

# КУРС ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

В. М. Радченко

Київ 2018

# Вступ

Метою дисципліни "Теорія міри та інтеграла" є побудова основ загальної теорії міри, визначення та дослідження основних властивостей інтеграла Лебега.

Поняття міри є узагальненням таких числових характеристик множин як довжина, площа, об'єм. Ці характеристики застосовуються в різних просторах, для різних класів множин, але їх значення мають спільні риси: вони невід'ємні, і для об'єднання двох неперетинних множин дорівнюють сумі значень цих двох множин.

Як це часто робиться в математиці, замість окремого вивчення довжини, площі, об'єму тощо, ми досліджуємо загальну числову функцію множин — міру, що визначена на певному абстрактному наборі множин і задовольняє дві вказані властивості. Додатково, від міри ми вимагатимемо виконання умови  $\sigma$ -адитивності: міра об'єднання зліченної кількості неперетинних множин дорівнює сумі мір окремих множин. Ця умова дасть можливість широкого застосування граничного переходу в наших міркуваннях.

Нетривіальними проблемами є можливість визначення такої  $\sigma$ -адитивної функції на достатньо широкому класі множин, можливість продовження міри з одного класу множин на інший. Цим питанням присвячена значна частина нашої дисципліни.

На підставі поняття міри дамо означення інтеграла Лебега. Не розбираючи зараз деталі, відмітимо основну різницю інтеграла Лебега та інтеграла Рімана. Інтеграл Рімана від обмеженої функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — це границя інтегральних сум вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad \max_k(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0.$$

Інтеграл Лебега від цієї ж  $f$  за мірою  $\lambda$  дорівнює границі сум вигляду

$$\sum_{i=0}^{j-1} c_i \lambda(\{x \in [a, b] : f(x) \in (y_i, y_{i+1}]\}), \quad -M = y_0 < y_1 < \dots < y_j = M, \\ c_i \in (y_i, y_{i+1}], \quad \max_i(y_{i+1} - y_i) \rightarrow 0$$

(тут  $M$  — таке значення, при якому  $|f(x)| < M$  на  $[a, b]$ ). Ми бачимо, що для інтеграла Рімана береться розбиття множини значень аргументу, для інтеграла Лебега — множини значень функції, але при цьому треба мати означення міри  $\lambda$  відповідних множин.

Покажемо, що всі функції, інтегровні за Ріманом на  $[a, b]$ , будуть інтегровними за Лебегом (для відповідної міри  $\lambda$ ). Для інтеграла Лебега є зручні в застосуваннях граничні теореми. Також досить загальними є умови зведення кратного інтеграла Лебега до повторного.

Зручні властивості інтеграла Лебега разом із природністю його означення привели до того, що він став певним стандартом у математиці. У більшості математичних робіт при записі інтеграла неявно вважається, що взято саме інтеграл у сенсі Лебега.

Розвиток теорії міри й інтеграла Лебега був надзвичайно швидким. Перше означення міри довільної множини дав Кантор в 1883 р., у роботах Пеано (1887 р.) і Жордана (1892 р.) вивчено поняття, яке ми зараз називаємо мірою Жордана. Міра Жордана стала важливим інструментом в означенні інтеграла Рімана, проте мала істотний недолік — зліченне об'єднання вимірних за Жорданом множин не обов'язково вимірне.

Борель у своїй роботі 1898 р. зазначив недоліки міри Жордана і накреслив шляхи їх виправлення. Користуючись цими вказівками, Лебег у своїй дисертації 1902 р. побудував міру на підмножинах  $\mathbb{R}$ , навів нову конструкцію інтеграла й основні його властивості. Майже одразу почали досліджувати

інтеграл Лебега й інші математики, з'явилися важливі роботи Фубіні (1907 р.), Єгорова (1911 р.), Ріса (1912 р.), Радона (1913 р.), Каратеодорі (1918 р.). Ці публікації вже містять практично всі основні твердження нашої дисципліни.

Міра має визначатися на певному наборі множин, тому вивчення почнемо з основних класів множин (розділ 1). У розділі 2 показано, як визначається міра на достатньо багатому наборі множин, наведено деякі конкретні приклади мір. Розділ 3 присвячено дослідженню так званих вимірних функцій, саме для таких функцій має сенс означення інтеграла Лебега, що розглядається далі в розділі 4. Потім ми розглянемо функції множин, що не обов'язково є невід'ємними (розділ 5), зв'язок між кратним та повторним інтегралами (розділ 6), властивості набору інтегровних функцій як лінійного метричного простору (розділ 7).

Наприкінці кожного розділу подано кілька вправ. Як правило, у них міститься певне доповнення теоретичного матеріалу розділу.

Від читача очікується володіння основами математичного аналізу (наприклад, у межах матеріалу з [7]).

Посібник написано на основі дисципліни "Теорія міри та інтеграла", що читається студентам третього курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (обсяг лекцій — 60 годин). Автор вдячний усім колегам з кафедри математичного аналізу вказаного університету, їхні поради суттєво сприяли покращенню викладення матеріалу.

# Основні позначення

$2^X$  — набір усіх підмножин  $X$

$\forall$  — ”для всіх”

$\exists$  — ”існує”

$:=$  — ”покладемо рівним за означенням”, ”є рівним за означенням”

$|A|$  — кількість елементів множини  $A$  ( $|A| = +\infty$  для нескінченної множини  $A$ )

$A_n \uparrow A$  — послідовність множин, для якої  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$A_n \downarrow A$  — послідовність множин, для якої  $A_n \supset A_{n+1}$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  — симетрична різниця множин  $A$  і  $B$

$\mathcal{AC}([a, b])$  — множина функцій, абсолютно неперервних на  $[a, b]$

$\mathcal{B}(Y)$  — борельова  $\sigma$ -алгебра підмножин метричного простору  $Y$

$\mathcal{BV}([a, b])$  — множина функцій, що мають обмежену варіацію на  $[a, b]$

$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$ , де  $E \subset X_1 \times X_2$ ,  $x_1 \in X_1$  ( $x_1$ -переріз множини  $E$ )

$f_+(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}(x)$

$f_-(x) = -f(x)\mathbf{1}_{\{f < 0\}}(x)$

$f_n \xrightarrow{\lambda} f$  — функції  $f_n$  збігаються до функції  $f$  за мірою  $\lambda$

$f_{x_1}(x_2)$  — для  $f(x_1, x_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  це функція аргументу  $x_2 \in X_2$  при фіксованому  $x_1 \in X_1$

$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{H}_1, A_2 \in \mathcal{H}_2\}$ , де  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  — набори підмножин деяких просторів  $X_1$  і  $X_2$

$\mathcal{H} \cap B = \{A \cap B, A \in \mathcal{H}\}$ , де  $\mathcal{H}$  — набір підмножин  $X$ ,  $B \subset X$

$\mathbf{1}_A(x)$  — функція, що дорівнює 1 при  $x \in A$  та дорівнює 0 при  $x \notin A$  (індикатор множини  $A$ )

$k(\mathcal{H})$ ,  $a(\mathcal{H})$ ,  $\sigma k(\mathcal{H})$ ,  $\sigma a(\mathcal{H})$ ,  $m(\mathcal{H})$  — відповідно кільце, алгебра,  $\sigma$ -кільце,  $\sigma$ -алгебра, монотонний клас, породжені набором множин  $\mathcal{H}$

$\mathcal{K}_m$  — кільце підмножин  $\mathbb{R}^d$ , вимірних за Жорданом

$\lambda_d$  — міра Лебега в  $\mathbb{R}^d$

$\lambda_F$  — міра Лебега-Стілтєса в  $\mathbb{R}$ , породжена функцією  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$L(A, \lambda)$  — клас функцій, інтегровних на множині  $A$  за мірою  $\lambda$

$m$  — міра Жордана в  $\mathbb{R}^d$

$\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел

$\nu \ll \lambda$  — заряд  $\nu$  абсолютно неперервний відносно міри  $\lambda$

$\nu \perp \lambda$  — заряд  $\nu$  сингулярний відносно міри  $\lambda$

$\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k \leq b_k \right\}$

$\mathbb{Q}$  — множина всіх раціональних чисел

$\mathbb{R}$  — множина всіх дійсних чисел

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\mathcal{S}$  —  $\sigma$ -алгебра множин, вимірних за Каратеодорі (відносно зовнішньої міри, указаної в контексті)

$\mathcal{S}_d$  —  $\sigma$ -алгебра підмножин  $\mathbb{R}^d$ , вимірних за Лебегом

$\mathcal{S}_F$  —  $\sigma$ -алгебра підмножин  $\mathbb{R}$ , вимірних за Лебегом-Стілтєсом для функції  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$V(f, [c, d])$  — значення варіації функції  $f$  на  $[c, d]$

$\mathbb{Z}$  — множина всіх цілих чисел

Власт. — властивість

м. с. — майже скрізь

# Розділ 1

## Основні класи множин

### 1.1 Означення основних класів множин

Однією з цілей дисципліни "Теорія міри та інтеграла" є побудова теорії міри. Міра — це функція, яка кожній вимірній множині ставить у відповідність деяке число. При цьому не обов'язково кожна множина має міру (тобто є вимірною), але важливою є наявність певних властивостей. Природно вимагати, щоб об'єднання двох неперетинних вимірних множин мало міру, яка дорівнює сумі мір цих двох частин.

Таким чином, міра визначатиметься на певному класі множин, і ці класи не можуть бути цілком довільними. Ми почнемо побудову теорії з вивчення різних класів множин, на яких нижче і будуватиметься міра.

Нехай  $X$  — деяка фіксована непорожня множина, яку називатимемо універсальною. Усі класи множин нижче — це набори підмножин  $X$ . Через  $2^X$  позначимо набір усіх підмножин  $X$  (включаючи порожню множину і саму  $X$ ).

**Означення 1.1.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається *кільцем*, якщо

- 1)  $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cup B \in \mathcal{H}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B \in \mathcal{H}$ .

**Означення 1.2.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається *алгеброю*, якщо

- 1)  $\mathcal{H}$  є кільцем;
- 2)  $X \in \mathcal{H}$ .

**Приклад 1.1.**  $\mathcal{H} = 2^X$  є алгеброю.

**Приклад 1.2.** Нехай  $X$  — довільна нескінченна множина. Тоді клас усіх скінченних підмножин  $X$  є кільцем.

**Приклад 1.3.** Набір усіх скінченних підмножин  $X$  та їх доповнень є алгеброю.

**Властивості кільця.** Нехай  $\mathcal{K}$  — кільце.

1.  $\emptyset \in \mathcal{K}$ . *Доведення.* Оскільки  $\mathcal{K} \neq \emptyset$ , знайдеться  $A \in \mathcal{K}$ , і тоді  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{K}$ . □
2.  $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B \in \mathcal{K}$ . *Доведення.*  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ , різниця елементів кільця належить кільцю. □
3.  $\forall A_k \in \mathcal{K}, 1 \leq k \leq n : \bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}$ .

**Означення 1.3.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається *півкільцем*, якщо

- 1)  $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cap B \in \mathcal{H}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$  для деяких неперетинних  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ .

Відмітимо, що якщо  $\mathcal{P}$  — півкільце, то  $\emptyset \in \mathcal{P}$ . Адже для довільної множини  $A \in \mathcal{P}$  для деяких  $C_k \in \mathcal{P}$  буде  $\emptyset = A \setminus A = \bigcup_{k=1}^n C_k$ , що можливо лише для  $C_k = \emptyset$ .

Означення півкільця здається дещо штучним, але до нього додається наступний важливий приклад.

**Приклад 1.4.**  $\mathcal{P}_1 := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  є півкільцем підмножин  $\mathbb{R}$ .

**Зауваження 1.1.** У записі півінтервала  $(a, b]$  завжди вважаємо  $a \leq b$ , причому  $(a, b] = \emptyset$  при  $a = b$ .

Наступне твердження дасть нам додаткові приклади півкільць.

**Теорема 1.1.** Нехай  $\mathcal{H}_1$  — півкільце підмножин  $X_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  — півкільце підмножин  $X_2$ . Тоді клас множин

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 := \{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{H}_1, A_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

буде півкільцем підмножин  $X = X_1 \times X_2$ .

*Доведення.* Перевіримо виконання означення півкільця.

$\mathcal{H}$  — непорожній клас, оскільки знайдуться хоча б по одному елементу  $A_1 \in \mathcal{H}_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{H}_2$ , і тоді  $A_1 \times A_2 \in \mathcal{H}$ .

Нехай  $A, B \in \mathcal{H}$ ,  $A = A_1 \times A_2$ ,  $B = B_1 \times B_2$ . Стандартними міркуваннями легко перевіряється, що

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

маємо

$$A_1, B_1 \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1, \quad A_2, B_2 \in \mathcal{H}_2 \Rightarrow A_2 \cap B_2 \in \mathcal{H}_2,$$

і  $A \cap B \in \mathcal{H}$  за визначенням класу  $\mathcal{H}$ .

Також нескладно перевіряється, що

$$A \setminus B = (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)].$$

Оскільки  $\mathcal{H}_1$  та  $\mathcal{H}_2$  — півкільця, то

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{k=1}^n C_k, \quad C_k \in \mathcal{H}_1, \quad A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{i=1}^j D_i, \quad D_i \in \mathcal{H}_2,$$

і отримуємо

$$A \setminus B = \left[ \bigcup_{k=1}^n (C_k \times A_2) \right] \cup \left[ \bigcup_{i=1}^j ((A_1 \cap B_1) \times D_i) \right]. \quad (1.1)$$

Нагадаємо, що  $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{H}_1$ . За визначенням  $\mathcal{H}$ , усі декартові добутки у правій частині (1.1) належать  $\mathcal{H}$  і не перетинаються для неперетинних  $C_k$  і  $D_i$ . Таким чином,  $A \setminus B$  зображується у вигляді скінченного об'єднання елементів  $\mathcal{H}$ , означення 1.3 справджується.  $\square$

Вочевидь, ця теорема узагальнюється на клас множин

$$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_d := \{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d, A_k \in \mathcal{H}_k\}.$$

Використовуючи приклад 1.4, отримуємо такий приклад.

**Приклад 1.5.** Набір

$$\mathcal{P}_d := \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

є півкільцем підмножин  $\mathbb{R}^d$ , адже  $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_1$ .

Для розгляду міри злічених об'єднань або перетинів множин важливими є такі поняття.

**Означення 1.4.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається  $\sigma$ -кільцем, якщо

- 1)  $\forall A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1 : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B \in \mathcal{H}$ .

**Приклад 1.6.** Клас  $\mathcal{H}$  всіх скінченних і злічених підмножин  $X$  є  $\sigma$ -кільцем.

**Означення 1.5.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається  $\sigma$ -алгеброю, якщо

- 1)  $\mathcal{H}$  є  $\sigma$ -кільцем;
- 2)  $X \in \mathcal{H}$ .

**Приклад 1.7.** Клас  $\mathcal{H}$  всіх скінченних і зліченних підмножин  $X$  та їх доповнень є  $\sigma$ -алгеброю.

**Приклад 1.8.**  $\mathcal{H} = \{\emptyset, X\}$  є  $\sigma$ -алгеброю (інколи її називають тривіальною).

**Властивості  $\sigma$ -кілець.** Нехай  $\mathcal{S}$  —  $\sigma$ -кілець.

1.  $\mathcal{S}$  — кільце. *Доведення.* Треба перевірити умову 1) означення 1.1. Якщо  $A, B \in \mathcal{S}$ , то за властивістю 1) означення 1.4

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots \in \mathcal{S}. \quad \square$$

2.  $\forall A_n \in \mathcal{S}, n \geq 1: \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ . *Доведення.* Випливає із представлення

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left( \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \right). \quad \square$$

Послідовність множин  $A_n, n \geq 1$ , називається *неспадною*, якщо  $A_n \subset A_{n+1}$  для всіх  $n$ . У цьому випадку вживатимемо стандартне позначення  $A_n \uparrow$  і покладемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.2)$$

Послідовність множин  $A_n, n \geq 1$ , називається *незростаючою*, якщо  $A_n \supset A_{n+1}$  для всіх  $n$ . Тоді вживатимемо позначення  $A_n \downarrow$  і візьмемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (1.3)$$

В обох цих випадках послідовність множин називається *монотонною*.

**Означення 1.6.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається *монотонним класом*, якщо для будь-якої монотонної послідовності множин  $A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1$ , буде  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}$ .

**Теорема 1.2.** Нехай клас множин  $\mathcal{H}$  — кільце і монотонний клас одночасно. Тоді  $\mathcal{H}$  є  $\sigma$ -кілцем.

*Доведення.* Досить довести, що зліченне об'єднання множин з  $\mathcal{H}$  належить  $\mathcal{H}$ . Нехай  $A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1$ . Покладемо

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Тоді  $B_n \in \mathcal{H}$ , оскільки  $\mathcal{H}$  — кільце. Також

$$B_n \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$$

як границя зростаючої послідовності множин із монотонного класу. □

## 1.2 Породжені класи множин

Нехай  $\mathcal{H}$  — деякий непорожній клас множин. У багатьох ситуаціях треба розглядати набір множин, що, з одного боку, є замкненим відносно взяття об'єднань і різниць, а з іншого — містить усі елементи  $\mathcal{H}$ . Тоді береться породжений клас множин.

**Означення 1.7.** Кільцем, алгеброю,  $\sigma$ -кілцем,  $\sigma$ -алгеброю, монотонним класом, породженими непорожнім класом множин  $\mathcal{H}$ , називаються відповідно

$$\begin{aligned} k(\mathcal{H}) &:= \bigcap_{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H}, \mathcal{K}_\alpha \text{ — кільце}} \mathcal{K}_\alpha, & (1.4) \\ a(\mathcal{H}) &:= \bigcap_{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H}, \mathcal{A}_\alpha \text{ — алгебра}} \mathcal{A}_\alpha, & \sigma k(\mathcal{H}) &:= \bigcap_{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H}, \mathcal{K}_\alpha \text{ — } \sigma\text{-кілець}} \mathcal{K}_\alpha, \\ \sigma a(\mathcal{H}) &:= \bigcap_{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H}, \mathcal{A}_\alpha \text{ — } \sigma\text{-алгебра}} \mathcal{A}_\alpha, & m(\mathcal{H}) &:= \bigcap_{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H}, \mathcal{M}_\alpha \text{ — монотонний клас}} \mathcal{M}_\alpha. \end{aligned}$$

Розглянемо, наприклад, породжені кільця.

**Властивості породжених кілець.**

1.  $k(\mathcal{H})$  є кільцем. *Доведення.*  $k(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ ,  $\emptyset \in k(\mathcal{H})$ , оскільки кожне кільце  $\mathcal{K}_\alpha$  в (1.4) містить  $\emptyset$ . Також

$$A, B \in k(\mathcal{H}) \stackrel{(1.4)}{\iff} \forall \alpha : A, B \in \mathcal{K}_\alpha \stackrel{\mathcal{K}_\alpha\text{-кільце}}{\implies} \mathcal{K}_\alpha\text{-кільце} \forall \alpha : A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{K}_\alpha \stackrel{(1.4)}{\iff} A \cup B, A \setminus B \in k(\mathcal{H}). \quad \square$$

2.  $k(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H}$ . *Доведення.* Впливає безпосередньо з (1.4). □

3. Якщо  $\mathcal{K}$  — кільце і  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ , то  $\mathcal{K} \supset k(\mathcal{H})$ . *Доведення.* У цьому випадку  $\mathcal{K}$  буде одним з елементів перетину (1.4). □

Властивості 1–3 дають підставу називати  $k(\mathcal{H})$  мінімальним кільцем, що містить  $\mathcal{H}$ .

**Приклад 1.9.** Нехай  $\mathcal{H}$  — клас усіх одноточкових множин. Тоді  $k(\mathcal{H})$  — це набір усіх скінченних множин.

Для інших породжених класів легко отримуються аналогі властивостей 1–3.

**Теорема 1.3.** *Нехай  $\mathcal{P}$  — півкільце. Тоді*

$$k(\mathcal{P}) = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, n \geq 1, A_k \in \mathcal{P} \text{ неперетинні}\}. \quad (1.5)$$

*Доведення.* Набір множин у правій частині (1.5) позначимо через  $\mathcal{L}$  і доведимо, що  $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$  та  $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ .

Для множин з  $\mathcal{L}$  маємо

$$A_k \in \mathcal{P} \subset k(\mathcal{P}), k(\mathcal{P}) \text{ — кільце} \implies \bigcup_{k=1}^n A_k \in k(\mathcal{P}),$$

будь-який елемент  $\mathcal{L}$  належить  $k(\mathcal{P})$ , і тому  $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$ .

Для доведення включення  $k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$  досить довести, що  $\mathcal{L}$  — кільце і використати властивість 3 (легко бачити, що  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ ).

Нехай

$$A, B \in \mathcal{L}, \quad A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{i=1}^j B_i, \quad A_k, B_i \in \mathcal{P},$$

$A_k$  і  $B_i$  неперетинні у своїх наборах.

**Крок 1.** Якщо  $A \cap B = \emptyset$ , то всі  $A_k \cap B_j = \emptyset$ , і

$$A \cup B = \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^j B_i \right) \in \mathcal{L}$$

як об'єднання неперетинних елементів  $\mathcal{P}$ .

**Крок 2.** Оскільки  $\mathcal{P}$  — півкільце, усі  $A_k \cap B_i \in \mathcal{P}$ , і ці множини є неперетинними. Тому

$$A \cap B = \bigcup_{1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq j} (A_k \cap B_i) \in \mathcal{L}.$$

**Крок 3.** Для різниці множин маємо

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n (A_k \setminus B), \quad A_k \setminus B = \bigcap_{i=1}^j (A_k \setminus B_i).$$

Множини  $A_k$  і  $B_j$  належать півкільцю  $\mathcal{P}$ , тому

$$A_k \setminus B_i = \bigcup_{r=1}^s C_r, \quad C_r \in \mathcal{P} \text{ неперетинні,}$$



і тому  $A_k \setminus B_i \in \mathcal{L}$ . Крок 2 свідчить про те, що  $A_k \setminus B \in \mathcal{L}$ , згідно з кроком 1  $A \setminus B \in \mathcal{L}$ .

**Крок 4.** Для об'єднання множин отримуємо

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

де різні елементи об'єднання не перетинаються. Крок 3 показує, що  $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{L}$ , крок 2 — що  $A \cap B \in \mathcal{L}$ , за кроком 1  $A \cup B \in \mathcal{L}$ .

Таким чином,  $\mathcal{L}$  — кільце. □

**Приклад 1.10.** Для півкільця півінтервалів  $\mathcal{P}_1$  із прикладу 1.4 маємо

$$k(\mathcal{P}_1) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \mid (a_k, b_k] \subset \mathbb{R} \text{ неперетинні} \right\}.$$

Аналогічним чином визначається  $k(\mathcal{P}_d)$  для півкільця  $\mathcal{P}_d$  з прикладу 1.5.

### 1.3 Монотонний клас, породжений кільцем

Наступне твердження часто є корисним при доведенні того, що певний клас множин є  $\sigma$ -кільцем.

**Теорема 1.4.** Нехай  $\mathcal{K}$  — кільце множин. Тоді  $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$ .

*Доведення.*  $\sigma$ -кільце є класом множин, замкненим відносно взяття злічених об'єднань і перетинів, і тому є монотонним класом. Маємо

$$\mathcal{K} \subset \sigma k(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sigma k(\mathcal{K})\text{-мон. клас}} m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K}).$$

Доведемо протилежне включення. Якщо доведемо, що  $m(\mathcal{K})$  є кільцем, то, за теоремою 1.2,  $m(\mathcal{K})$  буде  $\sigma$ -кільцем. Оскільки  $\mathcal{K} \subset m(\mathcal{K})$ , тоді матимемо потрібне включення  $\sigma k(\mathcal{K}) \subset m(\mathcal{K})$ .

Для будь-якої множини  $A \in m(\mathcal{K})$  розглядатимемо клас множин

$$\mathcal{L}(A) = \{ B \subset X : A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K}) \}.$$

Тоді  $\mathcal{L}(A)$  є монотонним класом. Якщо, наприклад,  $C_n \in \mathcal{L}(A)$ ,  $C_n \uparrow C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , то

$$\begin{aligned} A \cup C &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n), & (A \cup C_n) \in m(\mathcal{K}), & (A \cup C_n) \uparrow (A \cup C) \Rightarrow (A \cup C) \in m(\mathcal{K}), \\ A \setminus C &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n), & (A \setminus C_n) \in m(\mathcal{K}), & (A \setminus C_n) \downarrow (A \setminus C) \Rightarrow (A \setminus C) \in m(\mathcal{K}), \\ C \setminus A &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A), & (C_n \setminus A) \in m(\mathcal{K}), & (C_n \setminus A) \uparrow (C \setminus A) \Rightarrow (C \setminus A) \in m(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Так ми перевірили, що  $C \in \mathcal{L}(A)$ .

Цілком аналогічно доводимо, що  $C \in \mathcal{L}(A)$ , коли  $C_n \downarrow C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ . При цьому лише  $\bigcup_{n=1}^{\infty}$  міняється в записях із  $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ , а  $\uparrow$  — із  $\downarrow$ .

Нехай  $A \in \mathcal{K}$ . Оскільки  $\mathcal{K}$  — кільце, для будь-якої  $B \in \mathcal{K}$  одержимо

$$(A \cup B), (A \setminus B), (B \setminus A) \in \mathcal{K} \subset m(\mathcal{K}), \quad A, B \in \mathcal{K},$$

і тому  $B \in \mathcal{L}(A)$ ,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(A)$ . Із того, що  $\mathcal{L}(A)$  — монотонний клас, випливає, що  $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(A)$ .

Значить, для будь-якої множини  $B \in m(\mathcal{K})$  маємо  $B \in \mathcal{L}(A)$ , і тому

$$(A \cup B), (A \setminus B), (B \setminus A) \in m(\mathcal{K}), \quad A \in \mathcal{K}, B \in m(\mathcal{K}).$$

Це означає, що  $A \in \mathcal{L}(B)$ . Отже, тут  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$ . З того, що  $\mathcal{L}(B)$  — монотонний клас, випливає, що  $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$ , тепер вже для  $B \in m(\mathcal{K})$ .

Таким чином, якщо  $A \in m(\mathcal{K})$ , то  $A \in \mathcal{L}(B)$ , звідки

$$(A \cup B), (A \setminus B), (B \setminus A) \in m(\mathcal{K}), \quad A, B \in m(\mathcal{K}).$$

Це ми довели для довільних  $A, B \in m(\mathcal{K})$ , і тому  $m(\mathcal{K})$  є кільцем. □

## 1.4 Борельові множини

Одним із найважливіших прикладів породжених  $\sigma$ -алгебр є клас борельових множин.

Нехай  $Y$  — метричний простір,  $\mathcal{G}$  — набір усіх відкритих підмножин  $Y$ .

**Означення 1.8.** Борельовою  $\sigma$ -алгеброю в  $Y$  називається

$$\mathcal{B}(Y) := \sigma a(\mathcal{G}).$$

Множини з  $\mathcal{B}(Y)$  називатимемо борельовими.

**Приклади борельових множин.**

1. Якщо множина  $U$  відкрита, то вона борельова. Адже

$$U \in \mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(Y).$$

2. Якщо множина  $F$  замкнена, то вона борельова. У цьому випадку множина  $X \setminus F$  відкрита, тому  $(X \setminus F) \in \mathcal{B}(Y)$ , і

$$F = X \setminus (X \setminus F) \in \mathcal{B}(Y)$$

як різниця елементів  $\sigma$ -алгебри.

3. Одноточкова множина є борельовою, адже вона замкнена.

4. Усі скінченні, злічені множини та їх доповнення — борельові. Ці множини отримуються з одноточкових за допомогою операцій, "дозволеніх" у  $\sigma$ -алгебрі.

Наступне твердження показує, що борельову  $\sigma$ -алгебру  $\mathbb{R}^d$  можна отримати по-різному.

**Теорема 1.5.** Для півкільця підмножин  $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

справджується

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

*Доведення.* Спочатку відмітимо, що

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d,$$

$\mathbb{R}^d \in \sigma k(\mathcal{P}_d)$  як зліченне об'єднання елементів  $\mathcal{P}_d$ , і тому

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d). \quad (1.6)$$

Для множин

$$A_n = \prod_{k=1}^d \left( a_k, b_k + \frac{1}{n} \right), \quad A = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]$$

маємо, що  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  як відкрита множина, і тому

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{P}_d \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \sigma a(\mathcal{P}_d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (1.7)$$

Тепер доведемо протилежне включення. Нехай  $U$  — відкрита підмножина  $\mathbb{R}^d$ . Тоді

$$U = \bigcup_{p_k, q_k \in \mathbb{Q}: \prod_{k=1}^d (p_k, q_k] \subset U} \prod_{k=1}^d (p_k, q_k]. \quad (1.8)$$

Дійсно, права частина (1.8) є об'єднанням підмножин  $U$ , і тому сама є підмножиною  $U$ . З іншого боку, будь-яка точка  $x = (x_1, \dots, x_d) \in U$  має  $\varepsilon$ -окіл  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Тоді

$$\prod_{k=1}^d \left( x_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}, x_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}} \right] \subset B(x, \varepsilon) \subset U,$$

отже можемо вибрати

$$p_k, q_k \in \mathbb{Q} : x_k - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}} < p_k < x_k < q_k < x_k + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2d}}$$

і отримати, що  $x \in \prod_{k=1}^d (p_k, q_k]$ . Значить,  $U$  є підмножиною правої частини (1.8), рівність (1.8) справджується.

У (1.8) маємо зліченне об'єднання елементів  $\mathcal{P}_d$ . Тому

$$U \in \sigma a(\mathcal{P}_d) \Rightarrow \mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{P}_d) \Rightarrow \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma a(\mathcal{P}_d). \quad (1.9)$$

Із рівностей (1.6), (1.7) і (1.9) випливає твердження теореми.  $\square$

## Вправи

**Вправа 1.1.** Нехай  $\mathcal{H} \subset 2^X$ ,  $X \in \mathcal{H}$ , де  $\mathcal{H}$  — замкнений відносно взяття доповнень та злічених перетинів. Довести, що  $\mathcal{H}$  —  $\sigma$ -алгебра.

**Вправа 1.2.** Для довільної послідовності множин  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , покладемо

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Якщо

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad (1.10)$$

говоритимемо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  існує і дорівнює (1.10). Показати, що

1)  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ ;

2) для монотонної послідовності множин  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  існує і збігається із множинами в (1.2) і (1.3).

**Вправа 1.3.** Нехай  $\mathcal{H}$  — довільний клас підмножин  $X$ . Додамо до  $\mathcal{H}$  усі доповнення множин з  $\mathcal{H}$ , порожню множину, множину  $X$ , і позначимо через  $\mathcal{H}_1$  отриманий набір. Нехай  $\mathcal{H}_2$  — клас усіх скінченних перетинів множин з  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_3$  — клас усіх скінченних об'єднань множин з  $\mathcal{H}_2$ . Показати, що  $\mathcal{H}_3 = a(\mathcal{H})$ .

**Вправа 1.4.** Непорожній клас  $\mathcal{H} \subset 2^X$  називається  $\sigma$ -адитивним класом, якщо  $X \in \mathcal{H}$  і він замкнений відносно взяття злічених об'єднань неперетинних множин та відносно взяття різниць  $A \setminus B$ ,  $B \subset A$ . Довести твердження: якщо клас  $\mathcal{E}$  замкнений відносно скінченних перетинів, то  $\sigma$ -адитивний клас, породжений  $\mathcal{E}$ , збігається з  $\sigma a(\mathcal{E})$ .

## Розділ 2

# Міри. Продовження мір

### 2.1 Функції множин. Міри

Ми будемо розглядати функції множин  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , де  $\mathcal{H}$  — довільний набір підмножин  $X$ . У наступному означенні зібрано визначення кількох важливих для нас класів функцій множин.

**Означення 2.1.** Функція множин  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  називається

1) *невід'ємною*, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : \lambda(A) \geq 0;$$

2) *адитивною (скінченно-адитивною)*, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H} \text{ (неперетинних)}, \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{H} : \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(A_k);$$

3)  *$\sigma$ -адитивною (зліченно-адитивною)*, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H} \text{ (неперетинних)}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H} : \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

4) *півадитивною (скінченно-півадитивною)*, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}, \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{H} : \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda(A_k);$$

5)  *$\sigma$ -півадитивною (зліченно-півадитивною)*, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H} : \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k);$$

6) *монотонною*, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{H}, A \subset B : \lambda(A) \leq \lambda(B);$$

7) *скінченною*, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : \lambda(A) < +\infty;$$

8)  *$\sigma$ -скінченною*, якщо

$$\exists X_1, X_2, \dots \in \mathcal{H} : X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \text{ і всі } \lambda(X_k) < +\infty.$$

За наявності нескінченних значень у сумах, використовуємо природні узгодження:

$$a + (+\infty) = +\infty \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

значення  $(+\infty) + (-\infty)$  вважається невизначеним.

**Узгодження.** Ми не розглядаємо функції множин, усі значення яких дорівнюють  $+\infty$ . Тобто, завжди вважаємо, що  $\exists A : \lambda(A) < +\infty$ .

Наступне означення є одним із головних у посібнику.

**Означення 2.2.** Мірою називається невід'ємна  $\sigma$ -адитивна функція множин, задана на півкільці.

Доведення  $\sigma$ -адитивності, як правило, є непростим, тому зараз ми обмежимося лише двома прикладами, для яких виконання означення очевидне.

**Приклад 2.1.** Для фіксованого  $x \in X$  функція множин  $\lambda(A) = \mathbf{1}_A(x)$  буде мірою на  $2^X$ .

**Приклад 2.2.** Розглянемо  $X = \mathbb{R}$  і покладемо  $\lambda(A) = |A \cap \mathbb{Z}|$  (тобто  $\lambda(A)$  дорівнює кількості цілих точок в  $A$ ). Тоді  $\lambda$  — міра на  $2^{\mathbb{R}}$ .

**Властивості мір.** Нехай  $\lambda$  — міра на півкільці  $\mathcal{P}$ .

1.  $\lambda(\emptyset) = 0$ . *Доведення.* Відомо, що  $\emptyset \in \mathcal{P}$  (див. стор. 5). Візьмемо  $A \in \mathcal{P}$ , для якої  $\lambda(A) < +\infty$  (така множина існує за нашим узгодженням). Використовуючи  $\sigma$ -адитивність  $\lambda$ , маємо

$$\lambda(A) = \lambda(A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots,$$

і останній ряд збігається. Це можливо лише при  $\lambda(\emptyset) = 0$ .  $\square$

2.  $\lambda$  — скінченно-адитивна. *Доведення.* Для неперетинних  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ ,  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{P}$ , із  $\sigma$ -адитивності маємо

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \dots\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(A_k) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots = \sum_{k=1}^n \lambda(A_k). \quad \square$$

3.  $\lambda$  монотонна. *Доведення.* Якщо  $A, B \in \mathcal{P}$ ,  $A \subset B$ , то  $B \setminus A = \bigcup_{k=1}^n C_k$ , де  $C_k$  — неперетинні множини з  $\mathcal{P}$ . Використовуючи скінченну адитивність і невід'ємність  $\lambda$ , отримуємо

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \sum_{k=1}^n \lambda(C_k) \geq \lambda(A). \quad \square$$

4.  $\lambda$   $\sigma$ -півадитивна. *Доведення.* Візьмемо довільні  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ ,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{P}$ , і розглянемо неперетинні множини

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2.$$

Усі записані тут множини належать кільцю  $k(\mathcal{P})$ , тому є скінченними об'єднаннями елементів  $\mathcal{P}$ , отже ми маємо

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}, \quad A_n \setminus B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn}, \quad C_{in}, D_{jn} \in \mathcal{P},$$

де множини в об'єднаннях не перетинаються. Звідси

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) + \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \quad \square \end{aligned}$$

5. Нехай  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ ,  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Тоді

$$\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

*Доведення.* Маємо, що

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap A_k), \quad A \cap A_k \in \mathcal{P}.$$

Згідно із властивостями  $\sigma$ -півадитивності і монотонності  $\lambda$  дістанемо

$$\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k). \quad \square$$

**Зауваження 2.1.** Нехай  $\lambda$  — невід’ємна скінченно-адитивна функція множин на  $\mathcal{P}$ . Тоді легко бачити, що властивості 1 і 3 залишаються справедливими без змін, а властивості 4 і 5 справджуються для скінченних наборів  $A_1, \dots, A_n$ .

Нагадаємо, що для монотонної послідовності множин  $A_n, n \geq 1$ , ми визначили  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  (див. (1.2) і (1.3)). Наступні твердження дають умови виконання рівності

$$\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n),$$

тобто умови неперервності міри.

**Теорема 2.1 (теорема про неперервність міри знизу).** Нехай  $\lambda$  — міра на кільці  $\mathcal{K}$ ,

$$A_n \in \mathcal{K}, \quad n \geq 1, \quad A_n \uparrow, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

Тоді

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

*Доведення.* Покладемо

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

тоді  $B_n \in \mathcal{K}$ , неперетинні, і

$$\bigcup_{n=1}^j B_n = A_j, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Маємо

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \lambda(B_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A_j). \quad \square$$

**Теорема 2.2 (теорема про неперервність міри зверху).** Нехай  $\lambda$  — міра на кільці  $\mathcal{K}$ ,

$$A_n \in \mathcal{K}, \quad n \geq 1, \quad A_n \downarrow, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}, \quad \lambda(A_1) < +\infty.$$

Тоді

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

*Доведення.* Розглянемо множини  $C_n = A_1 \setminus A_n, n \geq 1$ . Тоді

$$C_n \uparrow \left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

і з попередньої теореми одержимо

$$\lambda\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda(A_1) - \lambda(A_n)) = \lambda(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

Урахувавши, що

$$\lambda\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda(A_1) - \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

отримаємо твердження нашої теореми. Оскільки  $\lambda(A_1) < +\infty$ , записані тут значення міри є скінченними, і тому всі різниці коректно визначені.  $\square$

**Приклад 2.3.** Розглянемо міру з прикладу 2.2  $\lambda(A) = |A \cap \mathbb{Z}|, A \subset \mathbb{R}$ . Візьмемо  $A_n = [n, +\infty)$ . Тоді

$$A_n \downarrow \emptyset, \quad \lambda(A_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = +\infty \neq \lambda(\emptyset).$$

Таким чином, умову  $\lambda(A_1) < +\infty$  в останній теоремі відкинути не можна.

## 2.2 Приклади мір

Розглянемо деякі важливі й нетривіальні приклади  $\sigma$ -адитивних функцій множин.

Коротко нагадаємо означення *міри Жордана*  $m$  (докладніше див., наприклад, § 14.2 [7]). Нехай  $A \subset \mathbb{R}^d$  — обмежена множина. Візьмемо деяке  $n \geq 0$  і в  $\mathbb{R}^d$  розглянемо всі бруси вигляду

$$\prod_{i=1}^d [k_i 2^{-n}, (k_i + 1) 2^{-n}], \quad k_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Значення міри кожного такого бруса покладемо рівним  $2^{-nd}$ , міру об'єднання брусів без спільних внутрішніх точок вважаємо рівною сумі відповідних мір. Нехай  $A_{(n)}$  — об'єднання всіх брусів, що є підмножинами  $A$ ,  $A^{(n)}$  — об'єднання всіх брусів, що мають хоча б одну спільну точку з  $A$ . Якщо

$$\sup_{n \geq 0} m(A_{(n)}) = \inf_{n \geq 0} m(A^{(n)}),$$

то множина  $A$  називається *вимірною за Жорданом*, і  $m(A)$  покладається рівною цьому спільному значенню супремуму і інфімуму.

У математичному аналізі доводиться, що об'єднання і різниця двох множин, вимірних за Жорданом, також вимірні за Жорданом, тобто клас цих множин утворює кільце. Позначимо це кільце через  $\mathcal{K}_m$ . Також відомо, що  $m$  скінченно-адитивна на  $\mathcal{K}_m$ . Далі ми доведемо, що  $m$  є мірою в нашому сенсі. Почнемо з допоміжного твердження.

**Лема 2.1.** *Для будь-яких  $A \in \mathcal{K}_m$  і  $\varepsilon > 0$  знайдуться замкнена множина  $F_\varepsilon \in \mathcal{K}_m$  і відкрита множина  $U_\varepsilon \in \mathcal{K}_m$  такі, що*

$$F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon, \quad m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon, \quad m(U_\varepsilon) - m(A) < \varepsilon.$$

*Доведення.* За означенням міри Жордана, знайдеться таке  $n_0$ , що

$$m(A) - m(A_{(n_0)}) < \varepsilon.$$

Тоді для множини  $F_\varepsilon = A_{(n_0)}$  справджується твердження леми.

Також знайдеться  $n_1$  таке, що

$$m(A^{(n_1)}) - m(A) < \varepsilon/2. \quad (2.2)$$

Множина  $A^{(n_1)}$  — це скінченне об'єднання брусів вигляду (2.1) із  $n = n_1$ ,  $A \subset A^{(n_1)}$ . Для  $\delta > 0$  кожен із цих брусів замінимо на відкритий більший брус

$$\prod_{i=1}^d (k_i 2^{-n_1} - \delta, (k_i + 1) 2^{-n_1} + \delta)$$

і позначимо через  $A^{(n_1)}(\delta)$  об'єднання цих відкритих брусів. Тоді

$$\begin{aligned} A^{(n_1)} \subset A^{(n_1)}(\delta) &\Rightarrow m(A^{(n_1)}) \leq m(A^{(n_1)}(\delta)), \\ m(A^{(n_1)}(\delta)) &\leq \sum m\left(\prod_{i=1}^d (k_i 2^{-n_1} - \delta, (k_i + 1) 2^{-n_1} + \delta)\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum m\left(\prod_{i=1}^d [k_i 2^{-n_1}, (k_i + 1) 2^{-n_1}]\right) = m(A^{(n_1)}), \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(суми тут взято по всіх брусах, що входять в  $A^{(n_1)}$ ). Тому

$$m(A^{(n_1)}(\delta)) \rightarrow m(A^{(n_1)}), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Ми можемо вибрати  $\delta_1 > 0$  таке, що

$$m(A^{(n_1)}(\delta_1)) - m(A^{(n_1)}) < \varepsilon/2, \quad (2.3)$$

і покласти  $U_\varepsilon = A^{(n_1)}(\delta_1)$ . Із (2.2) і (2.3) випливає, що для цієї множини справджується потрібне твердження.  $\square$

**Теорема 2.3.** Міра Жордана  $m$  є мірою на кільці  $\mathcal{K}_m$  у сенсі нашого означення (тобто невід'ємною  $\sigma$ -адитивною функцією множин).

