je_b + \beta^b_a j^2 e_b = -\beta^b_a e_b + \alpha^b_a je_b,$$

а отже,

$$C_{b_{RA}\tilde{b}_{RA}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Далі, $\tilde{\varepsilon}_a = \sigma(\tilde{e}_a) = \sigma(c_a^b e_b) = c_a^b \sigma(e_b) = c_a^b \varepsilon_b$; $\quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = \overline{\sigma}(\tilde{e}_a) = \overline{\sigma}(c_a^b e_b) = \overline{c}_a^b \overline{\sigma}(e_b) = \overline{c}_a^b \varepsilon_{\hat{b}}$, а отже,

$$C_{b_A\tilde{b}_A} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Обидві матриці, $C_{b_{RA}\tilde{b}_{RA}}$ і $C_{b_A\tilde{b}_A}$, можна трактувати як матриці того самого ендоморфізма f^c лінійного простору $(V^R)^c$, де f — ендоморфізм простору V^R, розглянутий як ендоморфізм простору V, що переводить базис b у базис $\tilde{b}$. Зокрема,

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = |\det C|^2. \tag{1.7}$$

Вправа 7.9. Довести, що фіксація комплексної структури в $\mathbb{R}$-лінійному просторі V^R канонічно визначає орієнтацію цього простору, яка складається з базисів, однаково орієнтованих з будь-яким RA-базисом. $\square$

Нехай V — дійсний лінійний простір. *Ермітовою структурою* на V називається пара $(J, g =< \cdot, \cdot >)$, де J — комплексна структура на V, g — (псевдо)евклідова структура, причому

$$< JX, JY >=< X, Y > \qquad X, Y \in V. \tag{2.1}$$

Нехай (J, g) — ермітова структура на V. Побудуємо відображення $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$, поклавши

$$\Omega(X, Y) =< X, JY >; \qquad X, Y \in V.$$

Очевидно, $\Omega(Y, X) =< Y, JX >=< JY, J^2X >= - < JY, X >= - < X, JY >= -\Omega(X, Y)$. Таким чином, Ω — зовнішня 2-форма на V. Вона називається *фундаментальною формою* структури. Її кососиметричність рівносильна тотожності

$$< JX, Y >= - < X, JY >; \qquad X, Y \in V, \tag{2.2}$$

яка, у свою чергу, рівносильна (). Очевидним наслідком цієї тотожності є таке співвідношення

$$< X, JX >= 0; \qquad X \in V. \tag{2.3}$$

Нагадаємо, що *ермітовою формою* на комплексному лінійному просторі W називається відображення $h : W \times W \to \mathbb{C}$ таке, що:

1) $h(X + Y, Z) = h(X, Z) + h(Y, Z)$;
2) $h(X, Y + Z) = h(X, Y) + h(X, Z)$;
3) $h(zx, Y) = zh(X, Y); \quad h(X, zy) = \bar{z}h(X, Y)$;
4) $h(X, Y) = \overline{h(Y, X)}; \qquad X, Y, Z \in W, \quad z \in \mathbb{C}$.

Перші дві властивості називаються *адитивністю*, третє — *полуторалінійністю*, і четверте — *ермітовістю*. Як звичайно визначаються поняття невиродженості й додатньовизначеності ермітової форми. Невироджену ермітову форму ми будемо часто називати *ермітовою метрикою*, а $\mathbb{C}$-лінійний простір, у якому фіксована ермітова метрика — *ермітовим простором*.

Теорема 7.4. *([15, стор. 395]) Задання ермітової структури $(J, < \cdot, \cdot >)$ у лінійному просторі V рівносильне заданню невиродженої ермітовой форми $h =<< \cdot, \cdot >>$ в V, розглянутому як $\mathbb{C}$-лінійний відносно J простір. Додатна визначеність форми $<< \cdot, \cdot >>$ рівносильна додатній визначеності білінійної форми $< \cdot, \cdot >$.*

Надалі, якщо не буде застережено протилежне, завжди будемо мати на увазі, що $g =< \cdot, \cdot >$ — евклідова структура, а отже, форма $<< \cdot, \cdot >>$ додатно визначена.

