КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів спеціальності "механіка"
механіко–математичного факультету

(I семестр першого курсу)

2015

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Назаренко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – Електронне видання. – 2015. – 91 с.

Рецензенти

А. С. Романюк, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою Радою
механіко–математичного факультету
08 жовтня 2018 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з математичного аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.

У першому семестрі, як правило, проводяться дві контрольні роботи, зразки умов та розв'язання (частково) яких наведено в тексті.

У посібнику також вміщено програму курсу "Математичний аналіз"для студентів спеціальності "механіка" I курс, I семестр".

При підборі задач використано такі збірники задач:

Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. – Минск, 1990.

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. // Под ред. Н.Я.Виленкина – М., 1971, Ч.1.

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичні розробки

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр першого курсу) // Упорядн. А.Я.Дороговцев, О.О.Курченко, М.О.Денисьєвський. – К.,1994,

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр першого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О.Н. Нестеренко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

ЗАНЯТТЯ 1
СПРОЩЕННЯ ВИРАЗІВ.
АЛГЕБРАЇЧНІ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ПРОГРЕСІЇ

Контрольні запитання

1. *Формули скороченого множення.*
2. *Властивості дій над степенями.*
3. *Властивості дій з коренями.*

А1

1. Спростити вираз:

1) $\frac{a^2+3a}{ax-5x+8a-40}-\frac{a}{x+8}$;

2) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;

3) $\left(\dfrac{x^{1/2}+y^{1/2}}{(x+y)^{1/2}}-\dfrac{(x+y)^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\right)^{-2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}$;

4) $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

2. Вказати множину, на якій виконується рівність $\sqrt{x^2+6x+9}=x+3$.

3. Коли правильні формули: а) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$; б) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{xy}$; в) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$; г) $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$?

4. Розв'язати рівняння:

1) $8x^4-5x^2-3=0$;
2) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;
3) $2x^3-5x^2+7x-10=0$;
4) $|x|+|x-1|=1$;
5) $|x^2-3x+2|+2x=0$.

5. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ x^{-2}+y^{-2}=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

6. Розв'язати рівняння з ірраціональностями:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=1;$

2) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$

7. Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1=-40,\ d=6.$

8. Знайдіть 10-й член геометричної прогресії, якщо $b_1=-128$ і $q=\frac{1}{2}$.

9. Знайти натуральне число n таке, що:

1) $2+5+...+(3n+2)=7n+5;$

2) $3+6+12+...+3\cdot 2^n=4^n-7\cdot 2^{n+2}+2^{n+1}-3.$

Д1. Спростити вираз:

1) $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}};$

2) $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|;$

3) $\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot|2x^2-x-1|};$

4) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+a}.$

Д2. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24};$

2) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4;$

3) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2;$

4) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4;$

5) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$

Д3. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Д4. Чи правильно, що для всіх $x\in(-2,2)$ виконується нерівність $x^4+x\le 20.$

Д5. Скільки членів арифметичної прогресії $4,10,...$ знаходиться між числами 110 і 340?

Д6. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + 2(a-7)x + a^2 - 9 = 0$ різні і обидва додатні?

Д7. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ має два корені, які задовольняють умову: а) $x_1 < 2, x_2 > 3$; б) $x_1 < 3, x_2 > 2$.

Д8. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + 4x - 2|x-a| + 2 - a = 0$ має чотири корені?

Б1

1. Розкласти на множники:

1) $a^2(x-1) - y(1-x)$;
2) $3(x+y) + (x+y)^2$;
3) $a^x + a^{x+1}$;
4) $a^c x^{2c} + a^c x^c$;
5) $ax^2 - cx^2 - cx + ax - a + c$;
6) $12a^2y^2 - 6ayc + 3ac^2 - 6a^2yc - c + 2ay$;
7) $(x+y)(x^2+y^2) - x^3 - y^3$;
8) $a^2b^2(b-a) + b^2c^2(c-b) + c^2a^2(a-c)$;
9) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
10) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$;
11) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

2. Позбавитися ірраціональності в знаменнику:

1) $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^5}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$; 3) $\frac{47}{2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}}$.

3. Спростити вираз:

1) $a + x - \frac{a^2+x^2}{a-x}$;
2) $\frac{y}{3x-2} - \frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$;
3) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1-x^2}{4x^2-1}$;
4) $\left(\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2-4x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2}\right)$;
5) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$;
6) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;
7) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;
8) $a^{7/12} \cdot x^{5/6} : a^{2/3} \cdot x^{3/4} \cdot 6^0$;
9) $(a^{0.5} + (ax)^{0.25} + x^{0.5}) \cdot (a^{0.5} - (ax)^{0.25} + x^{0.5})$;

10) $\left(\frac{a\cdot a^{0.5}+x\cdot x^{0.5}}{a^{0.5}+x^{0.5}}-(ax)^{0.5}\right)\cdot\left(\frac{a^{0.5}+x^{0.5}}{a-x}\right)^2$;

11) $\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}:(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}})-a^{2/3}$;

12) $\left(\dfrac{x+(x^2-1)^{1/2}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x(x^2-1)^{-1/2}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{(x-\frac{1}{x})^{-1/2}}$.

4. Спростити вираз:

1) $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;

2) $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

5. Нехай $D=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\geq 0,\ x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{D}}$. Обчислити x^3+ax+b.

6. Розв'язати рівняння:

1) $5x^2-4x-1=0$;
2) $2x^2+3x+7=0$;
3) $3x^2+9x+1=0$;
4) $2x^4+x^2-3=0$;
5) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$;
6) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=3$;
7) $3x^3-2x^2-4x+1=0$;
8) $\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{x^2+2}{x-2}=-2$;
9) $20(\frac{x-2}{x+1})^2-5(\frac{x+2}{x-1})^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$;
10) $\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1$;
11) $|2x-1|+|x+1|=1$;
12) $|1-x|+|3x-1|=2$;
13) $|x^2-3|+2=0$;
14) $|5-4x-x^2|+x-5=0$.

7. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x+y=3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases}$

8. Розв'язати рівняння з ірраціональностями:

1) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2;$
2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4;$
3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12};$
4) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2;$
5) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1;$
6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}.$

9. Знайдіть 24-й член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 13,5$ і $d=-0,8$.

10. Скільки членів арифметичної прогресії $88, 80, \ldots$ знаходиться між числами -40 і 10?

11. Шостий член арифметичної прогресії дорівнює 70, а 12-й член 10. Знайдіть суму двадцяти чотирьох перших членів цієї прогресії.

12. Знайдіть 8-й член геометричної прогресії, якщо $b_1=-0,0001$ і $q=10$.

13. У геометричній прогресії $b_9=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$. Знайдіть перший член і суму дев'яти перших членів прогресії.

14. Знайти n натуральне таке, що:

1) $7+11+\ldots+(4n-1)=20n-38;$
2) $4+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^{n^2-\frac{29}{2}n+\frac{65}{2}}.$

ЗАНЯТТЯ 2
ГРАФІКИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ ТА ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Область визначення та область значень функції.*
2. *Функції непарні, парні, монотонні та періодичні. Відповідні властивості графіків.*
3. *Елементарні перетворення графіків.*
4. *Властивості дій з логарифмами.*

А2

1. Знайти множини визначення функцій. Чи є вони парними? непарними? періодичними?

1) $y = \sqrt{4-x}$;
2) $y = \frac{x}{x^2-3x+2}$;
3) $y = \cos 3x$;
4) $y = x^5$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2x+3$;
2) $y = -1$;
3) $y = 5 - x^2$;
4) $y = -x^2 + 4x - 1$;
5) $y = x^2 + 4x + 5$.

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\log_2 x$;
2) $y = \log_2(-x)$;
3) $y = 2 + \log_2(x+1)$;
4) $y = 2^{x-2}$.