*Доведення.* Достатньо довести  $\sigma$ -адитивність  $m$  на  $\mathcal{K}_m$ . Нехай

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A, A_n \in \mathcal{K}_m, \quad \text{тут } A_n \text{ неперетинні.}$$

Нагадаємо, що  $m$  є невід'ємною і скінченно-адитивною, тому є монотонною (див. зауваження 2.1), і для будь-якого  $j \geq 1$  ми маємо

$$A \supset \bigcup_{n=1}^j A_n, \quad m(A) \geq m\left(\bigcup_{n=1}^j A_n\right) = \sum_{n=1}^j m(A_n).$$

Взявши границю при  $j \rightarrow \infty$ , одержимо

$$m(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \quad (2.4)$$

Далі ми отримаємо оцінку в інший бік. Візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$ , і користуючись лемою 2.1, виберемо множини  $F_\varepsilon, U_{\varepsilon/2^n} \in \mathcal{K}_m, n \geq 1$ , такі, що

$$F_\varepsilon \text{ замкнена, } F_\varepsilon \subset A, \quad m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon, \quad (2.5)$$

$$U_{\varepsilon/2^n} \text{ відкриті, } A_n \subset U_{\varepsilon/2^n}, \quad m(U_{\varepsilon/2^n}) - m(A_n) < \varepsilon/2^n. \quad (2.6)$$

Маємо, що

$$F_\varepsilon \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\varepsilon/2^n}. \quad (2.7)$$

Множина  $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$  замкнена й обмежена, тому є компактною, і (2.7) дає покриття цього компакта відкритими множинами. Як відомо, із відкритого покриття компакта можна виділити скінченне підпокриття, і для деякого  $j \geq 1$  дістанемо

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^j U_{\varepsilon/2^n}.$$

Ураховуючи властивість міри 5 та зауваження 2.1, маємо

$$m(A) - \varepsilon \stackrel{(2.5)}{<} m(F_\varepsilon) \stackrel{\text{власт. 5}}{\leq} \sum_{n=1}^j m(U_{\varepsilon/2^n}) \stackrel{(2.6)}{<} \sum_{n=1}^j (m(A_n) + \varepsilon/2^n) < \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon.$$

Спрямуємо тут  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , і отримаємо

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \stackrel{(2.4)}{\implies} m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \quad \square$$

**Наслідок 2.1.** На півкільці

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

визначимо функцію множин

$$\lambda_d \left( \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \right) := \prod_{k=1}^d (b_k - a_k).$$

Тоді  $\lambda_d$  є мірою на  $\mathcal{P}_d$ .

*Доведення.* Відомо, що множини з  $\mathcal{P}_d$  вимірні за Жорданом, і для  $A \in \mathcal{P}_d$  виконується  $\lambda_d(A) = m(A)$ . Оскільки  $m$   $\sigma$ -адитивна на множинах із  $\mathcal{K}_m$ , то вона буде  $\sigma$ -адитивною і на множинах з  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{K}_m$ .  $\square$



Твердження наслідку 2.1 можна довести і безпосередньо, без використання поняття міри Жордана, міркуючи у випадку множин із  $\mathcal{P}_d$  аналогічно доведенню теореми 2.3.

**Теорема 2.4.** *Нехай  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — неспадна неперервна справа функція. На півкільці*

$$\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

*визначимо функцію множин*

$$\lambda_F((a, b]) := F(b) - F(a).$$

*Тоді  $\lambda_F$  є мірою на  $\mathcal{P}_1$ .*

*Доведення.* Оскільки функція  $F$  неспадна, то  $\lambda_F$  є невід'ємною.

Відмітимо, що  $\lambda_F$  скінченно-адитивна на  $\mathcal{P}_1$ . Нехай

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^j (a_n, b_n], \quad (a_n, b_n] \text{ неперетинні.}$$

Пронумеруємо ці відрізки зліва направо так, що  $a_1 < a_2 < \dots < a_j$ , і матимемо

$$a = a_1, \quad b_1 = a_2, \quad b_2 = a_3, \quad \dots, \quad b_{j-1} = a_j, \quad b_j = b,$$

$$\sum_{n=1}^j \lambda_F((a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^j (F(b_n) - F(a_n)) = F(b_j) - F(a_1) = F(b) - F(a) = \lambda_F((a, b]).$$

Ще потрібно довести  $\sigma$ -адитивність  $\lambda_F$ . Тепер нехай

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n], \quad (a_n, b_n] \text{ неперетинні.}$$

Оскільки  $\lambda_F$  невід'ємна й адитивна, вона монотонна, і для всіх  $j \geq 1$  маємо  $(a, b] \supset \bigcup_{n=1}^j (a_n, b_n]$ . Усі ці множини належать породженому кільцю  $k(\mathcal{P}_1)$ ,

$$(a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^j (a_n, b_n] \in k(\mathcal{P}_1) \xrightarrow{(1.5)} (a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^j (a_n, b_n] = \bigcup_{i=1}^r (c_i, d_i],$$

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^j (a_n, b_n] \cup \bigcup_{i=1}^r (c_i, d_i], \quad \lambda_F((a, b]) = \sum_{n=1}^j \lambda_F((a_n, b_n]) + \sum_{i=1}^r \lambda_F((c_i, d_i]) \geq \sum_{n=1}^j \lambda_F((a_n, b_n]).$$
(2.8)

Взявши границю при  $j \rightarrow \infty$ , отримаємо

$$\lambda_F((a, b]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((a_n, b_n]).$$
(2.9)

Далі ми дістанемо оцінку в інший бік. Для деякого  $\varepsilon > 0$ , використовуючи неперервність  $F$  справа, візьмемо

$$a' > a : \quad F(a') - F(a) < \varepsilon, \tag{2.10}$$

$$b'_n > b_n : \quad F(b'_n) - F(b_n) < \varepsilon/2^n, \quad n \geq 1. \tag{2.11}$$

Тоді

$$[a', b] \subset (a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b'_n].$$

Тут із покриття компакта відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, і тому для деякого  $j \geq 1$  ми отримаємо

$$[a', b] \subset \bigcup_{n=1}^j (a_n, b'_n] \Rightarrow (a', b] \subset \bigcup_{n=1}^j (a_n, b'_n].$$

Згідно із властивістю міри 5 і зауваженням 2.1 одержимо

$$\lambda_F((a', b]) \leq \sum_{n=1}^j \lambda_F((a_n, b'_n]). \quad (2.12)$$

Також

$$\begin{aligned} \lambda_F((a, b]) - \lambda_F((a', b]) &= F(a') - F(a) \stackrel{(2.10)}{<} \varepsilon, \\ \lambda_F((a_n, b'_n]) - \lambda_F((a_n, b_n]) &= F(b'_n) - F(b_n) \stackrel{(2.11)}{<} \varepsilon/2^n. \end{aligned}$$

Звідси і з (2.12) маємо

$$\lambda_F((a, b]) - \varepsilon < \sum_{n=1}^j (\lambda_F((a_n, b_n]) + \varepsilon/2^n) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((a_n, b_n]) + \varepsilon.$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0+$  отримуємо

$$\lambda_F((a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((a_n, b_n]) \stackrel{(2.9)}{=} \lambda_F((a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((a_n, b_n]). \quad \square$$

У цьому підрозділі ми навели деякі приклади мір на півкільцях і кільцях. Наша подальша мета — показати, як множину визначення міри можна поширити на  $\sigma$ -алгебру.

**Означення 2.3.** Нехай  $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} \subset 2^X$ ,  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $\tilde{\lambda} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . Функція множин  $\tilde{\lambda}$  називається продовженням функції множин  $\lambda$ , якщо

$$\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}, \quad \forall A \in \mathcal{H} : \lambda(A) = \tilde{\lambda}(A).$$

При цьому  $\lambda$  називається звуженням  $\tilde{\lambda}$ .

**Приклад 2.4.** Міра Жордана  $m$ , розглянута в теоремі 2.3, є продовженням міри  $\lambda_d$ , визначеної в наслідку 2.1.

**Зауваження 2.2.** Якщо  $\mathcal{H}$  і  $\tilde{\mathcal{H}}$  — півкільця,  $\tilde{\lambda}$  — міра на  $\tilde{\mathcal{H}}$ , то, очевидно,  $\lambda$  є мірою на  $\mathcal{H}$ .

## 2.3 Зовнішні міри

У конструкції продовження міри на  $\sigma$ -алгебру важливу роль відіграє таке поняття.

**Означення 2.4.** Функція множин  $\lambda^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  називається *зовнішньою мірою*, якщо

- 1)  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ ,
- 2) для будь-яких  $A, A_n \subset X$ ,  $n \geq 1$ ,  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , виконується

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \quad (2.13)$$

**Приклад 2.5.** Будь-яка міра, визначена на  $2^X$ , є зовнішньою мірою. Умови 1) та 2) означення 2.4 — це властивості міри 1 і 5 (див. підрозділ 2.1).

**Приклад 2.6.** Покладемо  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ , а для всіх  $A \neq \emptyset$  візьмемо  $\lambda^*(A) = 1$ . Тоді  $\lambda^*$  — зовнішня міра (і при цьому не є мірою).

**Властивості зовнішніх мір.** Нехай  $\lambda^*$  — зовнішня міра.

1. Для  $A, A_n \subset X$ ,  $A \subset \bigcup_{n=1}^j A_n$ , виконується  $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^j \lambda^*(A_n)$ . *Доведення.* В умові 2) означення зовнішньої міри покладемо  $A_{j+1} = A_{j+2} = \dots = \emptyset$ , і скористаємося тим, що  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ .  $\square$

2.  $\lambda^*$  монотонна. *Доведення.* Випливає з властивості 1 при  $j = 1$ .  $\square$

Особливе значення для побудови продовження міри матиме зовнішня міра із наступного означення.

**Означення 2.5.** Нехай  $\lambda$  — міра на півкільці  $\mathcal{P}$ . Зовнішньою мірою, породженою мірою  $\lambda$ , називається функція множин  $\lambda^*$ , визначена за правилом:

$$1) \quad \lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \mid A_n \in \mathcal{P}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \quad (2.14)$$

якщо існує хоча б одне зліченне покриття множини  $A$  елементами  $\mathcal{P}$ ;

2)  $\lambda^*(A) := +\infty$  в іншому випадку.

**Теорема 2.5.** Функція множин  $\lambda^*$ , визначена в означенні 2.5, є зовнішньою мірою.

*Доведення.* Очевидно, що  $\lambda^*$  визначена на всіх підмножинах  $X$  і набуває невід'ємних значень.

За властивістю півкільця,  $\emptyset \in \mathcal{P}$ , використовуючи покриття  $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$ , отримуємо

$$\lambda^*(\emptyset) \stackrel{(2.14)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) = 0 \Rightarrow \lambda^*(\emptyset) = 0.$$

Залишилося перевірити умову 2) означення 2.4. Нехай  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Якщо хоча б одне значення  $\lambda^*(A_n) = +\infty$ , то (2.13), очевидно, справджується. Припустимо, що всі  $\lambda^*(A_n) < +\infty$ , і візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$ . Тоді  $\lambda^*(A_n)$  визначаються за (2.14), і для кожного  $n \geq 1$  знайдуться множини  $B_{kn} \in \mathcal{P}$  такі, що

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^n. \quad (2.15)$$

Маємо

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}, \quad B_{kn} \in \mathcal{P} \Rightarrow \lambda^*(A) \stackrel{(2.14)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) \stackrel{(2.15)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon.$$

Спрямувавши  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , отримуємо (2.13). □

**Зауваження 2.3.** Якщо у (2.14) обмежимося наборами неперетинних множин із півкільця, об'єднання яких містить  $A$ , то при цьому значення  $\lambda^*$  не зміниться. Розглянемо

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad B_n \in k(\mathcal{P}) \Rightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)},$$

де  $C_i^{(n)} \in \mathcal{P}$  неперетинні. Набір множин

$$\{C_i^{(n)}, 1 \leq i \leq i_n, n \geq 1\}$$

візьмемо замість  $\{A_n, n \geq 1\}$ . Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \supset B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_i^{(n)} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \lambda(A_n) \geq \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_i^{(n)}),$$

інфімум у (2.14) не збільшиться (слідування (\*) можна легко обґрунтувати, аналогічно (2.8)). Також цей інфімум не зменшиться, оскільки ми звужуємо множину наборів множин.

## 2.4 Теорема Каратеодорі. Повні міри

**Означення 2.6.** Множина  $A$  називається *вимірною за Каратеодорі* відносно зовнішньої міри  $\lambda^*$ , якщо для будь-якої множини  $E \subset X$

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}). \quad (2.16)$$

Рівність (2.16) можна записувати у вигляді

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A).$$

Сенс означення полягає в тому, що ця множина  $A$  дає розбиття будь-якої множини  $E \subset X$  на дві частини, де  $\lambda^*$  адитивна.

**Зауваження 2.4.** Для вимірності  $A$  відносно  $\lambda^*$  достатньо, щоб для будь-якої множини  $E \subset X$  виконувалося

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}). \quad (2.17)$$

Адже протилежна нерівність

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}), \quad A, E \subset X,$$

випливає із включення  $E \subset (E \cap A) \cup (E \cap \bar{A})$  та першої властивості зовнішніх мір.

Із першого погляду, вимірність за Каратеодорі не пов'язана з визначенням  $\sigma$ -адитивної функції множин, але наведена нижче теорема вказує на такий зв'язок.

**Теорема 2.6 (теорема Каратеодорі).** *Нехай  $\lambda^*$  — довільна зовнішня міра,  $\mathcal{S}$  — клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно  $\lambda^*$ . Тоді  $\mathcal{S}$  є  $\sigma$ -алгеброю і звузнення  $\lambda^*$  на  $\mathcal{S}$  є мірою.*

*Доведення. Крок 1.  $\mathcal{S}$  — алгебра.* Підстановка  $E = X$  до (2.16) показує, що  $X \in \mathcal{S}$ .

Нехай  $A \in \mathcal{S}$ . Тоді безпосередньо з означення отримуємо, що  $\bar{A} \in \mathcal{S}$ .

Нехай також  $B \in \mathcal{S}$ , і покажемо вимірність об'єднання  $A \cup B$ . Маємо

$$\lambda^*(E) \stackrel{A \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}) \stackrel{B \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A} \cap B) + \lambda^*(E \cap \bar{A} \cap \bar{B}). \quad (2.18)$$

Також отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda^*(E \cap (A \cup B)) &\stackrel{A \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap \bar{A}) = \\ &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap B \cap \bar{A}) \stackrel{(2.18)}{=} \lambda^*(E) - \lambda^*(E \cap \bar{A} \cap \bar{B}) = \lambda^*(E) - \lambda^*(E \cap \overline{(A \cup B)}). \end{aligned}$$

Отже,  $A \cup B$  задовольняє означення вимірності.

Оскільки доповнення та об'єднання множин з  $\mathcal{S}$  будуть вимірними множинами маємо, що  $A \setminus B = \overline{\bar{A} \cup B} \in \mathcal{S}$ . Отже,  $\mathcal{S}$  є алгеброю.

**Крок 2.  $\mathcal{S}$  —  $\sigma$ -алгебра.** Спочатку розглянемо неперетинні  $A_k \in \mathcal{S}$ ,  $k \geq 1$ . Доведемо за індукцією, що для довільних  $E \subset X$  та  $n \geq 1$  справедлива рівність

$$\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda^*(E \cap A_k).$$

При  $n = 1$  рівність є очевидною, а перехід від  $n$  до  $n + 1$  отримуємо таким чином:

$$\begin{aligned} \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &\stackrel{A_{n+1} \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) + \lambda^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap \bar{A}_{n+1}\right) = \\ &= \lambda^*(E \cap A_{n+1}) + \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lambda^*(E \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n \lambda^*(E \cap A_k), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести (у перетвореннях ми використали неперетинність  $A_k$  і наше твердження для  $n$  доданків).

Тепер покажемо, що  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$ . Використовуючи доведене вище твердження та монотонність  $\lambda^*$ , для будь-яких  $E \subset X$  і  $n \geq 1$  маємо

$$\lambda^*(E) \stackrel{\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda^*(E \cap A_k) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right).$$

В отриманій нерівності візьмемо  $n \rightarrow \infty$ , використаємо (2.13) і отримаємо

$$\lambda^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_k) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right). \quad (2.19)$$

Тому для  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  справджується (2.17), і ця множина є вимірною.

Візьмемо  $B_k \in \mathcal{S}$ ,  $k \geq 1$ , що можуть перетинатися. Усі множини

$$A_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$$

вимірні (оскільки  $\mathcal{S}$  є алгеброю) і неперетинні, тому

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Значить,  $\mathcal{S}$  —  $\sigma$ -алгебра

**Крок 3. Звуження  $\lambda^*$  на  $\mathcal{S}$  є мірою.** Знову розглянемо неперетинні  $A_k \in \mathcal{S}$ ,  $k \geq 1$ , візьмемо в (2.19)  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$ , і отримаємо

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

Нерівність у протилежний бік випливає з (2.13) для  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Таким чином, ми отримуємо рівність, і  $\lambda^*$  є  $\sigma$ -адитивною на  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Визначена в теоремі Каратеодорі міра має важливу властивість — є повною.

**Означення 2.7.** Міра  $\lambda$  на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}$  називається *повною*, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F}, \lambda(A) = 0, \forall B \subset A : B \in \mathcal{F}.$$

Із монотонності міри випливає, що тоді  $\lambda(B) = 0$ .

Інколи говорять, що  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  є повною відносно міри  $\lambda$ . Повнота фактично є властивістю пари об'єктів  $\lambda$  та  $\mathcal{F}$ .

**Наслідок 2.2.** *Визначена в теоремі Каратеодорі міра  $\lambda^*$  на  $\mathcal{S}$  є повною.*

*Доведення.* Нехай  $\lambda^*(A) = 0$ ,  $B \subset A$ ,  $E \subset X$ . Тоді, зокрема, буде  $E \cap B \subset A$ ,  $\lambda^*(E \cap B) = 0$ , і ми маємо

$$\lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap \overline{B}) = \lambda^*(E \cap \overline{B}) \leq \lambda^*(E),$$

що, згідно із зауваженням 2.4, доводить вимірність  $B$ .  $\square$

## 2.5 Продовження міри з півкільця на породжене $\sigma$ -кільце

Визначена в теоремі Каратеодорі  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{S}$  може виявитися тривіальною.

**Приклад 2.7.** Розглянемо зовнішню міру  $\lambda^*$  з прикладу 2.6 ( $\lambda^*(A) = 1$  для всіх  $A \neq \emptyset$ ). Неважко переконатися, що тоді клас  $\lambda^*$ -вимірних множин  $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ .

Наступне твердження показує, що набір вимірних множин буде достатньо багатим, якщо  $\lambda^*$  визначена за деякою мірою.

**Теорема 2.7 (теорема про вимірність елементів вихідного півкільця).** *Нехай  $\lambda$  — міра на півкільці  $\mathcal{P}$ , зовнішня міра  $\lambda^*$  породжена мірою  $\lambda$ ,  $\mathcal{S}$  — клас всіх  $\lambda^*$ -вимірних множин. Тоді  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$  і звуження  $\lambda^*$  на  $\mathcal{P}$  збігається з  $\lambda$ .*

*Доведення. Крок 1.*  $\lambda^*(A) = \lambda(A)$ ,  $A \in \mathcal{P}$ . Використовуючи покриття  $A \subset (A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots)$ , отримаємо

$$\lambda^*(A) \stackrel{(2.14)}{\leq} \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots = \lambda(A).$$

З іншого боку, якщо  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{P}$ , то за властивістю 5 міри

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda^*(A),$$

адже, за (2.14),  $\lambda^*(A)$  є інфімумом указаних сум. Із двох отриманих нерівностей випливає, що  $\lambda = \lambda^*$  на  $\mathcal{P}$ .

**Крок 2.**  $A \in \mathcal{P} \Rightarrow A \in \mathcal{S}$ . Перевіримо, що  $A \in \mathcal{P}$  задовольняє умову вимірності (2.17), тобто

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A), \quad E \subset X. \quad (2.20)$$

Достатньо розглянути випадок  $\lambda^*(E) < +\infty$ . Візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$ . За означенням 2.5 породженої зовнішньої міри, існують  $A_n \in \mathcal{P}$  такі, що

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \lambda^*(E) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Оскільки  $\mathcal{P}$  — півкільце, то  $A_n \setminus A = \bigcup_{i=1}^{j_n} B_{in}$ ,  $B_{in} \in \mathcal{P}$  і в цьому об'єднанні неперетинні. Тому

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda(A_n \cap A) + \sum_{i=1}^{j_n} \lambda(B_{in}) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j_n} \lambda(B_{in}) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A), \end{aligned}$$

адже

$$(E \cap A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A), \quad (E \setminus A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{j_n} B_{in}.$$

Таким чином, для будь-яких  $E \subset X$  і  $\varepsilon > 0$  справджується

$$\lambda^*(E) + \varepsilon > \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A),$$

звідки при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  ми отримаємо (2.20). □

Згідно з теоремою 2.7, вказана  $\lambda^*$  буде продовженням  $\lambda$  з півкільця  $\mathcal{P}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{S}$ .

Загальна схема продовження міри за Каратеодорі виглядає так. Початково міра  $\lambda$  визначається на півкільці  $\mathcal{P}$ . Означення 2.5 задає на  $2^X$  зовнішню міру  $\lambda^*$  за значеннями  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  буде мірою на  $\sigma$ -алгебрі вимірних множин  $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$ , при цьому  $\lambda = \lambda^*$  на  $\mathcal{P}$ .

Отримане продовження міри  $\lambda$  з  $\mathcal{P}$  на  $\mathcal{S}$  також часто позначають через  $\lambda$ .

Однозначність продовження  $\lambda$  доведемо лише для  $\sigma$ -скінченних мір.

**Теорема 2.8.** *Нехай  $\lambda$  —  $\sigma$ -скінченна міра на півкільці  $\mathcal{P}$ , що породжує зовнішню міру  $\lambda^*$ , і  $\mathcal{S}$  — клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно  $\lambda^*$ . Якщо  $\tilde{\lambda}$  — довільне продовження  $\lambda$  на  $\mathcal{S}$ , то*

$$\forall A \in \mathcal{S} : \tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A).$$

*Доведення. Крок 1.* Спочатку припустимо, що  $X \in \mathcal{P}$  і  $\lambda(X) < \infty$ . Для  $A \in \mathcal{S}$  візьмемо довільні  $A_n \in \mathcal{P}$ ,  $n \geq 1$ , такі, що  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  (вони існують, наприклад, із  $A_1 = X$ ). Тоді, за відповідною властивістю міри,

$$\tilde{\lambda}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(A_n) \stackrel{A_n \in \mathcal{P}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

З означення 2.5 породженої зовнішньої міри отримуємо, що  $\tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(A)$ . Повторивши аналогічні міркування для  $(X \setminus A) \in \mathcal{S}$ , отримуємо

$$\tilde{\lambda}(X \setminus A) \leq \lambda^*(X \setminus A) \Rightarrow \tilde{\lambda}(X) - \tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(X) - \lambda^*(A) \Rightarrow \tilde{\lambda}(A) \geq \lambda^*(A).$$

(ми використали такі властивості:  $\tilde{\lambda}(X) = \lambda^*(X) = \lambda(X) < +\infty$ ). Із двох протилежних нерівностей маємо, що  $\tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A)$ .

**Крок 2.** Тепер розглянемо загальний випадок у твердженні. Оскільки  $\lambda \in \sigma$ -скінченною, то

$$\exists X_n \in \mathcal{P}, n \geq 1 : X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \lambda(X_n) < +\infty.$$

Перейдемо в об'єднанні до неперетинних множин із  $\mathcal{P}$ . Для цього візьмемо

$$Y_1 = X_1, \quad Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k, \quad n \geq 2,$$

$$X_n \in k(\mathcal{P}) \Rightarrow Y_n \in k(\mathcal{P}) \stackrel{(1.5)}{\Rightarrow} Y_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} Z_{kn}, \quad Z_{kn} \in \mathcal{P} \text{ неперетинні,}$$

і маємо  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} Z_{kn}$ . Використовуючи крок 1 та  $\sigma$ -адитивність  $\tilde{\lambda}$  і  $\lambda^*$ , для  $A \in \mathcal{S}$  отримуємо

$$\tilde{\lambda}(A \cap Z_{kn}) = \lambda^*(A \cap Z_{kn}) \Rightarrow \tilde{\lambda}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tilde{\lambda}(A \cap Z_{kn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \lambda^*(A \cap Z_{kn}) = \lambda^*(A). \quad \square$$

**Наслідок 2.3.** Нехай  $\lambda$  —  $\sigma$ -скінченна міра на півкільці  $\mathcal{P}$ , міри  $\tilde{\lambda}_1$  і  $\tilde{\lambda}_2$  — два її продовження на  $\sigma k(\mathcal{P})$ . Тоді

$$\forall A \in \sigma k(\mathcal{P}) : \tilde{\lambda}_1(A) = \tilde{\lambda}_2(A).$$

*Доведення.* Маємо  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \sigma k(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}$ . □

**Теорема 2.9** (теорема про наближення міри її значеннями на кільці). Нехай міра  $\lambda$  —  $\sigma$ -скінченна міра на півкільці  $\mathcal{P}$ , довільним чином продовжена на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{S}$  множин, вимірних за Каратеодорі відносно породженої  $\lambda^*$ . Тоді

$$\forall A \in \mathcal{S}, \lambda(A) < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in k(\mathcal{P}) : \lambda(A \Delta B) < \varepsilon. \quad (2.21)$$

*Доведення.* За теоремою 2.8, продовження  $\lambda$  з  $\mathcal{P}$  на  $\mathcal{S}$  визначається однозначно, і, зокрема, має збігатися з  $\lambda^*$ . Значить,  $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ , і з (2.14) маємо

$$\exists A_n \in \mathcal{P}, n \geq 1 : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \lambda(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тут у збіжному ряді виберемо таке  $j \geq 1$ , що

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

і покладемо  $B = \bigcup_{n=1}^j A_n$ . Тоді  $B \in k(\mathcal{P})$  і

$$\begin{aligned} \lambda(A \setminus B) &\leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=j+1}^{\infty} A_n \setminus B\right) \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda(B \setminus A) &\leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Звідси маємо  $\lambda(A \Delta B) = \lambda(A \setminus B) + \lambda(B \setminus A) < \varepsilon$ . □

**Зауваження 2.5.** Властивість (2.21) можна покласти в основу означення вимірності. Нехай скінченна міра  $\lambda$  задана на алгебрі  $\mathcal{A}$ , зовнішня міра  $\lambda^*$  породжена значеннями  $\lambda$ . Множина  $A \subset X$  називається вимірною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{A} : \lambda^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Можна довести, що клас цих вимірних множин є  $\sigma$ -алгеброю і збігається з класом  $\mathcal{S}$  множин, вимірних за Каратеодорі. Побудову продовження міри, що спирається на це означення вимірності, наведено, наприклад, у [3], [4], [9], [10].

## 2.6 Міра Лебега в $\mathbb{R}^d$ . Міра Лебега–Стілтєса в $\mathbb{R}$

Візьмемо універсальну множину  $X = \mathbb{R}^d$ . На класі підмножин

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

визначимо функцію

$$\lambda_d \left( \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \right) := \prod_{k=1}^d (b_k - a_k).$$

Тоді  $\lambda_d$  є мірою на півкільці  $\mathcal{P}_d$  (див. наслідок 2.1), за  $\lambda_d$  визначимо зовнішню міру  $\lambda_d^*$ . Через  $\mathcal{S}_d$  позначимо клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно  $\lambda_d^*$ .

Тоді множини з  $\mathcal{S}_d$  називаються *вимірними за Лебегом* в  $\mathbb{R}^d$ , звуження  $\lambda_d^*$  на  $\mathcal{S}_d$  називається *мірою Лебега* в  $\mathbb{R}^d$ . Міру Лебега на  $\mathcal{S}_d$  також позначатимемо через  $\lambda_d$ .

Із підрозділу 2.5 маємо, що  $\mathcal{S}_d$  є  $\sigma$ -алгеброю, що містить  $\mathcal{P}_d$ , тому

$$\mathcal{S}_d \supset \sigma(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Значить, кожна борельова множина є вимірною за Лебегом.

Із наслідку 2.2 випливає, що  $\lambda_d$  на  $\mathcal{S}_d$  — повна міра (відмітимо, що звуження  $\lambda_d$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  вже повною мірою не буде).

**Зауваження 2.6.** Міра Лебега інваріантна відносно зсувів, тобто

$$\forall A \in \mathcal{S}_d, c \in \mathbb{R}^d : A + c := \{x + c \mid x \in A\} \in \mathcal{S}_d, \lambda_d(A + c) = \lambda_d(A).$$

Адже при зсувах зберігаються міри брусів з  $\mathcal{P}_d$ , тому не змінюються значення зовнішніх мір,  $\lambda_d^*(E + c) = \lambda_d^*(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^d$ . З означення вимірності за Каратеодорі легко отримується, що

$$A + c \text{ вимірна відносно } \lambda_d^* \Leftrightarrow A \text{ вимірна відносно } \lambda_d^*,$$

і при цьому  $\lambda_d^*(A + c) = \lambda_d^*(A)$ .

Використовуючи теореми про неперервність міри,  $\sigma$ -адитивність міри і те, що  $\lambda_1((a, b]) = b - a$ , ми знайдемо **значення міри Лебега деяких підмножин  $\mathbb{R}$** .

**1.** Міра Лебега одноточкової множини дорівнює нулю. Маємо

$$\lambda_1(\{b\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1\left(\left(b - \frac{1}{n}, b\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**2.** Міра Лебега будь-якої скінченної або зліченної множини дорівнює нулю, оскільки це скінченна або зліченна сума мір одноточкових множин.

**3.** Міра Лебега кожного з інтервалів  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$  дорівнює  $b - a$ . Наприклад, маємо

$$\lambda_1([a, b]) = \lambda_1(\{a\}) + \lambda_1((a, b]) = 0 + (b - a) = b - a,$$

інші інтервали розглядаються аналогічно.

**4.** Міра Лебега всієї множини  $\mathbb{R}$  дорівнює  $+\infty$ . Адже

$$\lambda_1(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1((-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty.$$

Наступне твердження покаже, що міра Лебега  $\lambda_d$  є продовженням міри Жордана  $m$ .



**Теорема 2.10.** Нехай множина  $A \subset \mathbb{R}^d$  вимірна за Жорданом. Тоді  $A$  вимірна за Лебегом, і значення мір Жордана і Лебега для неї збігаються.

*Доведення.* За теоремою 2.3  $m$  є мірою на кільці вимірних за Жорданом множин  $\mathcal{K}_m$ . На множинах із  $\mathcal{P}_d$  маємо

$$\lambda_d\left(\prod_{k=1}^d (a_k, b_k]\right) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k) = m\left(\prod_{k=1}^d (a_k, b_k]\right).$$

З наслідку 2.3 випливає, що продовження  $\lambda_d$  і  $m$  збігаються на  $\sigma k(\mathcal{P}_d)$ , при цьому  $\sigma k(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  (теорема 1.5).

Користуючись лемою 2.1, для кожного  $n \geq 1$  візьмемо замкнену множину  $F_n \in \mathcal{K}_m$  і відкриту множину  $U_n \in \mathcal{K}_m$  такі, що

$$F_n \subset A \subset U_n, \quad m(A) - m(F_n) < \frac{1}{n}, \quad m(U_n) - m(A) < \frac{1}{n}. \quad (2.22)$$

Маємо, що  $F_n, U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , тому

$$m(F_n) = \lambda_d(F_n), \quad m(U_n) = \lambda_d(U_n). \quad (2.23)$$

Для кожного  $j \geq 1$

$$\lambda_d\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \lambda_d(U_j \setminus F_j) = \lambda_d(U_j) - \lambda_d(F_j) \stackrel{(2.22), (2.23)}{<} \frac{2}{j} \Rightarrow \lambda_d\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0.$$

Оскільки міра  $\lambda_d$  повна на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{S}_d$ , то

$$\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \Rightarrow \left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \in \mathcal{S}_d \Rightarrow A \in \mathcal{S}_d.$$

При цьому для кожного  $j \geq 1$

$$\begin{aligned} F_j \subset A \subset U_j &\Rightarrow \lambda_d(F_j) \leq \lambda_d(A) \leq \lambda_d(U_j) \stackrel{(2.23)}{\Rightarrow} m(F_j) \leq \lambda_d(A) \leq m(U_j) \stackrel{(2.22)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(2.22)}{\Rightarrow} \forall j \geq 1: m(A) - \frac{1}{j} \leq \lambda_d(A) \leq m(A) + \frac{1}{j} \stackrel{j \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \lambda_d(A) = m(A). \quad \square \end{aligned}$$

**Приклад 2.8 (підмножина  $\mathbb{R}$ , що не є вимірною за Лебегом).** Існування невимірної множини покажемо у припущенні, що справджується аксіома вибору.

Для чисел відрізка  $[0, 1]$  уведемо відношення еквівалентності так:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Це відношення дає розбиття на класи еквівалентності  $[0, 1] = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ . Узнявши рівно по одному елементу з кожного класу  $A_{\alpha}$ , утворимо множину  $B \subset [0, 1]$  (саме можливість створення такої множини є твердженням аксіоми вибору). Припустимо, що  $B \in \mathcal{S}_1$ , тоді визначено значення  $\lambda_1(B)$ .

Нехай  $\lambda_1(B) = 0$ . Маємо

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (B + r), \quad B + r \text{ неперетинні.} \quad (2.24)$$

Дійсно, для кожного  $x \in [0, 1]$  знайдеться еквівалентний йому  $y \in B$  і тоді  $x \in (B + r)$  для  $r = x - y$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . Якби

$$x \in (B + r_1) \cap (B + r_2) \Leftrightarrow x - r_1, x - r_2 \in B,$$

то у  $B$  знайшлося б два різних елементи з раціональною різницею, що суперечить побудові  $B$ . Нагадаємо, що міра  $\lambda_1$  не змінюється при зсувах множин, тому всі  $\lambda_1(B + r) = 0$ . Із (2.24) отримаємо

$$\lambda_1([0, 1]) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda_1(B + r) = 0.$$

Нехай  $\lambda_1(B) > 0$ . Маємо

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (B + r) \subset [-1, 2], \quad B + r \text{ неперетинні.}$$

Тому

$$\lambda_1([-1, 2]) \geq \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda_1(B + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda_1(B) = +\infty. \quad (2.25)$$

В обох випадках значень  $\lambda_1(B)$  отримано суперечність.

Тепер уведемо міру Лебега–Стілтєса. Нехай  $X = \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — неспадна неперервна справа функція. На півкільці  $\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  визначимо функцію множин

$$\lambda_F((a, b]) := F(b) - F(a).$$

Тоді  $\lambda_F$  є мірою на  $\mathcal{P}_1$  (теорема 2.4), за нею визначимо зовнішню міру  $\lambda_F^*$ . Через  $\mathcal{S}_F$  позначимо клас множин, вимірних за Каратеодорі відносно  $\lambda_F^*$ .

Тоді множини з  $\mathcal{S}_F$  називаються *вимірними за Лебегом–Стілтєсом*, звуження  $\lambda_F^*$  на  $\mathcal{S}_F$  називатимемо *мірою Лебега–Стілтєса* і також позначатимемо через  $\lambda_F$ .

Зазначимо, що для будь-якої функції  $F$  справджується  $\mathcal{S}_F \supset \mathcal{P}_1$ , і тому  $\mathcal{S}_F \supset \sigma(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Зауваження 2.7.** Будь-яка міра  $\lambda$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , що набуває скінченних значень на обмежених множинах, є частинним випадком міри Лебега–Стілтєса. Можемо, наприклад, взяти функцію

$$F(x) = \begin{cases} \lambda((0, x]), & x \geq 0, \\ -\lambda((x, 0]), & x < 0, \end{cases}$$

і тоді  $\lambda = \lambda_F$ .

## 2.7 Регулярність мір

У цьому підрозділі доведемо важливу властивість мір, визначених на підмножинах  $\mathbb{R}^d$ . Нехай міра  $\lambda$  визначена на півкільці  $\mathcal{P}_d$  і за схемою Каратеодорі продовжена на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{S}$ . Нагадаємо, що таке продовження єдине і збігається з  $\lambda^*$ , і  $\mathcal{S}$  містить борельову  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Теорема 2.11.** *Нехай  $\lambda$  — міра на  $\mathcal{S}$ , скінченна на обмежених множинах. Тоді для будь-яких  $A \in \mathcal{S}$ ,  $\lambda(A) < +\infty$ , і  $\varepsilon > 0$  знайдуться компактна множина  $K_\varepsilon$  і відкрита множина  $U_\varepsilon$  такі, що*

$$K_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon, \quad \lambda(A) - \lambda(K_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \lambda(U_\varepsilon) - \lambda(A) < \varepsilon.$$

*Доведення.* За теоремою 2.8,

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \mid A_n \in \mathcal{P}_d, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Тому знайдуться  $A_n \in \mathcal{P}_d$  такі, що

$$A_n = \prod_{k=1}^d (a_{kn}, b_{kn}], \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.26)$$

Для кожного  $n \geq 1$  розглядатимемо відкриті множини

$$U_n = \prod_{k=1}^d (a_{kn}, b_{kn} + \delta), \quad U_n \downarrow A_n, \quad \delta \downarrow 0.$$

За неперервністю міри зверху, маємо  $\lambda(U_n) \rightarrow \lambda(A_n)$ ,  $\delta \downarrow 0$ , і для кожного  $n \geq 1$  можемо вибрати  $\delta = \delta_n > 0$  таке, що

$$\lambda(U_n) < \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тоді  $U_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  задовольняє твердження теореми. Дістаємо

$$\lambda(U_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{(2.26)}{<} \lambda(A) + \varepsilon.$$

Виконання інших умов для  $U_\varepsilon$  з очевидністю впливають з її побудови.

Побудуємо  $K_\varepsilon$ . За неперервністю міри зверху, маємо

$$(A \setminus [-j, j]^d) \downarrow \emptyset \Rightarrow \lambda(A \setminus [-j, j]^d) \downarrow 0, \quad j \uparrow \infty,$$

і зафіксуємо таке  $j$ , що

$$\lambda(A \setminus [-j, j]^d) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.27)$$

Використовуючи доведене в теоремі вище, виберемо відкриту множину  $\tilde{U}_{\varepsilon/2}$  таку, що

$$([-j, j]^d \setminus A) \subset \tilde{U}_{\varepsilon/2}, \quad \lambda(\tilde{U}_{\varepsilon/2}) - \lambda([-j, j]^d \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.28)$$

і покладемо

$$K_\varepsilon = [-j, j]^d \setminus \tilde{U}_{\varepsilon/2}.$$

Тоді  $K_\varepsilon \subset A$  (якщо  $x \in K_\varepsilon$  і  $x \notin A$ , ми одночасно отримаємо, що  $x \notin \tilde{U}_{\varepsilon/2}$  і  $x \in \tilde{U}_{\varepsilon/2}$ ). Множина  $K_\varepsilon$  замкнена як перетин двох замкнених:  $[-j, j]^d$  і доповнення до  $\tilde{U}_{\varepsilon/2}$ , є компактом оскільки також є обмеженою. Крім того, легко перевіряється включення

$$A \setminus K_\varepsilon = (A \setminus [-j, j]^d) \cup (\tilde{U}_{\varepsilon/2} \setminus ([-j, j]^d \setminus A)),$$

використовуючи для двох елементів об'єднання нерівності з (2.27) і (2.28), отримаємо

$$\lambda(A \setminus K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Очевидним наслідком теореми 2.11 є наступна властивість  $\lambda$ , яку часто називають властивістю *регулярності міри*.

**Наслідок 2.4.** *Нехай  $\lambda$  — міра на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , скінченна на обмежених множинах,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\lambda(A) < +\infty$ . Тоді*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A, K \text{ — компакт}\} = \inf\{\lambda(U) \mid U \supset A, U \text{ — відкрита}\}.$$

Наступне твердження показує, що множини, вимірні за Каратеодорі, є, у певному сенсі, близькими до борельових множин.

**Наслідок 2.5.** *Нехай  $\lambda$  — міра на  $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}_d$ , скінченна на обмежених множинах,  $A \in \mathcal{S}$ . Тоді*

$$\exists B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : B \subset A \subset C, \quad \lambda(B) = \lambda(A) = \lambda(C).$$

*Доведення.* Спочатку припустимо, що  $\lambda(A) < +\infty$ . Користуючись теоремою 2.11 для  $\varepsilon = 1/n$ , для всіх  $n \geq 1$  візьмемо компакт  $K_{1/n}$  і відкриту множину  $U_{1/n}$  такі, що

$$K_{1/n} \subset A \subset U_{1/n}, \quad \lambda(A) - \lambda(K_{1/n}) < \frac{1}{n}, \quad \lambda(U_{1/n}) - \lambda(A) < \frac{1}{n}.$$

Покладемо

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{1/n}, \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{1/n},$$

очевидно, що  $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $K_{1/n} \subset B \subset A \subset C \subset U_{1/n}$ . Також для кожного  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda(A) - \lambda(B) &\leq \lambda(A) - \lambda(K_{1/n}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda(A) - \lambda(B) = 0, \\ \lambda(C) - \lambda(A) &\leq \lambda(U_{1/n}) - \lambda(A) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda(C) - \lambda(A) = 0. \end{aligned}$$

Якщо  $\lambda(A) = +\infty$ , ми довільним чином представимо  $\mathbb{R}^d$  у вигляді зліченного об'єднання брусів:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j, \quad D_j \in \mathcal{P}_d \text{ неперетинні.}$$

Тоді  $\lambda(A \cap D_j) < +\infty$ , для кожного такого перетину візьмемо

$$B_j, C_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : B_j \subset (A \cap D_j) \subset C_j.$$

Множини  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ ,  $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ , очевидно, задовольняють твердженню наслідку.  $\square$

## Вправи

**Вправа 2.1.** Навести приклад невід'ємної адитивної функції множин на півкільці, що не є мірою.

**Вправа 2.2.** Нехай  $\lambda$  — адитивна функція множин на кільці  $\mathcal{K}$ . Довести, що для  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda(A_k) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} \lambda(A_k \cap A_l) + \\ &+ \sum_{1 \leq k < l < m \leq n} \lambda(A_k \cap A_l \cap A_m) - \dots + (-1)^{n+1} \lambda\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right). \end{aligned}$$

**Вправа 2.3.** Нехай  $\lambda$  — невід'ємна, скінченно-адитивна, скінченна функція множин на кільці  $\mathcal{K}$ , неперервна в  $\emptyset$  зверху (тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = 0$  для будь-яких  $A_n \downarrow \emptyset$ ,  $A_n \in \mathcal{K}$ ). Довести, що  $\lambda$  — міра на  $\mathcal{K}$ .