Нехай $(J, g =< \cdot, \cdot >)$ — ермітова структура на лінійному просторі V. Тоді у просторі $V^c = \mathbb{C} \otimes V$ природно визначена $\mathbb{C}$-білінійна форма

$$g^c\left(\sum_k z_k x_k, \sum_m w_m y_m\right) = \sum_{k,m} z_k w_m < X_k, Y_m >,$$

або, в альтернативному визначенні, $g^c(X + \sqrt{-1}Y, Z + \sqrt{-1}W) = \big(< X, Z > - < Y, W >\big) + \sqrt{-1}\big(< X, W > + < Y, Z >\big)$. Очевидно, ця форма невироджена (що випливає з її альтернативного визначення). Вона називається *розширенням за лінійністю* форми g. Надалі будемо позначати її так само, як і саму форму g.

Вправа 7.10. Довести, що власні підпростори ендоморфізма J цілком ізотропні щодо форми g.

За допомогою форми g природно вводиться ермітова форма

$$H(X, Y) = 2 < X, \tau Y >; \qquad X, Y \in V^c$$

у просторі V^c. З невиродженості форми g і оператора τ випливає невиродженість форми H. Тоді справедливе

Вправа 7.11. Довести, що власні підпростори ендоморфізма J ортогональні відносно ермітової метрики H.

Вправа 7.12. Довести, що лінійний простір V^c розпадається в ортогональну пряму суму власних підпросторів ендоморфізма J, які відповідають власним значенням $\sqrt{-1}$ та $-\sqrt{-1}$, тобто

$$V^c = D_J^{\sqrt{-1}} \overset{\perp}{\oplus} D_J^{-\sqrt{-1}}.$$

Вправа 7.13. Довести, що відображення $\sigma : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ і $\overline{\sigma} : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ є, відповідно, ізометрією й антиізометрією $\mathbb{C}$-лінійних просторів відносно ермітових метрик $<< \cdot, \cdot >>$ на V і H на $D_J^{\pm\sqrt{-1}}$.

Вправа 7.14. Довести, що ермітова метрика H додатно визначена тоді й тільки тоді, коли g — евклідова структура.

Нехай V — скінченновимірний $\mathbb{R}$-лінійний простір, $\dim M = 2n$, $b = \{e_1, \dots, e_n\}$ — його базис як $\mathbb{C}$-модуля. Застосовуючи, якщо буде треба, процедуру ортогоналізації Грама-Шмідта, можемо без обмеження загальності вважати, що b — ортонормований відносно ермітової метрики $<< \cdot, \cdot >>$ базис.

Вправа 7.15. Довести, що RA-базис, що відповідає ортонормованому базису b, ортонормований щодо метрики g.

Розглянемо систему векторів $b_A =< \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}} \}$, де: $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\overline{\sigma}(e_a)$; $a = 1, \dots, n$. У силу теореми 2.4, вектори $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ утворюють ортогональний відносно ермітової метрики H базис простору $D_J^{\sqrt{-1}}$, а вектори $\{\varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$ ортогональний щодо тієї ж метрики базис простору $D_J^{-\sqrt{-1}}$, причому, як і у випадку майже комплексних структур, $\tau\varepsilon_a = \varepsilon_{\hat{a}}$. Більше того, у силу теореми 2.3, система векторів b_A утворює ортогональний відносно тієї ж метрики базис ермітового простору (V^c, H) (норма векторів базису у такій метриці дорівнює $\sqrt{2}$). Назвемо базис такого вигляду *модифікованим A-базисом.* Модифікований A-базис відрізняється від звичайного A-базису, приєднаного до майже комплексної структури J, по-перше, обов'язковою ортогональністю, по-друге, наявністю множника $\sqrt{2}$ у визначенні своїх елементів. Під A-базисами ермітового простору завжди будемо розуміти модифіковані A-базиси.