4. Побудувати графіки дробово-лінійних функцій:

1) $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$;
2) $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

5. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin(3x) - 4$;
2) $y = 4 - \log_2(x-2)$;
3) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$;
4) $y = \sin|x|$;
5) $y = |\sin x|$;
6) $y = \frac{2-|x|}{3+|x|}$;
7) $y = |x^2 - 4x + 3|$;
8) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
9) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$;
10) $y = |x^2 - 4x| + 3$.

6. Спростити вираз:

1) $2^{\log_4 5}$;
2) $4^{\log_2 7}$;
3) $\log_9 3$;
4) $\log_{1/2} 4$;
5) $\log_3 \frac{1}{9}$;
6) $\log_2 3 + \log_2 5$;
7) $2\log_3 5 - 3\log_9 7$;
8) $27^{\frac{1}{3}\log_{1/3} 0,5 - \log_{27} 2}$;
9) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$;
10) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7. Розв'язати показникові рівняння:

1) $2^{x+3} = 32$;
2) $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$;
3) $7^x = 12$;
4) $3^x + 3^{x+1} = 108$;
5) $5^{x^2-2x+2} = 5$;
6) $16^x + 3\cdot 4^x - 4 = 0$;
7) $9^x + 6^x - 4^x = 0$;
8) $2\cdot 3^{x+1} = 5\cdot 7^{x-1}$;
9) $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$;
10) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\cdot(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$;
11) $x^{\log_{1/3}(3x)} = \frac{1}{3}$;
12) $(3\cdot(3^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}})^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = \frac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

8. Розв'язати логарифмічні рівняння:

1) $\lg(x+1) = 1$;
2) $\log_x 125 = 3$;
3) $\lg(x^2-17) = \lg(x+3)$;
4) $\log_4 x + \log_x 4 = 2,5$;
5) $\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_8(9^{x+1} - 1) = 1 + \log_8(3^{x+1} + 1)$;
6) $\log_7(\log_5(\sqrt{x+5} + \sqrt{x})) = 0$;
7) $\log_6(\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}) + 8\log_6 2 = 8$;
8) $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0$;
9) $\log_2(25^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(5^{x-1} + 1)$.

9. Розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4; \\ 9^x + 9^y = 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4; \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

Д1. Спростити вираз:

1) $((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} + 2)^{1/2} - \log_b a - \log_a b$;
2) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1\right)^{1/2}$;
3) $\left(\left(\frac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} - 1\right)^{1/2} - \left(\frac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} + 1\right)^{1/2}\right)\sqrt{2}\log_a^{1/2} b (a > 1)$;
4) $\sqrt{(\frac{x^2-4}{2x})^2 + 4} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}}$;

5) $\left(\frac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$;

6) $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$;

7) $\dfrac{(\lg b\cdot 2^{\log_2 \lg b})^{1/2}\cdot \lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0{,}5\lg\lg b^{1/2}}}}$;

8) $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

Д2. Без калькулятора дізнатися, яке з чисел більше: $\log_{135} 675$ чи $\log_{45} 75$.

Д3. Знайти множину визначення та множину значень функції $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

Б2

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$;

2) $y=3+2\sin 2x$;

3) $y=1-\cos\frac{x}{2}$;

4) $y=|\operatorname{tg} 2x|$;

5) $y=\operatorname{tg}|2x|$;

6) $y=-2\operatorname{arcctg} x$;

7) $y=\frac{1}{|x-3|}$;

8) $y=\frac{|x|-1}{|x|+4}$;

9) $y=\left|\frac{x-1}{x+4}\right|$;

10) $y=(|x|+1)^3$;

11) $y=|x^2+2x-3|$;

12) $y=x^2+2|x|-3$;

13) $y=|x^2+2|x|-3|$;

14) $y=|x^2+2x|-3$.

2. Знайти $\lg 56$, якщо $\lg 2=a$ і $\log_2 7=b$.

3. Знайти помилку в доведенні:

1) $8<32$; $2^3<2^5$; $\log_{0.1}(2^3)<\log_{0.1}(2^5)$; $3\log_{0.1}2<5\log_{0.1}2$; $3>5$;

2) $\frac{1}{25}<\frac{1}{5}$; $\log_2\frac{1}{25}<\log_2\frac{1}{5}$; $2^{\log_2\frac{1}{25}}<2^{\log_2\frac{1}{5}}$; $2^{2\log_2\frac{1}{5}}<2^{\log_2\frac{1}{5}}$; $4^{\log_2\frac{1}{5}}<2^{\log_2\frac{1}{5}}$; $4<2$.

4. Спростити вираз:

1) $3^{\log_5 125}$;

2) $4^{\log_2 3}$;

3) $5^{\log_5 7}$;

4) $\log_{3/4}\frac{4}{3}$;

5) $\log_{10} 0.1$;

6) $\log_{0.01}\sqrt{10}$;

7) $3\log_2 3+4\log_4 5$;

8) $4\log_3 2-3\log_9 4$;

9) $3\log_2\log_4 16+\log_{0.5}2$;

10) $9^{3-\log_3 2-\log_{81} 4}$;

11) $\dfrac{(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25} 49})(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9})}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$.

5. Спростити вираз:

1) $(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1)^{1/2}$;

2) $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)$;

3) $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a \frac{a}{b}}$;

6. Відомо, що $\log_a x=\alpha,\ \log_b x=\beta,\ \log_c x=\gamma,\ \log_d x=\delta$. Знайти $\log_{abcd} x$.

7. Розв'язати показникові рівняння:

1) $25^x=\frac{1}{5}$;

2) $9^{-x}=27$;

3) $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x}=36$;

4) $5^{x+1}=8$;

5) $7^x-7^{x-1}=6$;

6) $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13$;

7) $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;

8) $4^x+2^x-6=0$;

9) $3^{2\sqrt{x}}-4\cdot 3^{\sqrt{x}}+3=0$;

10) $7\cdot 2^x=5\cdot 3^x$;

11) $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$;

12) $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0,2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0,04^{x-2}$;

13) $2\cdot 5^{2\sqrt{x}}-7\cdot 10^{\sqrt{x}}+5\cdot 4^{\sqrt{x}}=0$;

14) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

15) $6\cdot 9^{1/x}+6\cdot 4^{1/x}-13\cdot 6^{1/x}=0$;

16) $25^{\sqrt{2x^2+2x-3}-x}+2\cdot 5^{\sqrt{2x^2+2x-3}-x}-3=0$;

17) $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$;

18) $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$;

19) $27\cdot x^{\log_{27} x}=x^{10/3}$;

20) $x^{\log_3 x+1}=9x$;

21) $(0,4)^{\lg^2 x+1}=(6,25)^{2-\lg x^3}$.

8. Розв'язати логарифмічні рівняння:

1) $\lg x = 3 - \lg 5$;
2) $\lg(\lg x) = 0$;
3) $\log_x 36 = 2$;
4) $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$;
5) $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$;
6) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$;
7) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 = 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$;
8) $\log_2(\log_5(x^2 - 4x)) = 2$;
9) $|2 - \log_3 x| + 3 = |5 - \log_3 x|$;
10) $\log_3(\log_2 x - 1)^2 = (\sqrt{5})^{\log_5 4}$;
11) $x^2 \cdot \log_2 x^2 - (2x^2 + 15)\log_4(2x+3) = 10\log_2(\frac{\sqrt{x}}{2x+3})$;
12) $\log_{1/3}(\log_4(x^2 - 5)) = 0$;
13) $\sqrt{4\log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$;
14) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;
15) $\log_{x+4} |-x^2 - 3x + 7| = 1$;
16) $\log_x 2 - 2\log_4 x = \frac{8}{3}$;
17) $\log_{2x}(\frac{2}{x}) \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$;
18) $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3$;
19) $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$.