**Вправа 2.4.** Нехай  $\lambda$  — невід'ємна, скінченно-адитивна,  $\sigma$ -півадитивна функція множин на кільці  $\mathcal{K}$ . Довести, що  $\lambda$  — міра на  $\mathcal{K}$ .

**Вправа 2.5.** Нехай  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — неспадна неперервна зліва функція. На півкільці  $\mathcal{P}'_1 = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  визначимо функцію множин  $\lambda_F([a, b)) := F(b) - F(a)$ . Довести, що  $\lambda_F$  є мірою на  $\mathcal{P}'_1$ .

**Вправа 2.6** (лема Бореля – Кантеллі). Нехай  $\lambda$  — міра на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{A}$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$ . Довести, що

$$\lambda(\{x : x \text{ належать нескінченній кількості } A_n, n \geq 1\}) = 0.$$

**Вправа 2.7.** Довести, що не існує інваріантної відносно зсувів міри  $\lambda$ , визначеної на  $2^{\mathbb{R}}$  і такої, що  $\lambda([0, 1]) = 1$ .

## Розділ 3

# Вимірні функції. Збіжність

### 3.1 Означення вимірної функції. Приклади

**Означення 3.1.** *Вимірним простором* називається пара  $(X, \mathcal{F})$ , де  $\mathcal{F}$  — деяка  $\sigma$ -алгебра підмножин непорожньої множини  $X$ .

У подальшому ми вивчатимемо властивості функцій  $f : X \rightarrow Y$ , пов'язані з наявністю  $\sigma$ -алгебр у просторах  $X$  та  $Y$ . При цьому важливу роль гратимуть прообрази множин

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}, \quad B \subset Y.$$

Нагадаємо, що прообрази мають такі властивості:

- 1)  $f^{-1}(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$ ;
- 2)  $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$ ;
- 3)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(тут  $B_{\alpha} \subset Y$ ,  $\alpha$  пробігає довільну множину індексів).

**Означення 3.2.** Нехай  $(X, \mathcal{F}_X)$  і  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  — вимірні простори. Функція  $f : X \rightarrow Y$  називається  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною, якщо для кожної множини  $B \in \mathcal{F}_Y$  справджується  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ .

Скорочено вимогу означення можна написати так:  $f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \subset \mathcal{F}_X$ . Якщо з контексту зрозуміло, які  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_X$  та  $\mathcal{F}_Y$  розглядаються,  $f$  може просто називатися *вимірною*.

**Приклад 3.1.** У випадку  $\mathcal{F}_X = 2^X$  будь-яка функція  $f : X \rightarrow Y$  буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною.

**Приклад 3.2** (тотожне відображення). Якщо  $Y = X$ ,  $f(x) = x$ , то функція  $f$  буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_X)$ -вимірною (оскільки тут  $f^{-1}(B) = B$ ).

**Приклад 3.3** (постійне відображення). Функція  $f(x) = c$ ,  $c \in Y$ , завжди буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною. Адже тоді  $f^{-1}(B)$  дорівнює  $X$  або  $\emptyset$  у випадках  $c \in B$  та  $c \notin B$  відповідно.

Наступне твердження в багатьох випадках спрощує перевірку вимірності функції.

**Теорема 3.1.** *Нехай  $(X, \mathcal{F}_X)$  і  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  — вимірні простори,  $f : X \rightarrow Y$ , і для класу  $\mathcal{H}$  підмножин  $Y$  справджується, що*

$$\mathcal{F}_Y \subset \sigma(\mathcal{H}), \quad \forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X.$$

Тоді функція  $f$  є  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною.

*Доведення.* Розглянемо клас множин

$$\mathcal{L} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}.$$

За умовою теореми,  $\mathcal{L} \supset \mathcal{H}$ .

Крім того,  $\mathcal{L}$  є  $\sigma$ -алгеброю. Якщо  $B_n \in \mathcal{L}$ ,  $n \geq 1$ , то  $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_X$ , із властивостей прообразів і означення  $\sigma$ -алгебри отримуємо

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_X, \\ f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_X, \end{aligned}$$

а отже  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ,  $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{L}$ . Також  $X = f^{-1}(Y)$ ,  $Y \in \mathcal{F}_Y$ , і тому  $X \in \mathcal{L}$ .

Значить,  $\mathcal{L} \supset \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$ ,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$  для всіх  $B \in \mathcal{F}_Y$ ,  $f$  задовольняє означенню вимірності.  $\square$

У більшості випадків (зокрема, при означенні інтеграла Лебега нижче) матимемо справу з дійснозначними функціями, і тоді в  $\mathbb{R}$  буде братися борельова  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Означення 3.3.** Нехай  $(X, \mathcal{F})$  — вимірний простір. Функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  називається  $\mathcal{F}$ -вимірною, якщо вона  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -вимірна.

**Наслідок 3.1.** Наступні твердження еквівалентні:

- 1) функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -вимірна;
- 2)  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) = \{f < a\} \in \mathcal{F}$ ;
- 3)  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a]) = \{f \leq a\} \in \mathcal{F}$ ;
- 4)  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty)) = \{f \geq a\} \in \mathcal{F}$ ;
- 5)  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) = \{f > a\} \in \mathcal{F}$ .

*Доведення.* Нехай справджується 1). У твердженнях 2)–5) розглядаються прообрази борельових множин, тому вони мають належати  $\mathcal{F}$ .

Покажемо, що з 2) випливає 1). Розглянемо клас множин

$$\mathcal{H} = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\},$$

і покажемо, що  $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Маємо, що для всіх  $a, b \in \mathbb{R}$  виконується

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n \geq 1} \left(-\infty, b + \frac{1}{n}\right) \in \sigma a(\mathcal{H}),$$

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma a(\mathcal{H}) \Rightarrow \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{P}_1 \Rightarrow \sigma a(\mathcal{H}) \supset \sigma a(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Із теореми 3.1 випливає вимірність  $f$ .

Аналогічно доводиться, що 1) випливає з 3), 4) та 5), в усіх цих випадках  $\sigma$ -алгебри, породжені цими класами множин, містять  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (і навіть збігаються з нею).  $\square$

**Приклад 3.4.** Для  $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$  маємо

$$\{x \in X : \mathbf{1}_A(x) \geq a\} = \begin{cases} X, & a \leq 0, \\ A, & 0 < a \leq 1, \\ \emptyset, & a > 1. \end{cases}$$

Тому ця функція  $\mathcal{F}$ -вимірна тоді й тільки тоді, коли  $A \in \mathcal{F}$ .

**Означення 3.4.** Нехай  $Y$  — метричний простір,  $\mathcal{B}(Y)$  — борельова  $\sigma$ -алгебра в  $Y$ . Функція  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  називається *борельовою*, якщо вона  $(\mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -вимірна.

**Приклади борельових функцій.**

1. Якщо  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна на  $Y$ , то вона борельова. Адже тоді  $\{x : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$  є відкритою множиною в  $Y$  (як прообраз відкритої множини при неперервному відображенні), і тому належить  $\mathcal{B}(Y)$ . Із наслідку 3.1 маємо потрібну вимірність.

2. Якщо  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна на  $\mathbb{R}$ , то вона борельова (ми розглядаємо стандартну метрику на  $\mathbb{R}$ ). Припустимо, наприклад, що  $f$  неспадна. Тоді множина  $\{x : f(x) < a\}$  є однією із множин вигляду:  $\emptyset$ ,  $(-\infty, x_0)$ ,  $(-\infty, x_0]$ ,  $\mathbb{R}$ , і в усіх випадках належить  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Цілком аналогічно можна показати, що буде борельовою монотонна функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Означення 3.5.** Функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{S}_d$ , називається *вимірною за Лебегом*, якщо вона  $(\mathcal{S}_d \cap A, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -вимірна.

Вимірні за Лебегом функції для нас важливі тому, що це — клас функцій  $f$ , для яких визначені міри

$$\lambda_d(\{x : f(x) \in B\}) = \lambda_d(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

адже вказані прообрази належать  $\mathcal{S}_d$ . Очевидно, що якщо  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  борельова, то вона вимірна за Лебегом.

**Зауваження 3.1.** Також розглядатимемо функції зі значеннями в  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ . Якщо покласти  $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ , де  $\arctg(-\infty) = -\pi/2$ ,  $\arctg(+\infty) = \pi/2$ , то  $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$  стає метричним простором. Нескладно переконалися, що елементами борельової  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  є всі множини з  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , а також об'єднання цих множин із  $\{-\infty\}$  та з  $\{+\infty\}$ . Функцію  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  також називатимемо  $\mathcal{F}$ -вимірною, якщо вона  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ -вимірна. Як правило, твердження нижче дані для функцій зі значеннями в  $\mathbb{R}$ , але вони легко переносяться на випадок  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (якщо при цьому не виникає невизначеності типу  $\infty - \infty$  або  $\frac{\infty}{\infty}$ , для доведення достатньо розглянути дійсну функцію  $f \mathbf{1}_{|f| < \infty}$ ).

## 3.2 Дії з вимірними функціями

**Теорема 3.2 (теорема про суперпозицію вимірних відображень).** *Нехай  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ ,  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  – вимірні простори, функція  $f : X \rightarrow Y$  є  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною, а функція  $g : Y \rightarrow Z$  є  $(\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною. Тоді функція  $h(x) = g(f(x)) : X \rightarrow Z$  є  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною.*

*Доведення.* Нехай  $B \in \mathcal{F}_Z$ . Розглянемо прообраз

$$h^{-1}(B) = \{x \in X : h(x) = g(f(x)) \in B\} = \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(B)\} = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Із вимірності  $g$  отримуємо, що  $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}_Y$ , а згідно з відповідною вимірністю  $f$  далі дістаємо, що  $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_X$ .  $\square$

**Наслідок 3.2.** *Нехай  $(X, \mathcal{F}_X)$  – вимірний простір, функції  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq d$ ,  $\mathcal{F}_X$ -вимірні, функція  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  – борельова. Тоді функція  $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_d(x)) : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}_X$ -вимірна.*

*Доведення.* Ми можемо використати теорему 3.2 для  $Y = \mathbb{R}^d$ ,  $Z = \mathbb{R}$ , борельових  $\sigma$ -алгебр у цих просторах і функції

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x)) : X \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Для цього лише треба довести, що  $f \in (\mathcal{F}_X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -вимірною. Оскільки  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{P}_d)$  (теорема 1.5), достатньо довести, що  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$  для будь-якої множини  $B \in \mathcal{P}_d$  (теорема 3.1). Розглянемо прообраз множини з  $\mathcal{P}_d$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\prod_{k=1}^d (a_k, b_k]\right) &= \left\{x \in X : f(x) \in \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]\right\} = \\ &= \{x \in X : f_1(x) \in (a_1, b_1], \dots, f_d(x) \in (a_d, b_d]\} = \bigcap_{k=1}^d f_k^{-1}((a_k, b_k]). \end{aligned}$$

Оскільки  $(a_k, b_k] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то всі функції  $f_k$   $\mathcal{F}_X$ -вимірні, тут ми отримуємо перетин множин з  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_X$ , і тому  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ .  $\square$

**Теорема 3.3.** *Нехай функції  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -вимірні,  $c \in \mathbb{R}$ . Тоді  $\mathcal{F}$ -вимірними є функції*

$$cf_1, |f_1|, f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, \frac{f_1}{f_2} \mathbf{1}_{\{f_2 \neq 0\}}, \max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\}.$$

*Доведення.* Кожен із записаних виразів (крім частки функцій) є суперпозицією неперервної (а тому борельової) функції  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  та вимірних  $f_1, f_2$ . Із наслідку 3.2 випливає потрібна нам  $\mathcal{F}$ -вимірність.

Для  $f = \frac{f_1}{f_2} \mathbf{1}_{\{f_2 \neq 0\}}$  (вважаємо, що  $f(x) = 0$  при  $f_2(x) = 0$ ) і довільного  $a \in \mathbb{R}$  перевіряємо, що

$$\{f < a\} \cap \{f_2 > 0\}, \{f < a\} \cap \{f_2 < 0\}, \{f < a\} \cap \{f_2 = 0\} \in \mathcal{F}.$$

Зокрема, перша множина збігається з  $\{f_1 - af_2 < 0\} \cap \{f_2 > 0\} \in \mathcal{F}$ . Тому  $\{f < a\} \in \mathcal{F}$ , із наслідку 3.1 випливає  $\mathcal{F}$ -вимірність.  $\square$

Зрозуміло, що вказане твердження поширюється на випадок суми, добутку тощо довільної скінченної кількості вимірних функцій.

**Наслідок 3.3.** Нехай функції  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -вимірні. Тоді

$$\{f_1 < f_2\}, \{f_1 \leq f_2\}, \{f_1 = f_2\} \in \mathcal{F}.$$

*Доведення.* Ці множини — це відповідно прообрази борельових множин

$$f^{-1}((-\infty, 0)), f^{-1}((-\infty, 0]), f^{-1}(\{0\})$$

для вимірного відображення  $f = f_1 - f_2$ . □

**Теорема 3.4.** Нехай функції  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}$ -вимірні. Тоді  $\mathcal{F}$ -вимірними є функції

$$g^{(1)}(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x), \quad g^{(2)}(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x), \quad g^{(3)}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad g^{(4)}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Якщо для кожного  $x \in X$  визначена

$$g^{(5)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

то  $g^{(5)}$   $\mathcal{F}$ -вимірна.

*Доведення.* Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  маємо

$$\begin{aligned} \{x : g^{(1)}(x) \geq a\} &= \bigcap_{n \geq 1} \{x : f_n(x) \geq a\}, \\ \{x : g^{(2)}(x) \leq a\} &= \bigcap_{n \geq 1} \{x : f_n(x) \leq a\}, \end{aligned}$$

і записані перетини множин з  $\mathcal{F}$  також лежать у цій  $\sigma$ -алгебрі. Із наслідку 3.1 отримуємо  $\mathcal{F}$ -вимірність  $g^{(1)}$  і  $g^{(2)}$ .

Вимірність  $g^{(3)}$  і  $g^{(4)}$  тепер впливає з відомого зображення верхньої та нижньої границь

$$g^{(3)}(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad g^{(4)}(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x).$$

Якщо для всіх  $x \in X$  визначена  $g^{(5)}(x)$ , то ця функція збігається з  $g^{(3)}$  і тому є  $\mathcal{F}$ -вимірною. □

**Наслідок 3.4.** Нехай функції  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}$ -вимірні,

$$A = \{x \in X : \text{існує } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}.$$

Тоді  $A \in \mathcal{F}$ .

*Доведення.* За позначеннями теореми 3.4,

$$A = \{x \in X : g^{(3)}(x) = g^{(4)}(x)\}.$$

Залишається скористатися твердженнями теореми 3.4 і наслідку 3.3. □

### 3.3 Наближення вимірних функцій простими

При побудові інтеграла Лебега важливу роль відіграватимуть прості функції.

**Означення 3.6.** Функція називається *простою*, якщо її множина значень скінченна.

Нехай  $(X, \mathcal{F})$  — деякий вимірний простір, функція  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  проста,  $\{a_1, \dots, a_n\}$  — її множина значень. Покладемо

$$A_k = \{x \in X : p(x) = a_k\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тоді

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x). \tag{3.1}$$



**Лема 3.1.** Нехай проста функція  $p$  записана у вигляді (3.1), де значення  $a_k$  попарно різні, а множини  $A_k$  попарно неперетинні. Тоді

$$p \text{ є } \mathcal{F}\text{-вимірною} \Leftrightarrow \forall k : A_k \in \mathcal{F}.$$

*Доведення.* ( $\Rightarrow$ )  $A_k = p^{-1}(\{a_k\})$ ,  $\{a_k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , тому для  $\mathcal{F}$ -вимірної  $p$  виконується  $A_k \in \mathcal{F}$ .

( $\Leftarrow$ ) Приклад 3.4 показує, що всі  $\mathbf{1}_{A_k}(x)$   $\mathcal{F}$ -вимірні. За теоремою 3.3, буде вимірною і їх лінійна комбінація — функція  $p$ .  $\square$

**Теорема 3.5.** Нехай функція  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{F}$ -вимірна і невід'ємна. Тоді існує послідовність  $\mathcal{F}$ -вимірних невід'ємних простих функцій  $p_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , таких, що  $p_n(x) \uparrow f(x)$  для кожного  $x \in X$ .

*Доведення.* Покажемо, що твердження теореми справджується для функцій

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{x: k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n}\}}(x) + n \mathbf{1}_{\{x: f(x) > n\}}(x).$$

Тоді кожна  $p_n$  — проста і невід'ємна,  $p_n(x) \leq f(x)$ . Оскільки множини в індикаторах належать  $\mathcal{F}$ , то  $p_n$  —  $\mathcal{F}$ -вимірна.

Побудову  $p_n$  за значеннями  $f$  описуємо таким чином. На числовій прямій відмічаємо точки  $\frac{k}{2^n}$ ,  $0 \leq k \leq n2^n$ . Для кожного  $x \in X$  вибираємо найбільше відмічене значення зліва від  $f(x)$  — це і буде величина  $p_n(x)$ . При переході від  $n$  до  $n+1$  всі відмічені точки зберігаються, і деякі нові точки додаються. При цьому для кожного  $f(x)$  найбільше відмічене значення зліва не може зменшитися, тому  $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$ .

Якщо  $f(x) = +\infty$ , для всіх  $n$  у цій точці матимемо  $f(x) > n$  і  $p_n(x) = n$ . Якщо  $f(x)$  скінченна, то для  $n > f(x)$  одержимо

$$f(x) - \frac{k}{2^n} \leq p_n(x) < f(x).$$

Для кожного  $x \in X$  отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x). \quad \square$$

Далі ми неодноразово вживатимемо позначення

$$\begin{aligned} f_+(x) &= f(x) \mathbf{1}_{\{x: f(x) \geq 0\}}(x) = \max\{f(x), 0\}, \\ f_-(x) &= -f(x) \mathbf{1}_{\{x: f(x) < 0\}}(x) = -\min\{f(x), 0\}. \end{aligned}$$

Функції  $f_+$  і  $f_-$  є  $\mathcal{F}$ -вимірними (якщо  $\mathcal{F}$ -вимірна сама  $f$ ) і невід'ємними. При цьому

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

## 3.4 Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь

Наступні властивості функцій будуть пов'язані з наявністю певної міри.

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір із мірою,  $P(x)$  — певна властивість елементів  $x \in X$ , що для кожного  $x$  справджується або ні.

**Означення 3.7.** Будемо говорити, що властивість  $P(x)$  виконується *майже скрізь* відносно міри  $\lambda$  на множині  $A \subset X$ , якщо існує множина  $N \subset X$ ,  $\lambda(N) = 0$ , така, що для кожного  $x \in A \setminus N$  справджується  $P(x)$ .

При цьому вживаються позначення  $P(x)$  м. с. на  $A$ ,  $P(x) \pmod{\lambda}$  на  $A$ , інколи говорять, що  $P(x)$  справджується для майже всіх  $x \in A$ . Як правило, це означення використовується у випадку  $A = X$ , і тоді вказівка на множину може опускатися в записі.

У двох наступних означеннях окремо зазначимо найважливіші для нас приклади властивостей, що справджуються м. с.

Розглянемо дві функції  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

**Означення 3.8.** Функції  $f$  та  $g$  називаються *еквівалентними* відносно міри  $\lambda$ , якщо існує множина  $N \subset X$ ,  $\lambda(N) = 0$ , така, що для кожного  $x \in X \setminus N$  виконується  $f(x) = g(x)$ .

У цьому випадку вживаються позначення  $f \sim g \pmod{\lambda}$ ,  $f \sim g$ ,  $f = g \pmod{\lambda}$ . Для  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій  $f$  і  $g$  це просто означає, що  $\lambda(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

**Приклад 3.5.** Функція Діріхле  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  визначається за правилом

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Маємо, що  $D \sim 0 \pmod{\lambda_1}$ , де  $\lambda_1$  — міра Лебега. Тут можна взяти  $N = \mathbb{Q}$ .

**Теорема 3.6.** Нехай функція  $f$   $\mathcal{F}$ -вимірна,  $f \sim g \pmod{\lambda}$  і міра  $\lambda$  — повна. Тоді функція  $g$   $\mathcal{F}$ -вимірна.

*Доведення.* Потрібно довести, що для будь-якої множини  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  справджується  $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Маємо

$$g^{-1}(B) = \{x : g(x) \in B\} = \{x : g(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} \cup \{x : g(x) \in B, f(x) = g(x)\} = A_1 \cup A_2.$$

Оскільки  $\lambda$  повна, то для множини  $N$  з означення еквівалентності матимемо

$$A_1 \subset \{x : f(x) \neq g(x)\} \subset N \Rightarrow A_1 \in \mathcal{F}.$$

Також дістанемо

$$A_2 = \{x : f(x) \in B, f(x) = g(x)\} = \{x : f(x) \in B\} \setminus \{x : f(x) \neq g(x)\}.$$

Обидві множини в різниці належать  $\mathcal{F}$  — перша за вимірністю  $f$ , друга — як підмножина  $N$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Отже,  $A_2 \in \mathcal{F}$ ,  $g^{-1}(B) = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ .  $\square$

Розглянемо функції  $f, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$ .

**Означення 3.9.** Функції  $f_n$  збігаються до функції  $f$  *майже скрізь* відносно міри  $\lambda$ , якщо існує множина  $N \subset X$ ,  $\lambda(N) = 0$ , така, що

$$\forall x \in X \setminus N : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Іншими словами, тут ми маємо поточкову збіжність  $f_n$  до  $f$  на множині  $X \setminus N$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Стандартними є позначення:  $f_n \rightarrow f$  м. с.,  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ .

**Приклад 3.6.** Розглянемо  $f_n(x) = \sin^n x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Тоді  $f_n \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$ . Тут  $N = \{(n + 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Теорема 3.7.** Нехай  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$  і  $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$ . Тоді  $f \sim g \pmod{\lambda}$ .

*Доведення.* Візьмемо множини  $N_1$  і  $N_2$  такі, що

$$\begin{aligned} f_n(x) &\rightarrow f(x), & x \in X \setminus N_1, & \lambda(N_1) = 0, \\ f_n(x) &\rightarrow g(x), & x \in X \setminus N_2, & \lambda(N_2) = 0, \end{aligned}$$

і розглянемо множину  $N = N_1 \cup N_2$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Тоді для кожного  $x \in X \setminus N$  буде одночасно справджуватись

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad f_n(x) \rightarrow g(x).$$

Оскільки границя числової послідовності єдина, для всіх цих  $x$  матимемо  $f(x) = g(x)$ , і тому  $f \sim g$ .  $\square$

**Зауваження 3.2.** Легко довести й обернене твердження: якщо  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$  і  $f \sim g \pmod{\lambda}$ , то  $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$ .

**Теорема 3.8.** *Нехай  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , функції  $f_n$   $\mathcal{F}$ -вимірні і міра  $\lambda$  – повна. Тоді функція  $f$   $\mathcal{F}$ -вимірна.*

*Доведення.* Нехай  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  для всіх  $x \in X \setminus N$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Розглянемо функції

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N, \end{cases} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Оскільки міра  $\lambda$  повна і  $\tilde{f}_n \sim f_n$ , то функції  $\tilde{f}_n$   $\mathcal{F}$ -вимірні (теорема 3.6). Для кожного  $x \in X$  виконується  $\tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ , і тому функція  $\tilde{f}$   $\mathcal{F}$ -вимірна (теорема 3.4). З еквівалентності  $\tilde{f}_n \sim f_n$  і теореми 3.6 отримуємо вимірність  $f$ .  $\square$

### 3.5 Теорема Єгорова

**Теорема 3.9 (теорема Єгорова).** *Нехай функції  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}$ -вимірні,  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $\lambda(X) < +\infty$ . Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon, \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon : \sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

*Доведення.* Позначимо  $N = \{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ . Оскільки ці функції вимірні, то  $N \in \mathcal{F}$  і  $\lambda(N) = 0$ . За означенням границі числової послідовності, для довільного  $\delta > 0$  маємо

$$\forall x \in X \setminus N \exists n \geq 1 \forall k \geq n : |f_k(x) - f(x)| < \delta.$$

У записі для множин це означає, що

$$X \setminus N \subset \left( \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| < \delta\} \right).$$

Перейшовши до доповнень отримуємо

$$N \supset \left( \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\} \right).$$

У правій частині включення маємо перетин спадної послідовності множин. Оскільки  $\lambda(N) = 0$ , міра цього перетину дорівнює нулю. Із теореми 2.2 про неперервність міри зверху (з урахуванням умови  $\lambda(X) < +\infty$ ) маємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left( \bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\} \right) = 0.$$

Для кожного  $j \geq 1$  братимемо  $\delta = 1/j$ , і візьмемо такий номер  $n_j$ , що

$$\lambda \left( \bigcup_{k \geq n_j} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq 1/j\} \right) < 2^{-j} \varepsilon. \quad (3.2)$$

Покладемо

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq n_j} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq 1/j\}$$

і покажемо, що для цієї множини справджується твердження теореми. Із (3.2) випливає, що

$$\lambda(A_\varepsilon) < \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \varepsilon = \varepsilon.$$

Також

$$X \setminus A_\varepsilon = \bigcap_{j \geq 1} \bigcap_{k \geq n_j} \{x : |f_k(x) - f(x)| < 1/j\}.$$

Якщо  $k \geq n_j$ , то

$$\sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_k(x) - f(x)| \leq 1/j.$$

Тому є рівномірна збіжність  $f_k$  до  $f$  на  $X \setminus A_\varepsilon$ .  $\square$

**Приклад 3.7.** На множині  $[0, 1]$  маємо, що  $f_n(x) = x^n \rightarrow 0 \pmod{\lambda}_1$ . У цьому випадку можемо взяти  $A_\varepsilon = [1 - \varepsilon/2, 1]$ , і тоді

$$\sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x)| = (1 - \varepsilon/2)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

### 3.6 Збіжність за мірою

Нехай дано  $\mathcal{F}$ -вимірні функції  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$ .

**Означення 3.10.** Функції  $f_n$  збігаються до функції  $f$  за мірою  $\lambda$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \lambda(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для даної збіжності, як правило, вживається позначення  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ .

Знову ми отримуємо єдиність границі з точністю до еквівалентності функцій.

**Теорема 3.10.** Нехай  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$  і  $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ . Тоді  $f \sim g \pmod{\lambda}$ .

*Доведення.* З очевидної нерівності

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

випливає, що

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left( \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \right),$$

і тому

$$\lambda(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \lambda\left(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\right) + \lambda\left(\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\right). \quad (3.3)$$

Оскільки  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$  і  $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ , то для будь-якого  $\varepsilon > 0$  два останні доданки прямують до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , і тому  $\lambda(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ . За теоремою про неперервність міри знизу,

$$\lambda(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x : |f(x) - g(x)| \geq 1/n\}) = 0,$$

звідки і випливає потрібна еквівалентність. □

**Зауваження 3.3.** Справджується й обернене твердження: якщо  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$  і  $f \sim g \pmod{\lambda}$ , то  $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ .

Два наступні приклади показують, що між збіжністю м. с. та збіжністю за мірою немає прямого зв'язку.

**Приклад 3.8.** Розглянемо таку послідовність функцій на  $\mathbb{R}$ :

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[n, n+1]}(x), \quad n \geq 1.$$

Тоді відносно міри Лебега  $\lambda_1$  буде  $f_n \rightarrow 0$  м. с. (адже для кожного фіксованого  $x \in \mathbb{R}$  маємо  $f_n(x) = 0$ , починаючи з деякого номера  $n$ ). При цьому  $f_n \not\xrightarrow{\lambda_1} 0$ , оскільки

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq 1/2\}) = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Приклад 3.9.** ("плаваюча сходінка".) На множині  $\mathbb{R}$  із лебеговою мірою визначимо функції

$$f_{nk}(x) = \mathbf{1}_{[(k-1)/n, k/n]}(x), \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n,$$

і візьмемо їх послідовність  $\{f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots\}$ . Тоді

$$\forall 0 < \varepsilon \leq 1 : \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : |f_{nk}(x)| \geq \varepsilon\}) = 1/n,$$

що прямує до нуля для нашої послідовності. З іншого боку, для кожного фіксованого  $x \in [0, 1]$  серед  $f_{nk}(x)$  нескінченно багато нулів і нескінченно багато одиниць. Тому така числова послідовність не має границі, і збіжність майже скрізь для вказаної послідовності функцій не виконується.

Зв'язок між двома збіжностями справджується за додаткової умови скінченності міри простору.

**Теорема 3.11 (теорема Лебега про зв'язок між збіжностями).** *Нехай функції  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}$ -вимірні,  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $\lambda(X) < +\infty$ . Тоді  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ .*

*Доведення.* Позначимо  $N = \{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Тоді, за означенням границі числової послідовності, маємо

$$\forall x \in X \setminus N \exists n \geq 1 \forall k \geq n : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Це означає, що

$$X \setminus N \subset \left( \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\} \right).$$

Для доповнень отримуємо

$$N \supset \left( \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right).$$

Із неперервності міри зверху та умови  $\lambda(X) < +\infty$  маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left( \bigcup_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$

Замінивши все об'єднання на одну множину з нього (із  $k = n$ ) ми можемо лише зменшити значення міри. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left( \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) = 0,$$

що й означає збіжність  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ . □

Зазначимо, що це твердження також можна вивести з теореми 3.9 (теореми Єгорова).

### 3.7 Фундаментальність за мірою

Як і раніше, розглядаємо  $\mathcal{F}$ -вимірні функції  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ .

**Означення 3.11.** Послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , називається *фундаментальною за мірою  $\lambda$* , якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \exists n_0 \geq 1 \forall m, n \geq n_0 : \lambda(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

Іншими словами, послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , є фундаментальною за мірою  $\lambda$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \lambda(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 3.12.** *Якщо послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , збіжна за мірою  $\lambda$ , то вона фундаментальна за мірою  $\lambda$ .*

*Доведення.* Нехай  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ . Аналогічно нерівності (3.3), для довільного  $\varepsilon > 0$  маємо

$$\lambda(\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \lambda \left( \left\{ x : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) + \lambda \left( \left\{ x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right).$$

При  $m, n \rightarrow \infty$  обидва доданки правої частини нерівності збігаються до нуля. Тому ліва частина нерівності прямує до нуля, що й означає потрібну фундаментальність. □

Наступна теорема матиме кілька важливих наслідків.

**Теорема 3.13.** *Нехай послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , фундаментальна за мірою  $\lambda$ . Тоді існують вимірні функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  та підпослідовність  $f_{n_k}$ ,  $k \geq 1$ , такі, що одночасно*

- 1)  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;
- 2)  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

*Доведення. Крок 1. Вибір  $f_{n_k}$ .* Для кожного  $k \geq 1$  використаємо означення фундаментальності для  $\delta = \varepsilon = 2^{-k}$  і візьмемо  $n_k$  такі, що для всіх  $m, n \geq n_k$ :

$$\lambda \left( \left\{ x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq 2^{-k} \right\} \right) < 2^{-k}.$$

При цьому кожного разу вважатимемо  $n_{k+1} > n_k$ . Так ми отримуємо

$$\lambda \left( \left\{ x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k} \right\} \right) < 2^{-k}. \quad (3.4)$$

Далі покажемо, що саме підпослідовність  $f_{n_k}$ ,  $k \geq 1$ , задовольняє твердження теорема.

**Крок 2. Визначення  $f$ ,  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ .** Розглянемо множину

$$N = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k} \right\} \quad (3.5)$$

(тобто ми включаємо до  $N$  всі  $x \in X$ , для яких записані нерівності виконуються для нескінченної кількості значень  $k$ ). Для кожного  $j \geq 1$  маємо

$$\begin{aligned} \lambda(N) &\leq \lambda \left( \bigcup_{k \geq j} \left\{ x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k} \right\} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k \geq j} \lambda \left( \left\{ x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k} \right\} \right) \stackrel{(3.4)}{<} \sum_{k \geq j} 2^{-k} = 2^{1-j}. \end{aligned}$$

Оскільки  $j$  ми можемо взяти як завгодно великим, то  $\lambda(N) = 0$ .

Для кожного фіксованого  $x \in X \setminus N$  нерівності із (3.5) справджуватимуться для скінченної кількості значень  $k$ . Тому для деякого  $j$  (залежного від цього  $x$ ) для всіх  $k \geq j$  дістаємо

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}. \quad (3.6)$$

Тому для фіксованого  $x \in X \setminus N$  числа послідовність  $f_{n_k}(x)$ ,  $k \geq 1$ , буде фундаментальною. Адже для  $l > k \geq j$

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{l-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \stackrel{(3.6)}{<} \sum_{i=k}^{l-1} 2^{-i} < \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-k},$$

що прямує до нуля при  $k \rightarrow \infty$ .

Значить, для кожного  $x \in X \setminus N$  існує границя послідовності  $f_{n_k}(x)$ ,  $k \geq 1$ , і ми можемо покласти

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x), & x \in X \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Оскільки  $\lambda(N) = 0$ , то  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Також  $f$  є вимірною як границя вимірних функцій:

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k}(x) \mathbf{1}_{X \setminus N}(x)).$$

**Крок 3.  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ .** Візьмемо довільні  $\varepsilon, \delta > 0$ , і зафіксуємо  $j \geq 1$  таке, що  $2^{1-j} < \min\{\varepsilon, \delta\}$ . Покладемо

$$M = \bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k} \right\}. \quad (3.7)$$

Із (3.5) бачимо, що  $N \subset M$ , для  $x \in X \setminus M$  виконується  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ , а також

$$|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| < 2^{-i}, \quad i \geq j. \quad (3.8)$$

Тому для всіх  $k \geq j$  і  $x \in X \setminus M$  маємо

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n_k}(x)| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{l-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \stackrel{(3.8)}{<} \sum_{i=k}^{l-1} 2^{-i} < \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-j} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Значить, для всіх  $k \geq j$

$$\{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\} \subset M,$$

і ми отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda(\{x : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\}) &\leq \lambda(M) \stackrel{(3.7)}{\leq} \\ &\stackrel{(3.7)}{\leq} \sum_{k=j}^{\infty} \lambda(\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k}\}) \stackrel{(3.4)}{<} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-j} < \delta. \end{aligned}$$

Фактично ми перевірили за означенням збіжність

$$\lambda(\{x : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

і тому  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ . □

**Наслідок 3.5 (теорема Ріса).** Якщо  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ , то існує підпослідовність  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

*Доведення.* Оскільки послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , збіжна за мірою, вона фундаментальна за мірою (теорема 3.12). Згідно з теоремою, знайдуться функція  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  та підпослідовність  $f_{n_k}$ ,  $k \geq 1$ , такі, що  $f_{n_k} \rightarrow g \pmod{\lambda}$  і  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$ . Залишається довести, що у цьому випадку ми можемо взяти  $g = f$ .

Якщо  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ , то й будь-яка підпослідовність  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$  (це прямо випливає з означення збіжності за мірою). Також  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$ , і тому  $f \sim g \pmod{\lambda}$  згідно з теоремою 3.10. Але тоді збіжність  $f_{n_k} \rightarrow g \pmod{\lambda}$  еквівалентна збіжності  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$  (зауваження 3.2). □

**Наслідок 3.6.** Послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , фундаментальна за мірою  $\lambda$  тоді й тільки тоді, коли вона збіжна за мірою  $\lambda$ .

*Доведення.* У теоремі 3.12 доведено, що зі збіжності випливає фундаментальність.

Якщо послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , фундаментальна, ми можемо виділити підпослідовність  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ . Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ , і для кожного номера  $n \geq 1$  довільним чином братимемо номер із виділеної підпослідовності  $n_k > n$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  буде  $n_k \rightarrow \infty$ , і матимемо

$$\lambda(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \lambda\left(\left\{x : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

У правій частині нерівності перший доданок прямує до нуля, оскільки наша послідовність фундаментальна, а другий доданок прямує до нуля, тому що  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ . Так ми отримуємо, що

$$\lambda(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0,$$

і значить  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ . □

Зазначимо, що за допомогою теореми Ріса та теореми Єгорова можна отримати наступне відоме твердження.

**Теорема 3.14 (теорема Лузіна).** Нехай  $A = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ ,  $\lambda$  — міра Лебега на  $A$ , функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  вимірна за Лебегом. Тоді для кожного  $\varepsilon > 0$  існує неперервна функція  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  така, що

$$\lambda(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Доведення теореми Лузіна можна знайти, наприклад, у [3] та [9].

## Вправи

**Вправа 3.1.** Довести, що відношення  $f \sim g \pmod{\lambda}$  є відношенням еквівалентності.

**Вправа 3.2.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в кожній точці  $\mathbb{R}$ . Довести, що функція  $f'$  — борельова.

**Вправа 3.3.** Нехай  $\lambda$  — скінченна міра на  $\mathcal{F}$ . Для  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій  $f$  і  $g$  покладемо

$$\rho(f, g) = \sup\{\delta \mid \lambda(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \delta\}) \geq \delta\}.$$

Довести, що  $\rho$  є метрикою на просторі класів еквівалентних вимірних функцій (класів, отриманих за відношенням еквівалентності із вправи 3.1), і збіжність за цією метрикою еквівалентна збіжності за мірою  $\lambda$ .

**Вправа 3.4.** Довести, що

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad g_n \xrightarrow{\lambda} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{\lambda} f + g.$$

**Вправа 3.5.** Навести приклад, у якому

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f, \quad g_n \xrightarrow{\lambda} g, \quad f_n g_n \not\xrightarrow{\lambda} fg.$$

**Вправа 3.6.** Нехай  $\lambda$  — скінченна міра,  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ ,  $g_n \xrightarrow{\lambda} g$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — неперервна функція. Довести, що  $\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow{\lambda} \varphi(f, g)$ .

**Вправа 3.7.** Нехай функція  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  вимірна за Лебегом. Довести, що існує борельова функція  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  така, що  $f \sim g \pmod{\lambda_d}$ .



## Розділ 4

# Інтеграл Лебега

### 4.1 Означення інтеграла

Інтеграл, визначений у цьому підрозділі, власне і називається інтегралом Лебега. Ми дамо означення у трьох частинах, поступово розширюючи клас функцій, для яких визначено інтеграл.

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — довільний вимірний простір із мірою,  $A \in \mathcal{F}$ . Ми розглядаємо  $\mathcal{F}$ -вимірні (як правило, просто говоритимемо — вимірні) функції, що визначені на  $X$  і набувають значень у  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Означення 4.1 (означення інтеграла, частина 1).** Нехай функція  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  — проста, невід’ємна, вимірна,

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad A_k \in \mathcal{F} \text{ неперетинні.} \quad (4.1)$$

Тоді покладемо

$$\int_A p d\lambda := \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A). \quad (4.2)$$

Для інтеграла також можуть уживатися позначення вигляду

$$\int_A p(x) d\lambda(x), \quad \int_A p(x) \lambda(dx).$$

За наявності нескінченних значень у виразах, ми використовуємо такі узгодження для арифметичних дій:

$$0 \cdot (+\infty) = 0, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0), \quad a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0).$$

Покажемо, що значення інтеграла не залежить від конкретного запису  $p$ . Нехай для  $p$  справджується (4.1), а також

$$p(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad B_i \in \mathcal{F} \text{ неперетинні,}$$

причому  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X$  (цього ми можемо досягти, додаючи, за необхідності, доданки з  $a_k = 0$  або  $b_i = 0$ ). Тоді

$$A_k \cap A = \bigcup_{i=1}^j \lambda(A_k \cap B_i \cap A), \quad B_i \cap A = \bigcup_{k=1}^n \lambda(A_k \cap B_i \cap A),$$

де множини в об’єднаннях неперетинні, і

$$\begin{aligned} \int_A p d\lambda &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A), \\ \int_A p d\lambda &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A). \end{aligned}$$

Якщо  $A_k \cap B_i \neq \emptyset$ , то  $a_k = b_i$  (адже для  $x \in A_k \cap B_i$  маємо  $p(x) = a_k = b_i$ ), і тому значення записаних сум рівні.

**Властивості інтеграла від простих невід'ємних вимірних функцій.** Нехай  $p, p_1$  — функції з указанного класу,  $A, B \in \mathcal{F}$ .

1. Якщо  $\forall x \in A : p(x) \geq p_1(x)$ , то  $\int_A p d\lambda \geq \int_A p_1 d\lambda$ .

*Доведення.* Нехай

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad p_1(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbf{1}_{B_i}(x),$$

де  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X$  і множини  $A_k, B_i$  неперетинні в цих об'єднаннях. Тоді

$$\begin{aligned} \int_A p d\lambda &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A), \\ \int_A p_1 d\lambda &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A). \end{aligned}$$

Якщо  $A_k \cap B_i \cap A \neq \emptyset$ , то справджується  $a_k \geq b_i$ , адже

$$x \in A_k \cap B_i \cap A \Rightarrow a_k = p(x) \geq p_1(x) = b_i,$$

і звідси випливає наша властивість. □

2. Якщо  $A \cap B = \emptyset$ , то  $\int_{A \cup B} p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_B p d\lambda$ .

*Доведення.* Використовуючи запис (4.1), з адитивності  $\lambda$  отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} p d\lambda &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap (A \cup B)) = \sum_{k=1}^n a_k (\lambda(A_k \cap A) + \lambda(A_k \cap B)) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap B) = \int_A p d\lambda + \int_B p d\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

3. Якщо  $A \subset B$ , то

$$\int_A p d\lambda \leq \int_B p d\lambda. \quad (4.3)$$

*Доведення.* Із властивості 2 і невід'ємності значення інтеграла дістаємо

$$\int_B p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_{B \setminus A} p d\lambda \geq \int_A p d\lambda. \quad \square$$

**Означення 4.2 (означення інтеграла, частина 2).** Нехай функція  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємна, вимірна,

$$K(f) = \{p : X \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ — проста невід'ємна вимірна, } p(x) \leq f(x)\}.$$

Тоді покладемо

$$\int_A f d\lambda := \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda. \quad (4.4)$$

Зазначимо, що  $K(f) \neq \emptyset$ , тотожний нуль завжди належить цьому набору. У правій частині (4.4) стоять інтеграли, які ми шукаємо за означенням 4.1.