Вправа 7.16. Довести, що модифікований A-базис ермітового простору характеризується тим, що матриці компонентів тензорів J і g мають у ньому вигляд, відповідно:

$$1)(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \qquad 2)\ (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ i_n & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

З урахуванням формули (7.16_2), операція опускання індексу $X^i \to X_i = g_{ij}X^j$ у модифікованому A-базисі запишеться так:

$X_a = g_{ab}X^b + g_{a\hat{b}}X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}}$; $X_{\hat{a}} = g_{\hat{a}b}X^b + g_{\hat{a}\hat{b}}X^{\hat{b}} = X^a$. Таким чином,

$$X_{\hat{a}} = X^{\hat{a}}; \qquad X_{\hat{a}} = X^a.$$

Аналогічно для тензорів довільного типу.

Нехай тепер $b = \{ e_1, \dots, e_n \}$ і $\tilde{b} = \{ \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \}$ — два ортонормованих базиси простору V, $C = C_{b\tilde{b}} = (c^a_b)$ — матриця переходу від базису b до базису $\tilde{b}$. Очевидно, $C \in U(n)$, і, з урахуванням співвідношення (), формула

$$C_{b_A\tilde{b}_A} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix}, \qquad C \in U(n), \tag{2.6}$$

визначає вкладення груп Лі $U(n) \subset GL(2n, \mathbb{C})$, а отже, і праву дію групи Лі $U(n)$ на множині ортонормованих базисів даної ермітової структури.

Майже комплексною структурою на многовиді M називається антиінволютивний ендоморфізм модуля $\mathfrak{X}(M)$, тобто $C^\infty(M)$-лінійне відображення $J : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ таке, що $J^2 = -id$. Ендоморфізм J називається також *структурним ендоморфізмом*. Многовид, на якому фіксована майже комплексна структура, називається *майже комплексним многовидом*. Дифеоморфізм $f : M_1 \to M_2$ майже комплексного многовида (M_1, J_1) на майже комплексний многовид (M_2, J_2) називається *голоморфним дифеоморфізмом*, якщо $f_* \circ J_1 = J_2 \circ f_*$.

Очевидно, майже комплексну структуру можна розглядати як комплексну структуру модуля $\mathfrak{X}(M)$, розглянутого як $\mathbb{R}$-лінійний простір. Як ми бачили, на цьому лінійному просторі природно індукується структура $\mathbb{C}$-лінійного простору, а отже, і структура $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$-модуля, тобто модуля над кільцем гладких комплекснозначних функцій на многовиді M. Гладкість такої функції розуміється як одночасна гладкість її дійсної та уявної частин. Для кращого розуміння цієї структури зручно скористатися альтернативним визначенням $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$ як комплексифікації $\mathbb{R}$-лінійного простору $C^\infty(M)$, відповідно до якого $\mathbb{C} \otimes C^\infty(M) = C^\infty(M) \times$

$C^\infty(M)$. Якщо $(f,g) = f + \sqrt{-1}g \in \mathbb{C} \otimes C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, то за визначенням $(f + \sqrt{-1}g)X = fx + g(JX)$.

Нехай J — майже комплексна структура на многовиді M. Вона індукує комплексні структури $J_m : T_m(M) \to T_m(M)$ у кожній точці $m \in M$. З урахуванням твердження 1.5, простір $T_m(M)$, а отже, і сам многовид M, парновимірні. Нехай $\dim M = 2n$. Число n називається *комплексною розмірністю* многовида M.

Теорема 7.5. *([15, стор. 401]) Задання майже комплексної структури на гладкому многовиді M^{2n} рівносильне заданню на цьому многовиді G-структури зі структурною групою $G = GL^R(n, \mathbb{C})$.*

Теорема 7.6. *([15, стор. 404]) Усякий майже комплексний многовид парновимірний та орієнтовний.*

Парновимірність і орієнтованість многовида є, таким чином, необхідними умовами існування на цьому многовиді майже комплексної структури. Однак ці умови не є достатніми. Наприклад, добре відомим глибоким результатом топологічного характеру є твердження про те, що $2n$-вимірна сфера S^{2n} допускає майже комплексну структуру тоді й тільки тоді, коли $n = 1$ або $n = 3$ (див. [38]). Отже, наприклад, 4-вимірна сфера, що є парновимірним орієнтованим многовидом, не допускає майже комплексної структури. Питання про знаходження необхідних і достатніх умов існування на гладкому многовиді майже комплексної структури дотепер залишається відкритим.