9. Розв'язати системи:

1) $\begin{cases} x^y = y^x; \\ 3^x = 15^y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy); \\ \lg^2(x-y) = \lg x \cdot \lg y. \end{cases}$

ЗАНЯТТЯ 3
ТРИГОНОМЕТРІЯ. НЕРІВНОСТІ

Контрольне запитання

1. Основні тригонометричні формули.

A3

1. 1) Знаючи, що $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, знайдіть: $\sin\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{2}{5}$.

2) Знайдіть $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{25}$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

3) Знайдіть $\sin(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha = 0,6, \sin\beta = \frac{5}{13}$, причому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3\sin\alpha + (\cos\alpha + 3\sin\alpha)^2 + (3\cos\alpha - \sin\alpha)^2$.

3. Обчисліть $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{6}+\cos\frac{11\pi}{6}}$.

4. Спростіть вираз

1) $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$.

5. Розв'язати рівняння

1) $\sin 2x + \cos 7x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2$.

6. Розв'язати нерівності:

1) $\frac{x-1}{x-3} \geq 2x-3$;
2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \leq 1$;
3) $x^4 < 5$;
4) $x^7 \geq 2$;
5) $|x+2| < 0,03$;
6) $|2x-1| < |x-1|$.

7. Розв'язати нерівності з ірраціональностями:

1) $\sqrt{x+1} < 3$;
2) $\sqrt{x} + x > 4$;
3) $\sqrt{x^2+x-2} > x-2$;
4) $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
5) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.

8. Розв'язати логарифмічні нерівності:

1) $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4)$; 2) $\log_3\frac{3x-5}{x+1} \leq 1$.

9. Розв'язати показникові та степенево-показникові нерівності:

1) $1 < 3^x \leq 27$;
2) $-3 \leq 25^x - 4\cdot 5^x < 5$;
3) $(x-3)^{x^2+x} < (x-3)^{7x-5}$;
4) $|x+2|^{\frac{1}{x^2+x-6}} \geq |x+2|^{\frac{3}{x+3}}$.

10. Розв'язати нерівності:

1) $\sin 2x \le 0$;
2) $\cos x \ge 1$;
3) $\cos 3x \ge -\frac{1}{2}$;
4) $\operatorname{tg} 3x \ge 1$;
5) $\operatorname{tg} x \ge 0$;
6) $\sin x \cos x > 0$;
7) $\sin x \le \cos x$;
8) $7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 1 < 0$.

Б3

1. 1) Знаючи, що $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, знайдіть: $\cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

2) Знаючи, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, знайдіть: $\cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

3) Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = 1,4$, де α – гострий кут.

4) Знайдіть $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, якщо $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

5) Знайдіть $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, якщо $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$.

6) Знайдіть $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$.

7) Знайдіть $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha = \frac{4}{5}, \sin\beta = \frac{5}{13}$, причому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

8) Знайдіть $\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0,8$ і α – кут 4 чверті.

2. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу

1) $1 + 4\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha$;
2) $5\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$.

3. Обчисліть $\frac{\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{7\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}}$.

4. Спростіть вираз

1) $\frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta - \sin 3\beta} + \frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta + \sin 3\beta}$;
2) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
3) $4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

5. Розв'язати рівняння

1) $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$;
2) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{8}) = 0$;
3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$;
4) $\sin x - \sin 3x = 0$;
5) $\sin 5x + \cos 5x = 1$;
6) $\cos 3x - \cos 5x = 0$;
7) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;
8) $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3$;
9) $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1$;
10) $4\cos x - \operatorname{ctg} x - 1 = \frac{1}{\sin x}$;

11) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$;
12) $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$;
13) $\mathrm{tg}^2\, 3x - 2\sin^2 3x = 0$;
14) $\frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\, 2x} = 1 + \cos 4x$;
15) $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0$;
16) $4\sin x + \mathrm{tg}\, x + 1 = \frac{1}{\cos x}$.

6. Довести тотожність:

1) $\sin^{-1} 2\alpha \sin^{-1}(\frac{\pi}{3} - 2\alpha)\sin^{-1}(\frac{\pi}{3} + 2\alpha) = 4\sin^{-1} 6\alpha$;
2) $\sin\alpha \cdot \sin(x-\alpha) + \sin^2(\frac{x}{2} - \alpha) = \sin^2 \frac{x}{2}$;
3) $1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1} = \frac{2}{3}$.

7. Розв'язати нерівності:

1) $\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} < \frac{3}{(x-2)^2}$;
2) $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0$;
3) $\frac{15}{4+3x-x^2} > 1$;
4) $2x^6 \le 3$;
5) $3x^3 \ge -1$;
6) $|x-5| \ge 12$;
7) $|x| > |x+1|$.

8. Розв'язати нерівності з ірраціональностями:

1) $\sqrt{2-x} < 3$;
2) $\sqrt{x^2+3x+2} < 2x+5$;
3) $\sqrt{9x-20} < x$;
4) $\sqrt{x+3} > x$.

9. Розв'язати логарифмічні нерівності:

1) $\log_{1/2}(x-7) > 4$;
2) $\lg(x+1) > \lg(5-x)$;
3) $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2} < 1$;
4) $\sqrt{\log_3\frac{2x-3}{1-x}} < 1$;
5) $\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)} < 2\log_{25}(5x^2-10x+10)$;
6) $\log_{x+1}(x^2-x+1) < 1$;
7) $\log_{1-x}(x^2+x-2) \ge 1$;
8) $\log_{4-x}(x^2-x-2) < \log_{4-x}(x+6)$;
9) $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+2}-9) > 3$;
10) $\log_{x^2+3x}(x+3) \le 1$.

10. Розв'язати показникові та степенево-показникові нерівності:

1) $10^{x^2} \le 1;$
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9};$
3) $0 \le 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \le 3;$
4) $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1;$
5) $(x-2)^{x^2-6x+8} \ge 1;$
6) $|x+1|^{x^2+2x} \le |x+1|^3.$

11. Розв'язати нерівності:

1) $\cos 3x \ge 0;$
2) $\sin x \le -1;$
3) $\cos 2x < -\frac{1}{2};$
4) $\operatorname{ctg} 3x \le 1;$
5) $\operatorname{ctg} x > 0;$
6) $\sin 2x \cos x \le 0;$
7) $\operatorname{tg} x \le \sin x;$
8) $2\sin^2 x - \sin x - 1 \ge 0.$

ЗАНЯТТЯ 4
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Спростити вираз: $\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)\sqrt[4]{(x^4+y^4)^3}(x^4+y^4)^{1/4}}$.
2. Розв'язати нерівність $(2x)^{x^2+1} < (2x)^{4x}$.
3. Розв'язати рівняння: $\sin^4 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$.
4. Знайти натуральне n таке, що $1+3+5+...+(2n-1) = 4n-3$.
5. Для яких значень параметра a рівняння $ax^4 - 2a^2x^2 + 1 = 0$ має рівно два розв'язки?
6. Побудувати графіки функцій:
1) $y = \pi - 3\,\mathrm{arctg}\,2x$;
2) $y = \frac{2-5x}{7x+1}$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. Використаємо формули суми кубів та дій над степенями:
$\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)\sqrt[4]{(x^4+y^4)^3}(x^4+y^4)^{1/4}} = \frac{(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}{x^2+y^2} - \sqrt{(x^4+y^4)(x^4+y^4)^{3/4}(x^4+y^4)^{1/4}} = x^4 - x^2y^2 + y^4 - \sqrt{(x^4+y^4)^{1+3/4+1/4}} = x^4 - x^2y^2 + y^4 - \sqrt{(x^4+y^4)^2} = x^4 - x^2y^2 + y^4 - (x^4+y^4) = -x^2y^2$.

2. Маємо показникові функції з основою $2x$. Для розв'язання нерівності необхідно розглянути випадки:

1) $0 < 2x < 1$. Тоді $x^2+1 > 4x$. Маємо систему $\begin{cases} 0 < 2x < 1; \\ x^2+1 > 4x. \end{cases}$

Розв'язуємо її: $\begin{cases} 0 < x < 1/2; \\ x^2 - 4x + 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1/2; \\ x \in (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$
Звідси $x \in (0, 2-\sqrt{3})$.