Для обґрунтування коректності означення 4.2 також треба показати, що воно узгоджується з означенням 4.1, і для простої  $p$  обидва означення дають одну величину інтеграла. Тут у записі інтеграла відмітимо цифрою, за якою частиною означення його взято.

З одного боку,  $p \in K(p)$ , і

$$(2) \int_A p d\lambda = \sup_{p_1 \in K(p)} (1) \int_A p_1 d\lambda \geq (1) \int_A p d\lambda,$$

оскільки тут серед елементів супремуму є  $(1) \int_A p d\lambda$ .

З іншого боку,

$$p_1 \in K(p) \Rightarrow p_1(x) \leq p(x) \xrightarrow{\text{Властивість 1}} (1) \int_A p_1 d\lambda \leq (1) \int_A p d\lambda \xrightarrow{\text{Означення 4.2}} (2) \int_A p d\lambda \leq (1) \int_A p d\lambda.$$

Тому ми маємо рівність інтегралів із двох означень.

Далі використаємо позначення

$$f_+(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}(x), \quad f_-(x) = -f(x)\mathbf{1}_{\{f < 0\}}(x).$$

**Означення 4.3 (означення інтеграла, частина 3).** Нехай  $f$  — вимірна функція, для якої є скінченним хоча б один з інтегралів

$$\int_A f_+ d\lambda, \quad \int_A f_- d\lambda. \quad (4.5)$$

Тоді покладемо

$$\int_A f d\lambda := \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda.$$

Якщо обидва інтеграли (4.5) скінченні, функція  $f$  називається *інтегрованою* на  $A$ .

Через  $\mathcal{L}(A, \lambda)$  позначатимемо клас функцій, інтегровних на множині  $A$  за мірою  $\lambda$ .

Тут використано інтеграли від невід'ємних вимірних функцій  $f_+$  і  $f_-$ , що визначені за частиною 2. Легко бачити, що означення 4.2 і 4.3 узгоджуються. Якщо  $f \geq 0$ , то

$$f_- = 0, \quad (2) \int_A f_- d\lambda = 0, \quad (3) \int_A f d\lambda = (2) \int_A f_+ d\lambda - (2) \int_A f_- d\lambda = (2) \int_A f_+ d\lambda.$$

**Зауваження 4.1.** Функція  $f$  є інтегрованою на  $A$  тоді й лише тоді, коли  $\int_A f d\lambda$  визначений і скінченний.

**Приклад 4.1.** На  $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \lambda_1)$  розглянемо функцію

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тоді  $f_+$  і  $f_-$  — прості невід'ємні функції, що рівні 1 на множинах нескінченної міри, і за частиною 1 означення, маємо

$$\int_{\mathbb{R}} f_+ d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f_- d\lambda_1 = +\infty.$$

Для кожної з функцій  $f_+$  і  $f_-$  інтеграл за  $\lambda_1$  визначений, але ці функції не інтегровні на  $\mathbb{R}$ . Інтеграл  $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$  не визначений.

## 4.2 Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій

Доведення різних властивостей інтеграла Лебега часто проводиться за такою схемою: спочатку твердження доводиться для інтеграла від простої невід'ємної функції, потім узагальнюється на інші вимірні функції. У такому узагальненні важливу роль відіграє гранична теорема, яку ми доведемо в цьому підрозділі.

Як і вище,  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — це довільний вимірний простір із мірою,  $A \in \mathcal{F}$ .

**Лема 4.1.** Нехай  $p, p_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , — прості невід'ємні вимірні функції такі, що:

- 1)  $\forall x \in X, n \geq 1 : p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ ;
- 2)  $\forall x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) \geq p(x)$ .

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq \int_A p d\lambda.$$

*Доведення.* Запишемо функцію  $p$  у вигляді

$$p(x) = \sum_{i=1}^j a_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad A_i \in \mathcal{F} \text{ неперетинні.}$$

Для фіксованого  $\varepsilon > 0$  розглянемо множини

$$B_n = \{x \in A : p_n(x) \geq (1 - \varepsilon)p(x)\}.$$

З умови 1) леми випливає, що  $B_n \uparrow$ , з умови 2) — що  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$ . Використовуючи властивості інтеграла від простої функції з підрозділу 4.1, маємо

$$\int_A p_n d\lambda \stackrel{\text{Власт.3}}{\geq} \int_{B_n} p_n d\lambda \stackrel{\text{Власт.1}}{\geq} \int_{B_n} (1 - \varepsilon)p d\lambda = \sum_{i=1}^j (1 - \varepsilon)a_i \lambda(A_i \cap B_n).$$

За неперервністю міри знизу,  $\lambda(A_i \cap B_n) \rightarrow \lambda(A_i \cap A)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j a_i \lambda(A_i \cap A) = (1 - \varepsilon) \int_A p d\lambda$$

(записана тут границя існує як границя неспадної послідовності). Спрямувавши  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , отримаємо твердження леми.  $\square$

**Теорема 4.1.** *Нехай  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємна вимірна функція, а  $p_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , — прості невід'ємні вимірні функції такі, що  $p_n(x) \uparrow f(x)$  для кожного  $x \in X$ . Тоді*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda = \int_A f d\lambda. \quad (4.6)$$

*Доведення.* Зазначимо, що записана в (4.6) границя існує як границя неспадної послідовності. Оскільки  $p_n(x) \leq f(x)$ , то  $p_n \in K(f)$ , і з частини 2 означення інтеграла ми отримуємо

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \geq \int_A p_n d\lambda \Rightarrow \int_A f d\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

З іншого боку, для будь-якої  $p \in K(f)$  маємо

$$p(x) \leq f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) \stackrel{\text{Лема 4.1}}{\Rightarrow} \int_A p d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \stackrel{(4.4)}{\Rightarrow} \int_A f d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

Із двох отриманих протилежних нерівностей випливає рівність (4.6).  $\square$

**Зауваження 4.2.** Вказана в теоремі 4.1 послідовність простих функцій  $p_n$  існує для будь-якої невід'ємної вимірної  $f$  (це видно з теореми 3.5).

### 4.3 Зліченна адитивність інтеграла

**Теорема 4.2.** *Нехай  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємна вимірна функція. Тоді функція множин*

$$\mu(A) = \int_A f d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

*є мірою на  $\mathcal{F}$ .*

*Доведення.* Потрібно довести  $\sigma$ -адитивність  $\mu$ . Нехай  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , — неперетинні множини з  $\mathcal{F}$ ,  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Крок 1.** Розглянемо випадок  $f(x) = \mathbf{1}_B(x)$ ,  $B \in \mathcal{F}$ . Тоді

$$\mu(A) = \lambda(B \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Крок 2.** Нехай функція  $f(x)$  — проста і

$$f(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad B_i \in \mathcal{F}.$$

Тоді

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^j b_i \mu_i(A),$$

де кожна  $\mu_i(A) = \lambda(B_i \cap A)$  —  $\sigma$ -адитивна функція множин. Міра, помножена на невід'ємний коефіцієнт, є мірою, і сума кількох мір є мірою. Тому  $\mu$   $\sigma$ -адитивна.

**Крок 3.** Нехай  $f(x)$  — довільна невід'ємна вимірна функція. Візьмемо прості невід'ємні  $p_r \uparrow f$  (вони існують за теоремою 3.5). Тоді

$$\int_A p_r d\lambda \stackrel{\text{Крок 2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p_r d\lambda \stackrel{(4.4)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

Узявши границю при  $r \rightarrow \infty$ , із теореми 4.1 отримаємо

$$\int_A f d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda. \quad (4.7)$$

З іншого боку, використовуючи властивості 2 і 3 інтегралів від простих функцій, для будь-яких  $r, q \geq 1$  маємо

$$\int_A f d\lambda \stackrel{(4.4)}{\geq} \int_A p_r d\lambda \stackrel{\text{Власт. 3}}{\geq} \int_{\bigcup_{n=1}^q A_n} p_r d\lambda \stackrel{\text{Власт. 2}}{=} \sum_{n=1}^q \int_{A_n} p_r d\lambda.$$

Узявши границю при  $r \rightarrow \infty$ , дістанемо

$$\int_A f d\lambda \geq \sum_{n=1}^q \int_{A_n} f d\lambda.$$

Тепер, спрямувавши  $q \rightarrow \infty$ , отримаємо

$$\int_A f d\lambda \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda. \quad (4.8)$$

Із протилежних нерівностей (4.7) і (4.8) отримуємо рівність, що й означає  $\sigma$ -адитивність  $\mu$ .  $\square$

## 4.4 Елементарні властивості інтеграла

Доведемо основні властивості інтеграла Лебега, якими потім будемо неодноразово користуватися.

Як і раніше,  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір із мірою, ми розглядаємо  $\mathcal{F}$ -вимірні функції  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A, B \in \mathcal{F}$ .

1. Якщо  $\lambda(N) = 0$ , то  $\int_N f d\lambda = 0$ .

*Доведення.* Якщо  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$  — проста невід'ємна функція, то

$$\int_N f d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap N) = 0,$$

адже всі  $\lambda(A_k \cap N) = 0$ . Якщо  $f$  — довільна невід'ємна функція, то існує послідовність простих невід'ємних  $p_r \uparrow f$ , і тоді

$$\int_N f d\lambda \stackrel{\text{Теорема 4.1}}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_N p_r d\lambda = 0.$$

Для довільної вимірної  $f$  маємо

$$\int_{\mathbb{N}} f_+ d\lambda = \int_{\mathbb{N}} f_- d\lambda = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f d\lambda = \int_{\mathbb{N}} f_+ d\lambda - \int_{\mathbb{N}} f_- d\lambda = 0. \quad \square$$

$$2. \int_{\mathbb{X}} f \mathbf{1}_A d\lambda = \int_A f d\lambda \text{ (за умови, що хоча б один із цих інтегралів існує).}$$

*Доведення.* Якщо  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$  — проста невід'ємна функція, то

$$\begin{aligned} f(x) \mathbf{1}_A(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x) \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k \cap A}(x), \\ \int_{\mathbb{X}} f(x) \mathbf{1}_A(x) d\lambda &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) = \int_A f(x) d\lambda. \end{aligned}$$

Для довільної невід'ємної  $f$  візьмемо прості невід'ємні функції  $p_r \uparrow f$ , тоді  $p_r \mathbf{1}_A \uparrow f \mathbf{1}_A$ , і ми маємо

$$\int_{\mathbb{X}} f(x) \mathbf{1}_A(x) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} p_r(x) \mathbf{1}_A(x) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A p_r(x) d\lambda = \int_A f(x) d\lambda.$$

Якщо  $f$  — довільна вимірна функція, то

$$\begin{aligned} (f \mathbf{1}_A)_+ &= f_+ \mathbf{1}_A, \quad (f \mathbf{1}_A)_- = f_- \mathbf{1}_A, \\ \int_{\mathbb{X}} f \mathbf{1}_A d\lambda &= \int_{\mathbb{X}} f_+ \mathbf{1}_A d\lambda - \int_{\mathbb{X}} f_- \mathbf{1}_A d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda = \int_A f d\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

$$3. \int_A c f(x) d\lambda = c \int_A f(x) d\lambda, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (за умови, що } \int_A f(x) d\lambda \text{ існує).}$$

*Доведення.* Нехай  $c \geq 0$ . Якщо  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$  — проста невід'ємна функція, то  $c f(x)$  — також проста невід'ємна, і

$$\int_A c f(x) d\lambda = \int_A \left( \sum_{k=1}^n c a_k \mathbf{1}_{A_k}(x) \right) d\lambda = \sum_{k=1}^n c a_k \lambda(A_k \cap A) = c \int_A f(x) d\lambda. \quad (4.9)$$

Для довільної невід'ємної  $f$  беремо прості невід'ємні функції  $p_r \uparrow f$ , тоді  $c p_r \uparrow c f$ , і ми маємо

$$\int_A c f(x) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} c p_r(x) d\lambda \stackrel{(4.9)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} c \int_{\mathbb{X}} p_r(x) d\lambda = c \int_A f(x) d\lambda. \quad (4.10)$$

Оскільки  $c \geq 0$ , то для довільної  $f$  маємо

$$(c f)_+ = c f_+, \quad (c f)_- = c f_-, \quad (4.11)$$

і тому

$$\begin{aligned} \int_A c f(x) d\lambda &= \int_A (c f(x))_+ d\lambda - \int_A (c f(x))_- d\lambda \stackrel{(4.11), (4.10)}{=} \\ &\stackrel{(4.11), (4.10)}{=} c \int_A f_+(x) d\lambda - c \int_A f_-(x) d\lambda = c \int_A f(x) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Якщо  $c < 0$ , то

$$(c f)_+ = (-c) f_-, \quad (c f)_- = (-c) f_+,$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} \int_A c f(x) d\lambda &= \int_A (c f(x))_+ d\lambda - \int_A (c f(x))_- d\lambda = \int_A (-c) f_-(x) d\lambda - \int_A (-c) f_+(x) d\lambda \stackrel{(4.12), (-c) > 0}{=} \\ &\stackrel{(4.12), (-c) > 0}{=} (-c) \int_A f_-(x) d\lambda - (-c) \int_A f_+(x) d\lambda = c \left( \int_A f_+(x) d\lambda - \int_A f_-(x) d\lambda \right) = c \int_A f(x) d\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

4. Якщо  $f(x) \leq g(x)$ , то  $\int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$  (за умови, що обидва записані інтеграли існують).

*Доведення.* Нехай  $f$  і  $g$  — невід'ємні. Тоді для відповідних класів простих функцій з означення 4.2 маємо:  $K(f) \subset K(g)$ . Тому

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \leq \sup_{p \in K(g)} \int_A p d\lambda = \int_A g d\lambda \quad (4.13)$$

(в інтегралі від  $g$  береться супремум більшої множини).

У загальному випадку справджується

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\Rightarrow f_+(x) \leq g_+(x), \quad f_-(x) \geq g_-(x) \stackrel{(4.13)}{\Rightarrow} \int_A f_+ d\lambda \leq \int_A g_+ d\lambda, \quad \int_A f_- d\lambda \geq \int_A g_- d\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \leq \int_A g_+ d\lambda - \int_A g_- d\lambda \Leftrightarrow \int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

5. Якщо  $f(x) \geq 0$ ,  $A \subset B$ , то  $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$ .

*Доведення.* Візьмемо прості невід'ємні функції  $p_r \uparrow f$ . Із використанням відповідної властивості інтеграла від простих функцій, маємо

$$\int_A f d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A p_r d\lambda \stackrel{(4.3)}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_B p_r d\lambda = \int_B f d\lambda. \quad \square$$

6. Нехай  $A \subset B$  й існує  $\int_B f d\lambda$ , тоді визначений і  $\int_A f d\lambda$ . Якщо при цьому  $f \in \mathcal{L}(B, \lambda)$ , то  $f \in \mathcal{L}(A, \lambda)$ .

*Доведення.* Згідно із властивістю 5,

$$\int_A f_+ d\lambda \leq \int_B f_+ d\lambda, \quad \int_A f_- d\lambda \leq \int_B f_- d\lambda.$$

Хоча б один з інтегралів по  $B$  є скінченним, тому буде скінченним і відповідний інтеграл по  $A$  та існує  $\int_A f d\lambda$ . Для  $f \in \mathcal{L}(B, \lambda)$  усі записані інтеграли будуть скінченними, і значить  $f \in \mathcal{L}(A, \lambda)$ .  $\square$

7. Нехай  $\int_X f_- d\lambda < +\infty$ . Тоді функція множин  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  є  $\sigma$ -адитивною на  $\mathcal{F}$ .

*Доведення.* З умови випливає, що існує  $\int_X f d\lambda$ , і за властивістю 6,  $\nu(A)$  визначена для всіх  $A \in \mathcal{F}$ . Нехай  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{F}$  — неперетинні. Тоді

$$\begin{aligned} \int_A f d\lambda &= \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \stackrel{\text{Теорема 4.2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_+ d\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_- d\lambda = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{A_n} f_+ d\lambda - \int_{A_n} f_- d\lambda \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

8.  $f \in \mathcal{L}(A, \lambda) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(A, \lambda)$ , при цьому

$$\left| \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda.$$

*Доведення.* Зазначимо, що

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\lambda &\stackrel{\text{Теорема 4.2}}{=} \int_{A \cap \{f \geq 0\}} |f| d\lambda + \int_{A \cap \{f < 0\}} |f| d\lambda \stackrel{\text{Власт. 2}}{=} \\ &\stackrel{\text{Власт. 2}}{=} \int_A |f| \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda + \int_A |f| \mathbf{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda. \end{aligned}$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} f \in L(A, \lambda) &\Leftrightarrow \int_A f_+ d\lambda < +\infty, \quad \int_A f_- d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_A |f| d\lambda < +\infty. \end{aligned}$$

При цьому

$$\left| \int_A f d\lambda \right| = \left| \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \right| \leq \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda = \int_A |f| d\lambda. \quad \square$$

**9.** Якщо  $f \sim g \pmod{\lambda}$ , то  $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$  (за умови, що хоча б один із цих інтегралів існує).

*Доведення.* Нехай  $N = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ ,  $\lambda(N) = 0$ . Тоді  $f = g$  на  $A \setminus N$ ,

$$\begin{aligned} \int_A f_+ d\lambda &\stackrel{\text{Теорема 4.2}}{=} \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda + \int_N f_+ d\lambda \stackrel{\text{Власт. 1}}{=} \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda = \\ &= \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda + \int_N g_+ d\lambda = \int_A g_+ d\lambda. \end{aligned}$$

Аналогічно  $\int_A f_- d\lambda = \int_A g_- d\lambda$ .  $\square$

**10.** Якщо  $f \in L(A, \lambda)$ , то  $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$  на  $A$ .

*Доведення.* Припустимо, що

$$\lambda(\{x \in A : |f(x)| = +\infty\}) = \varepsilon > 0.$$

Тоді для кожного  $n \geq 1$  маємо

$$\int_A |f| d\lambda \stackrel{\text{Власт. 5}}{\geq} \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} |f| d\lambda \stackrel{\text{Власт. 4}}{\geq} \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} n d\lambda = n\lambda(A \cap \{|f| \geq n\}) \geq n\varepsilon.$$

Оскільки  $n$  — довільне, то

$$\int_A |f| d\lambda = +\infty \Rightarrow |f| \notin L(A, \lambda) \stackrel{\text{Власт. 8}}{\implies} f \notin L(A, \lambda). \quad \square$$

**11.** Якщо  $f(x) \geq 0$  і  $\int_A f d\lambda = 0$ , то  $f = 0 \pmod{\lambda}$  на  $A$ .

*Доведення.* Для кожного  $n \geq 1$  маємо

$$0 = \int_A f d\lambda \stackrel{\text{Власт. 5}}{\geq} \int_{A \cap \{f \geq (1/n)\}} f d\lambda \stackrel{\text{Власт. 4}}{\geq} \int_{A \cap \{f \geq (1/n)\}} \frac{1}{n} d\lambda = \frac{1}{n} \lambda(A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}).$$

Тому  $\lambda(A \cap \{f \geq (1/n)\}) = 0$ , і з неперервності міри знизу ми отримуємо

$$\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \uparrow (A \cap \{f > 0\}), \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda(A \cap \{f > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0. \quad \square$$

**12.** Якщо  $\int_A f d\lambda = 0$  для всіх  $A \in \mathcal{F}$ , то  $f = 0 \pmod{\lambda}$  на  $X$ .

*Доведення.* Використовуючи умову для множин  $A = \{f \geq 0\}$  і  $A = \{f < 0\}$ , властивість 11 для  $f_+$  і  $f_-$ , маємо

$$\begin{aligned} \int_X f_+ d\lambda &= \int_X f \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda = \int_{\{f \geq 0\}} f d\lambda = 0 \Rightarrow f_+ = 0 \pmod{\lambda}, \\ \int_X f_- d\lambda &= \int_X (-f) \mathbf{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_{\{f < 0\}} (-f) d\lambda = - \int_{\{f < 0\}} f d\lambda = 0 \Rightarrow f_- = 0 \pmod{\lambda}, \\ &f = f_+ - f_- = 0 \pmod{\lambda}. \end{aligned} \quad \square$$



## 4.5 Лінійність інтеграла

**Теорема 4.3.** Нехай  $A \in \mathcal{F}$ ,  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — вимірні функції.

1) Якщо  $f$  і  $g$  невід'ємні, то

$$\int_A (f + g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda. \quad (4.14)$$

2) Якщо  $f, g \in L(A, \lambda)$ , то  $f + g \in L(A, \lambda)$ , і при цьому справджується (4.14).

*Доведення.* 1) Спочатку розглянемо випадок, коли  $f$  і  $g$  — прості невід'ємні,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad g(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad A_k, B_i \in \mathcal{F},$$

при цьому  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X$ , і в кожному з об'єднань множини неперетинні. Тоді

$$A_k = \bigcup_{i=1}^j (A_k \cap B_i), \quad B_i = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B_i) \Rightarrow \mathbf{1}_{A_k}(x) = \sum_{i=1}^j \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x), \quad \mathbf{1}_{B_i}(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x). \quad (4.15)$$

Ми можемо записати  $f$  і  $g$  з одним і тим самим набором множин в індикаторах:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x), \quad g(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j b_i \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x).$$

Далі маємо

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \mathbf{1}_{A_k \cap B_i}(x),$$

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\lambda &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \stackrel{(4.15)}{=} \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) + \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Якщо  $f$  і  $g$  — довільні невід'ємні вимірні функції, то, за теоремою 3.5, знайдуться послідовності простих невід'ємних функцій

$$f_r(x) \uparrow f(x), \quad g_r(x) \uparrow g(x), \quad r \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$f_r(x) + g_r(x) \uparrow f(x) + g(x), \quad r \rightarrow \infty, \quad f_r + g_r \text{ — прості функції.}$$

Маємо

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\lambda &\stackrel{\text{Теорема 4.1}}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A (f_r + g_r) d\lambda \stackrel{(4.16)}{=} \\ &\stackrel{(4.16)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_A f_r d\lambda + \int_A g_r d\lambda \right) \stackrel{\text{Теорема 4.1}}{=} \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda. \end{aligned} \quad (4.17)$$

2) Використовуючи умови  $f, g \in L(A, \lambda)$ , отримуємо

$$\int_A |f + g| d\lambda \stackrel{\text{Власт. 4}}{\leq} \int_A (|f| + |g|) d\lambda \stackrel{(4.17)}{=} \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda \stackrel{\text{Власт. 8}}{<} +\infty \Rightarrow f + g \in L(A, \lambda).$$

Спочатку припустимо, що

$$f(x) \geq 0, \quad g(x) < 0, \quad x \in A.$$

Розглянемо множини

$$A_+ = \{x \in A : f(x) + g(x) \geq 0\},$$

$$A_- = \{x \in A : f(x) + g(x) < 0\}.$$

На  $A_+$  невід'ємними є функції  $f + g$ ,  $f$ ,  $(-g)$ , тому маємо рівність

$$f = (f + g) + (-g).$$

Використовуючи доведене вище твердженням 1) нашої теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{A_+} f d\lambda &= \int_{A_+} (f + g) d\lambda + \int_{A_+} (-g) d\lambda \stackrel{\text{Власт. 3}}{=} \int_{A_+} (f + g) d\lambda - \int_{A_+} g d\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{A_+} (f + g) d\lambda = \int_{A_+} f d\lambda + \int_{A_+} g d\lambda. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Аналогічно на  $A_-$  використовуємо рівність

$$-g = f + (-f - g),$$

і знаходимо

$$\begin{aligned} \int_{A_-} (-g) d\lambda &= \int_{A_-} f d\lambda + \int_{A_-} (-f - g) d\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{A_-} (f + g) d\lambda = \int_{A_-} f d\lambda + \int_{A_-} g d\lambda. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Додаючи (4.18) і (4.19) та використовуючи властивість 7, отримуємо (4.14) у цьому випадку.

У загальному випадку ми розглядаємо чотири неперетинні множини

$$\begin{aligned} A_{++} &= \{x \in A : f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0\}, \\ A_{+-} &= \{x \in A : f(x) \geq 0, \quad g(x) < 0\}, \\ A_{-+} &= \{x \in A : f(x) < 0, \quad g(x) \geq 0\}, \\ A_{--} &= \{x \in A : f(x) < 0, \quad g(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Із доведеного вище випливає, що для кожної такої множини  $A_{\pm\pm}$  справджується

$$\int_{A_{\pm\pm}} (f + g) d\lambda = \int_{A_{\pm\pm}} f d\lambda + \int_{A_{\pm\pm}} g d\lambda.$$

Сума цих чотирьох рівностей та властивість 7 дають нам (4.14). □

## 4.6 Граничні теореми для інтеграла

У цьому підрозділі ми розглянемо набір тверджень, що пов'язують

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Як і раніше,  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір з мірою,  $A \in \mathcal{F}$ .

**Теорема 4.4 (теорема про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності).** *Нехай  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємні вимірні функції такі, що*

$$\forall x, n : f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

*Покладемо  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тоді*

$$\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad (4.20)$$

*Доведення.* Функція  $f$  визначена як границя монотонної послідовності, усі записані інтеграли існують як інтеграли від невід'ємних вимірних функцій.

Для кожної  $f_n$  візьмемо послідовність простих невід'ємних вимірних функцій  $p_{nr} \uparrow f_n$ ,  $r \geq 1$ , і розглянемо

$$\tilde{p}_j(x) = \max_{1 \leq n \leq j, 1 \leq r \leq j} p_{nr}(x), \quad j \geq 1. \quad (4.21)$$

Тоді  $\tilde{p}_j$  — також прості невід'ємні вимірні функції,  $\tilde{p}_{j+1}(x) \geq \tilde{p}_j(x)$ . Покажемо, що  $\tilde{p}_j \uparrow f$ .

З одного боку,

$$p_{nr}(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \stackrel{(4.21)}{\implies} \tilde{p}_j(x) \leq f(x).$$

З іншого боку, для  $j \geq m$  виконується

$$\tilde{p}_j(x) \geq p_{mj}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(x) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} p_{mj}(x) = f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(x) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x). \quad (4.22)$$

У (4.21) маємо, що  $p_{nr}(x) \leq f_n(x) \leq f_j(x)$ . Тому

$$\tilde{p}_j(x) \leq f_j(x) \leq f(x) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(x) \leq f(x) \stackrel{(4.22)}{\implies} \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(x) = f(x).$$

Також із властивості 4 випливає

$$\int_A \tilde{p}_j d\lambda \leq \int_A f_j d\lambda \leq \int_A f d\lambda.$$

За теоремою 4.1,

$$\int_A \tilde{p}_j d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda, \quad j \rightarrow \infty.$$

Звідси отримуємо (4.20). □

**Наслідок 4.1 (наслідок про інтегрування функціонального ряду).** *Нехай  $g_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємні вимірні функції. Тоді*

$$\int_A \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k d\lambda.$$

*Доведення.* Функції

$$f_n = \sum_{k=1}^n g_k, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

задовольняють умови теореми 4.4. Маємо

$$\int_X \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left( \sum_{k=1}^n g_k \right) d\lambda \stackrel{\text{Теорема 4.3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X g_k d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k d\lambda. \quad \square$$

**Теорема 4.5 (теорема Бепо Леві).** *Нехай функції  $f_n \in L(X, \lambda)$  такі, що*

1)  $\forall x, n : f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ ;

2)  $\sup_{n \geq 1} \int_X f_n d\lambda < +\infty$ .

*Покладемо  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тоді*

$$\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

*Доведення.* Розглянемо функції

$$g_n = f_n - f_1, \quad g = f - f_1.$$

Тоді  $g_n \geq 0$ ,  $g_n \uparrow g$ , і використовуючи теореми 4.4 і 4.3, маємо

$$\int_A g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda - \int_A f_1 d\lambda. \quad (4.23)$$

З умови 2) теореми випливає, що  $\int_A g_n d\lambda < +\infty$ , тому

$$\int_A g d\lambda < +\infty \Rightarrow g \in L(A, \lambda) \Rightarrow f = g + f_1 \in L(A, \lambda).$$

Використовуємо для цих функцій теорему 4.3 про лінійність інтеграла, і отримуємо

$$\int_A g d\lambda = \int_A f d\lambda - \int_A f_1 d\lambda \stackrel{(4.23)}{\implies} \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \square$$

**Теорема 4.6 (теорема Фату).** *Нехай  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – невід’ємні вимірні функції. Тоді*

$$\int_A \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad (4.24)$$

*Доведення.* Використаємо відоме зображення нижньої границі

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Розглянемо функції

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad g_n(x) \geq 0, \quad g_n \uparrow \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

Тоді

$$\int_A \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \stackrel{\text{Теорема 4.4}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

В останній нерівності ми використали, що  $g_n \leq f_n$ . □

**Теорема 4.7 (теорема Лебега про мажоровану збіжність).** *Нехай  $f, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – вимірні функції такі, що*

- 1)  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ;
  - 2)  $\exists g \in L(X, \lambda) : |f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ .
- Тоді  $f \in L(X, \lambda)$ , і*

$$\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

*Доведення.* З умов 1) і 2) випливає, що  $|f| \leq g \pmod{\lambda}$ . Тому

$$\int_X |f| d\lambda \leq \int_X g d\lambda < +\infty \Rightarrow f \in L(X, \lambda).$$

Аналогічно  $\int_X |f_n| d\lambda \leq \int_X g d\lambda < +\infty$ , і тому  $f_n \in L(X, \lambda)$ .

Також використовуючи умову 2), дістаємо

$$g + f_n \geq 0 \pmod{\lambda}, \quad g - f_n \geq 0 \pmod{\lambda},$$

тоді можемо до цих інтегровних функцій застосувати теорему Фату і теорему про лінійність інтеграла. Нагадаємо, що за властивістю 9, ми можемо нехтувати значеннями функцій на множині міри 0. Маємо

$$\begin{aligned} \int_A (g + f) d\lambda &= \int_A \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) d\lambda \stackrel{(4.24)}{\leq} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A (g + f_n) d\lambda = \int_A g d\lambda + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_A f d\lambda \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} \int_A (g - f) d\lambda &= \int_A \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) d\lambda \stackrel{(4.24)}{\leq} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A (g - f_n) d\lambda = \int_A g d\lambda + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( - \int_A f_n d\lambda \right) = \\ &= \int_A g d\lambda - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda \Rightarrow \int_A f d\lambda \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda \end{aligned}$$

(тут ми використали таку властивість:  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ). Ураховуючи, що нижня границя послідовності не може перевищувати верхню, із (4.25) і (4.6) отримуємо

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda = \int_A f d\lambda. \quad \square$$

**Наслідок 4.2.** Твердження теореми 4.7 залишається вірним, якщо в ньому умову 1) замінити на умову

$$1') f_n \xrightarrow{\lambda} f.$$

*Доведення.* Припустимо, що  $\int_A f_n d\lambda \not\rightarrow \int_A f d\lambda$ . Тоді знайдеться  $\varepsilon_0 > 0$  і підпослідовність  $n_k$  така, що для всіх  $k \geq 1$

$$\left| \int_A f_{n_k} d\lambda - \int_A f d\lambda \right| \geq \varepsilon_0. \quad (4.26)$$

За теоремою Ріса (наслідок 3.5), існує підпідпослідовність  $f_{n_{k_i}} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $i \rightarrow \infty$ . Тоді з теореми 4.7 випливає

$$\int_A f_{n_{k_i}} d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda, \quad i \rightarrow \infty,$$

і це суперечить (4.26). □

**Приклад 4.2.** Розглянемо таку послідовність функцій на  $\mathbb{R}$ :

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[n, n+1]}(x), \quad n \geq 1.$$

Тоді відносно міри Лебега  $\lambda_1$  виконується

$$f_n \rightarrow 0 \text{ м. с.}, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 = 1,$$

тому маємо

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda_1 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 = 1.$$

Ми бачимо, що в теоремі 4.4 не можна відкинути умову монотонності, нерівність у (4.24) може бути строгою, і в теоремі 4.7 умова мажораності є істотною.

## 4.7 Порівняння інтеграла Лебега та інтеграла Рімана

Основна мета даного підрозділу — показати, що інтеграл Лебега за мірою Лебега  $\lambda_1$  є узагальненням інтеграла Рімана.

Обмежимося випадком інтеграла по множині  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , аналогічним чином можна розглядати інтеграли по підмножинах  $\mathbb{R}^d$ . Для інтеграла Рімана по даному відрізку вживатимемо позначення  $\int_a^b f dx$ , для інтеграла Лебега за  $\lambda_1$  —  $\int_{[a, b]} f d\lambda_1$ . Використовуватимемо стандартні властивості інтеграла Рімана, наведені, наприклад, у [7, розділ 6].

**Теорема 4.8.** Нехай функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  інтегровна за Ріманом на  $[a, b]$ . Тоді  $f$  інтегровна за Лебегом на  $[a, b]$  (відносно міри Лебега  $\lambda_1$ ), і

$$\int_a^b f dx = \int_{[a, b]} f d\lambda_1.$$

*Доведення.* Оскільки  $f$  інтегровна за Ріманом, вона обмежена. Позначимо  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

Для  $n \geq 1$  візьмемо набір точок  $\pi_n$ , що ділять відрізок  $[a, b]$  на  $2^n$  рівних частин:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2^n} = b, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{2^n},$$

і позначимо

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1.$$

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} \underline{f}_n(x) &= f(a)\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \mathbf{1}_{(x_k, x_{k+1}]}(x), \\ \bar{f}_n(x) &= f(a)\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \mathbf{1}_{(x_k, x_{k+1}]}(x). \end{aligned}$$

Зазначимо, що для всіх  $n, x$

$$\underline{f}_n(x) \leq \underline{f}_{n+1}(x), \quad \bar{f}_n(x) \geq \bar{f}_{n+1}(x),$$

оскільки кожне розбиття  $\pi_{n+1}$  є подібненням  $\pi_n$ . Тому визначеними є функції

$$\underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(x), \quad \bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x).$$

Також зазначимо, що

$$\underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \bar{f}_n(x) \quad \Rightarrow \quad \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x). \quad (4.27)$$

Функції  $\underline{f}_n, \bar{f}_n, \underline{f}, \bar{f}$  вимірні за Лебегом. Оскільки ці функції обмежені (їх значення за абсолютною величиною не перевищують  $M$ ), вони інтегровні за Лебегом на  $[a, b]$  відносно  $\lambda_1$ . Маємо, що

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \underline{f} d\lambda_1 &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \Delta x_k \stackrel{(**)}{=} \int_a^b f dx, \\ \int_{[a,b]} \bar{f} d\lambda_1 &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \bar{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \Delta x_k \stackrel{(**)}{=} \int_a^b f dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

(тут рівності  $(*)$  випливають із теореми Лебега про мажоровану збіжність, рівності  $(**)$  — з інтегровності  $f$  за Ріманом, значення інтеграла Рімана дорівнює границям нижньої та верхньої сум Дарбу). Звідси отримуємо

$$\int_{[a,b]} (\bar{f} - \underline{f}) d\lambda_1 = \int_{[a,b]} \bar{f} d\lambda_1 - \int_{[a,b]} \underline{f} d\lambda_1 = 0.$$

Властивість 11 свідчить про те, що

$$\underline{f} = \bar{f} \pmod{\lambda_1} \stackrel{(4.27)}{\Rightarrow} \underline{f} = f \pmod{\lambda_1}. \quad (4.29)$$

Нагадаємо, що міра  $\lambda_1$  — повна, і, за теоремою 3.6,  $f$  є вимірною за Лебегом. Оскільки  $|f| \leq M$ , то  $f \in \mathcal{L}([a, b], \lambda_1)$ . Також

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 \stackrel{(4.29)}{=} \int_{[a,b]} \underline{f} d\lambda_1 \stackrel{(4.28)}{=} \int_a^b f dx. \quad \square$$

Теорема 4.8 дає метод обчислення інтеграла  $\int_{[a,b]} f d\lambda_1$  для широкого класу функцій. Якщо  $f$  інтегровна за Ріманом, достатньо знайти  $\int_a^b f dx$ , що і дасть нам значення інтеграла Лебега.

Далі розглянемо *невласний інтеграл Рімана* по множині  $[a, +\infty) \subset \mathbb{R}$ .

**Теорема 4.9.** *Нехай функція  $f : [a, +\infty) \subset \mathbb{R}$  інтегровна за Ріманом на будь-якому відрізку  $[a, b]$ ,  $b > a$ .*

1) *Якщо  $f$  абсолютно інтегровна за Ріманом у невластному сенсі на  $[a, +\infty)$ , то  $f \in \mathcal{L}([a, +\infty), \lambda_1)$ , і при цьому*

$$\int_a^{+\infty} f dx = \int_{[a, +\infty)} f d\lambda_1.$$

2) *Якщо  $f$  не є абсолютно інтегровою за Ріманом у невластному сенсі на  $[a, +\infty)$ , то  $f \notin \mathcal{L}([a, +\infty), \lambda_1)$ .*

*Доведення.* За теоремою 4.8, звуження  $f$  на кожному відрізку  $[a, a+n]$  є вимірним за Лебегом. Тому для кожної множини  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(B) = \{x \in [a, +\infty) : f(x) \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, a+n] : f(x) \in B\} \in \mathcal{S}_1,$$

і функція  $f$  на  $[a, +\infty)$  є вимірною за Лебегом. Також маємо

$$|f(x)| \mathbf{1}_{[a, a+n]}(x) \uparrow |f(x)|, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [a, +\infty),$$

і тому

$$\begin{aligned} \int_{[a, +\infty)} |f| d\lambda_1 &\stackrel{\text{Теорема 4.4}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} |f| \mathbf{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} |f| d\lambda_1 \stackrel{\text{Теорема 4.8}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} |f| dx = \int_a^{+\infty} |f| dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тепер розглянемо безпосередньо твердження 1) і 2) теореми.

1) У цьому випадку

$$\int_a^{+\infty} |f| dx < +\infty \stackrel{(4.30)}{\implies} f \in \mathbf{L}([a, +\infty), \lambda_1).$$

Ми використаємо теорему 4.7 про мажоровану збіжність для послідовності функцій  $f \mathbf{1}_{[a, a+n]}$  з інтегрованою мажорантою  $|f|$ , і матимемо

$$\begin{aligned} \int_{[a, +\infty)} f d\lambda_1 &\stackrel{\text{Теорема 4.7}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} f \mathbf{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} f d\lambda_1 \stackrel{\text{Теорема 4.8}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} f dx = \int_a^{+\infty} f dx. \end{aligned}$$

2) У цьому випадку

$$\int_a^{+\infty} |f| dx = +\infty \stackrel{(4.30)}{\implies} f \notin \mathbf{L}([a, +\infty), \lambda_1). \quad \square$$

Надалі для інтегрованої за Ріманом функції  $f$  ми можемо розглядати інтеграл від  $f$  як у сенсі Рімана, так і в сенсі Лебега — як нам зручніше.

**Приклад 4.3.** Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x dx.$$

Підінтегральні функції абсолютно інтегровні за Ріманом на  $[0, +\infty)$ , і тому ці інтеграли можна брати в сенсі Лебега. Для інтегралів у сенсі Лебега використаємо теорему про мажоровану збіжність, при цьому  $e^{-x} \sin^n x \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$ . Так отримуємо

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x dx \stackrel{\text{Теорема 4.9}}{=} \int_{[0, \infty)} e^{-x} \sin^n x d\lambda_1 \stackrel{\text{Теорема 4.7}}{\longrightarrow} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далі розглянемо зв'язок *інтеграла Рімана–Стілтєса*  $\int_a^b f dF$  (див., наприклад, [7, підрозділ 9.3]) й *інтеграла Лебега–Стілтєса*  $\int_{[a, b]} f d\lambda_F$ .

**Приклад 4.4.** Розглянемо

$$f(x) = F(x) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x).$$

Нескладно перевірити, що

$$\int_{[0, 1]} f d\lambda_F = 1 \cdot \lambda_F([0, 1]) = 1.$$

Інтеграл Рімана–Стілтєса для неперервних на цьому відрізку функцій  $f$ ,  $F$  дорівнює границі інтегральних сум,

$$\int_a^b f dF = \lim_{\max |x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k)(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = 0, \quad 0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{k_n} = 1.$$

Ми бачимо, що твердження теореми 4.8 перенести на цей випадок без змін не можна.

**Теорема 4.10.** *Нехай функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна на  $[a, b]$ , функція  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неспадна і неперервна справа. Тоді*

$$\int_a^b f dF = \int_{(a,b]} f d\lambda_F. \quad (4.31)$$

*Доведення.* Міра  $\lambda_F$  визначена згідно з підрозділом 2.6, обидва записані в (4.31) інтеграли існують, оскільки  $f$  неперервна і борельова. Також  $f$  обмежена, позначимо  $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ .

Для довільного розбиття  $0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{k_n} = 1$  розглянемо функцію

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k) \mathbf{1}_{(x_k, x_{k+1}]}(x).$$

Оскільки  $f$  неперервна,

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \max |x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0,$$

для кожного  $x \in [a, b]$ . Також  $|f_n(x)| \leq M$ . Маємо

$$\begin{aligned} \int_{(a,b]} f d\lambda_F &\stackrel{(*)}{=} \lim_{\max |x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0} \int_{(a,b]} f_n d\lambda_F &&\stackrel{(**)}{=} \\ &\stackrel{(***)}{=} \lim_{\max |x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_k)(F(x_{k+1}) - F(x_k)) &&\stackrel{(***)}{=} \int_a^b f dF. \end{aligned}$$

Тут рівність (\*) випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність, у (\*\*) ми знайшли інтеграл від простої функції  $f_n$ , користуючись лінійністю інтеграла, у (\*\*\*) ми маємо рівність інтеграла Рімана–Стілтєса границі відповідних інтегральних сум.  $\square$

Також відмітимо без доведення наступний відомий факт.

**Теорема 4.11 (критерій Лебега інтегровності за Ріманом).** *Нехай функція  $f : \prod_{k=1}^d [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$  обмежена. Наступні твердження еквівалентні:*

- 1)  $f$  інтегровна за Ріманом на  $\prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$ ;
- 2)  $\lambda_d(\{z \in \prod_{k=1}^d [a_k, b_k] : f \text{ розривна в } z\}) = 0$ .

## 4.8 Інтеграл, що залежить від параметра. Заміна змінної

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — це деякий вимірний простір із мірою,  $T$  — довільна множина, і ми розглядаємо функцію

$$f : X \times T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Покладемо

$$I(t) = \int_X f(x, t) d\lambda(x)$$

для всіх  $t \in T$ , для яких цей інтеграл визначено.