Поряд з головним розшаруванням BM реперів над гладким многовидом M^n можна розглянути *головне розшарування комплексних реперів* над M, яке ми позначимо $B^c(M) = \big(B^c m, M, \pi, GL(n, \mathbb{C})\big)$, де $B^c m$ — об'єднання всіх реперів просторів $(T_m(M))^c$; $m \in M$. Відповідні обґрунтування нічим не відрізняються від відповідних обґрунтувань для головного розшарування BM. Це головне розшарування особливо важливу роль відіграє для майже комплексних многовидів (M^{2n}, J), оскільки дозволяє, в одночас з побудованою вище G-структурою $B_J(M)$ розглянути ще одну визначальну G-структуру, задану мономорфізмом (f, ρ) головного розшарування $B_J(M)$ у головне розшарування $B^c(M)$, де $f : \mathcal{R} \to B^c m$ — відображення, що зіставляє реперу $(m, e_1, \ldots, e_n)$ простору $T_m(M)$ як $\mathbb{C}$-модуля відповідний A-репер, а $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{C})$ — канонічний мономорфізм груп Лі, що зіставляє матриці $C \in GL(n, \mathbb{C})$ матрицю

$$\rho(C) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{C}).$$

Як і раніше, задання цієї G-структури рівносильне завданню вихідної майже комплексної структури.

Майже ермітовою (коротше, $A\mathcal{H}$-) *структурою* на многовиді M називається пара (J, g), де J — майже комплексна структура на M, $g =< \cdot, \cdot >$ — (псевдо)ріманова метрика на M. При цьому

$$< JX, JY >=< X, Y >; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

ендоморфізм J називається *структурним ендоморфізмом.* Многовид, на якому фіксована майже ермітова структура, називається *майже ермітовим* (коротше, $A\mathcal{H}$-) *многовидом.*

Вправа 7.17. Довести, що на будь-якому майже комплексному многовиді існує майже ермітова структура.

Майже ермітову структуру можна розглядати як ермітову структуру модуля $\mathfrak{X}(M)$, розглянутого як $\mathbb{R}$-лінійний простір. Задання майже ермітової структури рівносильне заданню ермітової метрики $<< \cdot, \cdot >>$ у цьому просторі, розглянутому як $\mathbb{C}$-модуль щодо комплексної структури J.

Нехай (J, g) — майже ермітова структура на многовиді M. Вона індукує ермітові структури (J_m, g_m) у кожній точці $m \in M$.

Теорема 7.7. *([15, стор. 406]) Задання майже ермітової структури на гладкому многовиді M^{2n} рівносильне заданню на цьому многовиді G-структури зі структурною групою $G = U(n)$.*

Література

[1] Акивис М.А. *О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **7** (1975), 69–79.

[2] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.28. М., 1988.

[3] Арсеньева, О.Е., Кириченко, В.Ф. *Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей.* //Матем. сб., **189**(1), 21–44 (1998)

[4] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна, т. 1-2* Москва, Мир, 1990.

[5] Виноградов А.В., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, Москва, Наука, 1986.

[6] Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* Москва, Мир, (1964)

[7] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* Москва, Наука,(1970)

[8] Картан Э. *Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространств*, Сб.: Совеменная математика. **2**. 1933, - 72 с.

[9] Кириченко В.Ф., *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, -М., МПГУ, 2003, 495 с.

[10] Кириченко В.Ф., Арсеньева О.Е. *Введение в современную геометрию.* Тверь, ТГУ, (1997)

[11] Кириченко В. Ф. *Топологические основы дифференциальной геометрии* Тверь, ТГУ, (1999)

[12] Кириченко В.Ф. *О геометрии подмногообразий Лагранжа* Матем. заметки, **69**, No 1, 2001, P. 36-51

[13] Кириченко В.Ф. *Теория групп Ли* Тверь, ТГУ, (1995)

[14] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основания дифференциальной геометрии, т. 1-2*, Москва, Наука, 1981.