2) $2x > 1$. Тоді $x^2+1 < 4x$. Маємо систему $\begin{cases} 2x > 1; \\ x^2+1 < 4x. \end{cases}$

Розв'язуємо її: $\begin{cases} x > 1/2; \\ x^2 - 4x + 1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1/2; \\ x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}). \end{cases}$ Звідси $x \in (1/2, 2+\sqrt{3})$.

3) $2x = 0$ або $2x = 1$. Тоді маємо нерівність $0 < 0$ або $1 < 1$. Отже, $x \in \varnothing$.

Для того, щоб отримати розв'язок, необхідно об'єднати отримані множини: $x \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (1/2, 2+\sqrt{3})$.

3. Перетворюємо рівність так, щоб отримати лише одну тригонометричну функцію: $\sin^4 x - 2\sin^2 x = 0$. Зробимо заміну $\sin x = t$. Отримаємо біквадратне рівняння $t^4 - 2t^2 = 0$. Звідси $t^2 = 0$ або $t^2 = 2$, звідки $t = 0$, або $t = \sqrt{2}$, або $t = -\sqrt{2}$. Останні дві рівності неможливі, бо синус за модулем не перевищує одиниці. Отже, $\sin x = 0$, тому $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

4. Зліва маємо арифметичну прогресію з n доданків, першим доданком 1 і різницею 2. Її сума $(1 + (2n-1)) \cdot n/2 = n^2$. Отже, маємо рівняння $n^2 = 4n - 3$. Розв'язуючи його, отримаємо $n = 1; n = 3$.

5. Біквадратне рівняння має розв'язки, якщо $D = 4a^4 - 4a \geq 0$, тобто $a(a-1)(a^2+a+1) \geq 0$, або $a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Для цих значень параметра a рівняння $ax^4 - 2a^2x^2 + 1 = 0$ може мати розв'язки $x^2 = a^2 \pm \sqrt{a^4 - a}$, де права частина рівності повинна бути невід'ємною.

При $a \leq 0$ права частина невід'ємна, лише якщо в ній обрати знак плюс. Тоді рівняння має рівно два розв'язки при $a < 0$.

При $a \geq 1$ права частина невід'ємна для обох знаків. При цьому в обох випадках $x^2 \neq 0$. Тому рівняння не може мати рівно два розв'язки.

Отже, остаточно $a < 0$.

ЗАНЯТТЯ 5
ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ. МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

Контрольні запитання

1. *Логічні символи* $\Rightarrow; \Leftrightarrow; \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}; \forall; \exists; \exists!; :=; \overset{\text{def}}{=}$.
2. *Перетворення логічних тверджень "не* $B \Rightarrow$ *не* A *". Доведення від супротивного.*
3. *Способи задання множин.*
4. *Дії над множинами.*

А5

1. Що можна сказати про дійсне число x, якщо:
1) $\forall a > 0 \ : \ x < a$; 2) $\exists a > 0 \ : \ x < a$?

2. Визначити множину A, якщо:
1) $A = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N} : \ x = 2n\}$;
2) $\forall x \in A \ \exists n \in \mathbf{N} : \ x = 2n$;
3) $\forall x \in A \ \exists m \in \mathbf{Z} \ \exists n \in \mathbf{N} : \ x = \dfrac{m}{n}$;
4) $\forall x \in A \ \exists y \in \mathbf{R}, \ y \geq 1 : \ 2^x = y$;
5) $\forall a \in A \ \exists x \in \mathbf{R} : \ x^2 + 2ax + a = 0$;
6) $A = \{x \mid \exists y \in \mathbf{R} : \ x^2 + y^2 = 1\}$;
7) $\forall (x, y) \in A : \ \max(x, y) \geq 1$.

3. Чи вірні наступні висловлювання:
1) $\forall a \in \mathbf{R} \ \exists x \in \mathbf{R} : \ x^2 + ax = 0$;
2) $\forall a \in \mathbf{R} \ \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + 2ax + a = 0$?

4. Записати в кванторах висловлювання:
1) "у множині A міститься більше одного елемента";
2) "у множині A містяться як завгодно великі додатні числа".

5. Записати твердження та його заперечення в кванторах, з'ясувати, яке з двох тверджень істинне:
1) при кожному $a > 0$ рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
2) при кожному дійсному a рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
3) існує квадратне рівняння, що не має дійсних коренів.

6. В яких випадках правильні твердження $A \Rightarrow B, \ B \Rightarrow A, \ A \Leftrightarrow B$? Записати правильні твердження у вигляді теорем, використовуючи слова "необхідно"і "достатньо".

1) $A =$ "число $a > 0$", $B =$ "число $a > 1$";
2) $A =$ "дані кути вертикальні", $B =$ "дані кути рівні";
3) $A =$ "натуральне число ділиться на 3" , $B =$ "натуральне число ділиться на 9";
4) $A =$ "рівняння $f(x) = g(x)$ має корінь", $B =$ "рівняння $f^2(x) = g^2(x)$ має корінь";
5) $A =$ "заданий трикутник рівнобедрений", $B =$ "дві медіани заданого трикутника рівні між собою";
6) $A =$ "заданий чотирикутник є ромбом", $B =$ "діагоналі заданого чотирикутника ділять його кути навпіл".

7. Довести для натуральних n твердження $n^2 - n - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow n \geq 3$: а) безпосередньо розв'язавши нерівність; б) записавши еквівалентне твердження з використанням заперечень.

8. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:

1) $A = \{x \mid x^2 + 6x + 8 < 0\},\ B = \{x \mid x^2 + 3x < 0\}$;
2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x - 3| \leq 2\}\,,\ B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2|x| < 3\}$;
3) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\right\}$;
4) $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2|y - 1| \leq 1\right\}$.

9. Відомо, що множина A скінченна, а множина $A \cup B$ нескінченна. Довести методом від супротивного, що множина B нескінченна.

Д1. Нехай для $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ множина $A_{mn} = (m, m + n)$. Визначити такі множини:

1) $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}, \quad C_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}, \quad m \in \mathbf{Z}$;
2) $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}); \quad \bigcap\limits_{m \in \mathbf{Z}} (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn})$.

Д2. Нехай $A_{mn} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid m^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$ для $m,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m < n$. Визначити множини:

$$\bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_{mn},$$

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m+1}^{\infty} A_{mn}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}.$$

Д3. Визначити множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ та $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$, якщо:

1) $A_t = [t, t+1], \quad T = [0, +\infty);$
2) $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = t\}, \quad T = [0, 1];$
3) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le t^2\}, \quad T = [0, +\infty);$
4) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = tx^2\}, \quad T = (0, +\infty).$

Д4. Визначити множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$, $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$, де:

1) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ x = ty\}, \quad T = (0, \infty);$
2) $A_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ x = ty\}, \quad T = [-1, 1].$

Б5

1. Що можна сказати про дійсне число x, якщо:

1) $\forall a > 0 \ : \ x \le a;$
2) $\forall a \ge 0 \ : \ x < a;$
3) $\forall a < 0 \ : \ x < a;$
4) $\forall a < 0 \ : \ x > a?$

2. Визначити множину A, якщо:

1) $\forall a \in A \, \exists x \in \mathbf{R} \ : \ 3a + 2ax - x^2 > 0;$
2) $A = \big\{a \mid \exists x \in \mathbf{R} \ : \ 3a + 2ax - x^2 > 0\big\};$
3) $\forall a \in A \, \exists b \in \mathbf{R} \, \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + 2ax + b^2 + 1 < 0.$

3. Чи правильні наступні висловлювання :

1) $\forall n \in \mathbf{N} \, \exists r_1 \in \mathbf{Q} \, \exists r_2 \in \mathbf{Q} \ : \ r_1 r_2 + r_1 = n;$
2) $\exists a \in \mathbf{R} \, \forall x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 2ax + a > 0?$

4. Записати твердження та його заперечення в кванторах, з'ясувати, яке з двох тверджень істинне:

1) при кожному $a \le 0$ рівняння $x^2 = a$ має дійсний корінь;
2) існує дійсне a, при якому рівняння $x^2 + 2a = 0$ має дійсний корінь.