Ми доведемо теореми про неперервність і диференційованість функції  $I$ .

**Теорема 4.12.** *Нехай  $T$  — метричний простір, і справджуються наступні умови:*

- 1)  $f(x, \cdot)$  неперервна на  $T$  для кожного  $x \in X$ ;
- 2)  $f(\cdot, t)$   $\mathcal{F}$ -вимірна для кожного  $t \in T$ ;
- 3)  $|f(x, t)| \leq g(x)$  для деякої функції  $g \in L(X, \lambda)$ .

*Тоді  $I$  неперервна на  $T$ .*



*Доведення.* З умов 2) і 3) випливає, що  $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$  для всіх  $t \in T$ ,  $I$  визначена на  $T$ .

Для довільної послідовності  $t_n \rightarrow t_0$  в  $T$  маємо

$$\begin{aligned} \forall x \in X: f(x, t_n) \xrightarrow{\text{умова 1)}} f(x, t_0), \quad n \rightarrow \infty, \\ I(t_n) = \int_X f(x, t_n) d\lambda(x) \xrightarrow{(*)} \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) = I(t_0). \end{aligned}$$

Тут в (\*) ми застосували теорему про мажоровану збіжність і обмеженість  $|f(x, t_n)| \leq g(x)$ . Таким чином,  $I$  неперервна в довільній точці  $t_0$ , а значить і на  $T$ .  $\square$

У наступному твердженні візьмемо  $T = G$ , де  $G$  — деяка відкрита підмножина  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 4.13.** *Нехай справджуються умови:*

- 1)  $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$  для кожного  $t \in G$ ;
- 2)  $\frac{\partial f}{\partial t}$  визначена на  $X \times G$ ;
- 3)  $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq g(x)$  для деякої функції  $g \in L(X, \lambda)$ .

Тоді

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} d\lambda(x). \quad (4.32)$$

*Доведення.* Перевіримо рівність (4.32) у довільній точці  $t_0 \in G$ . Для довільної послідовності  $t_n \rightarrow t_0$  в  $G$  розглянемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \left( \int_X f(x, t_n) d\lambda(x) - \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) \right) \stackrel{(*)}{=} \quad (4.33)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\lambda(x) \quad (4.34)$$

(тут у рівності (\*) ми використали лінійність інтеграла для інтегровних функцій  $f(x, t_n), f(x, t_0)$ ).

Із умови 2) випливає, що для кожного  $x \in X$

$$\frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Із формули Лагранжа отримуємо, що для деякої  $t^* \in G$

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f(x, t^*)}{\partial t} \right| \stackrel{\text{умова 3)}}{\leq} g(x).$$

Тому за теоремою про мажоровану збіжність, застосованою до інтеграла в (4.34), дістаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} = \int_X \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t} d\lambda(x),$$

що й означає виконання (4.32) у точці  $t_0$ .  $\square$

Далі розглянемо заміну міри в інтегралі. Нехай дано ще один вимірний простір  $(X', \mathcal{F}')$  і довільне відображення  $T: X \rightarrow X'$ , що є  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -вимірним. Маємо

$$\forall A \in \mathcal{F}': T^{-1}A \in \mathcal{F},$$

і ми можемо визначити функцію множин  $\lambda'$  на  $\mathcal{F}'$  за правилом

$$\lambda'(A) = \lambda(T^{-1}A). \quad (4.35)$$

Тоді  $\lambda'$  — це міра на  $\mathcal{F}'$ . Дійсно, для неперетинних  $A_n \in \mathcal{F}'$  знайдемо

$$\lambda' \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lambda \left( T^{-1} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \stackrel{(*)}{=} \lambda \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}A_n \right) \stackrel{(**)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(T^{-1}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda'(A_n).$$

Тут у рівності (\*) використано стандартну властивість прообразів множин. При цьому множини  $T^{-1}A_n$  також є неперетинними, і тому справджується (\*\*).

Наступне твердження показує зв'язок між інтегралами за  $\lambda$  і за  $\lambda'$ .

**Теорема 4.14.** Нехай функція  $f : X' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  —  $\mathcal{F}'$ -вимірна. Тоді

$$\int_X f(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} f(x') d\lambda'(x') \quad (4.36)$$

(якщо існує один із цих інтегралів, то існує й інший, і вони рівні).

*Доведення.* Зазначимо, що функція  $f(Tx) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{F}$ -вимірна як суперпозиція вимірних.

**Крок 1.** Нехай  $f(x') = \mathbf{1}_A(x')$ ,  $A \in \mathcal{F}'$ . Тоді

$$f(Tx) = \mathbf{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A, \\ 0, & Tx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}A, \\ 0, & x \notin T^{-1}A \end{cases} = \mathbf{1}_{T^{-1}A}(x).$$

Маємо

$$\begin{aligned} \int_X f(Tx) d\lambda(x) &= \lambda(T^{-1}A), \\ \int_{X'} f(x') d\lambda'(x') &= \lambda'(A), \\ \lambda(T^{-1}A) &\stackrel{(4.35)}{=} \lambda'(A), \end{aligned}$$

і тому (4.36) справджується.

**Крок 2.** Нехай

$$f(x') = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x'), \quad A_k \in \mathcal{F}', \quad a_k \geq 0.$$

Як показано в кроці 1, для кожної функції  $\mathbf{1}_{A_k}(x')$  справджується (4.36). Домноживши кожну з цих рівностей на відповідну  $a_k$  і додавши, ми отримуємо (4.36) для даної  $f$  (нагадаємо, що для невід'ємних функцій лінійність інтеграла виконується).

**Крок 3.** Нехай функція  $f$  — невід'ємна  $\mathcal{F}'$ -вимірна. Візьмемо прості невід'ємні  $\mathcal{F}'$ -вимірні функції

$$p_n : X' \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(x') \uparrow f(x').$$

Тоді  $p_n(Tx) \uparrow f(Tx)$ , за кроком 2

$$\int_X p_n(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} p_n(x') d\lambda'(x').$$

Узявши границю при  $n \rightarrow \infty$  і використавши в обох частинах рівності теорему про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності, отримуємо (4.36) для вказаної  $f$ .

**Крок 4.** Нехай функція  $f$  — довільна  $\mathcal{F}'$ -вимірна. Тоді

$$(f(Tx))_+ = f_+(Tx), \quad (f(Tx))_- = f_-(Tx).$$

Із кроку 3 випливає

$$\int_X f_+(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} f_+(x') d\lambda'(x'), \quad \int_X f_-(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} f_-(x') d\lambda'(x')$$

(зокрема, якщо скінченний хоча б один з інтегралів у лівих частинах рівностей, то скінченний і відповідний інтеграл у правій частині, і навпаки). Віднімаючи тут від першої рівності другу, маємо (4.36).  $\square$

**Приклад 4.5.** Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$  — це деякий імовірнісний простір,  $(X', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , як відображення  $T : X \rightarrow X'$  візьмемо довільну випадкову величину  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

У цьому випадку  $\lambda'$  визначена на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  так, що

$$\lambda'((-\infty, a)) = P(\xi^{-1}((-\infty, a))) = P(\xi < a) = F_\xi(a),$$

де  $F_\xi$  позначає функцію розподілу  $\xi$ . Інтеграл за цією мірою часто позначають як інтеграл за  $dF_\xi$  (він збігається з інтегралом за мірою Лебега–Стілтьєса, породженою функцією  $F(a) = F_\xi(a+)$ ).

Для довільної борельової функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  у цьому випадку маємо

$$\int_{\mathcal{X}} f(Tx) d\lambda(x) = \int_{\Omega} f(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \stackrel{\text{Теорема 4.14}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x') d\lambda'(x') = \int_{\mathbb{R}} f(x') dF_{\xi}(x').$$

Так ми отримали відому формулу для підрахунку математичного сподівання

$$\mathbb{E}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x') dF_{\xi}(x').$$

## Вправи

**Вправа 4.1.** Довести, що коли  $f \in L(A, \lambda)$  і  $f \in L(B, \lambda)$ , то  $f \in L(A \cup B, \lambda)$ .

**Вправа 4.2.** Нехай функція  $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{F}$ -вимірна,  $\lambda$  і  $\mu$  — міри на  $\mathcal{F}$ . Довести, що

$$\int_{\mathcal{X}} f d(\lambda + \mu) = \int_{\mathcal{X}} f d\lambda + \int_{\mathcal{X}} f d\mu,$$

якщо  $f \geq 0$  або  $f \in L(\mathcal{X}, \lambda) \cap L(\mathcal{X}, \mu)$ .

**Вправа 4.3.** Нехай функція  $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$   $\mathcal{F}$ -вимірна, міра  $\lambda$  —  $\sigma$ -скінченна на  $\mathcal{F}$ . Довести, що міра  $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ ,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\sigma$ -скінченна на  $\mathcal{F}$ .

**Вправа 4.4.** Нехай функція  $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$   $\mathcal{F}$ -вимірна, міра  $\lambda$  — скінченна. Довести, що такі твердження еквівалентні:

- 1)  $f \in L(\mathcal{X}, \lambda)$ ;
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda(\{x : n < f(x) \leq n+1\}) < +\infty$ ;
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f(x) > n\}) < +\infty$ .

**Вправа 4.5.** Нехай  $f, f_n : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — невід'ємні вимірні функції,

$$f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}, \quad f_n \leq f \pmod{\lambda}.$$

Довести, що  $\int_{\mathcal{X}} f_n d\lambda \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f d\lambda$ .

**Вправа 4.6** (теорема Юнга). Дано функції  $f_n, g_n, h_n \in L(\mathcal{X}, \lambda)$  такі, що

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq g_n(x) \leq h_n(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n d\lambda &= \int_{\mathcal{X}} f d\lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} h_n d\lambda = \int_{\mathcal{X}} h d\lambda, \quad f, h \in L(\mathcal{X}, \lambda). \end{aligned}$$

Довести, що тоді  $g \in L(\mathcal{X}, \lambda)$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} g_n d\lambda = \int_{\mathcal{X}} g d\lambda.$$

## Розділ 5

# Заряди. Абсолютна неперервність

### 5.1 Означення заряду. Розклад Гана

Нехай  $\mathcal{F}$  — довільна  $\sigma$ -алгебра підмножин універсальної множини  $X$ .

**Означення 5.1.** Зарядом називається  $\sigma$ -адитивна функція множин

$$\nu : \mathcal{F} \rightarrow (-\infty, +\infty].$$

На відміну від функцій множин, розглянутих вище,  $\nu$  може набувати від'ємних значень. Оскільки  $-\infty$  не є можливим значенням  $\nu$ , то при знаходженні суми ряду зарядів неперетинних множин ми не отримуємо невизначеності вигляду  $\infty - \infty$ .

Далі в цьому підрозділі  $\nu$  позначатиме заряд, заданий на  $\mathcal{F}$ .

**Приклад 5.1.** Довільна міра, задана на  $\sigma$ -алгебрі, є зарядом.

**Приклад 5.2.** Для будь-яких  $x_k \in X$ ,  $a_k \in (-\infty, +\infty]$ :

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_A(x_k)$$

є зарядом на  $2^X$ .

**Приклад 5.3.** Якщо  $\mu_1$  — міра на  $\mathcal{F}$ ,  $\mu_2$  — скінченна міра на  $\mathcal{F}$ , то  $\nu = \mu_1 - \mu_2$  є зарядом на  $\mathcal{F}$ . У наслідку 5.1 нижче ми покажемо, що всі заряди мають таке зображення.

**Властивості зарядів. 1.**  $\nu(\emptyset) = 0$ . *Доведення.* За нашим узгодженням щодо функцій множин, для деякої множини  $A \in \mathcal{F}$  виконується  $\nu(A) < +\infty$ . Тоді за  $\sigma$ -адитивністю  $\nu$  отримуємо  $\nu(A) = \nu(A) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots$ . Останній ряд має збігатися, а це можливе лише при  $\nu(\emptyset) = 0$ .  $\square$

**2.**  $\nu$  скінченно адитивний. *Доведення.* Використовуючи зліченну адитивність  $\nu$  і рівність  $\nu(\emptyset) = 0$ , для неперетинних  $A_k \in \mathcal{F}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , маємо

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\right) = \sum_{k=1}^n \nu(A_k) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots = \sum_{k=1}^n \nu(A_k). \quad \square$$

**3.** Якщо  $\nu(A) < +\infty$ , то для будь-якої множини  $B \subset A$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , виконується  $\nu(B) < +\infty$ . *Доведення.* Зі скінченної адитивності заряду маємо  $\nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B)$ . Якби б  $\nu(B) = +\infty$ , то, урахувавши що  $\nu(A \setminus B) > -\infty$ , ми б отримали  $\nu(A) = +\infty$ .  $\square$

**Означення 5.2.** Множина  $A \in \mathcal{F}$  називається *додатною* (відносно заряду  $\nu$ ), якщо для будь-якої множини  $B \subset A$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , виконується  $\nu(B) \geq 0$ .

Множина  $A \in \mathcal{F}$  називається *від'ємною* (відносно заряду  $\nu$ ), якщо для будь-якої множини  $B \subset A$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , виконується  $\nu(B) \leq 0$ .

Порожня множина є додатною і від'ємною одночасно. Тому набори додатних і від'ємних множин є непорожніми.

Якщо в прикладі 5.2 покласти  $X_+ = \{x_k : a_k > 0\}$ ,  $X_- = X \setminus X_+$ , то  $X_+$  буде додатною множиною, а  $X_-$  — від'ємною. Виявляється, що таке розбиття  $X$  на додатну і від'ємну множини виконується і для довільного заряду.

**Теорема 5.1 (розклад Гана).** Для будь-якого заряду  $\nu$  існують множини  $X_+$ ,  $X_-$  такі, що:

- 1)  $X_+$  — додатна множина,  $X_-$  — від'ємна,
- 2)  $X_+ \cup X_- = X$ ,
- 3)  $X_+ \cap X_- = \emptyset$ .

*Доведення.* **Крок 1. Визначення  $X_-$ .** Нехай

$$\alpha = \inf\{\nu(A) \mid A \text{ — від'ємна}\} \quad (5.1)$$

(ми не виключаємо зараз можливості  $\alpha = -\infty$ ). Візьмемо від'ємні множини  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , такі, що

$$\nu(A_n) \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

і покладемо  $X_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Покажемо, що множина  $X_-$  від'ємна. Для цього розглянемо множини

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2,$$

тоді  $B_n$  неперетинні,

$$X_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Для довільної  $B \subset X_-$ ,  $B \in \mathcal{F}$  маємо

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B \cap B_n), \quad (B \cap B_n) \subset A_n,$$

$$A_n \text{ — від'ємна} \Rightarrow \nu(B \cap B_n) \leq 0 \Rightarrow \nu(B) \leq 0,$$

тому  $X_-$  від'ємна (так ми фактично довели, що зліченне об'єднання від'ємних множин є від'ємною множиною. Беручи в цих об'єднаннях деякі множини порожніми, отримаємо: скінченне об'єднання від'ємних множин є від'ємною множиною).

Крім того,

$$\nu(X_-) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \nu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \alpha$$

(звідси, зокрема, випливає, що  $\alpha > -\infty$ ).

**Крок 2. Визначення  $X_+$ .** Візьмемо  $X_+ = X \setminus X_-$ . Щоб завершити доведення, достатньо показати, що  $X_+$  — додатна множина. Припустимо, що це не так, і знайдеться множина  $C \subset X_+$ ,  $\nu(C) < 0$ .

Якщо множина  $C$  від'ємна, ми можемо розглянути  $X'_- = X_- \cup C$ . Тоді  $X'_-$  є від'ємною множиною як об'єднання двох від'ємних множин, і

$$\nu(X'_-) = \nu(X_-) + \nu(C) < \nu(X_-) = \alpha, \quad (5.2)$$

що суперечить визначенню  $\alpha$  в (5.1).

Отже, множина  $C$  не є від'ємною, і в  $C$  знайдеться підмножина з додатним значенням заряду. Візьмемо найменше можливе  $k_1 \in \mathbb{N}$  таке, що

$$\exists C_1 \subset C : \nu(C_1) > \frac{1}{k_1}.$$

Маємо

$$\nu(C \setminus C_1) = \nu(C) - \nu(C_1) < 0, \quad C \setminus C_1 \subset X_+.$$

Так само, як і  $C$ , множина  $C \setminus C_1$  не може бути від'ємною, і тому має підмножину з додатним зарядом. Візьмемо найменше можливе  $k_2 \in \mathbb{N}$  таке, що

$$\exists C_2 \subset (C \setminus C_1) : \nu(C_2) > \frac{1}{k_2}.$$

Далі також маємо  $\nu(C \setminus (C_1 \cup C_2)) < 0$ , множина  $C \setminus (C_1 \cup C_2)$  не може бути від'ємною, у ній аналогічно вибираємо підмножину  $C_3$  і т. д. На кожному  $n$ -му кроці вибираємо найменше можливе  $k_n \in \mathbb{N}$ , для якого

$$\exists C_n \subset \left( C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k \right) : \nu(C_n) > \frac{1}{k_n},$$

і це буде можливо, оскільки всі отримувані так  $C_k$  будуть неперетинними,

$$\nu\left(C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\right) = \nu(C) - \sum_{k=1}^{n-1} \nu(C_k) < 0,$$

а множина  $C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k$  не може бути від'ємною.

Також  $\nu(C) < 0$ ,  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \subset C$ , тому, за властивістю 3 заряду, скінченним має бути значення

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n).$$

Отже, при  $n \rightarrow \infty$  буде  $\nu(C_n) \rightarrow 0$ , тому і  $k_n \rightarrow \infty$ .

Розглянемо множину  $D = C \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ . Маємо

$$D \subset X_+, \quad \nu(D) = \nu(C) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < 0.$$

Припустимо, що множина  $D$  не є від'ємною. Тоді існує  $D_1 \subset D$ ,  $\nu(D_1) > 0$ . Знайдеться  $l \in \mathbb{N}$  таке, що  $\nu(D_1) > (1/l)$ , а також існує  $k_n > l$ . Так ми отримали суперечність із вибором  $k_n$ , адже на  $n$ -му кроці існувала

$$D_1 \subset \left( C \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \subset \left( C \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k \right), \quad \nu(D_1) > \frac{1}{l} > \frac{1}{k_n},$$

і  $k_n$  не було б найменшим можливим на цьому кроці.

Значить,  $D$  — від'ємна множина,  $D \subset X_+$ ,  $\nu(D) < 0$ . Тоді  $X_- \cup D$  є від'ємною множиною, і, як і в (5.2), ми маємо

$$\nu(X_- \cup D) = \nu(X_-) + \nu(D) < \nu(X_-) = \alpha,$$

що суперечить вибору  $\alpha$ . Отже, припущення, що множина  $X_+$  не є додатною, є хибним.  $\square$

## 5.2 Розклад Жордана. Теорема Радона — Никодима

З теореми про розклад Гана ми отримуємо

**Наслідок 5.1 (розклад Жордана).** Для заряду  $\nu$  на  $\mathcal{F}$  покладемо

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+), \quad \nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (5.3)$$

Тоді  $\nu_+$  — міра,  $\nu_-$  — скінченна міра, і

$$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

При цьому, якщо  $\nu$  — скінченний, то  $\nu_+$  — скінченна, а якщо  $\nu$  —  $\sigma$ -скінченний, то  $\nu_+$  —  $\sigma$ -скінченна.

*Доведення.* Оскільки  $X_+$  — додатна множина, а  $X_+$  — від'ємна, виконується  $\nu_+(A) \geq 0$ ,  $\nu_-(A) \geq 0$ . Також

$$\nu(A) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \nu_+(A) - \nu_-(A).$$

Із  $\sigma$ -адитивності  $\nu$  легко отримується  $\sigma$ -адитивність  $\nu_+$  і  $\nu_-$ .

Усі значення  $\nu_-$  скінченні, оскільки  $\nu(A \cap X_-) > -\infty$ .

Якщо всі  $\nu(A) < +\infty$ , то  $\nu_+(A) = \nu(A) + \nu_-(A) < +\infty$ , і міра  $\nu_+$  скінченна.

Якщо  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $\nu(X_n) < +\infty$ , то, як ми тільки що показали,  $\nu_+(X_n) < +\infty$ , і міра  $\nu_+$   $\sigma$ -скінченна.  $\square$

**Зауваження 5.1.** Розклад Гана, взагалі кажучи, не єдиний. Зокрема, у прикладі 5.2 можна взяти  $X_+ = \{x_k : a_k > 0\}$  або  $X_+ = X \setminus \{x_k : a_k < 0\}$ , і потім покласти  $X_- = X \setminus X_+$ .

**Зауваження 5.2.** Розклад Жордана єдиний. Покажемо це. Припустимо, що  $X = X_+ \cup X_- = X'_+ \cup X'_-$  — два різних розклади Гана, і разом із мірами  $\nu_+$ ,  $\nu_-$  із (5.3) розглянемо другий розклад Жордана

$$\nu'_+(A) = \nu(A \cap X'_+), \quad \nu'_-(A) = -\nu(A \cap X'_-).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \nu_+(A) &= \nu(A \cap X_+) = \nu(A \cap X_+ \cap X'_+) + \nu(A \cap X_+ \cap X'_-) = \nu(A \cap X_+ \cap X'_+), \\ \nu'_+(A) &= \nu(A \cap X'_+) = \nu(A \cap X_+ \cap X'_+) + \nu(A \cap X_- \cap X'_+) = \nu(A \cap X_+ \cap X'_+), \\ \nu_+(A) &= \nu'_+(A), \quad \nu_-(A) = \nu_+(A) - \nu(A) = \nu'_+(A) - \nu(A) = \nu'_-(A). \end{aligned}$$

(тут ураховано, що множини  $A \cap X_+ \cap X'_-$  і  $A \cap X_- \cap X'_+$  є додатними і від'ємними одночасно, тому мають заряд рівний нулю).

**Означення 5.3.** *Повною варіацією* заряду  $\nu$  називається міра

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-.$$

Зауваження 5.2 показує, що це означення є коректним.

**Приклад 5.4.** Нехай функція  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  є такою, що визначено інтеграл  $\int_X f d\lambda$ , причому  $\int_X f_- d\lambda < +\infty$ . Тоді функція множин

$$\nu(A) = \int_A f d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

є  $\sigma$ -адитивною на  $\mathcal{F}$  (див. властивість 7 із підрозділу 4.4). Також

$$\nu(A) \geq \int_A (-f_-) d\lambda \geq \int_X (-f_-) d\lambda > -\infty,$$

тому  $\nu$  — заряд. Зображення

$$X = \{x : f(x) \geq 0\} \cup \{x : f(x) < 0\}$$

є розбиттям  $X$  на додатну і від'ємну множину й тому є розкладом Гана для цього заряду. Відповідний розклад Жордана:

$$\begin{aligned} \nu_+(A) &= \nu(A \cap X_+) = \int_{A \cap \{f \geq 0\}} f d\lambda = \int_A f \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda, \\ \nu_-(A) &= -\nu(A \cap X_-) = -\int_{A \cap \{f < 0\}} f d\lambda = \int_A (-f) \mathbf{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_A f_- d\lambda. \end{aligned}$$

Повна варіація

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \int_A (f_+ + f_-) d\lambda = \int_A |f| d\lambda.$$

У цьому підрозділі всі міри і заряди вважаємо заданими на вимірному просторі  $(X, \mathcal{F})$ .

**Означення 5.4.** Заряд  $\nu$  називається *абсолютно неперервним* відносно міри  $\lambda$ , якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

У цьому випадку вживається позначення  $\nu \ll \lambda$ .

Нижче буде використано наступне твердження.

**Лема 5.1.** Нехай  $\nu$  – заряд із розкладом Жордана  $\nu = \nu_+ - \nu_-$ ,  $\lambda$  – міра. Наступні твердження еквівалентні:

- 1)  $\nu \ll \lambda$ ;
- 2)  $\nu_+ \ll \lambda$ ,  $\nu_- \ll \lambda$ ;
- 3)  $|\nu| \ll \lambda$ .

*Доведення.* 1)  $\Rightarrow$  2). Доведемо, що, наприклад,  $\nu_+ \ll \lambda$ . Нехай  $A \in \mathcal{F}$  така, що  $\lambda(A) = 0$ . Тоді

$$\lambda(A \cap X_+) = 0 \stackrel{\nu \ll \lambda}{\Rightarrow} \nu(A \cap X_+) = 0,$$

а за означенням  $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$ . Цілком аналогічно тут справджується  $\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-) = 0$ .

2)  $\Rightarrow$  3). Використовуючи умову 2), маємо

$$\lambda(A) = 0 \stackrel{\nu_+ \ll \lambda, \nu_- \ll \lambda}{\Rightarrow} \nu_+(A) = \nu_-(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0.$$

3)  $\Rightarrow$  1). Тут виконується

$$\begin{aligned} \lambda(A) = 0 \stackrel{|\nu| \ll \lambda}{\Rightarrow} |\nu|(A) = 0, \quad |\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu_+(A) = \nu_-(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

У прикладі 5.4 для  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  виконується  $\nu \ll \lambda$ . Насправді таке зображення мають усі  $\sigma$ -скінченні заряди, абсолютно неперервні відносно  $\sigma$ -скінченної міри  $\lambda$ .

Наступне твердження є одним із найважливіших у теорії інтеграла Лебега і має численні застосування в різних галузях математики. Ми наведемо його без доведення.

**Теорема 5.2 (теорема Радона – Никодима).** Нехай  $\nu$  –  $\sigma$ -скінченний заряд,  $\lambda$  –  $\sigma$ -скінченна міра,  $\nu \ll \lambda$ . Тоді існує функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  така, що

$$\forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\lambda. \quad (5.4)$$

При цьому  $f$  визначена однозначно з точністю до еквівалентності відносно  $\lambda$ .

**Зауваження 5.3.** Функція  $f$  із (5.4) називається *щільністю* або *похідною Радона–Никодима* заряду  $\nu$  за мірою  $\lambda$ . При цьому вживається позначення

$$f = \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

**Приклад 5.5.** Нехай універсальна множина  $X$  злічenna,  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^X$ , заряд  $\nu$  і міра  $\lambda$  визначені на  $\mathcal{F}$ .

Умова  $\nu \ll \lambda$  дає, що  $\forall x_k : \lambda(\{x_k\}) = 0 \Rightarrow \nu(\{x_k\}) = 0$  (досить використати означення абсолютної неперервності для  $A = \{x_k\}$ ). Умова  $\sigma$ -скінченності  $\nu$  і  $\lambda$  дає, що всі значення  $\nu(\{x_k\})$  і  $\lambda(\{x_k\})$  скінченні.

Тут в якості похідної Радона–Никодима можемо взяти функцію

$$f(x_k) = \begin{cases} \frac{\nu(\{x_k\})}{\lambda(\{x_k\})}, & \lambda(\{x_k\}) \neq 0, \\ 0, & \lambda(\{x_k\}) = 0. \end{cases}$$

Тоді легко бачити, що

$$\nu(\{x_k\}) = f(x_k)\lambda(\{x_k\}).$$

Для будь-якої множини  $A \subset X$ ,  $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$ , маємо

$$\nu(A) = \sum_k \nu(\{x_{i_k}\}) = \sum_k f(x_{i_k})\lambda(\{x_{i_k}\}) = \sum_k \int_{x_{i_k}} f d\lambda \stackrel{(*)}{=} \int_A f d\lambda.$$

Тут в (\*) ми використали властивість 7 інтеграла.



### 5.3 Абсолютно неперервні функції на $[a, b]$

Нехай функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  має обмежену варіацію на  $[a, b]$  (множину всіх таких функцій ми позначатимемо через  $\mathbb{BV}([a, b])$ , відповідні означення та властивості варіації див., наприклад, у [7, § 9.2]). Через  $\mathbb{V}(f, [c, d])$  ми позначатимемо величину варіації  $f$  на  $[c, d]$ .

Розглянемо дві функції

$$F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x]), \quad F_1(x) = F(x) - f(x), \quad x \in [a, b].$$

Відомо, що функції  $F$  та  $F_1$  неспадні, отже,  $f = F - F_1$ . Якщо  $F$  та  $F_1$  неперервні справа, вони визначають міри Лебега–Стілтєса  $\lambda_F$  і  $\lambda_{F_1}$  на підмножинах  $[a, b]$  (див. підрозділ 2.6), ці міри будуть скінченними. Для формально необхідного визначення функцій  $F$  та  $F_1$  на всьому  $\mathbb{R}$  можемо покласти

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a), & F_1(x) &= F_1(a), & x < a, \\ F(x) &= F(b), & F_1(x) &= F_1(b), & x > b, \end{aligned}$$

при цьому монотонність і неперервність справа зберігаються.

Визначимо скінченний заряд  $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$  на борельовій  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{B}((a, b))$ . Тоді маємо

$$\nu_f((c, d]) = \lambda_F((c, d]) - \lambda_{F_1}((c, d]) = (F(d) - F(c)) - (F_1(d) - F_1(c)) = f(d) - f(c). \quad (5.5)$$

Наша подальша мета — з'ясувати, при яких умовах  $\nu_f$  абсолютно неперервний відносно міри Лебега  $\lambda_1$ . Для цього введемо таке поняття.

**Означення 5.5.** Функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається *абсолютно неперервною на відрізку  $[a, b]$* , якщо

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (a_k, b_k) \subset [a, b], 1 \leq k \leq n$  (неперетинних),  $n \geq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \quad (5.6)$$

У цьому випадку вживатимемо позначення  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

**Приклад 5.6.** Нехай  $f$  задовольняє умову Ліпшиця на  $[a, b]$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

Тоді  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ . Достатньо в (5.6) покласти  $\delta = \varepsilon/L$ , і матимемо

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n L|b_k - a_k| < L\delta = \varepsilon.$$

**Властивості функцій, абсолютно неперервних на  $[a, b]$ .**

1.  $f \in \mathbb{AC}([a, b]) \Rightarrow cf \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

*Доведення.* Випадок  $c = 0$  є очевидним, нехай  $c \neq 0$ . Візьмемо в означенні 5.5  $\delta > 0$  таке, що

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Тоді для функції  $cf$  буде справджуватись (5.6) із даними  $\delta, \varepsilon$ . □

2.  $f, g \in \mathbb{AC}([a, b]) \Rightarrow f + g \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

*Доведення.* В означенні 5.5 виберемо  $\delta_1, \delta_2 > 0$  такі, що

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta_1 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta_2 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Покладемо  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тоді, якщо  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ , то справджуються всі записані тут нерівності, і ми отримуємо

$$\sum_{k=1}^n |(f(b_k) + g(b_k)) - (f(a_k) + g(a_k))| < \varepsilon. \quad \square$$

**3.**  $f \in \mathbb{AC}([a, b]) \Rightarrow f \in \mathbb{C}([a, b])$ .

*Доведення.* При  $n = 1$  (5.6) перетворюється на означення рівномірної неперервності  $f$  на  $[a, b]$ .  $\square$

У наступних допоміжних твердженнях ми отримуємо зв'язок між властивостями функції та властивостями її варіації.

**Лема 5.2.** *Нехай  $f \in \mathbb{BV}([a, b])$  і  $f$  неперервна справа в точці  $x_0 \in [a, b)$ . Тоді функція  $F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x])$  неперервна справа в  $x_0$ .*

*Доведення.* Для довільного  $\varepsilon > 0$  візьмемо  $x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  такі, що

$$\mathbb{V}(f, [x_0, b]) - \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon. \quad (5.7)$$

Оскільки  $f$  неперервна справа в  $x_0$ , маємо

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Можемо вважати, що  $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ , якщо це не так, ми можемо додати відповідну точку до розбиття між  $x_0$  і  $x_1$ , при цьому сума в (5.7) може лише збільшитись, нерівність буде справджуватись. Тоді

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon &\stackrel{(5.7)}{\implies} \mathbb{V}(f, [x_0, b]) - \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\varepsilon, \quad (5.8) \\ \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq \mathbb{V}(f, [x_1, b]) \stackrel{(5.8)}{\implies} \mathbb{V}(f, [x_0, b]) - \mathbb{V}(f, [x_1, b]) < 2\varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbb{V}(f, [x_0, x_1]) = F(x_1) - F(x_0) &< 2\varepsilon \stackrel{F \uparrow}{\implies} F(x) - F(x_0) < 2\varepsilon, \quad x \in (x_0, x_1). \quad \square \end{aligned}$$

**Лема 5.3.** *Нехай  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ . Тоді  $f \in \mathbb{BV}([a, b])$ .*

*Доведення.* Припустимо, що варіація  $f$  необмежена. Тоді

$$\forall j \geq 1 \exists a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b : \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq j. \quad (5.9)$$

До вказаного розбиття додамо точки

$$a + (b - a)i/j, \quad 1 \leq i \leq j - 1,$$

при цьому сума в (5.9), узятя для нового розбиття, буде не меншою, і нерівність у (5.9) справджується. Додані точки розбивають відрізок на  $j$  рівних частин, для суми по відрізках хоча б з однієї з цих частин матимемо

$$\sum |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq 1.$$

При цьому сума довжин цих відрізків

$$\sum |x_k - x_{k-1}| = (b - a)/j,$$

$j$  ми можемо взяти як завгодно великим. Тоді означення 5.5 не справджується при  $\varepsilon = 1$ .  $\square$

**Лема 5.4.** *Нехай  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ ,  $F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x])$ . Тоді  $F \in \mathbb{AC}([a, b])$ .*

*Доведення.* Із леми 5.3 випливає, що функція  $F$  визначена і скінченна. Візьмемо  $\varepsilon, \delta, (a_k, b_k)$  з означення 5.5, і розглянемо

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(f, [a_k, b_k]). \quad (5.10)$$

Кожне значення варіації  $\mathbb{V}(f, [a_k, b_k])$  ми можемо наблизити сумами модулів приростів на неперервних відрізках:

$$\mathbb{V}(f, [a_k, b_k]) - \sum_{i=1}^{i_k} |f(b_k^{(i)}) - f(a_k^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad (a_k^{(i)}, b_k^{(i)}) \subset [a_k, b_k]. \quad (5.11)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{i_k} |b_k^{(i)} - a_k^{(i)}| &\leq \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \stackrel{(5.6)}{\implies} \\ &\stackrel{(5.6)}{\implies} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{i_k} |f(b_k^{(i)}) - f(a_k^{(i)})| < \varepsilon \stackrel{(5.10), (5.11)}{\implies} \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

і остання нерівність справджується, якщо  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ . Тому  $F \in \mathbb{AC}([a, b])$ .  $\square$

Також нам буде потрібне ще одне допоміжне твердження.

**Лема 5.5.** *Нехай  $\lambda$  — міра на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}$ ,  $\mu$  — скінченна міра на  $\mathcal{F}$ . Наступні твердження еквівалентні:*

- 1)  $\mu \ll \lambda$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{F}, \lambda(A) < \delta : \mu(A) \leq \varepsilon$ .

*Доведення.* 1)  $\Rightarrow$  2). Припустимо, що 2) не справджується, тобто

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists A \in \mathcal{F}, \lambda(A) < \delta : \mu(A) > \varepsilon_0.$$

Використовуючи це для  $\delta = 2^{-n}$ ,  $n \geq 1$ , візьмемо  $A_n$  такі, що  $\lambda(A_n) < 2^{-n}$ ,  $\mu(A_n) > \varepsilon_0$ . Покладемо  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Для кожного  $n \geq 1$  маємо

$$\lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) < \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-n} \Rightarrow \lambda(A) = 0.$$

З іншого боку, використовуючи теорему 2.2 про неперервність міри зверху і скінченність  $\mu$ , отримуємо

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right), \quad \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \mu(A_n) > \varepsilon_0 \Rightarrow \mu(A) \geq \varepsilon_0.$$

Значення мір множини  $A$  дають суперечність з умовою  $\mu \ll \lambda$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Нехай  $\lambda(A) = 0$ , тоді  $A$  задовольняє 2) для будь-якого  $\delta > 0$ . Тому має бути  $\mu(A) \leq \varepsilon$  для даної  $A$  для кожного  $\varepsilon > 0$ . Значить,  $\mu(A) = 0$  і  $\mu \ll \lambda$ .  $\square$

## 5.4 Абсолютна неперервність відносно міри Лебега на $[a, b]$

Для функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ми розглядатимемо заряд  $\nu_f$  на  $\mathcal{B}((a, b])$ , породжений за цією функцією, як це показано на початку підрозділу 5.4.

**Теорема 5.3.** *Нехай функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  має обмежену варіацію і неперервна справа на  $[a, b]$ . Тоді для заряду  $\nu_f$  наступні твердження еквівалентні:*

- 1)  $\nu_f \ll \lambda_1$ ;
- 2)  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

*Доведення.* Оскільки  $f$  неперервна справа, то неперервними справа є  $F(x) = \mathbb{V}(f, [a, x])$  (за лемою 5.2) і  $F_1(x) = F(x) - f(x)$  (як різниця неперервних справа функцій). Тому коректно визначеними є міри Лебега–Стілтєса  $\lambda_F$  і  $\lambda_{F_1}$  та заряд  $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$ .

**Крок 1.** 1)  $\Rightarrow$  2). Оскільки  $\nu_f \ll \lambda_1$ , то для варіації заряду ми також маємо  $|\nu_f| \ll \lambda_1$  (лема 5.1). Тоді лема 5.5 свідчить про те, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{F}, \lambda_1(A) < \delta : |\nu_f|(A) < \varepsilon.$$

Візьмемо тут  $A = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$ , де  $(a_k, b_k] \subset (a, b]$  — довільні неперетинні (це еквівалентно тому, що  $(a_k, b_k) \subset [a, b]$  неперетинні). Тоді з умови

$$\lambda_1(A) < \delta \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

випливає, що

$$|\nu_f|(A) < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |\nu_f|((a_k, b_k]) < \varepsilon \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^n |\nu_f((a_k, b_k])| < \varepsilon \stackrel{(5.5)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

(у  $(*)$  ми використали нерівність  $|\nu_f(B)| \leq |\nu_f|(B)$  для довільної множини  $B$ ). Таким чином, для цих  $\delta$  і  $\varepsilon$  справджується (5.6), і тому  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

**Крок 2.** 2)  $\Rightarrow$  1),  $f$  неспадна. У цьому випадку

$$F(x) = f(x) - f(a), \quad F_1(x) = f(a) = \text{const}, \quad \lambda_{F_1} = 0, \quad \nu_f = \lambda_F,$$

$\nu_f$  є мірою.

Візьмемо  $\varepsilon$  і  $\delta$ , що задовольняють (5.6) в означенні абсолютної неперервності  $f$ . Розглянемо довільну  $A \in \mathcal{B}((a, b])$ ,  $\lambda_1(A) < \delta$ . Значення міри Лебега  $\lambda_1$  збігається зі значенням відповідної зовнішньої міри  $\lambda_1^*$  (див. підрозділ 2.6). Ураховуючи зауваження 2.3, візьмемо неперетинні  $(a_k, b_k] \subset (a, b]$  такі, що

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1((a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta.$$

Тоді

$$\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \stackrel{(5.6)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Спрямувавши  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \nu_f((a_k, b_k]) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \nu_f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]\right) \leq \varepsilon, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \Rightarrow \nu_f(A) \leq \varepsilon.$$

Із леми 5.5 маємо  $\nu_f \ll \lambda_1$ .

**Крок 3.** 2)  $\Rightarrow$  1),  $f$  не обов'язково неспадна. За лемою 5.4,  $F \in \mathbb{AC}([a, b])$ . Тоді властивості 1 і 2 абсолютно неперервних функцій для  $F_1 = F - f$  свідчать, що  $F_1 \in \mathbb{AC}([a, b])$ . Із кроку 2 маємо, що  $\lambda_F \ll \lambda_1$ ,  $\lambda_{F_1} \ll \lambda_1$ . Тому для  $\nu_f = \lambda_F - \lambda_{F_1}$  отримуємо  $\nu_f \ll \lambda_1$ .  $\square$

**Приклад 5.7.** Нехай функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  неперервно диференційована на  $[a, b]$ ,  $|f'(x)| \leq L < +\infty$ . Із формули Лагранжа маємо

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\theta)(x - y)| \leq L|x - y|, \quad x, y, \theta \in [a, b].$$

Отже,  $f$  задовольняє умову Ліпшиця, приклад 5.6 показує, що  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ . Тому  $\nu_f \ll \lambda_1$ , і в цьому випадку  $f'$  є відповідною похідною Радона–Никодима. Звідси

$$\forall A \in \mathcal{B}((a, b]) : \nu_f(A) = \int_A f'(x) d\lambda_1$$

(при  $A = (c, d]$  маємо формулу Ньютона–Лейбніца, дві частини рівності як дві міри збігаються на породженій борельовій  $\sigma$ -алгебрі).

Ще одну важливу властивість абсолютно неперервних функцій — *формулу Ньютона–Лейбніця* в загальному випадку — ми наведемо без доведення.

**Теорема 5.4.** 1) Нехай  $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}([a, b])$ . Тоді  $\exists f'(x) \pmod{\lambda_1}$  на  $[a, b]$ ,  $f' \in \mathbb{L}([a, b], \lambda_1)$ , і при цьому

$$f(x) - f(a) = \int_{[a, x]} f'(t) d\lambda_1(t), \quad a \leq x \leq b.$$

2) Нехай  $g \in \mathbb{L}([a, b], \lambda_1)$ ,

$$f(x) = \int_{[a, x]} g(t) d\lambda_1(t), \quad a \leq x \leq b.$$

Тоді  $f \in \mathbb{A}\mathbb{C}([a, b])$ ,  $f'(x) = g(x) \pmod{\lambda_1}$  на  $[a, b]$ .

Доведення тверджень цієї теореми можна знайти, наприклад, у [3, розділ 5], [9, розділ 5], [11, розділ 9].

**Приклад 5.8** (функція Кантора). Наведемо приклад неперервної неспадної функції  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , що не є абсолютно неперервною на  $[0, 1]$ .

На першому кроці покладемо

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

Функція  $f$  залишилася невизначеною на двох відрізках довжиною  $1/3$  кожен.

На другому кроці в середній третині кожного з цих відрізків покладемо  $f$  рівною півсумі сусідніх зліва і справа вже визначених значень  $f$ . Тобто візьмемо

$$f(x) = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9}, \quad f(x) = \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

Продовжимо цей процес нескінченно. Перед кожним  $n$ -м кроком матимемо  $2^{n-1}$  відрізків, кожен завдовжки  $3^{-(n-1)}$ , де ще  $f$  невизначена. Ми братимемо середню третину кожного з цих відрізків і покладемо там  $f$  рівною півсумі сусідніх раніше визначених значень. Значення, яких ми будемо надавати  $f$  "зліва направо" на  $[0, 1]$  відповідно дорівнюють

$$\frac{1}{2^n}, \quad \frac{3}{2^n}, \quad \dots, \quad \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Після цього кроку міра точок, де  $f$  ще не визначена, дорівнює  $(2/3)^n$ .