[15] Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О. *Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти* // Праці Інституту математики НАН України. Т.98. Київ, 2013. - 500с.

[16] Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.* Труды геометрического семинара, т. 1, Москва, ВИНИТИ АН СССР, 1966, с. 139-189.

[17] Лихнерович А. *Теория связностей в целом и группы голономии* Москва, ИЛ, 1960

[18] Лычагин В.И. *Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка* УМН. - 1979, т.34. Вып.1. - С.137-167.

[19] Милнор Дж. *Теория Морса.* - М.: Мир, 1964. - 184 с.

[20] Мищенко А.С. *Векторные расслоения и их применения* Москва, Наука, (1984)

[21] Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы.* Москва, Наука, (1984)

[22] Постников М.М. *Группы и алгебры Ли* Москва, Наука, (1982)

[23] Постников М.М. *Дифференциальная геометрия* Москва, Наука (1974)

[24] Пришляк О.О. *Основи сучасної топології*: Навч. посібник. - К.: Київський університет, 2006. – 79 с.

[25] Пришляк О.О. *Теорія Морса*: Навч. посібник. - К.: Київський університет, 2002. – 65 с.

[26] Радулович, Ж., Микеш, Й.*Геодезические отображения конформно-келеровых пространств.* Изв. ВУЗов. Матем. **3**(382), 50–52 (1994)

[27] Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ* Москва, Наука, 1976

[28] Синюков, Н.С.*Геодезические отображения римановых пространств.* М., "Наука", 1979.

[29] Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии* Москва, Мир,1970

[30] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* Москва, Мир, (1987)

[31] Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа. Т.1,2* Москва, Наука, (1968)

[32] Хьюзмоллер Д. *Расслоенные пространства* Москва, Мир, (1970)

[33] Blair D.E. *Contact manifolds in Riemannian geometry* Lect. Notes Math. vol.509, 1976, P.1-146

[34] Hochschild G., Serre J.-P. *Cohomology of Lie algebras.* // Ann. Math. 1953. Vol. 57, no. 2. Pp. 591-603.

[35] Levi-Civita, T. *Sulle transformationi delle equazioni dinamiche.* Ann. Math. Milano, **Ser.2, 24**, 255–300 (1894)

[36] Morse M. *The calculus of variations in the large.* -New York, 1934. –352 pp.

[37] Myers S.B. *Riemannian manifolds in the large* Duke Math. J. vol. 1, 1935, P.39-49

[38] Samelson H. *Uber die Spharen die als Gruppenraume auftreten* Comment. Math. Helv. vol 13, (1940)

[39] Saunders D. J. *The geometry of jet bundles.*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 142. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. viii+293 pp.

[40] Thomas, T.Y. *On projective and equiprojective geometries of paths.* PWC Nat. Acad. Sci. USA **11**, 198–203 (1925)

[41] Westlake, W.J. *Hermitian spaces in geodesic correspondence.* Proc. AMS, **5**(2), 301–303 (1954)

[42] Weyl, H. *Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der conformen Auffassung.* Göttingen Nachr., 99-112 (1921)

[43] Yano K. *Concircular geometry, I-V.* Proc Imp Acad, 1940, 16: 195-200, 354-360, 442-448, 505-511; 1942, 18: 446–451

[44] Yano, K. *Sur la correspondence projective entre deux espaces pseudohermitens.* C.R. Acad. Sci. Paris, **239**, 1346-1348 (1956)