5. В яких випадках правильні твердження $A \Rightarrow B, \ B \Rightarrow A, \ A \Leftrightarrow B?$ Записати правильні твердження у вигляді теорем, використовуючи слова "необхідно"і "достатньо".

1) A = "натуральне число ділиться на 2" , B = "натуральне число ділиться на 10";
2) A = "рівняння $x^3 = a^3$ має корінь", B = "рівняння $x^5 = a^5$ має корінь".

6. Нехай $c = 3a + 5b$ і відомо, що число c не ділиться на 5. Довести, що число a не ділиться на 5.

7. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:

1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 6x - 7 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < x^2\}$;
2) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;
3) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
4) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sin(x - y) = 0\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos(x + y) = 0\}$;
5) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2 + 2ax + 1 > 0\}$,
   $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2 x + 2x + 2a \leq 0\}$.

ЗАНЯТТЯ 6
ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ (ПРОДОВЖЕННЯ). ВІДОБРАЖЕННЯ. ОБРАЗИ І ПРООБРАЗИ. СЮР'ЄКЦІЯ, ІН'ЄКЦІЯ, БІЄКЦІЯ

Контрольні запитання

1. *Правила де Моргана.*
2. *Загальне поняття відображення (функції), образи і прообрази.*
3. *Означення сюр'єкції, ін'єкції і бієкції.*

А6

1. Довести такі твердження: $A \backslash C \subset (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$. Навести приклади множин, для яких має місце строге включення.

2. За допомогою правил де Моргана довести рівності:

1) $\overline{A \backslash B} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$;
2) $\overline{A \triangle B} = \overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$, де $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ – симетрична різниця множин A та B.

3. Для функції $f(x) = x^2 - 3x + 2, \ \ x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:

$$f(\{0\}),\ f(\{1\}),\ f(\{1,2\}),\ f((0,1)),\ f\left(\left(1,\tfrac{3}{2}\right)\right),\ f((1,2)),$$
$$f^{-1}(\{1\}),\ f^{-1}(\{-4,-3\}),\ f^{-1}((-5,6]),\ f^{-1}((-\infty,0]).$$

4. Для функції $f(x) = 1 + \sin x, \ \ x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:

$$f(\{0,\pi\}),\ f\left(\left\{\tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{\pi}{2}\right\}\right),\ f\left(\left(0,\tfrac{3\pi}{2}\right]\right),$$
$$f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},2\right]\right),\ f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},+\infty\right)\right).$$

5. Які з наступних відображень з $[-1,1]$ в $[-1,1]$ будуть сюр'єкціями? ін'єкціями? бієкціями?

$$x \mapsto x^3,\ \ x \mapsto x^2,\ \ x \mapsto 2^{x-1},\ \ x \mapsto 2^{|x|-1},\ \ x \mapsto \tfrac{x}{1+x^2}.$$

6. Чи є відображення $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, що задається формулою $1)(x,y) \mapsto (x^2,y^2)$; $\ \ 2)(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією?

7. Довести, що f – ін'єкція $\Longleftrightarrow \forall A \subset X \ :\ f^{-1}(f(A)) = A$.

8. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

1) $y = 2^x,\ x \in \mathbf{R}$;
2) $y = \log_{1/3} x,\ x > 0$;
3) $y = \sin x,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
4) $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbf{R}$.

9. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

1) $y=\frac{2x}{1+x^2},\ x\le -1;$ 3) $y=\frac{2x}{1+x^2},\ x\ge 1.$
2) $y=\frac{2x}{1+x^2},\ -1\le x\le 1;$

10. Показати, що функція $y=x^2,\ x\in[-1,1]$, не має оберненої. Визначити обернені функції для функцій:

1) $y=x^2,\ \ x\in[-1,0];$ 2) $y=x^2,\ \ x\in[0,1].$

11. 1) Записати суперпозиції функцій $g(h), h(g), h(h), g(g)$, де

$$g(x)=e^x,\ h(x)=\sin x,\ x\in\mathbf{R}.$$

2) Подати наступну функцію у вигляді суперпозиції кількох елементарних функцій:

$$1) f(x)=\sin^3 e^x;\ 2) f(x)=\frac{1}{\sin^2(\ln x)}.$$

Д1. Довести співвідношення: $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\right)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(A_k\setminus B_k)$. Навести приклади множин, для яких має місце строге включення.

Д2. Функція $f:\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z}$ задана співвідношенням

$$f(n)=n(n+1),\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Визначити прообрази наступних множин

$$\{1\},\quad \{2\},\quad \mathbf{N},\quad \{\dots,-4,-3,-2,-1,0\}.$$

Д3. Чи є відображення $f:\mathbf{N}^2\longrightarrow\mathbf{N}$ бієкцією, якщо

$$f(m,n)=m+\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2},\ \ (m,n)\in\mathbf{N}^2?$$

Д4. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{N},\ g:\ \mathbf{N}\to\mathbf{R},\ h=g(f):\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Чи може h бути ін'єкцією? сюр'єкцією? бієкцією?

Д5. Довести, що жодне відображення $f:A\to 2^A$ не є бієкцією.

Б6

1. Довести включення:

1) $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D);$
2) $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C.$

2. Довести рівності:

1) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C);$
2) $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C.$

3. За допомогою правил де Моргана довести рівність: $\overline{\overline{A\cup B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}=A\cup B.$

4. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{|x|},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, визначити множини:

$$f(\{-1\}),\ f(\{-1,1\}),\ f((-2,0)),\ f([1,+\infty)),$$
$$f^{-1}(\{1\}),\ f^{-1}(\{-1\}),\ f^{-1}((0,1)),\ f^{-1}((-1,1)).$$

5. Які з наступних відображень $f\ :\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$

1) $(x,y) \mapsto (y,x)$;
2) $(x,y) \mapsto (x,0)$;
3) $(x,y) \mapsto (x+1,y+1)$;
4) $(x,y) \mapsto (2^x,2^y)$

є сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією? Для відображення f з 2) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ y=0\}$. Для відображення f з 4) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x,y)\ |\ 0 \le x \le 1,\ y=1\}$.

6. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B - підмножини X. Довести, що :

1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
2) $f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B)$;
3) $A \subset B \Longrightarrow\ f(A) \subset f(B)$.

У випадках 1) та 2) навести приклади строгого включення.

7. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B – підмножини Y. Довести, що:

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
2) $f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$;
3) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
4) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

8. Задано відображення $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N},\ f(n) = 1+n^2$. Знайти $f(\{1\}), f^{-1}(\{-2\}), f^{-1}(\{2\})$.

9. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

1) $y = (0,3)^x,\ x \in \mathbf{R}$;
2) $y = \log_5 x,\ x > 0$;
3) $y = \cos x,\ x \in [\pi, 2\pi]$;
4) $y = \arccos x,\ x \in [-1,1]$;
5) $y = x^3,\ x \in \mathbf{R}$;
6) $y = \sqrt[4]{x},\ x \ge 0$.

10. Знайти обернені функції та побудувати їх графіки:

1) $y = 2x - x^2,\ x \ge 1$; 2) $y = 2x - x^2,\ x \le 1$.