У цілому, за цим правилом ми визначимо  $f$  в усіх точках відрізка  $[0, 1]$ , крім множини міри 0. У залишених точках покладемо

$$f(x) = \sup\{f(y) \mid y < x, f(y) \text{ визначена в одному з кроків}\}.$$

Після кожного з кроків отримана  $f$  була неспадною, тому і після останнього визначення вона неспадною і залишиться.

Маємо, що  $f \in \mathbb{C}([0, 1])$ , адже  $f$  неспадна, а її множина значень щільна на  $[0, 1]$  (до неї входять усі двійково-раціональні дроби  $k2^{-n} \in [0, 1]$ ). Якби в якійсь точці  $x \in [0, 1]$   $f$  мала стрибок, ми б отримали інтервал із  $[0, 1]$ , що не містить жодного значення  $f$ .

Відмітимо, що  $f'(x) = 0 \pmod{\lambda_1}$  на  $[0, 1]$ . (Внутрішні точки всіх відрізків, де ми визначали  $f$  протягом наших кроків, мають загальну міру 1. В околі кожної такої точки  $x_0$   $f$  стала, тому  $f'(x_0) = 0$ .) Маємо

$$f(1) - f(0) = 1 \neq \int_{[0, 1]} f'(x) d\lambda_1 = 0.$$

Оскільки не справджується твердження 1) теореми 5.4,  $f \notin \mathbb{A}\mathbb{C}([0, 1])$ .

## Вправи

**Вправа 5.1.** Показати, що для скінченного заряду  $\nu$  справджуються аналоги теорем про неперев-  
ність міри:

1)  $A_n \in \mathcal{F}, A_n \uparrow A \Rightarrow \nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n)$ ;

2)  $A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow A \Rightarrow \nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n)$ .

**Вправа 5.2.** Нехай  $\lambda, \mu$  і  $\nu$  —  $\sigma$ -скінченні міри такі, що  $\mu \ll \lambda$  і  $\nu \ll \mu$ . Довести, що

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \quad (\text{mod } \lambda).$$

**Вправа 5.3.** Нехай

$$g \in \mathbf{L}([a, b], \lambda_1), \quad f(x) = \int_{[a, x]} g(t) d\lambda_1(t), \quad a \leq x \leq b.$$

Довести, що  $f \in \mathbb{AC}([a, b])$ .

## Розділ 6

# Інтегрування на добутку просторів

### 6.1 Множини та функції на добутку просторів

Нехай  $(X_1, \mathcal{F}_1)$  і  $(X_2, \mathcal{F}_2)$  — два вимірних простори. Розглянемо декартів добуток  $X = X_1 \times X_2$  і, використовуючи  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_1$  і  $\mathcal{F}_2$ , визначимо на ньому такі класи множин.

**Означення 6.1.** *Вимірними прямокутниками* в  $X$  називається клас множин

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 := \{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

Набір множин  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  є півкільцем як декартів добуток півкільць (див. теорему 1.1), і нічого більшого, взагалі кажучи, про цей клас ми стверджувати не можемо. На  $X$   $\sigma$ -алгебру ми визначимо таким чином.

**Означення 6.2.** *Добутком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_1$  і  $\mathcal{F}_2$*  називається клас множин

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2).$$

Можна довести, що для добутку борельових  $\sigma$ -алгебр в  $\mathbb{R}^d$  виконується

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Нехай  $E \subset X$ ,  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2$ .

**Означення 6.3.**  *$x_1$ -перерізом* множини  $E \subset X$  називається множина

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}.$$

*$x_2$ -перерізом* множини  $E \subset X$  називається множина

$$E_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}.$$

**Приклад 6.1.** Нехай  $E$  — вимірний прямокутник,  $E = E_1 \times E_2$ ,  $E_1 \in \mathcal{F}_1$ ,  $E_2 \in \mathcal{F}_2$ . Тоді

$$E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1, \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1, \end{cases} \quad E_{x_2} = \begin{cases} E_1, & x_2 \in E_2, \\ \emptyset, & x_2 \notin E_2. \end{cases}$$

Зазначимо, що завжди  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ ,  $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ .

**Теорема 6.1.** *Нехай  $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ . Тоді*

$$\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 : E_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \quad E_{x_2} \in \mathcal{F}_1.$$

*Доведення.* Доведемо, наприклад, що  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ . Розглянемо клас множин

$$\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \mid \forall x_1 \in X_1 : E_{x_1} \in \mathcal{F}_2\}.$$

Приклад 6.1 показує, що клас вимірних прямокутників  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{H}$ . Крім того,  $\mathcal{H}$  —  $\sigma$ -алгебра. Адже для довільних  $E^{(n)} \in \mathcal{H}$ ,  $n \geq 1$ , ми маємо

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E^{(n)})_{x_1} \in \mathcal{F}_2$$

як об'єднання елементів  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_2$ . Аналогічно

$$(E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1} = (E^{(1)})_{x_1} \setminus (E^{(2)})_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow E^{(1)} \setminus E^{(2)} \in \mathcal{H}.$$

Значить,  $\mathcal{H} \supset \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ . □

Далі для функції  $f : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , через  $f_{x_1}(x_2)$  позначатимемо функцію  $f(x_1, x_2)$ , у якій  $x_1$  вважається фіксованим,  $x_2$  — аргументом. Аналогічно  $f_{x_2}(x_1)$  позначає функцію  $f$ , у якій фіксованим є  $x_2$ .

**Теорема 6.2.** *Нехай функція  $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -вимірна. Тоді*

$$\forall x_1 \in \mathcal{X}_1 : f_{x_1} \text{ } \mathcal{F}_2\text{-вимірна, } \forall x_2 \in \mathcal{X}_2 : f_{x_2} \text{ } \mathcal{F}_1\text{-вимірна.}$$

*Доведення.* Для довільних  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ,  $x_1 \in \mathcal{X}_1$  маємо

$$f_{x_1}^{-1}(B) = \{x_2 \in \mathcal{X}_2 : f(x_1, x_2) \in B\} = \{x_2 \in \mathcal{X}_2 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_{x_1}.$$

Із вимірності  $f$  випливає, що  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , за теоремою 6.1  $(f^{-1}(B))_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ , отже, ми отримуємо вказану вимірність  $f_{x_1}$ . Аналогічно отримуємо вимірність  $f_{x_2}$ :

$$f_{x_2}^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_{x_2} \in \mathcal{F}_1. \quad \square$$

## 6.2 Добуток мір

Розглянемо міру на добутку просторів. Нехай  $(\mathcal{X}_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$  і  $(\mathcal{X}_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  — два вимірних простори з мірами,  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ . Спочатку визначимо міру на класі вимірних прямокутників  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , цей клас є півкільцем підмножин  $\mathcal{X}$ .

**Лема 6.1.** *Функція множин*

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

*є мірою на  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ .*

*Доведення.* Треба довести  $\sigma$ -адитивність  $\mu$ . Візьмемо неперетинні  $E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  такі, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} = E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \quad E = E_1 \times E_2, \quad E^{(n)} = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}.$$

Тоді для  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ ,  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{X}_2$  маємо

$$\mathbf{1}_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E^{(n)}}(x) \Leftrightarrow \mathbf{1}_{E_1}(x_1)\mathbf{1}_{E_2}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2).$$

Для кожного фіксованого  $x_1 \in \mathcal{X}_1$  проінтегруємо дві частини останньої рівності на  $\mathcal{X}_2$  за мірою  $\mu_2$ . Використовуючи наслідок 4.1 про інтегрування функціонального ряду, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{E_1}(x_1)\mu_2(E_2) &= \int_{\mathcal{X}_2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2) \right) d\mu_2(x_2) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1) \int_{\mathcal{X}_2} \mathbf{1}_{E_2^{(n)}}(x_2) d\mu_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_1^{(n)}}(x_1)\mu_2(E_2^{(n)}). \end{aligned}$$

Цю рівність проінтегруємо на  $\mathcal{X}_1$  за мірою  $\mu_1$ . Знову використовуючи наслідок 4.1, матимемо

$$\mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_1^{(n)})\mu_2(E_2^{(n)}) \Leftrightarrow \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)}). \quad \square$$



Лема 6.1 обґрунтовує коректність наступного означення.

**Означення 6.4.** Добутком мір  $\mu_1$  і  $\mu_2$  називається продовження за Каратеодорі міри

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2),$$

визначеної на півкільці  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ .

Цей добуток мір позначатимемо через  $\mu_1 \times \mu_2$ , відповідний клас вимірних множин — через  $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$ . Оскільки  $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$  —  $\sigma$ -алгебра, що містить початкове півкільце  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , то

$$\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \sigma a(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2.$$

Відмітимо, що клас  $\mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$  залежить від мір, які ми розглядаємо на  $\mathcal{F}_1$  і  $\mathcal{F}_2$ , а набір  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$  визначається лише за самими  $\sigma$ -алгебрами.

**Приклад 6.2.** Покажемо, що для мір Лебега виконується  $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$ . Для множини  $E \in \mathcal{P}_{m+n}$  маємо

$$E = \prod_{k=1}^{m+n} (a_k, b_k] = \left( \prod_{k=1}^m (a_k, b_k] \right) \times \left( \prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k] \right),$$

$$\lambda_{m+n}(E) = (\lambda_m \times \lambda_n)(E) = \prod_{k=1}^{m+n} (b_k - a_k).$$

Продовження за Каратеодорі цих двох мір, визначених на  $E \in \mathcal{P}_{m+n}$  дасть один і той самий результат —  $\lambda_{m+n}$  на  $\mathcal{S}_{m+n}$ .

Залишається показати, що продовження  $\lambda_m \times \lambda_n$  із двох різних півкільць  $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$  і  $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$  приводить до однієї міри. Дійсно, для  $E \subset \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ , для продовження із  $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$ , використовуючи відповідну зовнішню міру, маємо

$$(\lambda_m \times \lambda_n)^*(E) \stackrel{(2.14)}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(E_1^{(k)}) \lambda_2(E_2^{(k)}) \mid E_1^{(k)} \in \mathcal{S}_m, E_2^{(k)} \in \mathcal{S}_n, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1^{(k)} \times E_2^{(k)}) \right\}.$$

Тут  $E_1^{(k)} \in \mathcal{S}_m$  і зі схеми продовження за Каратеодорі випливає, що  $\lambda_1(E_1^{(k)})$  можна як завгодно близько наблизити сумами вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(A_1^{(i)}), \quad A_1^{(i)} \in \mathcal{P}_m, \quad E_1^{(k)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_1^{(i)},$$

аналогічне наближення справджується для  $E_2^{(k)} \in \mathcal{S}_n$ . Тому

$$(\lambda_m \times \lambda_n)^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(A_1^{(i)}) \lambda_2(A_2^{(i)}) \mid A_1^{(i)} \in \mathcal{P}_m, A_2^{(i)} \in \mathcal{P}_n, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1^{(i)} \times A_2^{(i)}) \right\}.$$

Значить, для продовжень з обох півкільць  $\mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n$  і  $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$  ми отримуємо однакове значення зовнішньої міри, а тому збігаються класи вимірних множин і значення отриманих мір.

Наступне твердження ми наведемо без доведення.

**Теорема 6.3.** Нехай міри  $\mu_1$  на  $\mathcal{F}_1$  і  $\mu_2$  на  $\mathcal{F}_2$   $\sigma$ -скінченні й повні,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overline{\otimes} \mathcal{F}_2$ ,  $E \in \mathcal{F}$ . Тоді

- 1)  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ ;
- 2)  $\mu_2(E_{x_1})$   $\mathcal{F}_1$ -вимірна як функція аргументу  $x_1 \in \mathcal{X}_1$ ;
- 3)  $\mu(E) = \int_{\mathcal{X}_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1)$ .

**Приклад 6.3.** Покладемо  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ ,  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  і міри  $\mu_1, \mu_2$  — лебегові,  $f \in \mathbb{C}([a, b])$  — невід’ємна функція. Розглянемо

$$E = \{(x_1, x_2) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}.$$

Тоді

$$E_{x_1} = \begin{cases} [0, f(x_1)], & x_1 \in [a, b], \\ \emptyset, & x_1 \notin [a, b], \end{cases} \quad \mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} f(x_1), & x_1 \in [a, b], \\ 0, & x_1 \notin [a, b], \end{cases}$$

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{[a, b]} f(x_1) d\mu_1(x_1).$$

Ми бачимо, що справджуються твердження 1) і 2) теореми 6.3, а твердження 3) цієї теореми є узагальненням формули площі криволінійної трапеції.

### 6.3 Теореми Тонеллі і Фубіні

Нехай, як і раніше,  $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$  і  $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  — два вимірних простори з мірами,  $X = X_1 \times X_2$ . У цьому підрозділі ми отримаємо, що інтеграл за  $\mu_1 \times \mu_2$  дорівнює повторному інтегралу за  $\mu_1$  і  $\mu_2$ .

**Теорема 6.4 (теорема Тонеллі).** *Нехай міри  $\mu_1$  і  $\mu_2$   $\sigma$ -скінченні й повні,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ , функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -вимірна і невід’ємна. Тоді*

- 1)  $f_{x_1}$   $\mathcal{F}_2$ -вимірна (mod  $\mu_1$ );
- 2)  $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$   $\mathcal{F}_1$ -вимірна;
- 3)  $\int_X f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ .

*Доведення.* Для  $f = \mathbf{1}_E$ ,  $E \in \mathcal{F}$ , твердження 1), 2) і 3) теореми 6.4 безпосередньо випливають із тверджень 1), 2) і 3) теореми 6.3 відповідно. Адаже ми маємо, що  $f_{x_1} = \mathbf{1}_{E_{x_1}}$ , і при  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$  індикатор буде  $\mathcal{F}_2$ -вимірним. Також тут  $g(x_1) = \mu_2(E_{x_1})$ ,

$$\int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(E) = \int_X f d\mu.$$

Якщо 1), 2) і 3) справджуються для двох функцій  $f^{(1)}$  і  $f^{(2)}$ , то, як легко бачити, вони мають місце для  $f^{(1)} + f^{(2)}$  і  $cf^{(1)}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Значить, вони справджуються для всіх простих невід’ємних  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій на  $X$ .

Для довільної невід’ємної вимірної  $f$  візьмемо прості невід’ємні вимірні  $p^{(n)} \uparrow f$ . Тоді  $p_{x_1}^{(n)} \uparrow f_{x_1}$ ,  $f_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ -вимірною для  $x_1$ , для яких вимірними є всі  $p^{(n)}$ , тому справджується 1). Записавши 2) і 3) для  $p^{(n)}$ , граничним переходом за  $n$  ми отримуємо 2) і 3) для  $f$ .  $\square$

**Теорема 6.5 (теорема Фубіні).** *Нехай міри  $\mu_1$  і  $\mu_2$   $\sigma$ -скінченні й повні,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $f \in L(X, \mu)$ . Тоді*

- 1)  $f_{x_1} \in L(X_2, \mu_2)$  (mod  $\mu_1$ );
- 2)  $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \in L(X_1, \mu_1)$ ;
- 3)  $\int_X f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ .

*Доведення.* Спочатку розглянемо випадок невід’ємної  $f$ .  $\mathcal{F}_2$ -вимірність  $f_{x_1}$  і  $\mathcal{F}_1$ -вимірність  $g$  випливають із теореми 6.4. Також

$$f \in L(X, \mu) \Rightarrow \int_X f d\mu < +\infty \xrightarrow{\text{Теорема 6.4}} \int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 = \int_{X_1} g d\mu_1 < +\infty \Rightarrow g \in L(X_1, \mu_1).$$

Крім того, звідси отримуємо

$$g < +\infty \text{ (mod } \mu_1) \Leftrightarrow \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 < +\infty \text{ (mod } \mu_1) \Rightarrow f_{x_1} \in L(X_2, \mu_2) \text{ (mod } \mu_1).$$

Твердження 3) нашої теореми для  $f \geq 0$  збігається з відповідним твердженням із теореми Тонеллі.

Тепер нехай  $f \in L(X, \mu)$  не обов’язково невід’ємна. Тоді  $f = f_+ - f_-$ ,  $f_+, f_- \in L(X, \mu)$ . Записавши твердження нашої теореми для  $f_+$  і  $f_-$  і розглянувши різниці функцій, ми отримуємо потрібні твердження для  $f$ . При цьому використовуємо рівність  $f_{x_1} = (f_+)_{x_1} - (f_-)_{x_1}$ , і для інтегровних функцій справджується лінійність інтеграла.  $\square$

## Вправи

**Вправа 6.1.** Довести, що для добутку борельових  $\sigma$ -алгебр в  $\mathbb{R}^d$  виконується

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

**Вправа 6.2.** Нехай  $\mu_1$  і  $\mu_2$  —  $\sigma$ -скінченні міри. Довести, що міра  $\mu_1 \times \mu_2$   $\sigma$ -скінченна.

**Вправа 6.3.** Нехай  $A \subset [0, 1]$  — множина, невимірна за Лебегом. Довести, що  $A \times \{0\} \in \mathcal{S}_2$ ,  $A \times \{0\} \notin \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_1$ .

**Вправа 6.4.** Для довільного вимірного простору з мірою  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  і  $\mathcal{F}$ -вимірної функції  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  довести, що

$$\int_X f(x) d\lambda(x) = \int_{[0, \infty)} \lambda(\{x : f(x) > t\}) d\lambda_1(t).$$

**Вправа 6.5.** Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір із  $\sigma$ -скінченною мірою,  $\lambda_1$  — міра Лебега на  $\mathbb{R}$ , функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -вимірна. Графіком функції  $f$  називається множина

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}.$$

Довести, що  $\Gamma \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$  і  $(\lambda \times \lambda_1)(\Gamma) = 0$ .

## Розділ 7

# Простори інтегровних функцій

### 7.1 Нерівності Гельдера і Мінковського

У цьому підрозділі ми отримаємо дві важливі нерівності для інтегралів. Почнемо з простого допоміжного твердження.

**Лема 7.1.** *Нехай  $a, b \geq 0$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p, q > 1$ . Тоді*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Доведення.* Цю нерівність доведемо за допомогою похідної. Розглянемо

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \quad a \geq 0 \Rightarrow f'(a) = a^{p-1} - b.$$

Значить,  $f$  спадає для  $a \leq b^{\frac{1}{p-1}}$ , зростає для  $a \geq b^{\frac{1}{p-1}}$ , і тому

$$\min_{a \geq 0} f(a) = f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^q \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0$$

(тут використано, що  $\frac{p}{p-1} = q \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Отже  $f(a) \geq 0$  для всіх  $a \geq 0$ . □

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір із мірою. Для  $\mathcal{F}$ -вимірної  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  і  $p \geq 1$  використовува- тимемо позначення

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Теорема 7.1 (нерівність Гельдера).** *Нехай функції  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{F}$ -вимірні, числа  $p, q > 1$  такі, що  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тоді*

$$\int_X |fg| d\lambda \leq \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (7.1)$$

*Доведення.* Треба довести, що

$$\int_X |fg| d\lambda \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (7.2)$$

Якщо  $\|f\|_p = 0$ , то, за властивістю 11 інтеграла, виконується  $|f| = 0 \pmod{\lambda}$ , і (7.2) справджується. Аналогічно — для випадку  $\|g\|_q = 0$ . Тому далі ми можемо вважати, що  $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ .

Якщо  $\|f\|_p = +\infty$  або  $\|g\|_q = +\infty$ , то права частина (7.2) дорівнює  $+\infty$ , нерівність справджується, і цей випадок ми також далі не розглядаємо.

В усіх інших випадках (7.2) еквівалентна нерівності

$$\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\lambda \leq 1.$$

За лемою 7.1,

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q.$$

Узявши інтеграл від обох частин цієї нерівності, отримаємо

$$\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\lambda \leq \frac{1}{p(\|f\|_p)^p} \int_X |f|^p d\lambda + \frac{1}{q(\|g\|_q)^q} \int_X |g|^q d\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

**Теорема 7.2 (нерівність Мінковського).** Для  $\mathcal{F}$ -вимірних  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  і  $p \geq 1$  справджується

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (7.3)$$

*Доведення.* Для  $p = 1$  маємо, що  $\|f\|_1 = \int_X |f| d\lambda$ , тоді (7.3) записується як

$$\int_X |f + g| d\lambda \leq \int_X |f| d\lambda + \int_X |g| d\lambda,$$

а ця нерівність випливає з того, що  $|f + g| \leq |f| + |g|$ .

Якщо  $\|f + g\|_p = 0$ , нерівність (7.3) є очевидною. Нехай  $\|f + g\|_p = +\infty$ . Використовуючи опуклість функції  $x^p$ ,  $p > 1$ ,  $x \geq 0$ , маємо

$$\left( \frac{|f + g|}{2} \right)^p \leq \left( \frac{|f| + |g|}{2} \right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2}.$$

Якщо в (7.3) ліва частина дорівнює  $+\infty$ , то хоча б один доданок справа нескінченний, і нерівність справджується.

Далі вважаємо, що ліва частина (7.3) відмінна від 0 і  $+\infty$ ,  $p > 1$  і візьмемо  $q$  таке, що  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Маємо

$$\begin{aligned} (\|f + g\|_p)^p &= \int_X |f + g|^p d\lambda = \int_X |f + g|^{p-1} |f + g| d\lambda \leq \int_X |f + g|^{p-1} |f| d\lambda + \int_X |f + g|^{p-1} |g| d\lambda \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda \right)^{1/q} \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p} + \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda \right)^{1/q} \left( \int_X |g|^p d\lambda \right)^{1/p} \stackrel{(**)}{=} \\ &\stackrel{(**)}{=} (\|f + g\|_p)^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Тут у (\*) ми для кожного з двох інтегралів застосували нерівність Гельдера, в (\*\*) використали рівність  $(p-1)q = p$ . Тепер скоротимо (7.4) на  $(\|f + g\|_p)^{p/q}$ , відмітимо, що  $p - \frac{p}{q} = 1$ , і отримаємо (7.3).  $\square$

## 7.2 Простір $L_p$

Як і раніше,  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  — вимірний простір із мірою, і для  $p \geq 1$  ми розглянемо множину функцій

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ } \mathcal{F}\text{-вимірна, } |f|^p \in L(X, \lambda)\}.$$

У  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  введемо таке відношення еквівалентності:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \pmod{\lambda}.$$

Очевидно, справджуються наступні властивості:

- 1)  $f \sim f$ ;
- 2)  $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$ ;
- 3)  $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$ .

Як відомо, таке відношення розбиває множину  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  на класи еквівалентності.

**Означення 7.1.** Простором  $L_p = L_p(X, \lambda)$ ,  $p \geq 1$ , називається множина класів еквівалентності, отримана з  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  за допомогою відношення еквівалентності  $f \sim g \Leftrightarrow f = g \pmod{\lambda}$ .

Розглядаючи елементи  $L_p$ , зазвичай, беруть якусь функцію за представника всього класу еквівалентності й вважають, що елементами  $L_p$  є функції. При цьому вважаються однаковими представниками функції, що збігаються майже скрізь. Лінійні операції з елементами  $L_p$  — це операції зі взятими функціями (відмітимо, що як представник класу береться функція, що не має нескінченних значень — це важливо для лінійних операцій. Якщо  $|f|^p \in L(X, \lambda)$ , то  $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ , і відповідна функція, еквівалентна  $f$ , існує).

Наша подальша мета — дослідити  $L_p$  як нормований простір. Нагадаємо відповідне означення.

Нехай  $L$  — довільний лінійний простір над числовим полем  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  або  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

**Означення 7.2.** Нормою на  $L$  називається функція  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$  така, що

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  в  $L$ ;
- 2)  $\|cx\| = |c|\|x\|$ ,  $c \in \mathbb{K}$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

При цьому  $(L, \|\cdot\|)$  називається *нормованим простором*.

У нормованому просторі можна ввести метрику  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Збіжність у  $(L, \|\cdot\|)$  — це збіжність в  $(L, \rho)$  (тобто  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ ). Повнота, сепарабельність нормованого простору — це повнота, сепарабельність відповідного метричного простору.

Нормований простір  $(L, \|\cdot\|)$  називається дійсним або комплексним у випадках  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  або  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  відповідно. Далі ми розглядаємо лише дійсні простори.

Для елементів  $L_p$  ми вживатимемо вже відоме нам позначення

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

(знову відмітимо, що тут елемент  $L_p$  розглядаємо як функцію, при заміні  $f$  на еквівалентну функцію значення  $\|f\|_p$  не зміниться). Вимірна функція  $f$  належить  $L_p$ , коли  $\|f\|_p < +\infty$ .

**Лема 7.2.**  $(L_p, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , є дійсним нормованим простором.

*Доведення.* Спочатку зазначимо, що  $L_p$  — лінійний простір над полем  $\mathbb{R}$ . Якщо  $f, g \in L_p$ , то  $\|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$ , нерівність Мінковського (7.3) тоді свідчить про те, що  $\|f + g\|_p < +\infty$ , і тому  $f + g \in L_p$ . Також, очевидно, що тоді  $\|cf\|_p < +\infty$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , і тому  $cf \in L_p$ .

Тепер перевіримо, що для  $\|\cdot\|_p$  справджуються всі три умови з означення норми.

Справджується 1): очевидно є нерівність  $\|f\|_p \geq 0$ , а якщо  $\|f\|_p = 0$ , то  $\int_X |f|^p d\lambda = 0$ , із властивості 11 інтеграла випливає, що  $f = 0 \pmod{\lambda}$ , тому  $f = 0$  як елементи  $L_p$ .

Легко бачити, що виконується 2):

$$\|cf\|_p = |c|\|f\|_p \Leftrightarrow \left( \int_X |cf|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Умова 3) для  $\|\cdot\|_p$  — це нерівність Мінковського (7.3). □

**Лема 7.3 (нерівність Чебишова).** Для  $\mathcal{F}$ -вимірної функції  $f$  і довільного  $\varepsilon > 0$  буде

$$\lambda(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f| d\lambda. \quad (7.5)$$

*Доведення.* Маємо, що

$$\int_X |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} \varepsilon d\lambda = \varepsilon \lambda(\{|f| \geq \varepsilon\}). \quad \square$$

**Теорема 7.3.** Нормований простір  $(L_p, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , є повним.

*Доведення.* Візьмемо послідовність  $f_n \in L_p$ ,  $n \geq 1$ , що є фундаментальною, тобто

$$\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

Тоді для будь-якого  $\varepsilon > 0$  маємо

$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)|^p \geq \varepsilon\}) \stackrel{(7.5)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f_m|^p d\lambda = (\|f_n - f_m\|_p)^p \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Тому послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , є фундаментальною за мірою (див. означення 3.11). За теоремою 3.13, тоді знайдуться вимірна функція  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  та підпослідовність  $f_{n_k}$ ,  $k \geq 1$ , такі, що  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Із фундаментальності  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , у  $L_p$  випливає, що

$$\exists k_0 \forall k, l \geq k_0 : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p \leq \varepsilon \Leftrightarrow \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \varepsilon^p.$$

Із застосуванням теореми Фату (теорема 4.6), для  $k \geq k_0$  отримуємо

$$\begin{aligned} \int_X |f_{n_k} - f|^p d\lambda &= \int_X \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda = \int_X \underline{\lim}_{l \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \stackrel{(4.24)}{\leq} \\ &\stackrel{(4.24)}{\leq} \underline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \varepsilon^p < +\infty. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Звідси, зокрема, випливає, що  $(f_{n_k} - f) \in L_p$ . Оскільки  $L_p$  — лінійний простір і  $f_{n_k} \in L_p$ , маємо  $f \in L_p$ .

Також у (7.7) отримано, що для  $k \geq k_0$  виконується

$$\int_X |f_{n_k} - f|^p d\lambda \leq \varepsilon^p \Leftrightarrow \|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Відповідне  $k_0$  вибрано для довільного зафіксованого  $\varepsilon > 0$ . Тим самим ми перевірили означення границі числової послідовності для збіжності

$$\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7.8)$$

Залишилося переконатися у тому, що вся послідовність  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , збігається до цієї  $f$ . Для кожного  $n \geq 1$  довільним чином візьмемо елемент нашої підпослідовності  $f_{n_k(n)}$  такий, що  $n_k(n) \geq n$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  справджується  $n_k(n) \rightarrow \infty$ , і ми отримуємо

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &\leq \|f_n - f_{n_k(n)}\|_p + \|f_{n_k(n)} - f\|_p, \\ \|f_n - f_{n_k(n)}\|_p &\stackrel{(7.6)}{\rightarrow} 0, \quad \|f_{n_k(n)} - f\|_p \stackrel{(7.8)}{\rightarrow} 0, \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \rightarrow f, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

### 7.3 Щільні підмножини $L_p$

У попередньому підрозділі ми довели повноту нормованого простору  $L_p$ , у цьому підрозділі дослідимо деякі питання, пов'язані з його сепарабельністю, можливістю наближень елементів  $L_p$  функціями з певних класів.

Відмітимо, що нормований простір  $(L, \|\cdot\|)$  називається *сепарабельним*, якщо в ньому існує зліченна скрізь щільна множина. Множина  $M \subset L$  називається скрізь щільною, якщо

$$\forall x \in L, \varepsilon > 0 \exists y \in M : \|x - y\| < \varepsilon.$$

**Теорема 7.4.** Для будь-яких  $f \in L_p$  і  $\varepsilon > 0$  знайдеться проста функція  $q \in L_p$  така, що  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

*Доведення.* **Крок 1.** Нехай  $f \geq 0$ . Тоді, за теоремою 3.5, існують прості невід'ємні вимірні функції  $q_n$  такі, що  $q_n \uparrow f$ . Маємо

$$0 \leq f - q_n \leq f \Rightarrow |f - q_n|^p \leq |f|^p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - q_n(x)|^p = 0.$$

Використаємо теорему Лебега про мажоровану збіжність (теорема 4.7), взявши мажорантою  $|f|^p \in L(X, \lambda)$ , отримаємо

$$\int_X |f - q_n|^p d\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f - q_n\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Серед цих  $q_n$  знайдеться функція  $q$  така, що  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

**Крок 2.** Нехай  $f$  не обов'язково невід'ємна. Тоді  $f = f_+ - f_-$ , де  $f_+, f_- \geq 0$ . За кроком 1, існують прості  $q_+$  і  $q_- \in \mathbf{L}_p$  такі, що

$$\|f_+ - q_+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f_- - q_-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Візьмемо  $q = q_+ - q_-$ . Функція  $q$  проста і, оскільки простір  $\mathbf{L}_p$  лінійний,  $q \in \mathbf{L}_p$ . Також маємо

$$\|f - q\|_p = \|(f_+ - q_+) - (f_- - q_-)\|_p \leq \|f_+ - q_+\|_p + \|f_- - q_-\|_p < \varepsilon. \quad \square$$

За певних умов ми можемо звузити клас простих функцій, що наближають  $f \in \mathbf{L}_p$ .

**Теорема 7.5.** Нехай  $\lambda$  на  $\mathcal{F}$  отримана за схемою продовження за Каратеодорі з півкільця  $\mathcal{P}$ , і  $\lambda$   $\sigma$ -скінченна на  $\mathcal{P}$ . Тоді для будь-яких  $f \in \mathbf{L}_p$  і  $\varepsilon > 0$  знайдеться проста функція

$$q \in \mathbf{L}_p, \quad q(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad A_k \in \mathcal{P}, \quad (7.9)$$

така, що  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

*Доведення.* **Крок 1.** Нехай  $f = \mathbf{1}_C$ ,  $C \in \mathcal{F}$ . Маємо

$$\int_{\mathbf{X}} |f|^p d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbf{X}} (\mathbf{1}_C)^p d\lambda = \lambda(C) < +\infty.$$

За теоремою про наближення міри її значеннями на кільці (теорема 2.9), знайдеться  $B \in k(\mathcal{P})$  таке, що  $\lambda(C \Delta B) < \varepsilon^p$ . Теорема 1.3 дає, що  $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$ ,  $A_k \in \mathcal{P}$  неперетинні. Покладемо

$$q(x) = \mathbf{1}_B(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x).$$

Тоді  $q$  має вигляд (7.9) і

$$\|f - q\|_p = \left( \int_{\mathbf{X}} |\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B|^p d\lambda \right)^{1/p} = \left( \int_{\mathbf{X}} |\mathbf{1}_{C \Delta B}|^p d\lambda \right)^{1/p} = (\lambda(C \Delta B))^{1/p} < \varepsilon.$$

**Крок 2.** Нехай  $f \in \mathbf{L}_p$  проста,  $f = \sum_{i=1}^j c_i \mathbf{1}_{C_i}$ ,  $C_i \in \mathcal{F}$  неперетинні,  $c_i \neq 0$ . Тоді

$$\int_{\mathbf{X}} |f|^p d\lambda = \sum_{i=1}^j |c_i|^p \lambda(C_i) < +\infty \stackrel{c_i \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda(C_i) < +\infty \Leftrightarrow \mathbf{1}_{C_i} \in \mathbf{L}_p.$$

Користуючись кроком 1, для кожного  $i$  візьмемо просту функцію  $q_i$  вигляду (7.9) таку, що

$$\|\mathbf{1}_{C_i} - q_i\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^j |c_i|}, \quad (7.10)$$

і покладемо  $q = \sum_{i=1}^j c_i q_i$ . Функція  $q$ , очевидно, має вигляд (7.9), і, користуючись властивостями норми, ми маємо

$$\|f - q\|_p \leq \sum_{i=1}^j |c_i| \|\mathbf{1}_{C_i} - q_i\|_p \stackrel{(7.10)}{<} \varepsilon.$$

**Крок 3.** Нехай  $f \in \mathbf{L}_p$  довільна. За теоремою 7.4, знайдеться проста функція  $f_0 \in \mathbf{L}_p$  така, що  $\|f - f_0\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . За кроком 2 теорема, існує функція  $q$  вигляду (7.9) така, що  $\|f_0 - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тоді  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

У наступних наслідках ми візьмемо  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{S}_d$ ,  $\lambda = \lambda_d$  — міра Лебега.

**Наслідок 7.1.** Простір  $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$  сепарабельний.



*Доведення.* Розглянемо зліченне півкільце множин

$$\tilde{\mathcal{P}}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Покажемо, що зліченна множина  $\mathcal{M}$  функцій вигляду

$$\sum_{i=1}^j r_i \mathbf{1}_{C_i}, \quad r_i \in \mathbb{Q}, \quad C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d, \quad j \geq 1, \quad (7.11)$$

є щільною в  $L_p = L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ .

Легко бачити, що функціями з  $\mathcal{M}$  можна як завгодно близько за нормою  $\|\cdot\|_p$  наближати функції вигляду

$$\sum_{i=1}^j c_i \mathbf{1}_{C_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d,$$

а вони, в свою чергу, наближають функції типу

$$\sum_{i=1}^j c_i \mathbf{1}_{D_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad D_i \in \mathcal{P}_d. \quad (7.12)$$

Із теореми 7.5 маємо, що функції вигляду (7.12) утворюють щільну підмножину  $L_p$ .  $\square$

Далі через  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  позначимо клас неперервних функцій  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких множина  $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$  обмежена. Тоді, зокрема, функція  $f$  обмежена, ми маємо

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda_d = \int_{\{f \neq 0\}} |f|^p d\lambda_d \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|^p \lambda_d(\{f \neq 0\}) < +\infty,$$

і тому  $f \in L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ ,  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ . Зазначимо, що  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  — дійсний лінійний простір.

**Наслідок 7.2.** Множина  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  щільна в  $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ .

*Доведення.* За теоремою 7.5, для  $f \in L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$  і довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad A_i \in \mathcal{P}_d,$$

така, що  $\|f - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Для  $A = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k]$  і  $\delta > 0$  існує функція  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  така, що

$$g(x) = 1, \quad x \in \prod_{k=1}^d [a_k + \delta, b_k - \delta], \quad g(x) = 0, \quad x \notin \prod_{k=1}^d (a_k, b_k),$$

і  $0 \leq g(x) \leq 1$ . Тоді при  $g \rightarrow \mathbf{1}_A$  в  $L_p$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Візьмемо

$$g_i \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) : \|\mathbf{1}_{A_i} - g_i\|_p < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^j |a_i|}, \quad h = \sum_{i=1}^j a_i g_i.$$

Тоді  $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|h - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ , і тому  $\|f - h\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

## Вправи

**Вправа 7.1.** Нехай  $f \in L_p(X, \lambda) \cap L_s(X, \lambda)$ ,  $1 \leq p < r < s$ . Довести, що  $f \in L_r(X, \lambda)$ .

**Вправа 7.2.** Через  $L_\infty = L_\infty(X, \lambda)$  позначимо множину класів еквівалентності функцій

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} : \exists C \in \mathbb{R} : |f| \leq C \pmod{\lambda}$$

(до одного класу відносимо функції, що рівні м.с.). Для  $f \in L_\infty$  покладемо  $\|f\|_\infty$  рівним інфімуму вказаних  $C$ .

1) Довести, що  $\|\cdot\|_\infty$  — норма.

2) Довести, що нормований простір  $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  повний.

**Вправа 7.3.** Нехай  $0 < p < 1$ , визначимо  $L_p = L_p(X, \lambda)$  як і раніше. Для  $f, g \in L_p$  покладемо  $d(f, g) = \int_X |f - g|^p d\lambda$ .

1) Довести, що  $d$  — метрика на  $L_p$ .

2) Довести, що  $L_p$  — лінійний простір.

3) Довести, що метричний простір  $(L_p, d)$  повний.

**Вправа 7.4.** Нехай  $f \in L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .  $L_p$ -модулем неперервності функції  $f$  називається

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leq |t| \leq \delta} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+t) - f(x)|^p d\lambda_d(x) \right)^{1/p}.$$

Довести, що  $\omega_p(f, \delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

## Розділ 8

# Банахові та гільбертові простори

### 8.1 Банахові простори. Комплексні простори $L_p$

Ми почнемо з одного з ключових означень функціонального аналізу.

**Означення 8.1.** *Банаховим простором* називається повний лінійний нормований простір.

Банахів простір (БП) називають повним або комплексним відповідно до числового поля  $\mathbb{K}$ , над яким він розглядається.

Очевидно,  $\mathbb{R}^d$  зі стандартною евклідовою нормою

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^d x_k^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad x_k \in \mathbb{R},$$

буде дійсним БП,  $\mathbb{C}^d$  з нормою

$$\|z\| = \left( \sum_{k=1}^d |z_k|^2 \right)^{1/2}, \quad z = (z_1, \dots, z_d), \quad z_k \in \mathbb{C},$$

буде комплексним БП

Прикладами дійсних БП будуть простори  $L_p(X, \lambda)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , введені в означенні 8.3 і докладно розглянуті в розділі 7.

Тепер ми розглянемо комплексні простори  $L_p(X, \lambda)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою. Будемо розглядати функції

$$f : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = u(x) + iv(x), \quad u, v : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для них покладемо

$$\int_A f d\lambda := \int_A u d\lambda + i \int_A v d\lambda, \quad A \in \mathcal{F},$$

при умові, що дані інтеграли від  $u$  і  $v$  існують.

Аналогічно дійсним функціям, для  $1 \leq p < +\infty$  ми розглянемо множину функцій

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ } \mathcal{F}\text{-вимірна, } |f|^p \in L(X, \lambda)\}.$$

У  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  введемо таке відношення еквівалентності:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \pmod{\lambda}.$$

Таке відношення розбиває множину  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  на класи еквівалентності.

**Означення 8.2.** *Простором  $L_p = L_p(X, \lambda)$  (комплексним),  $1 \leq p < +\infty$ , називається множина класів еквівалентності, отримана з  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  за допомогою відношення еквівалентності  $f \sim g \Leftrightarrow f = g \pmod{\lambda}$ .*

Звичайно говорять, що елементами комплексного  $L_p$  є функції, при цьому ототожнюючи функції, еквівалентні відносно  $\lambda$ . Як правило, ми не будемо розрізняти в позначеннях випадки комплексного та дійсного  $L_p$ .

Як і в дійсному випадку покладемо.

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p}. \quad (8.1)$$

Як ми бачимо,

$$f \in L_p \text{ (комплексному)} \Leftrightarrow |f| \in L_p \text{ (дійсному)}, \quad \|f\|_p = \||f|\|_p.$$

Розглянемо основні властивості комплексного  $L_p$ . Будемо використовувати представлення  $f(x) = u(x) + iv(x)$ ,  $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ . При цьому, очевидно, виконуються нерівності

$$\max\{|u|, |v|\} \leq |f| \leq |u| + |v|. \quad (8.2)$$

1.  $f = u + iv \in L_p$  (комплексному)  $\Leftrightarrow u, v \in L_p$  (дійсному).

*Доведення.* Для множин  $A = \{z = x + iy : x < c\}$ ,  $B = \{z = x + iy : y < c\}$  маємо

$$f^{-1}(A) = \{x : u(x) < c\}, \quad f^{-1}(B) = \{x : v(x) < c\} \in \mathcal{F},$$

тому функції  $u$  і  $v$   $\mathcal{F}$ -вимірні.

Якщо  $f \in L_p$ , то з лівої нерівності (8.2) ми отримуємо, що  $u, v \in L_p$ .

Якщо  $u, v \in L_p$ , то з правої нерівності (8.2) і опуклості функції  $x^p$  на множині  $x \geq 0$  для  $p \geq 1$ , випливає, що

$$|f|^p \leq 2^p \left( \frac{|u| + |v|}{2} \right)^p \leq 2^p \frac{|u|^p + |v|^p}{2},$$

і тому  $\int_X |f|^p d\lambda < +\infty$ . □

2. Рівність (8.1) задає норму в комплексному  $L_p$ .

*Доведення.* З властивості 1 та лінійності дійсного  $L_p$  отримуємо, що комплексний  $L_p$  буде лінійним простором.

Виконання умов 1) і 2) означення 7.2 (означення норми) очевидне. Перевіримо умову 3):

$$\|f + g\|_{p(\kappa)} = \||f + g|\|_{p(\kappa)} \leq \||f| + |g|\|_{p(\kappa)} \stackrel{(*)}{\leq} \||f|\|_{p(\kappa)} + \||g|\|_{p(\kappa)} = \|f\|_{p(\kappa)} + \|g\|_{p(\kappa)}$$

Тут в позначеннях норм очевидним чином відмічали випадки дійсних і комплексних просторів, в (\*) ми використали нерівність Мінковського (7.3). □

3.  $f_n = u_n + iv_n \rightarrow f = u + iv$  в комплексному  $L_p$  тоді і лише тоді, коли  $u_n \rightarrow u$  і  $v_n \rightarrow v$  в дійсному  $L_p$ .