Предметний покажчик

A_n – афіна група, 36
G-структура, 133
$GL(n, \mathbb{R})$ – повна лін. група, 33
$O(n, \mathbb{R})$ – ортогональна група, 33
$SL(n, \mathbb{R})$ – спец. лін. група, 33
$SO(n, \mathbb{R})$ – спец. ортог. група, 33
$T_p^*(M)$ – кодотичний простір, 13
$U(n, \mathbb{R})$ – унітарна група, 35
$\operatorname{Aut} V$ – група автоморфізмів, 42
$\operatorname{Orb} m$ – орбіта, 67
$\mathfrak{I}$ – диференціальний ідеал, 23
$\mathfrak{X}(M)$ – модуль вект. полів, 6
$\mathfrak{X}^*(M)$ – модуль 1-форм, 12
$\mathcal{T}(M)$ – тензорна алгебра, 13
алгебр. тензор кривини, 139
алгебра Грассмана, 16
алгебра Лі, 37
алгебра Лі векторних полів, 9
алгебра Лі групи Лі, 39
антизахоплення форми, 21
автоморфізм форми, 60
автоморфізм зв'язності, 94
біінваріантна метрика Хаара, 64
центр, 58
диференціал відображення, 19
диференціювання алгебри, 6
диференціювання форми, 60
дискретна дія, 71
дія групи на множині, 66
дужка Лі, 8
експонента матриці, 48
експонентне відображення, 46
ермітова структура, 151
факторгрупа групи Лі, 74
форма Кіллінга, 62
форма Маурера-Картана, 39
форма кривини зв'язності, 96
форма скруту зв'язності, 113
форма зсуву, 104
форма зв'язності, 90
фундаментальне поле, 81
геодезична, 131
гладка функція, 5
головне розшарування, 83
головне розшарування реперів, 103
гомоморфізм алгебр Лі, 43
гомоморфізм груп Лі, 43
гомоморфізм розшарувань, 84
горизонтальна форма, 97
горизонтальний ліфт, 91
горизонтальний ліфт кривої, 131
горизонтальний розподіл, 89
група Лі, 32
група ізотропії, 72
і-диференціювання, 7
інтеграл за групою Лі, 64
інтегральний многовид, 24
інволютивний розподіл, 23
коефіцієнти Кристоффеля, 138

компактна алгебра Лі, 61
компактна група Лі, 63
комплексифікація, 144
комплексна структура, 148
комутатор векторних полів, 8
корозподіл, 23
коваріантна похідна, 118
коваріантний диференціал, 117
ліва дія групи Лі, 56
лівоінваріантне поле, 38
майже ермітова структура, 157
майже компл. структура, 155
матриця Якобі, 19
метрична зв'язність, 137
напівпроста алгебра Лі, 62
неособлива матриця, 36
однопараметрична підгрупа, 45
однорідний простір, 72
оператор Кошуля, 119
особлива точка вект. поля, 25
паралелізуємий розподіл, 23
паралельне тензорне поле, 129
переріз розшарування, 85
підалгебра Лі, 44
підгрупа Лі, 44
підрозшарування, 85
плоска зв'язність, 96
похідна Лі, 29
потік, 28
повне векторне поле, 28
простір афінної зв'язності, 116
псевдогоризонт. розподіл, 88
псевдоріманова структура, 136
редуктивний простір, 99
рефлексивний модуль, 10
репер, 101
ріманова зв'язність, 137
рівняння Маурера-Картана, 40
розподіл, 23
секційна кривина, 141
система Пфаффа, 24
скалярна кривина, 142
структурна група, 83
структурні рівняння Картана, 96
структурні рівняння групи Лі, 41
структурні рівняння розшарування, 88
субмерсієя, 86
шар над точкою, 101
тензор, 10
тензор Річчі, 141
тензор Рімана-Кристоффеля, 138
тензор кривини зв'язності, 115
тензор скруту зв'язності, 114
тензорне множення, 10
тензорне поле, 13
точне зображення групи, 66
топологічна група, 55
тотожність Біанкі, 127, 139
тотожність Біанкі-Картана, 135
тотожність Річчі, 127, 139
траєкторія векторного поля, 26
транзитивна дія, 67
тривіальне розшарування, 84
універсальне накриття, 53

векторне поле, 6
вертикальний проектор, 88
вертикальний розподіл, 86
відображення Келі, 36
вільна дія, 67
захоплення векторного поля, 21
зображення групи Лі, 43
зовнішнє диференціювання форм, 17
зовнішній диференціал форми, 18
зовнішня алгебра модуля, 15
зв'язність, 89

база розшарування, 83