11. 1) Записати суперпозиції функцій $f(g), g(f), f(f), g(g), g(h), h(g), f(h), h(f), h(h)$, де

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = x^2,\ h(x) = \lg(|x|+1),\ x \in \mathbf{R}.$$

2) Подати наступну функцію у вигляді суперпозиції кількох елементарних функцій:

$$f(x) = \sqrt[3]{\arcsin^2(2^{-x^2})}.$$

ЗАНЯТТЯ 7
ДІЙСНІ ЧИСЛА. ОСНОВНІ НЕРІВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення дійсного числа.*
2. *Порівняння дійсних чисел.*
3. *Означення раціональних та ірраціональних чисел.*
4. *Означення алгебраїчних чисел.*

А7

1. Довести, що число $\sqrt{3}$ – ірраціональне.

2. Довести, що число $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – алгебраїчне.

3. Чи існує найменше ірраціональне число у множині всіх ірраціональних чисел, більших одиниці?

4. Побудувати найбільше дійсне число, яке не містить у десятковому запису цифру 9 і менше 0,9.

5. Довести, що не існує раціонального числа r, такого що:

$$r^2 = 5; \quad r^3 = 7; \quad r^2 + 3r + 1 = 0; \quad r^3 - 7r + 1 = 0.$$

6. Нехай $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\ r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\alpha+\beta$; 2) $\alpha + r$; 3) $\sqrt{r}$;?

7. Довести, що квадрат трансцендентного числа – число трансцендентне.

8. Для довільних дійсних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ довести нерівності:

1) $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$; 2) $|a_1 - a_2| \ge ||a_1| - |a_2||$;

3) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

9. Довести, що для довільних дійсних чисел $a,\ b$ виконуються наступні рівності:

$$\min(a,b) = \tfrac{1}{2}(a + b - |a-b|); \quad \max(a,b) = \tfrac{1}{2}(a + b + |a-b|).$$

10. Довести нерівності:

1) $a^2 + b^2 \ge 2ab,\ a, b \in \mathbf{R}$;
2) $\frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd},\ a,b,c,d \ge 0$;
3) $n! < (\frac{n+1}{2})^n,\ n \ge 2$;
4) $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0,\ a \ne 0$.

11. Довести, що число, виражене нескінченним десятковим дробом $0,1000000001000000\ldots$ (одиниці стоять на першому, десятому, сотому, тисячному і т.д. місці, інші цифри – нулі) – ірраціональне.

Д1. Показати, що якщо $\frac{m}{n}$ – хороше наближення до $\sqrt{2}$, то $\frac{m+2n}{m+n}$ – ще краще наближення і що похибки цих наближень будуть різних знаків. На основі цього твердження отримайте 4 наближення до $\sqrt{2}$, виходячи з наближення $\frac{1}{1}$. Оцініть їх точність.

Д2. Довести, що числа $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ – алгебраїчні.

Б7

1. Довести, що число $\sqrt[3]{4}$ – ірраціональне.

2. Довести, що число $\dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ – алгебраїчне.

3. Відрізок AB ділиться точкою C так, що $AB \cdot AC = BC^2$ (золотий поділ). Довести, що відношення $\frac{AC}{AB}$ ірраціональне.

4. Вказати два ірраціональних числа, різниця яких раціональна.

5. Вказати два ірраціональних числа, добуток яких раціональний.

6. Нехай $\alpha,\ \beta \notin \mathbf{Q},\ \alpha+\beta \in \mathbf{Q}$. Довести, що $\alpha-\beta,\ \alpha+2\beta \notin \mathbf{Q}$.

7. Нехай $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\ r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\sqrt{\alpha}$; 2) $\alpha\cdot\beta$; 3) $\alpha\cdot r$; 4) $\sqrt{\alpha+r}$; 5) $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$; 6) $\sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$; 7) $\sqrt{r+\sqrt{\alpha}}$?

8. Довести, що дійсне число $0,12345678910111213\ldots$ – ірраціональне.

9. Виписати десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ з недостачею з точністю $0,1;\ \ 0,01;\ \ 0,001$ і знайти різницю між числом 2 і квадратами цих наближень. Зробити те саме з наближеннями з надлишком.

10. Для довільного натурального числа n довести нерівність Бернуллі:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

де $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – числа одного й того ж знаку, більші за -1.

11. Довести нерівності:

1) $a+\frac{1}{a} \geq 2,\ a>0$;
2) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac,\ a,b,c\in\mathbf{R}$.

ЗАНЯТТЯ 8
ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ

А8

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = (1 - x^2)(2 + x)$;
2) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$;
3) $y = x + \dfrac{1}{x}$;
4) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$;
5) $y = 2^x \sin x$;
6) $y = 2x - \cos x$;
7) $y = \sin^2 x$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin x^2$;
2) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
3) $y = 3^{x^2}$;
4) $y = 3^{-x^2}$;
5) $y = \arcsin(\sin x)$.

Д1. Скільки коренів має рівняння $|\sin x| = \dfrac{2x}{201\pi}$?

Д2. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 3|x| + 2 = a$ у залежності від значень параметра a?

Д3. Скільки коренів має рівняння $x^5 - 5x = a$ в залежності від значень параметра a?

Б8

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sqrt{-x-2}$;
2) $y = x(1 - x^2)^2$;
3) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
5) $y = x^2 - x^4$;
6) $y = \frac{2x}{1+x^2}$;
7) $y = x + \frac{1}{x^2}$;
8) $y = x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$;
9) $y = x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$;
10) $y = 3^x \cos x$;
11) $y = x + \sin x$;
12) $y = x\cos x$;
13) $y = \lg\frac{1-x}{1+x}$;
14) $y = \lg\frac{1}{x^2}$;
15) $y = \lg(1 + 10^x)$;
16) $y = \sin^3 x$;
17) $y = \operatorname{ctg}^2 x$;
18) $y = \sin x - \cos x$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 3^{\frac{1}{x}}$,
2) $y = 3^{\frac{1}{x^2}}$,
3) $y = 3^{-\frac{1}{x^2}}$,
4) $y = 3^{\frac{2x}{1-x^2}}$;
5) $y = 2^{\frac{1}{\sin x}}$;
6) $y = \lg \sin x$;
7) $y = \lg \operatorname{tg} x$;
8) $y = 2^{\sin x}$;
9) $y = \arccos(\cos x)$;
10) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;
11) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
12) $y = \lg^2 x + 6 \lg x$.

ЗАНЯТТЯ 9
ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ

Контрольні запитання

1. *Геометричне місце точок.*
2. *Полярні координати.*

А9

1. Побудувати криві, задані параметрично:

1) $x = 1 - t, \quad y = 1 - t^2$ (парабола);
2) $x = t + \dfrac{1}{t},\ y = t + \dfrac{1}{t^2};$
3) $x = 10\cos t,\ y = \sin t$ (еліпс).

2. Скласти параметричне рівняння кривої, яку описує фіксована точка кола при його коченні без ковзання по прямій (цю криву називають циклоїда).

3. Побудувати геометричне місце точок (x, y), якщо:

1) $x^2 + y^2 = 3;$
2) $x^2 + y^2 = 0;$
3) $2x + y = 3;$
4) $x^2 + y^2 \le 2;$
5) $x^2 + y^2 > 9;$
6) $x^2 + 6x + y^2 - 4y < 3;$
7) $x + y + 2 > 0;$
8) $x + 2y < 1,\ x - 2y \ge 1;$
9) $x + y < 1,\ x + y > 0;$
10) $x + y < 3,\ 2x + y > 3,$ $2y + x > 3;$
11) $\sin(x - y) = 0;$
12) $\max\{x, y\} = 3;$
13) $\max\{|x|, |y|\} \le 2;$
14) $[x] + [y] \le 1;$
15) $|x| + |y| \le 1;$
16) $|x - 2| + |y + 1| \le 1;$
17) $|y| \le \sin x;$
18) $-x^2 \le y \le x + 2;$
19) $x^2 + y^2 - 4y = 0;$
20) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (астроїда).

4. Побудувати криві у полярній системі координат:

1) $r = \varphi$ (спіраль Архімеда);
2) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (логарифмічна спіраль);
3) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (кардіоїда);
4) $r = 10\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда);
5) $r = \sin\varphi$ (коло).