*Доведення.* Нехай  $f_n \rightarrow f$ . Тоді

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{p(\kappa)} \rightarrow 0, \quad \|f_n - f\|_{p(\kappa)} &= \||f_n - f|\|_{p(\kappa)} \\ &\stackrel{(8.2)}{\geq} \max\{\|u_n - u\|_{p(\kappa)}, \|v_n - v\|_{p(\kappa)}\} \Rightarrow \|u_n - u\|_{p(\kappa)}, \|v_n - v\|_{p(\kappa)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Якщо  $u_n \rightarrow u$  і  $v_n \rightarrow v$ , використаємо іншу частину (8.2) і нерівність Мінковського, та будемо мати

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_p, \|v_n - v\|_p &\rightarrow 0, \\ \|f_n - f\|_{p(\kappa)} &= \||f_n - f|\|_{p(\kappa)} \stackrel{(8.2)}{\leq} \||u_n - u| + |v_n - v|\|_{p(\kappa)} \stackrel{(7.3)}{\leq} \|u_n - u\|_{p(\kappa)} + \|v_n - v\|_{p(\kappa)} \\ &= \|u_n - u\|_{p(\kappa)} + \|v_n - v\|_{p(\kappa)} \Rightarrow \|f_n - f\|_{p(\kappa)} \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

4. Комплексний  $L_p$  – банахів простір.

*Доведення.* Треба довести повноту даного простору. Нехай послідовність  $f_n = u_n + iv_n$  фундаментальна

$$\|f_n - f_m\|_p \stackrel{(8.2)}{\geq} \max\{\|u_n - u_m\|_p, \|v_n - v_m\|_p\} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty,$$

тому послідовності  $u_n$  і  $v_n$  фундаментальні в дійсному  $L_p$ . З повноти цього простору отримуємо, що  $u_n$  і  $v_n$  збігаються, і, за властивістю 3, буде збіжною  $f_n$ .  $\square$

5. Якщо дійсний простір  $L_p(X, \lambda)$  сепарабельний, то і відповідний комплексний простір  $L_p(X, \lambda)$  буде сепарабельним.

*Доведення.* Нехай  $M$  – зліченна щільна підмножина дійсного  $L_p$ . Розглянемо

$$\tilde{M} = \{u + iv \mid u, v \in M\}.$$

Тоді  $\tilde{M}$  буде зліченною підмножиною комплексного  $L_p$ . Якщо  $f = u + iv \in L_p$  (комплексному), то  $u, v \in L_p$  (дійсному), знайдуться  $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v, u_n, v_n \in M$ . Тоді, за властивістю 3,  $f_n = u_n + iv_n \rightarrow f, f_n \in \tilde{M}$ , і тому множина  $\tilde{M}$  щільна.  $\square$

6. Дійсний і комплексний простори  $L_p([a, b], \lambda_1)$  сепарабельні.

*Доведення.* Властивість 5 показує, що досить довести сепарабельність дійсного простору. Наслідок 7.1 дає нам, що простір  $L_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$  сепарабельний, нехай  $M$  – зліченна щільна множина в ньому. Розглянемо множину  $M'$  – це функції з  $M$ , "звужені" на відрізок  $[a, b]$ . Очевидно, що  $M'$  зліченна, покажемо, що вона щільна в  $L_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$ .

Візьмемо довільні  $f \in L_p([a, b], \lambda_1)$  і  $\varepsilon > 0$ . Побудуємо функцію

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases}$$

Тоді  $\tilde{f} \in L_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$ , і знайдеться  $g \in M$  така, що в  $L_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$   $\|\tilde{f} - g\|_p < \varepsilon$ . Позначимо звуження  $g$  на  $[a, b]$  через  $g'$ . Тоді  $g' \in M'$ , і на  $[a, b]$  будемо мати

$$\|f - g'\|_p = \left( \int_{[a,b]} |f - g'|^p d\lambda_1 \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f} - g|^p d\lambda_1 \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

звідки і випливає щільність  $M$ .  $\square$

Наприкінці наведемо приклад нормованого простору, що не є банаховим.

**Приклад 8.1.** Розглянемо дійсний лінійний простір  $E = \mathbb{R}([0, 1])$  – множину функцій, інтегровних за Ріманом на  $[0, 1]$ , покладемо на ньому

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Ця рівність буде задавати норму на  $E$ , якщо ми будемо ототожнювати функції  $f$  і  $g$  такі, що  $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$ .

Відмітимо, що  $E \subset L_1([0, 1], \lambda_1)$  (теорема 4.8), і  $\|f\| = \|f\|_1$  для  $f \in E$ .

Візьмемо послідовність

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[1/n, 1]}(x), \quad n \geq 1.$$

Як елементи простору  $L_1([0, 1], \lambda_1)$ , вони збігаються до  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  (це перевіряється простим підрахунком), тому  $f_n$  фундаментальна в  $L_1([0, 1], \lambda_1)$ ,

$$\|f_n - f_m\|_1 = \|f_n - f_m\| \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Якщо  $f_n \rightarrow g$  в  $E$ , то  $f_n \rightarrow g$  в  $L_1([0, 1], \lambda_1)$ , і з єдиності границі отримуємо, що  $g = 1/\sqrt{x} \pmod{\lambda_1}$ .

Оскільки  $g$  інтегровна за Ріманом,  $g$  обмежена,  $|g| \leq C$ . Але для кожної  $C > 0$  буде  $\lambda_1(\{x : 1/\sqrt{x} > C\}) > 0$ , що суперечить рівності м. с.  $g$  і  $1/\sqrt{x}$ .

Тому  $f_n \in E$  фундаментальною послідовністю, що не збігається в  $E$ .

## 8.2 Простори $\ell_p$

Розглянемо комплексний простір  $L_p(X, \lambda)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , для  $X = \mathbb{N}$  (множини всіх натуральних чисел) і  $\lambda(A) = |A|$  (кількості елементів  $A$ ), заданої на  $\sigma$ -алгебрі  $2^{\mathbb{N}}$ .

Функція  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  – це послідовність  $z = (z_1, z_2, \dots)$ . Оскільки в  $\mathbb{N}$  взято  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ , всі такі функції  $\mathcal{F}$ -вимірні. Використовуючи зліченну адитивність інтеграла (теорема 4.2), маємо

$$\int_{\mathbb{N}} |z|^p d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{k\}} |z|^p d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^p.$$

Розглянутий спеціальний випадок просторів  $L_p$  називають простором  $\ell_p$ . Використовуючи наведені вище міркування, можемо дати для нього окреме означення.

**Означення 8.3.** Простором  $\ell_p$  (комплексним),  $1 \leq p < +\infty$ , називається множина послідовностей

$$\{z = (z_1, z_2, \dots) \mid z_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^p < +\infty\}.$$

При цьому покладемо  $\|z\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^p\right)^{1/p}$ .

Як окремий випадок  $L_p$ , простір  $\ell_p$  з вказаною нормою буде банаховим.

Дійсний простір  $\ell_p$  визначається аналогічно як дійсний  $L_p(X, \lambda)$  для  $X = \mathbb{N}$  і  $\lambda(A) = |A|$ .

Розглянемо деякі властивості  $\ell_p$ .

1. Простір  $\ell_p$  сепарабельний.

*Доведення.* Досить довести сепарабельність дійсного  $\ell_p$ . Розглянемо множину

$$M = \{r = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, 0, \dots) \mid n \geq 1, r_k \in \mathbb{Q}\}.$$

Очевидно, що  $M \subset \ell_p$ ,  $M$  зліченна, покажемо, що вона щільна. Візьмемо довільні  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$  і  $\varepsilon > 0$ . Виберемо  $n$  таке, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

(це ми можемо зробити, оскільки даний ряд збіжний). Для обраного  $n$  візьмемо  $r_k \in \mathbb{Q}$  такі, що

$$|x_k - r_k|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2n}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

і розглянемо отриманий  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, 0, \dots) \in M$ . Маємо

$$(\|x - r\|_p)^p = \sum_{k=1}^n |x_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < n \frac{\varepsilon^p}{2n} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p \Rightarrow \|x - r\|_p < \varepsilon,$$

що і дає щільність  $M$ . □

2. Із збіжності в  $\ell_p$  випливає покоординатна збіжність.

*Доведення.* Нехай  $z^{(n)} = (z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots) \rightarrow z = (z_1, z_2, \dots)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Тоді

$$|z_k^{(n)} - z_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i^{(n)} - z_i|^p\right)^{1/p} = \|z^{(n)} - z\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне. Наведемо відповідний приклад.

**Приклад 8.2.** Розглянемо  $z^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ , де єдина одиниця стоїть на  $n$ -ому місці. Тоді для кожного фіксованого  $k$   $z_k^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Але якщо взяти складений з покоординатних границь елемент  $z = (0, 0, \dots)$ , маємо

$$\|z^{(n)} - z\|_p = 1 \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Окремим випадком просторів  $\ell_p$  є простори  $\ell_\infty$ .

**Означення 8.4.** Простором  $\ell_\infty$  (комплексним) називається множина послідовностей

$$\{z = (z_1, z_2, \dots) \mid z_k \in \mathbb{C}, \sup_k |z_k| < +\infty\}.$$

При цьому покладемо  $\|z\|_\infty = \sup_k |z_k|$ .

Лінійні операції з елементами  $\ell_\infty$  – це дії з відповідними координатами, як і для  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Так визначений  $\ell_\infty$  – комплексний лінійний простір. Легко перевіряється, що для  $\|\cdot\|_\infty$  виконується означення норми (означення 7.2).

Покажемо, що  $\ell_\infty$  з вказаною нормою є повним простором. Нехай послідовність

$$z^{(n)} = (z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots) \in \ell_\infty, \quad n \geq 1,$$

фундаментальна. Для кожного  $\varepsilon > 0$  існує  $n_\varepsilon$  таке, що

$$\|z^{(m)} - z^{(n)}\|_\infty < \varepsilon, \quad m, n \geq n_\varepsilon.$$

Тоді для кожного  $i \geq 1$  маємо

$$|z_i^{(m)} - z_i^{(n)}| \leq \sup_k |z_k^{(m)} - z_k^{(n)}| = \|z^{(m)} - z^{(n)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Для кожного  $i$  числова послідовність  $z_i^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , фундаментальна, а тому має границю. Позначимо

$$z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} z_i^{(n)}, \quad z = (z_1, z_2, \dots).$$

При цьому для  $m, n \geq n_\varepsilon$  для кожного  $i$  буде

$$|z_i^{(m)} - z_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_i^{(m)} - z_i^{(n)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \|z^{(m)} - z\|_\infty \leq \varepsilon,$$

звідки маємо, що  $z^{(m)} \rightarrow z$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Отже, простір  $\ell_\infty$  – банахів.

**Теорема 8.1.** Комплексний банахів простір  $\ell_\infty$  – несепарабельний.

*Доведення.* Розглянемо множину  $A$  всіх елементів  $a = (a_1, a_2, \dots)$ , де для кожного  $k \geq 1$  буде  $a_k = 0$  або  $a_k = 1$ . В курсі математичного аналізу з допомогою діагонального методу Кантора було доведено, що множина  $A$  незліченна. Легко бачити, що для  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$  буде  $\|a - b\|_\infty = 1$ , тому в даному просторі різні відкриті кулі  $B(a, 1/2)$ ,  $a \in A$  попарно не перетинаються. Якщо деяка множина  $M$  щільна в  $\ell_\infty$ , то в кожній вказаній кулі має міститися хоча б один елемент  $M$ , а тому  $M$  не може бути зліченною.  $\square$

Аналогічно комплексному визначається дійсний банахів простір  $\ell_\infty$ . Він також буде несепарабельним.

### 8.3 Ізоморфізм лінійних нормованих просторів

Розглянемо співвідношення між різними лінійними нормованими просторами (ЛНП), що фактично буде давати співпадіння основних властивостей цих просторів.

**Означення 8.5.** ЛНП  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  і  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  над одним числовим полем  $\mathbb{K}$  називаються *ізоморфними*, якщо існує бієкція  $V : E_1 \rightarrow E_2$  така, що

$$1) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in E_1 : V(\alpha x + \beta y) = \alpha Vx + \beta Vy;$$

$$2) \exists c_1, c_2 > 0 \forall x \in E_1 : c_1 \|x\|_1 \leq \|Vx\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Якщо при цьому  $\forall x \in E_1 : \|Vx\|_2 = \|x\|_1$ , дані простори називаються *ізотричними*.

Вказану бієкцію  $V$  називають *ізоморфізмом* (в останньому випадку – *ізотриєю*).

**Приклад 8.3.** Розглянемо  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^d$ . При цьому для  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  покладемо

$$\|x\|_1 = \left( \sum_{k=1}^d x_k^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_2 = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|.$$

Тут можна розглянути взяти ізоморфізм-тотожність  $Vx = x$ , при цьому

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Тому вказані простори ізоморфні.

Для ізоморфних просторів збіжність послідовності  $x_n$ ,  $n \geq 1$  в  $E_1$  еквівалентна збіжності послідовності  $Vx_n$ ,  $n \geq 1$  в  $E_2$ . Також еквівалентними є властивості фундаментальності цих послідовностей, властивості повноти та сепарабельності  $E_1$  і  $E_2$ .

Перевіримо, що ізоморфізм є відношенням еквівалентності (тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним).

**1. Рефлексивність.** Будь-який ЛНП  $E$  ізоморфний собі. Тут тотожня бієкція  $Vx = x$  задовольняє означенню 8.5 з  $c_1 = c_2 = 1$ .

**2. Симетричність.** Нехай  $E_1$  ізоморфний  $E_2$ . Тоді обернена бієкція  $V^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$  також буде задовольняти умову лінійності 1) в означенні 8.5. Крім того, для довільного  $y \in E_2$  знайдеться  $x \in E_1$  такий, що  $y = Vx$ , ми маємо

$$\begin{aligned} \|V^{-1}y\|_1 &= \|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1} \|Vx\|_2 = \frac{1}{c_1} \|y\|_2, \\ \|V^{-1}y\|_1 &= \|x\|_1 \geq \frac{1}{c_2} \|Vx\|_2 = \frac{1}{c_2} \|y\|_2, \end{aligned}$$

і тому  $E_2$  ізоморфний  $E_1$ .

**3. Транзитивність.** Нехай ми маємо ізоморфізми  $V : E_1 \rightarrow E_2$  і  $U : E_2 \rightarrow E_3$ , причому

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|Vx\|_2 \leq c_2 \|x\|_1, \quad d_1 \|y\|_2 \leq \|Uy\|_3 \leq d_2 \|y\|_2.$$

Тоді композиція відображень  $UV : E_1 \rightarrow E_3$  буде бієкцією, задовольняти умову лінійності, і також

$$c_1 d_1 \|x\|_1 \leq \|UVx\|_3 \leq c_2 d_2 \|x\|_1.$$

Тому  $E_1$  і  $E_3$  ізоморфні.

Значить, дане відношення розбиває всі ЛНП над заданим числовим полем на класи еквівалентності.

**Теорема 8.2.** *Скінченновимірні ЛНП над одним числовим полем ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх розмірності рівні.*

*Доведення.* Нехай простори  $E_1$  і  $E_2$  ізоморфні. Бієкція  $V : E_1 \rightarrow E_2$ , що задовольняє умову лінійності 1) в означенні 8.5 буде переводити нуль-вектор в нуль-вектор, лінійно незалежні вектори з  $E_1$  в лінійно незалежні вектори з  $E_2$ . Адже для  $x_k \in E_1$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq k \leq d$ , маємо

$$\sum_{k=1}^d \alpha_k Vx_k = 0 \text{ в } E_2 \Leftrightarrow V \sum_{k=1}^d \alpha_k x_k = 0 \text{ в } E_2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^d \alpha_k x_k = 0 \text{ в } E_1.$$

Тому  $\dim E_1 \leq \dim E_2$ . Розглянувши обернену бієкцію  $V^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$ , отримаємо, що  $\dim E_2 \leq \dim E_1$ , а тому ці розмірності рівні.

Нехай  $\dim E = d$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ми покажемо, що  $E$  ізоморфний  $\mathbb{C}^d$ , і тоді з властивості транзитивності отримаємо, що всі  $d$ -вимірні комплексні ЛНП ізоморфні.

Нехай  $(e_1, \dots, e_d)$  – базис в  $E$ . Для кожного  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$  покладемо

$$Vz = \sum_{k=1}^d z_k e_k.$$



Тоді відображення  $V : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{E}$  є бієкцією (оскільки  $e_k$  утворюють базис) і задовольняє умову лінійності. Також, використовуючи нерівність Коші–Буняковського, ми маємо

$$\|Vz\|_{\mathbb{E}} \leq \sum_{k=1}^d |z_k| \|e_k\|_{\mathbb{E}} \leq \left( \sum_{k=1}^d |z_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^d \|e_k\|_{\mathbb{E}}^2 \right)^{1/2} = \|z\|_{\mathbb{C}^d} \left( \sum_{k=1}^d \|e_k\|_{\mathbb{E}}^2 \right)^{1/2},$$

і в означенні 8.5 ми можемо взяти  $c_2 = \left( \sum_{k=1}^d \|e_k\|_{\mathbb{E}}^2 \right)^{1/2}$  (тут в нормах ми позначаємо простори, в яких вони взяті).

Щоб отримати оцінку в інший бік, розглянемо функцію  $f(z) = \|Vz\|_{\mathbb{E}}$  на одиничній сфері  $S(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}^d : \|z\|_{\mathbb{C}^d} = 1\}$ . Маємо

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \|Vz_1\|_{\mathbb{E}} - \|Vz_2\|_{\mathbb{E}} \right| \leq \|Vz_1 - Vz_2\|_{\mathbb{E}} = \|V(z_1 - z_2)\|_{\mathbb{E}} \leq c_2 \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{C}^d},$$

тому  $f$  неперервна на компактній сфері  $S(0, 1)$  і приймає там своє найменше значення  $f(z_*) = \min_{z \in S(0,1)} f(z)$ . Покладемо  $c_1 = f(z_*)$ . Відмітимо, що  $c_1 > 0$  (інакше б ми мали  $f(z_*) = \|Vz_*\|_{\mathbb{E}} = 0$ ,  $Vz_* = 0$  в  $\mathbb{E}$ , звідки  $z_* = 0$  в  $\mathbb{C}^d$ , що суперечить  $z_* \in S(0, 1)$ ).

Для кожного  $z \in \mathbb{C}^d$  буде

$$\|Vz\|_{\mathbb{E}} = \|z\|_{\mathbb{C}^d} \left\| V \frac{z}{\|z\|_{\mathbb{C}^d}} \right\|_{\mathbb{E}} = \|z\|_{\mathbb{C}^d} f\left(\frac{z}{\|z\|_{\mathbb{C}^d}}\right) \geq \|z\|_{\mathbb{C}^d} f(z_*) = c_1 \|z\|_{\mathbb{C}^d},$$

що і завершує перевірку умов означення 8.5 для  $V$ .

У випадку дійсних просторів ми аналогічно покажемо, що  $\mathbb{E}$  ізоморфний  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

## 8.4 Підпростори лінійних нормованих просторів. Теорема про ”майже перпендикуляр”

Нехай  $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$  – лінійний нормований простір над числовим полем  $\mathbb{K}$ . Множина  $L \subset \mathbb{E}$  називається *лінійною*, якщо

$$\forall x, y \in L, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x + \beta y \in L.$$

**Означення 8.6.** Підпростором в  $\mathbb{E}$  називається лінійна замкнена підмножина  $\mathbb{E}$ .

Відмітимо, що ми накладаємо умову замкненості підпростору. Вона не завжди виконується для лінійних підмножин нескінченновимірних просторів.

Завжди будемо вважати підпростір непорожнім.

**Приклад 8.4.** Розглянемо  $\mathbb{E} = \mathbb{C}([a, b])$  зі стандартною рівномірною нормою,  $L$  – множину всіх многочленів. Очевидно, що ця множина лінійна, але не замкнена. За теоремою Вейерштраса існує, наприклад послідовність многочленів, що рівномірно прямує до  $f(x) = \sin x$ ,  $f \notin L$ .

Тепер наведемо кілька прикладів підпросторів.

**Приклад 8.5.**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  фіксований  $L = \{kx_0 | k \in \mathbb{R}\}$ .

**Приклад 8.6.**  $\mathbb{E} = \ell_p$  (комплексний або дійсний),  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  фіксоване,  $L = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n, 0, 0, \dots)\}$ . Для обґрунтування замкненості  $L$  згадуємо, що із збіжності в  $\ell_p$  випливає покоординатна збіжність.

**Приклад 8.7.**  $\mathbb{E} = L_p(\mathbb{R}, \lambda_1)$  (комплексний або дійсний),  $1 \leq p < \infty$ ,  $L = \{f \in L_p | f(x) = 0 \pmod{\lambda_1} \text{ на } (-\infty, 0]\}$ . Лінійність множини  $L$  тут очевидна. Покажемо її замкненість.

Нехай  $f_n \in L$ ,  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$ . Використовуючи нерівність Чебишова (7.5), для будь-якого  $\varepsilon > 0$  маємо

$$\lambda_1(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f|^p d\lambda_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому  $f_n \xrightarrow{\lambda_1} f$ , за теоремою Ріса (наслідок 3.5) знайдеться підпослідовність  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda_1}$ . Оскільки  $f_{n_k}(x) = 0 \pmod{\lambda_1}$  на  $(-\infty, 0]$ , буде  $f = 0 \pmod{\lambda_1}$  на  $(-\infty, 0]$ ,  $f \in L$ .

**Теорема 8.3** (теорема про "майже перпендикуляр"). Нехай  $L$  – підпростір ЛНП  $E$ ,  $L \neq E$ . Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : \|x_\varepsilon\| = 1, \quad \inf_{y \in L} \|x_\varepsilon - y\| > 1 - \varepsilon. \quad (8.3)$$

*Доведення.* Нехай  $z \in E \setminus L$ . Покладемо  $\alpha := \inf_{y \in L} \|z - y\|$ .

Тоді  $\alpha > 0$ . Якби було  $\alpha = 0$ , знайшлась би послідовність  $y_n \in L$  таких, що

$$\|z - y_n\| \rightarrow \inf_{y \in L} \|z - y\| = 0,$$

$z$  була б граничною точкою замкненої множини  $L$ , і ми мали б суперечність з тим, що  $z \notin L$ .

Оскільки  $\alpha < \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}$ , за означенням інфімуму,

$$\exists y_\varepsilon \in L : \|z - y_\varepsilon\| < \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Покладемо

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_\varepsilon}{\|z - y_\varepsilon\|}.$$

Очевидно, що  $\|x_\varepsilon\| = 1$ . Перевіримо нерівність з (8.3). Для довільного  $y \in L$  маємо

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y\| &= \left\| \frac{z - y_\varepsilon}{\|z - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{1}{\|z - y_\varepsilon\|} \|z - y_\varepsilon - y\| \\ &\geq \frac{1}{\|z - y_\varepsilon\|} \inf_{v \in L} \|z - v\| > \frac{1 - \varepsilon}{\alpha} \alpha = 1 - \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 8.4.** Замкнена куля в нескінченновимірному ЛНП не є компактом.

*Доведення.* Не зменшуючи загальності, будемо в просторі  $E$  над числовим полем  $\mathbb{K}$  розглядати кулю  $\overline{B}(0, 1)$ .

Візьмемо довільний  $y \in E$ ,  $\|y\| = 1$ . Розглянемо підпростір

$$L_1 = \{\alpha_1 y_1 \mid \alpha_1 \in \mathbb{K}\}.$$

Використовуючи теорему 8.3 для  $\varepsilon = 1/2$  і підпростору  $L_1$ , візьмемо  $y_2 \in E \setminus L_1$  такий, що  $\|y_2 - y\| > 1/2$ ,  $y \in L_1$ . Покладемо

$$L_2 = \{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}.$$

Продовжуємо аналогічні міркування далі. На  $n$ -ому кроці беремо  $y_n \in E \setminus L_{n-1}$  такий, що  $\|y_n - y\| > 1/2$ ,  $y \in L_{n-1}$ . Покладемо

$$L_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Кожного разу  $L_n \neq E$ , оскільки  $\dim E = +\infty$ . Очевидно, що множини  $L_n$  лінійні.

Елементи  $y_1, \dots, y_n$  утворюють базис в  $L_n$ , а тому співвідношення

$$V : \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

є ізоморфізмом між  $E$  і  $\mathbb{K}^n$  (саме такий ізоморфізм встановлювався при доведенні теореми 8.9). Тоді збіжність елементів  $L_n$  еквівалентна збіжності відповідних елементів  $\mathbb{K}^n$ , тобто покоординатній збіжності. Якщо ж  $\alpha_k^{(i)} \rightarrow \alpha_k$ ,  $i \rightarrow \infty$ ,  $1 \leq k \leq n$ , то елементарні оцінки показують, що

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(i)} y_k \rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k, \quad i \rightarrow \infty.$$

Границя належить  $L_n$ , множина  $L_n$  замкнена, і тому дійсно є підпростором для кожного  $n$ . Тому вказаний вибір  $y_n$  можливий.

Легко бачити, що всі  $y_n \in \overline{B}(0, 1)$ , але з них не можна виділити збіжну підпослідовність. Якби  $y_{n_k}$ ,  $k \geq 1$ , збігалися, було б  $\|y_{n_k} - y_{n_l}\| \rightarrow 0$ ,  $k, l \rightarrow \infty$ , але всі ці норми більші за  $1/2$ .  $\square$

## 8.5 Простори зі скалярним добутком. Гільбертові простори

Означення скалярного добутку ми наведемо окремо для випадків комплексного і дійсного просторів.

**Означення 8.7.** Нехай  $E$  – комплексний лінійний простір. Скалярним добутком в  $E$  називається функція  $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  така, що

- 1)  $\forall x \in E : (x, x) \geq 0$ , при цьому  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y, z \in E : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ ;
- 3)  $\forall x, y \in E : (y, x) = \overline{(x, y)}$ .

**Приклад 8.8.** Нехай  $E = \ell_2$  (комплексний). Тоді рівність

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots),$$

задає скалярний добуток.

**Означення 8.8.** Нехай  $E$  – дійсний лінійний простір. Скалярним добутком в  $E$  називається функція  $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  така, що

- 1)  $\forall x \in E : (x, x) \geq 0$ , при цьому  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y, z \in E : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ ;
- 3)  $\forall x, y \in E : (y, x) = (x, y)$ .

**Приклад 8.9.** Рівність  $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$  задає скалярний добуток в дійсному просторі  $\ell_2$ .

Розглянемо деякі властивості скалярного добутку. Ми будемо їх формулювати і доводити для комплексних просторів (якщо не вказано інше). Їх перенесення на дійсний випадок буде очевидним.

1.  $\forall x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{C} : (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$ ;

*Доведення.* Маємо

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y, x) + \beta(z, x)} = \bar{\alpha} \overline{(y, x)} + \bar{\beta} \overline{(z, x)} = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z). \quad \square$$

2. (нерівність Коші–Буняковського)  $\forall x, y \in E : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ .

*Доведення.* Для випадку  $y = 0$  нерівність є очевидною. Далі вважаємо  $y \neq 0$  (тобто,  $(y, y) > 0$ ). Для кожного  $\lambda \in \mathbb{C}$  маємо

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0 \Leftrightarrow (x, x) + \lambda(y, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda \bar{\lambda}(y, y) \geq 0.$$

Покладемо тут  $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ . Будемо мати

$$(x, x) - \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, x) - \frac{(y, x)}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)(y, y)}(y, y) \geq 0 \Leftrightarrow (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

що дає потрібну нерівність. □

3. Рівність  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  задає норму в  $E$ .

*Доведення.* Перевіримо виконання умов означення норми. Перша умова означення 7.2 безпосередньо випливає з першої умови означення 8.7. Для  $\alpha \in \mathbb{K}, x \in E$  маємо

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}(x, x)} = \sqrt{|\alpha|^2(x, x)} = |\alpha| \|x\|,$$

тому справджується друга умова. Перевіримо третю умову:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \stackrel{(**)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Тут в (\*) ми використали, що число  $(x, y) + (y, x)$  дійсне і не перевищує свого модуля, в (\*\*) використали нерівність Коші–Буняковського. □

Розглянемо деякі властивості норми, породженої скалярним добутком.

1. (рівність паралелограма)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ .

Доведення. Ми маємо перевірити рівність

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2(x, x) + 2(y, y),$$

для цього досить "розкрити дужки" в лівій частині. □

2. Нехай  $E$  – дійсний простір. Тоді

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Доведення. Для скалярного добутку в дійсному просторі маємо

$$\begin{aligned}(x + y, x + y) &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y), \\(x - y, x - y) &= (x, x) - 2(x, y) + (y, y),\end{aligned}$$

беремо різницю записаних рівностей. □

3. (поляризаційна тотожність) Нехай  $E$  – комплексний простір. Тоді

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=\pm 1, \pm i} \|x + \alpha y\|^2.$$

Доведення. Запишемо рівності

$$\begin{aligned}(x + y, x + y) &= (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y), \\(x + iy, x + iy) &= (x, x) + i(y, x) - i(x, y) + (y, y), \\(x - iy, x - iy) &= (x, x) - i(y, x) + i(x, y) + (y, y), \\(x - y, x - y) &= (x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y),\end{aligned}$$

домножимо їх на 1,  $i$ ,  $-i$ ,  $-1$  відповідно і додамо. Отримане значення дорівнюватиме  $4(x, y)$ . □

4. (неперервність скалярного добутку) Нехай  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  і  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ . Тоді  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ .

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| \\ &= |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|.\end{aligned}$$

Оскільки послідовність  $x_n$  збіжна в нормованому просторі, вона обмежена. Тому остання сума прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ . □

Для отриманого нами нормованого простору вводимо наступне важливе означення.

**Означення 8.9.** Гільбертовим простором називається простір зі скалярним добутком, повний відносно норми, породженої цим скалярним добутком.

Гільбертів простір (ГП) називають повним або комплексним відповідно до числового поля  $\mathbb{K}$ , над яким він розглядається.

Приклади 8.8 і 8.9 дають нам, що  $\ell_2$  буде ГП.

Розглянемо більш загальний випадок.

**Приклад 8.10.** В комплексному  $L_2(X, \lambda)$  покладемо

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x), \quad f, g \in L_2.$$

Даний інтеграл визначений, оскільки

$$\int_X |f\bar{g}| d\lambda = \int_X |f| |g| d\lambda \leq \frac{1}{2} \int_X |f|^2 d\lambda + \frac{1}{2} \int_X |g|^2 d\lambda < +\infty.$$

Перевіримо, що тут справджуються три умови означення скалярного добутку.

1) Маємо  $(f, f) = \int_X f \bar{f} d\lambda = \int_X |f|^2 d\lambda \geq 0$ , причому інтеграл дорівнює нулю лише тоді, коли  $|f| = 0 \pmod{\lambda}$ , тобто  $f = 0$  в  $L_2$ .

2) Лінійність даної функції безпосередньо випливає з лінійності інтеграла.

3) Відмітимо, що знак спряження можна заносити під знак інтеграла:

$$\overline{\int_X (u + iv) d\lambda} = \overline{\int_X u d\lambda + i \int_X v d\lambda} = \int_X u d\lambda - i \int_X v d\lambda = \int_X (u - iv) d\lambda = \int_X \overline{u + iv} d\lambda, \quad u, v : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тому

$$(g, f) = \int_X g \bar{f} d\lambda = \int_X \overline{f \bar{g}} d\lambda = \overline{\int_X f \bar{g} d\lambda} = \overline{(f, g)}.$$

Цим скалярним добутком породжується введена нами раніше норма в  $L_2$ :

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_X f \bar{f} d\lambda \right)^{1/2} = \left( \int_X |f|^2 d\lambda \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

Оскільки простір  $L_2(X, \lambda)$  повний, він буде гільбертовим.

Наприкінці наведемо приклад БП, що не є ГП (тобто норма в цьому просторі не породжується скалярним добутком). Для цього досить буде показати, що для заданої норми не справджується рівність паралелограма

**Приклад 8.11.** Візьмемо  $E = \mathbb{R}^2$ , для  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  покладемо  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ . Очевидно, що це буде нормою,  $(E, \|\cdot\|)$  буде повним простором. Для  $x = (1, 0)$  і  $y = (0, 1)$  маємо

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|(1, 1)\|^2 + \|(1, -1)\|^2 = 4 + 4 = 8, \quad 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2 + 2 \neq 8.$$

## 8.6 Ортогональний розклад гільбертового простору

Нехай  $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$  – гільбертів простір (комплексний або дійсний),  $\mathbb{K}$  – відповідне числове поле.

**Означення 8.10.** Елементи  $x, y \in \mathbb{H}$  називаються *ортогональними*, якщо  $(x, y) = 0$ .

При цьому використовуємо позначення  $x \perp y$ .

**Означення 8.11.** Елемент  $x \in \mathbb{H}$  називається *ортогональним до множини*  $M \subset \mathbb{H}$ , якщо  $\forall y \in M : x \perp y$ .

В цьому випадку пишемо  $x \perp M$ .

**Означення 8.12.** *Ортогональним доповненням* множини  $M \subset \mathbb{H}$  називається множина  $M^\perp := \{x \in \mathbb{H} : x \perp M\}$ .

**Лема 8.1.**  $M^\perp$  є підпростором  $\mathbb{H}$ .

*Доведення.*  $M^\perp$  є лінійною множиною:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in M^\perp, z \in M: (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \stackrel{x, y \in M^\perp}{=} 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M^\perp.$$

Покажемо, що  $M^\perp$  є замкненою множиною. Нехай  $x_n \in M^\perp$ ,  $x_n \rightarrow x$  в  $\mathbb{H}$ . Тоді, використовуючи неперервність скалярного добутку, отримуємо:

$$\forall y \in M: (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = 0 \Rightarrow x \in M^\perp. \quad \square$$

**Теорема 8.5 (теорема про існування найближчого елемента).** *Нехай  $L$  – підпростір  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$ . Тоді існує  $z \in L$  такий, що*

$$\|x - z\| = \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

*Доведення.* Позначимо  $\rho(x, L) := \inf_{y \in L} \|x - y\|$ . Знайдеться послідовність  $y_n \in L$  така, що

$$\|x - y_n\| \rightarrow \rho(x, L), \quad n \rightarrow \infty.$$

Запишемо рівність паралелограма для елементів  $\|x - y_n\|$  та  $\|x - y_m\|$ :

$$\begin{aligned} 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 &= \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - y_n - y_m\|^2 \\ \Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\rho^2(x, L) \end{aligned}$$

(ми використали, що  $(y_n + y_m)/2 \in L$ ). Взявши тут  $m, n \rightarrow \infty$ , отримаємо, що  $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ . Тому послідовність  $y_n$  фундаментальна. Оскільки простір  $\mathbb{H}$  повний, існує  $z := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Оскільки множина  $L$  замкнена, буде  $z \in L$ . За неперервністю норми,

$$\|x - z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \rho(x, L). \quad \square$$

**Теорема 8.6 (теорема про ортогональний розклад гільбертового простору).** *Нехай  $L$  – підпростір ГП  $\mathbb{H}$ . Тоді*

$$\forall x \in \mathbb{H} \exists x_1 \in L, x_2 \in L^\perp: x = x_1 + x_2, \quad (8.4)$$

*причому дане представлення єдине.*

*Доведення.* З твердження теореми 8.5 візьмемо  $z \in L$  такий, що  $\|x - z\| = \inf_{y \in L} \|x - y\|$ . Покладемо  $x_1 = z$ ,  $x_2 = x - z$ . Треба довести, що  $x_2 \in L^\perp$ .

Візьмемо довільний  $y \in L$ . Для будь-якого  $\lambda \in \mathbb{K}$  буде  $z + \lambda y \in L$ , тому

$$\begin{aligned} \|x - (z + \lambda y)\|^2 \geq \|x - z\|^2 &\Leftrightarrow \|x_2 - \lambda y\|^2 \geq \|x_2\|^2 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - \lambda y, x_2 - \lambda y) = (x_2, x_2) - \lambda(y, x_2) - \bar{\lambda}(x_2, y) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) \geq (x_2, x_2). \end{aligned}$$

Для  $\lambda = \frac{(x_2, y)}{(y, y)}$  після скорочень тут будемо мати  $-\frac{|(x_2, y)|^2}{(y, y)} \geq 0$ , що можливе лише при  $(x_2, y) = 0$ , тобто  $x_2 \perp y$ .

Залишилося обґрунтувати єдиність представлення (8.4). Нехай

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L, \quad x_2, y_2 \in L^\perp.$$

Тоді

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2, \quad x_1 - y_1 \in L, \quad x_2 - y_2 \in L^\perp \Rightarrow x_1 - y_1 \in L \cap L^\perp = \{0\} \Rightarrow x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2. \quad \square$$

**Зауваження 8.1.** З твердження єдиності розкладу (8.4) випливає єдиність найближчого елемента  $z$  з теореми 8.5. Адже в отриманому розкладі  $x_1 = z$ ,  $x_1$  єдиний.

**Зауваження 8.2.** В розкладі (8.4) елемент  $x_1$  називається проєкцією  $x$  на  $L$  і вживається позначення  $x_1 = \text{pr}_L x$ .

**Зауваження 8.3.** Теорема 8.6 фактично дає розклад в пряму суму  $\mathbb{H} = L \oplus L^\perp$ .

**Приклад 8.12.** Нехай

$$\mathbb{H} = \ell_2, \quad n \in \mathbb{N} \text{ фіксоване,} \quad \mathbb{L} = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n, 0, 0, \dots)\}.$$

Проілюструємо в цьому випадку доведення теореми 8.6.

Для  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2, z \in \mathbb{L}$

$$\|x - z\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Ця сума буде найменшою, якщо  $z_k = x_k, 1 \leq k \leq n$ . Тому найближчим до  $x$  елементом  $\mathbb{L}$  буде

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{L}.$$

Візьмемо

$$x^{(2)} = x - x^{(1)} = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

Бачимо, що  $x^{(2)} \in \mathbb{L}^\perp$ . Тут маємо, що  $\text{pr}_{\mathbb{L}} x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ .

**Приклад 8.13.** Розглянемо

$$\mathbb{E} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}, \lambda_1), \quad \mathbb{L} = \{f \in \mathbb{L}_2 \mid f(x) = 0 \pmod{\lambda_1} \text{ на } (-\infty, 0]\}.$$

Для  $f \in \mathbb{L}_2$  маємо

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(x) = f(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad f_2(x) = f(x)\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x).$$

Тут  $f_1 \in \mathbb{L}, f_2 \in \mathbb{L}^\perp$ , тому це і є ортогональний розклад (нагадаємо, що він єдиний). Маємо, що  $\text{pr}_{\mathbb{L}} f = f\mathbf{1}_{(0,+\infty)}$ .

## 8.7 Ортонормовані системи і базиси в гільбертовому просторі

Нехай  $\mathbb{H}$  — гільбертів простір (комплексний або дійсний).

**Означення 8.13.** *Ортонормованою системою (ОНС) в  $\mathbb{H}$  називається послідовність  $\{e_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{H}$  така, що*

- 1)  $e_k \perp e_n, k \neq n$ ;
- 2)  $\|e_k\| = 1, k \geq 1$ .

Інакше можна записати так

$$(e_k, e_n) = \delta_{kn} := \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

(так визначені  $\delta_{kn}$  називають *символами Кронекера*).

Наведемо деякі приклади ОНС.

**Приклад 8.14.** В  $\mathbb{H} = \ell_2$  (комплексному або дійсному) покладемо

$$e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

де єдина одиниця стоїть на  $k$ -тому місці.

**Приклад 8.15.** В комплексному або дійсному  $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\pi, \pi], \lambda_1)$  візьмемо послідовність

$$\{e_k, k \geq 1\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \dots \right\}.$$

**Приклад 8.16.** В комплексному  $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\pi, \pi], \lambda_1)$  беремо

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В усіх прикладах виконання умов означення ОНС перевіряється простими підрахунками. Відмітимо наступну властивість наборів ортогональних елементів  $\mathbb{H}$ .

**Лема 8.2** (теорема Піфагора). Нехай  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{H}$ ,  $x_k \perp x_l$  для  $k \neq l$ . Тоді

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

*Доведення.* Маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{l=1}^n x_l \right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} (x_k, x_l) \stackrel{x_k \perp x_l}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k, x_k) = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \quad \square$$

**Означення 8.14.** Рядом Фур'є, побудованим для  $x \in \mathbb{H}$  за ОНС  $\{e_k, k \geq 1\}$ , називається сума  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ , де  $c_k = (x, e_k)$  (коефіцієнти Фур'є).

Наведемо деякі важливі властивості ОНС  $\{e_k, k \geq 1\}$ . Через  $\mathbb{K}$  позначимо числове поле простору  $\mathbb{H}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  або  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

1. Вектори  $e_k$ ,  $k \geq 1$  лінійно незалежні.

*Доведення.* Якщо  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{K}$ , то вектори  $\alpha_k e_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , попарно перпендикулярні, і ми отримуємо

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 \stackrel{\text{Лема 8.2}}{=} \sum_{k=1}^n \|\alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \Rightarrow \alpha_k = 0, 1 \leq k \leq n. \quad \square$$

2. Для будь-яких  $\alpha_k \in \mathbb{K}$ ,  $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \text{ збігається в } \mathbb{H} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty. \quad (8.5)$$

*Доведення.* Розглянемо часткові суми  $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ . Оскільки простір  $\mathbb{H}$  повний,

$\{S_n, n \geq 1\}$  збігається в  $\mathbb{H} \Leftrightarrow \{S_n, n \geq 1\}$  фундаментальна в  $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \|S_n - S_m\|^2 \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty &\Leftrightarrow \left\| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty \text{ (для } n > m) \\ &\stackrel{\text{Лема 8.2}}{\Leftrightarrow} \sum_{k=m+1}^n |\alpha_k|^2 \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

3. Для кожного  $n \geq 1$  множина  $L_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}$  є підпростором  $\mathbb{H}$ .

*Доведення.* Очевидно, що множина  $L_n$  лінійна. Доведемо її замкненість. Нехай

$$x^{(m)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} e_k \rightarrow x, m \rightarrow \infty.$$

Тоді, за неперервністю скалярного добутку,

$$(x, e_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, e_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_k^{(m)}.$$

Візьмемо  $c_k = (x, e_k)$  і розглянемо

$$\left\| x^{(m)} - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n (\alpha_k^{(m)} - c_k) e_k \right\|^2 \stackrel{\text{Лема 8.2}}{=} \sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(m)} - c_k|^2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Оскільки границя єдина, маємо  $x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ , тому  $x \in L_n$ . □



4. (Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є) Для  $x \in \mathbb{H}$  і підпростору  $L_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}$  буде

$$\text{pr}_{L_n} x = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad \text{де } c_k = (x, e_k).$$

(Тобто, найближчою до  $x$  в  $L_n$  буде лінійна комбінація, утворена з відповідними коефіцієнтами Фур'є).

Доведення. В теоремі 8.6 ми отримали, що  $\text{pr}_{L_n} x$  – це єдиний вектор, такий, що  $x - \text{pr}_{L_n} x \perp L_n$ . Маємо

$$\left( x - \sum_{k=1}^n c_k e_k, e_l \right) = (x, e_l) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, e_l) \stackrel{e_k \perp e_l}{=} (x, e_l) - c_l (e_l, e_l) \stackrel{\|e_l\|=1}{=} 0.$$

Тому  $x - \sum_{k=1}^n c_k e_k$  буде ортогональним і до будь-якої лінійної комбінації з  $e_l$ .

Також нагадаємо, що в доведенні теореми 8.6 було отримано, що проєкція  $x$  на підпростір – це найближчий до  $x$  елемент підпростору.  $\square$

5. (нерівність Бесселя) Для  $x \in \mathbb{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2, \quad \text{де } c_k = (x, e_k).$$

Доведення. Нехай  $z = x - \sum_{k=1}^n c_k e_k$ . За попередньою властивістю,  $z \perp \sum_{k=1}^n c_k e_k$ , і ми маємо

$$\|x\|^2 \stackrel{\text{Лема 8.2}}{=} \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 + \|z\|^2 \stackrel{\text{Лема 8.2}}{=} \sum_{k=1}^n \|c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 \stackrel{\|e_k\|=1}{=} \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \|z\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

Спрямувавши  $n \rightarrow \infty$ , отримуємо потрібну нерівність.  $\square$

Надалі ми виділимо ОНС, лінійними комбінації з яких можна наблизити будь-який елемент  $\mathbb{H}$ .

**Означення 8.15.** Ортонормована система  $\{e_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{H}$  називається ортонормованим базисом (ОНБ) в  $\mathbb{H}$ , якщо

$$\forall x \in \mathbb{H} \exists \alpha_k \in \mathbb{K}, k \geq 1 : x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

**Лема 8.3.** Нехай  $\{e_k, k \geq 1\}$  – ОНБ в  $\mathbb{H}$ ,  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ . Тоді  $\alpha_k = (x, e_k)$  (тобто, дорівнюють відповідним коефіцієнтам Фур'є  $c_k$ ).

Доведення. Для  $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, l \leq n$  маємо

$$(S_n, e_l) \stackrel{e_k \perp e_l}{=} \alpha_l (e_l, e_l) \stackrel{\|e_l\|=1}{=} \alpha_l.$$

З іншого боку,  $S_n \rightarrow x$  в  $\mathbb{H}$ , звідки  $(S_n, e_l) \rightarrow (x, e_l), n \rightarrow \infty$ . Тому  $(x, e_l) = \alpha_l$ .  $\square$

**Лема 8.4.** (Рівність Парсеваля) Нехай  $\{e_k, k \geq 1\}$  – ОНБ в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$ ,  $c_k = (x, e_k)$ . Тоді

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Доведення. З леми 8.3 маємо, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k e_k.$$

Використовуючи неперервність норми, отримуємо

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 \stackrel{\text{Лема 8.2}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \quad \square$$

**Означення 8.16.** *Замкненою лінійною оболонкою* множини векторів  $\{\varphi_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{H}$  називається замикання множини  $L = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \alpha_k \in \mathbb{K}, n \geq 1\}$ .

**Означення 8.17.** Система векторів  $\{\varphi_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{H}$  називається *повною*, якщо з того, що  $x \in \mathbb{H}$ ,  $x \perp e_k$  для всіх  $k \geq 1$ , випливає, що  $x = 0$  в  $\mathbb{H}$ .

**Теорема 8.7.** *Нехай  $\{e_k, k \geq 1\}$  – ОНС в  $\mathbb{H}$ . Тоді наступні твердження еквівалентні*

- 1)  $\{e_k, k \geq 1\}$  – ОНБ в  $\mathbb{H}$ ;
- 2) замкнена лінійна оболонка  $\{e_k, k \geq 1\}$  співпадає з  $\mathbb{H}$ ;
- 3) система  $\{e_k, k \geq 1\}$  повна.

*Доведення.* 1)  $\Rightarrow$  2). Оскільки даний набір є базисом, для кожного  $x \in \mathbb{H}$  маємо

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

тобто  $x$  є границею векторів з лінійної оболонки (ЛО) даного набору.

2)  $\Rightarrow$  3). Нехай  $(x, e_k) = 0, k \geq 1$ . Тоді

$$\forall n \geq 1, \alpha_k \in \mathbb{K} : \left( x, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = 0.$$

Оскільки  $x$  входить до замикання відповідної ЛО, можемо вибрати  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \rightarrow x$ , з неперервності скалярного добутку отримуємо, що  $(x, x) = 0$ , і тому  $x = 0$  в  $\mathbb{H}$ .

3)  $\Rightarrow$  1). Візьмемо довільний  $x \in \mathbb{H}$ . З нерівності Бесселя для  $c_k = (x, e_k)$  маємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \stackrel{(8.5)}{\Rightarrow} \exists y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (x - y, e_l) &= \left( x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_l \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \sum_{k=1}^n c_k e_k, e_l \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (x, e_l) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, e_l) \right) \stackrel{n \geq l}{\cong} \lim_{n \rightarrow \infty} ((x, e_l) - c_l) = 0. \end{aligned}$$

З повноти даної системи маємо, що  $x - y = 0$  в  $\mathbb{H}$ , тому  $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \{e_k, k \geq 1\}$  – базис.  $\square$

Системи векторів, наведені вище в прикладах 8.14, 8.15 і 8.16 будуть також і прикладами ОНБ. Пояснимо це.

**Приклад 8.14.** Для  $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$  з  $(x, e_k) = 0, k \geq 1$  випливає, що  $x = 0$  в  $\ell_2$ . Значить, ця ОНС повна, а тому є базисом.

**Приклад 8.15.** З математичного аналізу відомо, що будь-яку функцію, неперервну на  $[-\pi, \pi]$  можна наблизити тригонометричними поліномами як завгодно близько за рівномірною нормою. Значить, ці поліноми щільні в  $\mathbb{C}([-\pi, \pi])$  за нормою простору  $L_2([-\pi, \pi], \lambda_1)$ . Неперервні функції утворюють там щільну підмножину (це легко отримується з наслідку 7.2), тому замкнена ЛО тригонометричних поліномів співпадає з  $L_2([-\pi, \pi], \lambda_1)$ , а отже дана ОНС є базисом.

**Приклад 8.16.** В будь-якому тригонометричному поліномі ми можемо записати

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

і отримати лінійну комбінацію функцій  $e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$ . Тому замкнена ЛО цих елементів також співпадає з  $L_2([-\pi, \pi], \lambda_1)$ , а їх набір утворює ОНБ.

## 8.8 Існування ортонормованого базису. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів

Нагадаємо метод ортогоналізації Грама – Шмідта. Нехай  $\{f_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{H}$  – послідовність лінійно незалежних векторів. Покладемо

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad e_2 = \frac{f_2 - (f_2, e_1)e_1}{\|f_2 - (f_2, e_1)e_1\|}, \quad \dots,$$

$$e_k = \frac{f_k - (f_k, e_1)e_1 - (f_k, e_2)e_2 - \dots - (f_k, e_{k-1})e_{k-1}}{\|f_k - (f_k, e_1)e_1 - (f_k, e_2)e_2 - \dots - (f_k, e_{k-1})e_{k-1}\|}, \quad \dots$$

Тоді  $\{e_k, k \geq 1\}$  утворюють ОНС, причому лінійна оболонка кожного набору  $\{e_k, 1 \leq k \leq n\}$  збігається з лінійною оболонкою  $\{f_k, 1 \leq k \leq n\}$ .

**Теорема 8.8.** *В кожному сепарабельному гільбертовому просторі існує ортонормований базис.*

*Доведення.* Нехай  $\{f_k, k \geq 1\}$  – зліченна щільна підмножина  $\mathbb{H}$ . Вилучимо з неї кожен елемент  $f_k$ , що є лінійною комбінацією  $f_1, \dots, f_{k-1}$ , у нас залишиться послідовність лінійно незалежних векторів. Проведемо для неї ортогоналізацію методом Грама – Шмідта, отримаємо ОНС  $\{e_k, k \geq 1\}$ , ЛО якої співпадає з ЛО множини  $\{f_k, k \geq 1\}$ . Оскільки замикання набору  $\{f_k, k \geq 1\}$  співпадає з  $\mathbb{H}$ , замкнена ЛО системи  $\{e_k, k \geq 1\}$  дорівнює  $\mathbb{H}$ . З теореми 8.7 випливає, що  $\{e_k, k \geq 1\}$  – ОНБ в  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Далі ми отримаємо твердження про ізометрію гільбертових просторів (відповідне поняття введено в означенні 8.5).

**Теорема 8.9.** *Нехай  $\dim \mathbb{H} = d < +\infty$ .*

- 1) *Якщо  $\mathbb{H}$  – комплексний ГП, то він ізометричний  $\mathbb{C}^d$ .*
- 2) *Якщо  $\mathbb{H}$  – дійсний ГП, то він ізометричний  $\mathbb{R}^d$ .*

*Доведення.* Нехай  $\{f_k, 1 \leq k \leq d\}$  – довільний базис в  $\mathbb{H}$ . Методом ортогоналізації Грама – Шмідта отримаємо з нього ОНБ  $\{e_k, 1 \leq k \leq d\}$ . Тоді існує представлення

$$x = \sum_{k=1}^d c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Встановимо відповідність  $Vx = (c_1, \dots, c_d)$  (у випадку комплексного ГП буде  $Vx \in \mathbb{C}^d$ , у випадку дійсного  $Vx \in \mathbb{R}^d$ ). Оскільки  $e_k$  утворюють базис,  $V$  буде бієкцією. Лінійність цього відображення очевидна. Також з теореми Піфагора (лема 8.2) маємо, що

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^d c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^d |c_k|^2 = \|Vx\|^2. \quad \square$$

**Теорема 8.10.** *Нехай  $\mathbb{H}$  – сепарабельний гільбертів простір,  $\dim \mathbb{H} = +\infty$ .*

- 1) *Якщо  $\mathbb{H}$  – комплексний ГП, то він ізометричний комплексному  $\ell_2$ .*
- 2) *Якщо  $\mathbb{H}$  – дійсний ГП, то він ізометричний дійсному  $\ell_2$ .*

*Доведення.* Аналогічно теоремі 8.9, проведемо доведення одразу для комплексного і дійсного випадків. Візьмемо в  $\mathbb{H}$  ОНБ  $\{e_k, k \geq 1\}$ , він існує за теоремою 8.8. Тоді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Встановимо відповідність  $Vx = (c_1, c_2, \dots)$ . Лінійність цього відображення очевидна. З рівності Парсеваля (лема 8.4) маємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 < +\infty.$$

Тому  $Vx \in \ell_2$  і  $\|Vx\|^2 = \|x\|^2$  (норми тут взято в просторах  $\ell_2$  і  $\mathbb{H}$  відповідно).

Залишається відмітити, що встановлене відображення є бієкцією. Для кожного  $(c_1, c_2, \dots) \in \ell_2$  визначений  $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in \mathbb{H}$  (це випливає з (8.5)). Тому множиною значень  $V$  є весь простір  $\ell_2$ , взаємна однозначність відображення випливає з однозначності визначення  $c_k$  для нашого ряду.  $\square$

Наприкінці ми відмітимо дві важливі ортонормовані системи, утворені методом Грама – Шмідта.

**Приклад 8.17.** (поліноми Лежандра) В  $L_2([-1, 1], \lambda_1)$  (дійсному або комплексному) розглянемо функції  $f_k(t) = t^k$ ,  $k \geq 0$ . Зрозуміло, що вони утворюють базис в цьому просторі. Провівши для них процес ортогоналізації, отримаємо ОНБ, елементи якого називаються поліномами Лежандра. Можна перевірити, що елементами цього базису є многочлени

$$L_n(t) = a_n \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n \geq 0,$$

де число  $a_n$  вибрано так, щоб норма даного елемента дорівнювала одиниці.

**Приклад 8.18.** (поліноми Ерміта) На підмножинах  $\mathbb{R}$ , вимірних за Лебегом, розглянемо міру

$$\mu(A) = \int_A e^{-t^2} d\lambda_1(t).$$

В  $L_2(\mathbb{R}, \mu)$  (дійсному або комплексному) знову розглянемо функції  $f_k(t) = t^k$ ,  $k \geq 0$ . Можна показати, що і тут вони утворюють базис. Провівши для них процес ортогоналізації, отримаємо ОНБ, елементи якого називаються поліномами Ерміта. Ці многочлени мають вигляд

$$H_n(t) = b_n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}, \quad n \geq 0,$$

де константа  $b_n$  є нормуючим множником. (Відмітимо, що інколи в означенні  $\mu$  використовується функція  $e^{-t^2/2}$  замість  $e^{-t^2}$ .)

Зручність використання цих класичних ортогональних многочленів зокрема полягає в тому, що за ними легко будуються ряди Фур'є, що наближає елементи даних просторів.

## Вправи

**Вправа 8.1.** Довести, що множина  $M = \{x \in \ell_p \mid |x_k| \leq c_k, k \geq 1\}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , компактна в  $\ell_p$  тоді і тільки тоді, коли  $c = (c_1, c_2, \dots) \in \ell_p$ .

**Вправа 8.2.** Довести, що з виконання властивості паралелограма в дійсному ЛНП випливає, що норма породжена деяким скалярним добутком.

# Вказівки до вправ

## 1.1. Використовуємо рівності

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \right).$$

**1.2.** 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  — множина елементів  $X$ , що належать усім  $A_n$ , починаючи з деякого номера, а  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  — множина тих елементів  $X$ , що належать нескінченній кількості  $A_n$ .

2) Маємо

$$\begin{aligned} A_n \uparrow, \quad A = \bigcup_{n \geq 1} A_n &\Rightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k = A_k, \quad \bigcup_{k \geq n} A_k = A, \\ A_n \downarrow, \quad A = \bigcap_{n \geq 1} A_n &\Rightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k = A, \quad \bigcup_{k \geq n} A_k = A_k. \end{aligned}$$

В усіх випадках  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**1.3.** Очевидно, що  $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_3 \subset a(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}_3$  замкнений відносно взяття об'єднань. Нехай

$$A, B \in \mathcal{H}_3, \quad A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{i=1}^j B_i, \quad A_k, B_i \in \mathcal{H}_2.$$

Тоді

$$A_k \cap B_i \in \mathcal{H}_2, \quad A \cap B = \bigcup_{k,i} (A_k \cap B_i) \in \mathcal{H}_3,$$

і  $\mathcal{H}_3$  замкнений відносно перетинів. Також

$$A_k = \bigcap_{p=1}^{q_k} A_{kp}, \quad A_{kp} \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow X \setminus A = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k) = \bigcap_{k=1}^n \bigcup_{p=1}^{q_k} (X \setminus A_{kp}).$$

Із визначення  $\mathcal{H}_1$  випливає, що  $X \setminus A_{kp} \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_3$ , тому  $(X \setminus A) \in \mathcal{H}_3$ ,  $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{H}_3$ ,  $\mathcal{H}_3$  — алгебра.

**1.4.** Породжений  $\sigma$ -адитивний клас позначимо через  $\mathcal{H}$ . Далі достатньо довести, що  $\mathcal{H}$  замкнений відносно скінченних перетинів. Спочатку розглянемо

$$\mathcal{H}_0 = \{A \in \mathcal{H} : A \cap E \in \mathcal{H} \text{ для всіх } E \in \mathcal{E}\},$$

доводимо, що це —  $\sigma$ -адитивний клас, який містить  $\mathcal{E}$ , і тому збігається з  $\mathcal{H}$ . Далі аналогічно доводимо, що з  $\mathcal{H}$  збігається

$$\mathcal{H}_1 = \{A \in \mathcal{H} : A \cap E \in \mathcal{H} \text{ для всіх } E \in \mathcal{H}\}.$$

**2.1** Візьмемо  $\mathcal{P} = \{(a, b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ , покладемо  $\lambda((a, b]) = 0$ ,  $a > 0$ ,  $\lambda((0, b]) = 1$ ,  $b > 0$ .

**2.2** Доводимо індукцією за  $n$ .

**2.3.** Для неперетинних  $B_k \in \mathcal{K}$ ,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{K}$ , розглянемо

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k, \quad A_n \in \mathcal{K}, \quad A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lambda(A_n) \rightarrow 0, \\ \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \sum_{k=1}^n \lambda(B_k) + \lambda(A_n) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**2.4.** Беремо неперетинні  $B_k \in \mathcal{K}$ ,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{K}$ . Із невід'ємності й адитивності  $\lambda$  випливає її монотонність,

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(B_k) \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k).$$

Нерівність в інший бік випливає з  $\sigma$ -півадитивності  $\lambda$ .

**2.5.** Доводимо аналогічно доведенню теореми 2.4.

**2.6.** Указана міра дорівнює  $\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ , і для кожного  $n \geq 1$  це значення не перевищує

$$\lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**2.7.** Припускаючи, що аксіома вибору справджується, розглянемо множину  $B$  з прикладу 2.8. Якщо  $\lambda(B) = 0$ , ми отримаємо суперечність із (2.24). Припущення  $\lambda(B) > 0$  суперечить (2.25) і тому, що  $\lambda([-1, 2]) \leq 3$ .

**3.1.** Безпосередньо перевіряється означення відношення еквівалентності.

**3.2.** Функція  $f$  борельова як неперервна,  $f_n(x) = (f(x + 1/n) - f(x))n$  є лінійними комбінаціями борельових,  $f'$  — поточкова границя  $f_n$ .

**3.3.** Лише покажемо, що для  $\rho$  справджується нерівність трикутника. Припустимо, що  $\rho(f, g) + \rho(g, h) < \rho(f, h)$ . Тоді

$$\begin{aligned} \exists \delta_1, \delta_2 : \quad & \rho(f, g) < \delta_1, \quad \rho(g, h) < \delta_2, \quad \delta_1 + \delta_2 < \rho(f, h), \\ & \lambda(\{|f - g| \geq \delta_1\}) < \delta_1, \quad \lambda(\{|g - h| \geq \delta_2\}) < \delta_2, \\ & \{|f - h| \geq \delta_1 + \delta_2\} \subset \left(\{|f - g| \geq \delta_1\} \cup \{|g - h| \geq \delta_2\}\right) \Rightarrow \lambda(\{|f - h| \geq \delta_1 + \delta_2\}) < \delta_1 + \delta_2, \end{aligned}$$

і ми отримали суперечність із тим, що  $\rho(f, h) > \delta_1 + \delta_2$ .

**3.4.**  $\lambda(\{|f_n + g_n - f - g| \geq \varepsilon\}) \leq \lambda(\{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\}) + \lambda(\{|g_n - g| \geq \varepsilon/2\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$ .

**3.5.**  $f_n(x) = g_n(x) = x + 1/n, \quad f(x) = g(x) = x$  на  $\mathbb{R}$  із мірою Лебега.

**3.6.** Якщо наведене твердження невірне, то знайдуться  $\varepsilon_0 > 0$  і підпослідовність  $\{n_k\}$  такі, що для всіх  $k \geq 1$

$$\lambda(\{x : |\varphi(f_{n_k}(x), g_{n_k}(x)) - \varphi(f(x), g(x))| \geq \varepsilon_0\}) \geq \varepsilon_0. \quad (9.6)$$

За теоремою Ф. Ріса, із  $\{n_k\}$  можна виділити підпослідовність  $\{m_k\}$  таку, що одночасно  $f_{m_k} \rightarrow f, \quad g_{m_k} \rightarrow g \pmod{\lambda}$ . Із неперервності  $\varphi$  тоді отримуємо, що  $\varphi(f_{m_k}, g_{m_k}) \rightarrow \varphi(f, g) \pmod{\lambda}$ . Оскільки  $\lambda$  скінченна, звідси випливає збіжність за мірою  $\varphi(f_{m_k}, g_{m_k}) \xrightarrow{\lambda} \varphi(f, g)$ , і ми отримали суперечність із (9.6).

**3.7.** Розглянемо множини  $A_{r,s} = f^{-1}((r, s])$ ,  $r, s \in \mathbb{Q}$ . Оскільки  $A_{r,s} \in \mathcal{S}_d$ , за наслідком 2.5, знайдеться борельова множина  $B_{r,s} \subset A_{r,s}$ ,  $\lambda_d(A_{r,s} \setminus B_{r,s}) = 0$ . Покладемо

$$g(x) = 0, \quad x \in \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} (A_{r,s} \setminus B_{r,s}), \quad g(x) = f(x) \text{ для інших } x.$$

**4.1.** За півадитивністю міри  $\int_A f_+ d\lambda$ , маємо

$$\int_{A \cup B} f_+ d\lambda \leq \int_A f_+ d\lambda + \int_B f_+ d\lambda < +\infty.$$

Аналогічно показуємо, що  $\int_{A \cup B} f_- d\lambda < +\infty$ .

**4.2.** Міркуємо стандартним чином — спочатку доводимо для простої невід'ємної  $f$ , потім — для невід'ємної, потім — для довільної інтегровної.

**4.3.** Якщо  $X_n$  — множини з означення  $\sigma$ -скінченності для  $\lambda$ , то  $\mu$  задовольняє це означення з множинами  $X_n \cap \{f \leq n\}$ .

**4.4.** Розглянемо функцію

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{x: n < f(x) \leq n+1\}}(x).$$

Умова 2) означає, що  $g \in L(X, \lambda)$ . Оскільки

$$g(x) \leq f(x) \leq g(x) + 1 \quad \text{і} \quad 1 \in L(X, \lambda),$$

то виконується 1)  $\Leftrightarrow$  2). Використовуючи рівність

$$\lambda(\{x : f(x) > n\}) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(\{x : k < f(x) \leq k + 1\}),$$

перестановкою доданків ряду переконуємося, що 2)  $\Leftrightarrow$  3).

**4.5.** Розглянемо  $g_n(x) = \inf_{k \leq n} f_k(x)$ . Тоді  $0 \leq g_n \leq f_n \leq f$ ,

$$g_n \uparrow f \quad (\text{mod } \lambda) \Rightarrow \int_X g_n d\lambda \rightarrow \int_X f d\lambda \Rightarrow \int_X f_n d\lambda \rightarrow \int_X f d\lambda.$$

**4.6.** З умови маємо, що  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ,  $g \in L(X, \lambda)$  оскільки  $|g| \leq |f| + |h|$ . Використовуючи теорему Фату, маємо

$$\begin{aligned} \int_X g d\lambda - \int_X f d\lambda &= \int_X \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (g_n - f_n) d\lambda \leq \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X (g_n - f_n) d\lambda = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\lambda - \int_X f d\lambda \Rightarrow \int_X g d\lambda \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\lambda. \end{aligned}$$

Розглядаючи аналогічно  $h - g$ , отримаємо

$$\int_X g d\lambda \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\lambda.$$

**5.1.** Візьмемо  $X = X_+ \cup X_-$  — розклад Гана заряду  $\nu$ . У випадках 1) і 2) з теорем про неперервність міри маємо

$$\nu(A \cap X_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n \cap X_+), \quad -\nu(A \cap X_-) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\nu(A_n \cap X_-)).$$

Залишається відняти записані рівності.

**5.2** Позначимо  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ ,  $g = \frac{d\mu}{d\lambda}$ , тоді  $f, g \geq 0$  (див. крок 2 доведення теореми Радона — Никодима). Візьмемо прості невід'ємні  $f_n \uparrow f$ ,  $f_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}$ . Використовуючи в (\*) теорему 4.4, для  $A \in \mathcal{F}$  маємо

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A f d\mu \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \mu(A_k^{(n)} \cap A) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_k^{(n)} \int_A g \mathbf{1}_{A_k^{(n)}} d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n g d\lambda \stackrel{(*)}{=} \int_A f g d\lambda. \end{aligned}$$

**5.3.** Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{[a,b]} g \mathbf{1}_{(a_k, b_k]} d\lambda \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{[a,b]} |g| \mathbf{1}_{(a_k, b_k]} d\lambda = \int_{[a,b]} |g| \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n (a_k, b_k]} d\lambda, \\ &\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \rightarrow 0 \Rightarrow |g| \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n (a_k, b_k]} \xrightarrow{\lambda} 0. \end{aligned}$$

Із наслідку 4.2 (де беремо  $|g|$  як інтегровну мажоранту) випливає, що останній інтеграл при цьому прямує до нуля.

**6.1.** З одного боку, маємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+n} (a_k, b_k] &= \left( \prod_{k=1}^m (a_k, b_k] \right) \times \left( \prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k] \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{P}_{m+n} &\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) - \sigma\text{-алгебра} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma a(\mathcal{P}_{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{9.7}$$

Тепер отримаємо включення в інший бік.

$$\left( \prod_{k=1}^m (a_k, b_k] \right) \times \left( \prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k] \right) = \prod_{k=1}^{m+n} (a_k, b_k] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}). \quad (9.8)$$

Для довільного фіксованого  $\prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k]$  розглянемо клас множин

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : A \times \left( \prod_{k=m+1}^{m+n} (a_k, b_k] \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \right\}. \quad (9.9)$$

Із (9.8) випливає, що  $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{P}_m$ . Стандартними діями легко перевіряється, що  $\mathcal{H}_1$  замкнений відносно взяття зліченного об'єднання та різниці множин, і тому є  $\sigma$ -алгеброю. Значить,

$$\mathcal{H}_1 \supset \sigma a(\mathcal{P}_m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Тепер для довільної фіксованої  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{H}_1$  візьмемо клас множин

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \right\}.$$

Із (9.9) маємо, що  $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{P}_n$ . Стандартним чином перевіряється, що  $\mathcal{H}_2$  —  $\sigma$ -алгебра, тому

$$\mathcal{H}_2 \supset \sigma a(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) &\Leftrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \text{ — } \sigma\text{-алгебра} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma a(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Із двох протилежних включень (9.7) і (9.10) випливає твердження.

**6.2.** Нехай  $\mu_1$  скінченна на множинах  $X_1^{(m)}$ ,  $X_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_1^{(m)}$ ,  $\mu_2$  — скінченна на  $X_2^{(n)}$ ,  $X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_2^{(n)}$ . Тоді міра  $\mu_1 \times \mu_2$  скінченна на  $X_1^{(m)} \times X_2^{(n)}$ ,  $X_1 \times X_2 = \bigcup_{1 \leq m, n < +\infty} (X_1^{(m)} \times X_2^{(n)})$ .

**6.3.**  $A \times \{0\}$  є підмножиною  $[0, 1] \times \{0\}$ , тобто множини міри нуль,  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{S}_2$  повна, тому  $A \times \{0\} \in \mathcal{S}_2$ .  $A \times \{0\} \notin \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_1$ , оскільки  $x_2$ -переріз цієї множини при  $x_2 = 0$  не належить  $\mathcal{S}_1$ .

**6.4.** Із теореми Тонеллі випливає

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} \lambda(\{x : f(x) > t\}) d\lambda_1(t) &= \int_{[0, \infty)} d\lambda_1(t) \int_X \mathbf{1}_{\{f(x) > t\}}(x) d\lambda(x) = \\ &= \int_X d\lambda(x) \int_{[0, \infty)} \mathbf{1}_{\{f(x) > t\}}(x) d\lambda_1(t) = \int_X f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

**6.5.** Маємо

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} f^{(-1)}\left(\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \times \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ (\lambda \times \lambda_1)(\Gamma) &= \int_X \lambda_1(\Gamma_x) d\lambda(x) = \int_X \lambda_1(\{f(x)\}) d\lambda(x) = 0. \end{aligned}$$

**7.1.** Маємо

$$\begin{aligned} |f \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}}|^r &\leq |f|^s, \quad |f|^s \in L(X, \lambda) \Rightarrow f \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} \in L_r, \\ |f \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}}|^r &\leq |f|^p, \quad |f|^p \in L(X, \lambda) \Rightarrow f \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}} \in L_r, \\ f &= f \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} + f \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}} \in L_r. \end{aligned}$$

**7.2.** 1) Спочатку відмітимо, що  $|f| \leq \|f\|_{\infty} \pmod{\lambda}$ ,  $f \in L_{\infty}$ . Якщо це не так, то

$$0 < \lambda(|f| > \|f\|_{\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(|f| > \|f\|_{\infty} + 1/n) \Rightarrow \exists n_0 : \lambda(|f| > \|f\|_{\infty} + 1/n_0) > 0,$$



в означенні  $\|f\|_\infty$  розглядалися б лише  $C > \|f\|_\infty + \frac{1}{n_0}$ , що призводить до суперечності.

Для  $\|\cdot\|_\infty$  в означенні норми досить перевірити умову 3).

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \pmod{\lambda} \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

2) Нехай  $\|f_m - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ ,  $m, n \rightarrow \infty$ . Відкинемо всі  $x \in X$ , для яких порушується хоча б одна з нерівностей  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$ . Для кожного залишеного  $x$  числова послідовність  $f_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , є фундаментальною, існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Для  $\varepsilon > 0$  виконується

$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Спрямувавши  $n \rightarrow \infty$ , матимемо

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon, m \geq n_0 \Rightarrow \|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon, m \geq n_0,$$

що й означає збіжність  $f_m \rightarrow f$  у  $L_\infty$ .

**7.3.** 1) Досить перевірити нерівність трикутника для  $d$ . За допомогою похідної легко доводиться нерівність  $(1 + x)^p \leq 1 + x^p$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 < p < 1$ . Звідси випливає, що  $(|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p$ ,

$$|f - g|^p \leq |f - h|^p + |h - g|^p \Rightarrow d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

2) Якщо  $f, g \in L_p$ , то, як і в 1), отримуємо  $|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p \Rightarrow f + g \in L_p$ . Також очевидно, що  $cf \in L_p$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

3) Повторюємо доведення теореми 8.1, у якому замість нерівності  $\|f - g\|_p$  беремо  $d(f, g)$  і замість властивості  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  використовуємо нерівність трикутника для  $d$ .

**7.4.** За наслідком 7.2, для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $h \in C_0(\mathbb{R}^d)$  така, що  $\|f - h\|_p < \varepsilon$ . Оскільки функції з  $C_0(\mathbb{R}^d)$  рівномірно неперервні й відмінні від нуля на обмеженій множині, для досить малого  $\delta > 0$  і  $|t| < \delta$  виконується  $\|h(x+t) - h(x)\|_p < \varepsilon$ . Тоді, розглядаючи  $x$  як змінну у функціях, маємо

$$\begin{aligned} \omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leq |t| \leq \delta} \|f(x+t) - f(x)\|_p &\leq \sup_{0 \leq |t| \leq \delta} (\|f(x+t) - h(x+t)\|_p + \\ &+ \|h(x+t) - h(x)\|_p + \|h(x) - f(x)\|_p) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

**8.1** Якщо  $c \notin \ell_p$ , з послідовності  $x^{(n)} = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, \dots) \in M$  не можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо  $c \in \ell_p$ ,  $x^{(n)} \in M$ , то, користуючись діагональним методом, виділимо  $x^{(n_i)} = (x_1^{(n_i)}, x_2^{(n_i)}, \dots)$ , в яких буде покоординатна збіжність до деякого  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . З теореми Лебега про мажоровану збіжність (з мажорантою  $((2c_1)^p, (2c_2)^p, \dots)$ , застосованої для ряду), отримуємо

$$\sum_{k \geq 1} |x_k^{(n_i)} - x_k|^p \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

**8.2** Покладемо  $(x, y) = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)/4$  (\*). Розглянемо функцію  $\Phi(x, y, z) = 4((x + y, z) - (x, z) - (y, z))$ . З рівності паралелограма маємо

$$\|x + y \pm z\|^2 = 2\|x \pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x \pm z - y\|^2.$$

Звідси і з (\*) виводимо, що  $\Phi(x, y, z) = 0$ . Далі з (\*) отримуємо, що  $(-x, y) = -(x, y)$ . Використовуючи отриману вище лінійність, отримуємо, що  $(nx, y) = n(x, y)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , потім  $(rx, y) = r(x, y)$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , і неперервність норми дає нам, що  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

# Бібліографія

- [1] *Антоневич, А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. — Минск : Университетское, 1984.
- [2] *Березанский, Ю. М.* Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Выща шк., 1990.
- [3] *Богачев, В. И.* Основы теории меры : в 2 т. / В. И. Богачев. — 2-е изд. — М. ; Ижевск : РХД, 2006.
- [4] *Богачев, В. И.* Действительный и функциональный анализ / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. — М. ; Ижевск : РХД, 2009.
- [5] *Городецкий, В. В.* Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Выща шк., 1990.
- [6] Действительный анализ в задачах / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. — М. : Физматлит, 2005.
- [7] *Дороговцев, А. Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении / А. Я. Дороговцев. — 2-е изд. — К. : Факт, 2004.
- [8] *Дороговцев, А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — 2-е изд. — К. : Факт, 2007.
- [9] *Дьяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М. : Факториал, 1998.
- [10] *Кадец, В. М.* Курс функционального анализа / В. М. Кадец. — Х. : Харьковский нац. ун-т, 2006.
- [11] *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — 3-е изд. — М. : Наука, 1974.
- [12] *Порошкин, А. Г.* Теория меры и интеграла / А. Г. Порошкин. — 2-е изд. — М. : КомКнига, 2006.
- [13] *Халмош, П.* Теория меры / П. Халмош. — М. : Факториал Пресс, 2003.
- [14] *Сариньски, М.* Measure, integral and probability / М. Сариньски, Е. Копп. — 2nd ed. — London : Springer-Verlag, 2004.
- [15] *Pap, E.* Handbook of measure theory / ed. by E. Pap. — Amsterdam : North-Holland, 2002.
- [16] *Rao, M. M.* Measure theory and integration / М. М. Rao. — 2nd ed. — New York : Marcel Dekker, 2004.
- [17] *Taylor, S. J.* Introduction to measure and integration / S. J. Taylor. — New York : Cambridge University Press, 1973.
- [18] *Vestrup E. M.* The theory of measures and integration / E. M. Vestrup. — Hoboken, New Jersey : Wiley-Interscience, 2003.

# Показчик

- $\sigma$ -алгебра, 6
- $\sigma$ -кільце, 6
- абсолютна неперервність
  - функції на відрізку, 65
  - заряду відносно міри, 64
- алгебра, 5
- борельова  $\sigma$ -алгебра, 10
- добуток  $\sigma$ -алгебр, 71
- добуток мір, 73
- еквівалентні функції, 34
- формула Ньютона–Лейбніця, 69
- фундаментальність за мірою, 37
- функція
  - $\mathcal{F}$ -вимірна, 30
  - $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірна, 29
  - Кантора, 69
  - борельова, 30
  - інтегровна, 43
  - проста, 32
  - вимірна, 29
  - вимірна за Лебегом, 30
- функція множин
  - $\sigma$ -адитивна, 12
  - $\sigma$ -півадитивна, 12
  - $\sigma$ -скінченна, 12
  - адитивна, 12
  - монотонна, 12
  - невід’ємна, 12
  - півадитивна, 12
  - скінченна, 12
- інтеграл
  - Лебега–Стілтєса, 55
  - Рімана–Стілтєса, 55
  - Лебега, від довільної вимірної функції, 43
  - Лебега, від невід’ємної функції, 42
  - Лебега, від простої невід’ємної функції, 41
- інтеграл Рімана, 53
  - невласний, 54
- ізоморфізм ЛНП, 87
- кільце, 5
- міра, 13
  - Лебега, 24
  - Лебега–Стілтєса, 26
  - Жордана, 15
  - повна, 21
- множина
  - борельова, 10
  - додатна, 60
  - вимірна за Каратеодорі, 19
  - вимірна за Лебегом, 24
  - вимірна за Лебегом–Стілтєсом, 26
  - від’ємна, 60
- монотонний клас, 7
- наслідок
  - про інтегрування функціонального ряду, 51
  - про повноту міри на  $\mathcal{S}$ , 21
- нерівність
  - Чебишова, 78
  - Гельдера, 76
  - Мінковського, 77
- нерівність Бесселя, 97
- норма, 78
- переріз множини, 71
- півкільце, 5
- похідна Радона–Никодима, 64
- поліноми Ерміта, 100
- поліноми Лежандра, 100
- породжені класи множин, 7
- повна варіація, 63
- простір
  - $C_0(\mathbb{R}^d)$ , 81
  - $\ell_\infty$ , 87
  - $\ell_p$ , 86
  - $L_p$ , 77
  - $L_p$  (комплексний), 83
  - банахів, 83
  - гільбертів, 92
  - нормований, 78
  - сепарабельний, 79
  - вимірний, 29
- регулярність міри, 27
- рівність Парсеваля, 97
- розклад
  - Гана, 61
  - Жордана, 62
- ряд Фур’є, 96
- скалярний добуток, 91
- щільність заряду, 64
- теорема
  - Бепо Леві, 51
  - Фату, 52
  - Фубіні, 74
  - Єгорова, 35
  - Каратеодорі, 20

Лебега про мажоровану збіжність, 52  
 Лебега про зв'язок між збіжностями, 37  
 Лузіна, 39  
 Радона–Никодима, 64  
 Ріса, 39  
 Тонеллі, 74  
 критерій Лебега інтегровності за Ріманом, 56  
 про  $\sigma$ -алгебру, породжену  $\mathcal{P}_d$ , 10  
 про "майже перпендикуляр", 90  
 про декартів добуток півкільць, 6  
 про диференційовність інтеграла по параметру, 57  
 про єдиність продовження міри на  $\mathcal{S}$ , 22  
 про інтегрування невід'ємної монотонної послідовності, 50  
 про існування найближчого елементу, 94  
 про ізоморфізм скінченновимірних ЛНП, 88  
 про кільце, породжене півкільцем, 8  
 про монотонний клас, породжений кільцем, 9  
 про наближення міри її значеннями на кільці, 23  
 про наближення вимірної функції простими, 33  
 про неперервність інтеграла по параметру, 56  
 про неперервність міри знизу, 14  
 про неперервність міри зверху, 14  
 про несепарабельність простору  $\ell_\infty$ , 87  
 про ортогональний розклад гільбертового простору, 94  
 про повноту простору  $L_p$ , 78  
 про суперпозицію вимірних відображень, 31  
 про вимірність елементів вихідного півкільця, 21  
 про заміну міри в інтегралі, 58  
 вимірний прямокутник, 71  
 заряд, 60  
     абсолютно неперервний відносно міри, 64  
 збіжність  
     майже скрізь, 34  
     в нормованому просторі, 78  
     за мірою, 36  
 зовнішня міра, 18  
     породжена мірою, 19

# Зміст

Вступ	2
Основні позначення	4
<b>1 Основні класи множин</b>	<b>5</b>
1.1 Означення основних класів множин	5
1.2 Породжені класи множин	7
1.3 Монотонний клас, породжений кільцем	9
1.4 Борельові множини	10
Вправи	11
<b>2 Міри. Продовження мір</b>	<b>12</b>
2.1 Функції множин. Міри	12
2.2 Приклади мір	15
2.3 Зовнішні міри	18
2.4 Теорема Каратеодорі. Повні міри	19
2.5 Продовження міри з півкільця на породжене $\sigma$ -кільце	21
2.6 Міра Лебега в $\mathbb{R}^d$ . Міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbb{R}$	24
2.7 Регулярність мір	26
Вправи	28
<b>3 Вимірні функції. Збіжність</b>	<b>29</b>
3.1 Означення вимірної функції. Приклади	29
3.2 Дії з вимірними функціями	31
3.3 Наближення вимірних функцій простими	32
3.4 Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь	33
3.5 Теорема Єгорова	35
3.6 Збіжність за мірою	36
3.7 Фундаментальність за мірою	37
Вправи	40
<b>4 Інтеграл Лебега</b>	<b>41</b>
4.1 Означення інтеграла	41
4.2 Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій	43
4.3 Зліченна адитивність інтеграла	44
4.4 Елементарні властивості інтеграла	45
4.5 Лінійність інтеграла	49
4.6 Граничні теореми для інтеграла	50
4.7 Порівняння інтеграла Лебега та інтеграла Рімана	53
4.8 Інтеграл, що залежить від параметра. Заміна змінної	56
Вправи	59

<b>5</b>	<b>Заряди. Абсолютна неперервність</b>	<b>60</b>
5.1	Означення заряду. Розклад Гама . . . . .	60
5.2	Розклад Жордана. Теорема Радона — Никодима . . . . .	62
5.3	Абсолютно неперервні функції на $[a, b]$ . . . . .	65
5.4	Абсолютна неперервність відносно міри Лебега на $[a, b]$ . . . . .	67
	Вправи . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Інтегрування на добутку просторів</b>	<b>71</b>
6.1	Множини та функції на добутку просторів . . . . .	71
6.2	Добуток мір . . . . .	72
6.3	Теореми Тонеллі і Фубіні . . . . .	74
	Вправи . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Простори інтегровних функцій</b>	<b>76</b>
7.1	Нерівності Гельдера і Мінковського . . . . .	76
7.2	Простір $L_p$ . . . . .	77
7.3	Щільні підмножини $L_p$ . . . . .	79
	Вправи . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Банахові та гільбертові простори</b>	<b>83</b>
8.1	Банахові простори. Комплексні простори $L_p$ . . . . .	83
8.2	Простори $\ell_p$ . . . . .	86
8.3	Ізоморфізм лінійних нормованих просторів . . . . .	87
8.4	Підпростори лінійних нормованих просторів. Теорема про "майже перпендикуляр" . . . . .	89
8.5	Простори зі скалярним добутком. Гільбертові простори . . . . .	91
8.6	Ортогональний розклад гільбертового простору . . . . .	93
8.7	Ортонормовані системи і базиси в гільбертовому просторі . . . . .	95
8.8	Існування ортонормованого базису. Ізометрія сепарабельних гільбертових просторів . . . . .	99
	Вправи . . . . .	100
	<b>Вказівки до вправ</b>	<b>101</b>
	<b>Список літератури</b>	<b>106</b>
	<b>Предметний покажчик</b>	<b>107</b>