Д1. Побудувати криву, задану параметрично такими рівняннями:

$$x = 2^t \cos t, \qquad y = 2^t \sin t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Д2. Побудувати геометричне місце точок (x, y), якщо:

1) $\sin \pi x \cdot \sin \pi y \geq 0$;
2) $[|x|] + [|y|] \leq 2$;
3) $[x^2] + [y^2] \leq 2$;
4) $(x-y)^{x^2+y^2} \geq x - y$;
5) $\log_{x-y}(x+2) > 2$;
6) $\log_{|x|\cdot y^2} x^2 \geq 1$;
7) $\log_{x-y}(x^2+y^2) \geq \log_{x-y} 4$;
8) $\log_{x+y}(x^2+y^2) \geq \log_{x+y} 9$;
9) $\log_{|x|+|y|}(x^2+y^2) \leq 0$.

Д3. У декартовій системі координат визначити множину точок, координати яких задовольняють співвідношенням:

$1)\ x^2 - xy + y^2 = 1$; $\quad 2) x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (декартів лист).

Д4. Довести, що графіком функції, заданої у полярних координатах співвідношенням $r = \sin \varphi,\ \varphi \in [0, \pi]$, є коло.

Б9

1. Побудувати криві, задані параметрично:

1) $x = 4t,\ y = 2t + 1$;
2) $x = 1 + t,\ y = 1 - t^2$;
3) $x = 5\cos^2 t, \quad y = 3\sin^2 t$;
4) $x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Примітка. Функції $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),\ \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad t \in \mathbf{R}$, називаються відповідно *гіперболічними синусом* та *косинусом*.

2. Побудувати геометричне місце точок (x, y), якщо:

1) $x = 3$;
2) $4x - 3y = 1$;
3) $x^2 + y^2 \geq 3$;
4) $x^2 + y^2 < 25$;
5) $x^2 + y^2 = -1$;
6) $x^2 + 4x + y^2 - 8y < 5$;
7) $x - y - 3 \leq 0$;
8) $x + y < 1,\ x^2 + y^2 < 9$;
9) $x + y \leq 3,\ x \geq 1,\ y \geq 1$;
10) $\cos(2x - y) = 0$;
11) $\operatorname{tg}(x + y) = 0$;
12) $\min\{x, y\} < 1$;
13) $\min\{|x|, |y|\} = 5$;
14) $[x] + [y] = 3$;
15) $x^2 - 9x + y^2 + 2y + 6 = 0$;
16) $2|x - 1| + |y| \leq 2$;
17) $|y| \leq 1 - x^2$;
18) $2x \leq y \leq x^2 + 2$;

3. У декартовій системі координат визначити множину точок, координати яких задовольняють співвідношенню:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;
2) $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$.

4. Побудувати графіки функцій у полярній системі координат:

1) $r = \dfrac{\pi}{\varphi},\ \varphi > 0,$ (гіперболічна спіраль);

2) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1},\ 0 \leq \varphi < +\infty;$

3) $r^2 = 36\cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі);

4) $r = \cos\varphi$ (коло).

ЗАНЯТТЯ 10
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ЗА ОЗНАЧЕННЯМ

Контрольні запитання

1. *Означення границі послідовності.*
2. *Означення обмеженої послідовності.*
3. *Теорема про єдиність границі.*

A10

1. За означенням границі послідовності довести рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{4n+5} = \dfrac{1}{2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+6}{n+1} = 5$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}} = 0$.

У випадку 2) заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$N(\varepsilon)$				

2. Чи збіжна послідовність $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \ldots$?

3. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

4. Який вираз приймає більші значення для всіх натуральних n, починаючи з деякого:

1) $100n+200$ чи $0,01n^2$; 2) 2^n чи n^{1000}; 3) 1000^n чи $n!$?

5. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ обмежена, а послідовність $\{b_n : n \geq 1\}$ збіжна до нуля. Довести, що послідовність $\{a_n b_n : n \geq 1\}$ збігається до нуля.

6. Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R} \backslash \{0\}$. Довести, що $|a_n| \to +\infty$ при $n \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{a_n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

7. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Що означають наступні висловлювання:

1) $\exists \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \forall n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon;$
2) $\exists \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \forall n > k : \ |a_n - a| > \varepsilon;$
3) $\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbf{N}\ \exists n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon;$
4) $\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbf{N}\ \forall n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon;$
5) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \exists n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon;$
6) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \exists n > k : \ |a_n - a| > \varepsilon;$
7) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \forall n > k : \ |a_n - a| > \varepsilon;$
8) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N}\ \forall n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon;$
9) $\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbf{N}\ \exists n > k : \ |a_n - a| > \varepsilon;$
10) $\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbf{N}\ \exists n > k : \ |a_n - a| < \varepsilon?$

Д1. Довести наступні рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0;$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0.$

Д2. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right).$

Д3. Нехай послідовність прямує до $+\infty$. Довести, що серед її членів є найменший.

Д4. Довести, що збіжна послідовність має найбільший або найменший член.

Б10

1. За означенням границі послідовності довести рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1;$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,999^n = 0.$

У випадках 1), 2) заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$N(\varepsilon)$				

2. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^3+1};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{2n} + \dfrac{3}{2n} - \cdots + \dfrac{2n-1}{2n} - \dfrac{2n}{2n}\right);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right);$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\dots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right).$

3. Чи зміниться зміст означення границі послідовності, якщо в означенні:

1) "$\forall\varepsilon>0$" замінити на "$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}$";
2) "$\forall\varepsilon>0$" замінити на "$\exists\varepsilon>0$";
3) "$\exists N\in\mathbf{N}$" замінити на "$\exists N\in\mathbf{R}$";
4) "$\exists N\in\mathbf{N}$" замінити на "$\forall N\in\mathbf{N}$";
5) "$\exists N\in\mathbf{N}\quad\forall n>N\quad:\quad|a_n-a|<\varepsilon$" замінити на "$\exists N\in\mathbf{N}\ :\ |a_N-a|<\varepsilon$";
6) "$|a_n-a|<\varepsilon$" замінити на "$|a_n-a|\le\varepsilon$" ?

4. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $\{a_n:\ n\ge 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з наступних умов означає необмеженість послідовності $\{a_n:\ n\ge 1\}$:

1) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
2) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n|>\varepsilon.$

5. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $\{a_n:\ n\ \ge 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з умов

1) $\exists\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
2) $\exists\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
3) $\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbf{N}:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
4) $\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbf{N}:\ |a_n|<\varepsilon$

означає обмеженість послідовності $\{a_n : n\ \ge 1\}$.

ЗАНЯТТЯ 11
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЦЮ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ

Контрольні запитання

1. *Властивості збіжних послідовностей.*
2. *Теорема про три послідовності.*
3. *Теорема про границю суми, добутку та частки збіжних послідовностей.*

А11

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$, де $|a|<1,\ |b|<1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^r+a_1n^{r-1}+\cdots+a_r}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\cdots+b_s}$, де $r,\ s\in\mathbf{N}$;
$a_i,\ b_j\in\mathbf{R},\ 0\le i\le s,\ 0\le j\le r,\ a_0b_0\ne 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{13}+(n+2)^{11}}{(n+3)^{13}+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2^n+\cos n}{2^{n+1}+\sin n^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n\sin n+\sqrt{n}}{(n+\lg n)^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$, де $a\ge 0$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n-n^6)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1})$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}+n+1}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_{n^2} 2}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$;

Д1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|1-2+3-4+\cdots-2n|}{\sqrt{n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$,
де $a\in \mathbf{R}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)}{n^3}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

Д2. Нехай послідовності $\{a_n:\ n\geq 1\}$ і $\{b_n:\ n\geq 1\}$ розбіжні. Що можна стверджувати про збіжність послідовностей $\{a_n+b_n:\ n\geq 1\}$ та $\{a_nb_n:\ n\geq 1\}$? Навести відповідні приклади.
Д3. Нехай $a_nb_n\to 0$ при $n\to\infty$. Чи можна стверджувати, що у цьому випадку хоча б одна з послідовностей $\{a_n:\ n\geq 1\}$, $\{b_n:\ n\geq 1\}$ збігається до нуля?
Д4. Нехай $a_n\to 0,\ n\to\infty;\ a_n\geq 0,\ n\geq 1,\ b_n\to+\infty,\ n\to\infty$. До якого числа може збігатися послідовність a_nb_n? $b_n^{a_n}$?
Д5. Нехай $a_n\geq 0,\ n\in\mathbf{N}$ і для деякого $m\in\mathbf{N}$
$$a_n^m\to a,\ n\to\infty;\ a\in\mathbf{R}$$
Довести, що
$$a_n\to\sqrt[m]{a},\ \text{при}\ \ n\to\infty.$$

Б11

1. Нехай послідовність $\{a_n:\ n\geq 1\}$ збіжна, а послідовність $\{b_n:\ n\geq 1\}$ розбіжна і обмежена. В якому випадку послідовність $\{a_nb_n:\ n\geq 1\}$ збіжна? Чи може збігатися послідовність $\{a_n+b_n:\ n\geq 1\}$?
2. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Чи можна стверджувати, що для довільної послідовності $\{b_n:\ n\geq 1\}$ має місце збіжність $a_nb_n\to 0$ при $n\to\infty$? Навести приклади.
3. Обчислити границі послідовностей $\{x_n:\ n\geq 1\}$, якщо:

1) $x_n=\dfrac{3-n}{2n+1}-\dfrac{3n^2+2}{4n^2+1}$;

2) $x_n=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}$;

3) $x_n=\dfrac{(-1)^n n}{2n-1}\cdot\dfrac{n}{n^2+n+1}$;

4) $x_n=\dfrac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$;

5) $x_n=\dfrac{a^n}{1+a^n}$, де $a\neq -1$;

6) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n}}$;

7) $x_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-2n+3}$;

8) $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$;

9) $x_n = \dfrac{n+\lg n+2^n}{n^2+\lg n-2^n}$;

10) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2+1}\sin\dfrac{n-1}{2n+1} + \dfrac{n}{2n-1}\cdot\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

4. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_3 n - \sqrt{n})$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+2n+1}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n+\log_2 n}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^{\sqrt{n}}+n+1}{2^{n+1}+5^{\sqrt{n}}+7}$.

5. Для додатних значень параметрів $a,\ b$ обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot\ldots\cdot(1+a^n)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}$.

ЗАНЯТТЯ 12
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

Контрольне запитання

1. *Теорема Штольца.*

А12

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - \dfrac{\sqrt{n}+5\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n+1}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-an)$, де $a\in\mathbf{R}$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+(2n)^3+(2n+1)^3}{n^4}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\cdots+\frac{(k+n)!}{n!}\right)$, де $k\in\mathbf{N}$.

3. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n : n\ge 1\}$ має границю. Довести, що послідовність середніх арифметичних

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n), \quad n\ge 1$$

також має границю і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується. Навести відповідний приклад.

4. Нехай послідовність $\{a_n : n\ge 1\}\subset(0,+\infty)$ має границю. Довести, що послідовність середніх геометричних

$$b_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad n\ge 1$$

також має границю і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Нехай послідовність $\{a_n \ : \ n \geq 1\} \subset (0,+\infty)$, $a_0 = 1$ та існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Довести, що послідовність $\{\sqrt[n]{a_n} \ : \ n \geq 1\}$ також збігається і

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Д1. Нехай $k \in \mathbf{N}$. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1!+2!+\cdots+n!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[k]{1^k+2^k+\cdots+n^k} - n)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}\right)$;

Б12

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3^n+2^{n+1}+n}{2^n+1} - \dfrac{3^n+2^n}{2n+2^n+1}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+a} - \sqrt[4]{n+b}\right)$, де $a>0,\ b>0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^3+n^2+3n+1}{bn^3+2n^2+7}$, $\quad a,\ b \in \mathbf{R}$;

2. Послідовність $\{a_n \ : \ n \geq 1\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = a \in \mathbf{R}$. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

3. Нехай k – натуральне число. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot a+2\cdot a^2+\cdots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}$, де $a>1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^k}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^k$, де $k \in \mathbf{N}$.

ЗАНЯТТЯ 13
ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення монотонної послідовності.*
2. *Теорема про границю монотонної послідовності.*
3. *Число* $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

А13

1. Визначити натуральне число n_0 так, щоб наступні послідовності були монотонними. Знайти границі цих послідовностей:

1) $\left\{a_n = \frac{n^5}{3^n} :\ n \geq n_0\right\}$;
2) $\left\{a_n = \frac{n^4}{2^n} :\ n \geq n_0\right\}$;
3) $\left\{a_n = \frac{n!}{n^n} :\ n \geq n_0\right\}$;
4) $\{a_n = n^2 - 49n + 50 :\ n \geq n_0\}$;
5) $\{a_n = 5^n + (-4)^n :\ n \geq n_0\}$.

2. Нехай для $n \geq 1$

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Нехай для $n \geq 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Довести, що:

1) $\forall n \geq 1 :\ a_n < b_n$; 2) $\forall n \geq 1 :\ a_n < a_{n+1}$; 3) $\forall n \geq 1 :\ b_{n+1} < b_n$;
4) послідовності $\{a_n :\ n \geq 1\}$ і $\{b_n :\ n \geq 1\}$ збіжні до одного числа – сталої Ейлера γ $(\gamma = 0,5772156649\ldots)$.

6. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}},\ n \geq 1.$$

7. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1 - \tfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right),\ n \geq 2$$

спадна і прямує до $\frac{1}{2}$ при $n \to \infty$.

Д1. Довести, що послідовність

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = (a_n - 3)^2,\ n \geq 1,$$

зростає і необмежена зверху. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

Д2. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n,\ n \geq 1,$$

спадає і збіжна до 1, а послідовність

$$b_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n^2},\ n \geq 1,$$

зростає і прямує до $+\infty$.

Д3. Обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\ln n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\right)$.

Д4. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + \frac{\sqrt{2}}{2\ln n} + \frac{\sqrt{3}}{3\ln n} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\ln n}\right).$$

Д5. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{2^n}}}.$$

Д6. Нехай для $n \geq 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Довести, що:

1) $\forall n \geq 1:\ a_n < b_n$; 2) $\forall n \geq 1:\ a_n < a_{n+1}$; 3) $\forall n \geq 1:\ b_{n+1} < b_n$;

4) послідовності $\{a_n :\ n \geq 1\}$ і $\{b_n :\ n \geq 1\}$ збіжні до одного й того ж від'ємного числа.

Б13

1. Довести монотонність наступних послідовностей:

1) $a_n = n^2 + 2^n \ n \geq 1;$

2) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+10}, \ n \geq 1;$

3) $a_n = \dfrac{n^4+3n^2+1}{n^4+3n^2+6}, \ n \geq 1;$

4) $a_n = 3 + \arcsin \dfrac{1}{n^2+4}, \ n \geq 1;$

5) $a_n = \lg \left(1 + \dfrac{n^4}{n^4+8}\right), \ n \geq 1;$

6) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}, \ n \geq 1.$

2. Знайти найбільший член послідовностей:

1) $\dfrac{n}{n^3+100}, \ n \geq 1;$ 2) $\dfrac{(\sqrt{39})^n}{n!}, \ n \geq 1;$ 3) $\sin \dfrac{\pi n}{2}, \ n \geq 1.$

3. Нехай $x_1 = \sqrt{3}, \ \ x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}, \ n \geq 1$. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Нехай $\{a_n : \ n \geq 0\}$– обмежена послідовність невід'ємних чисел. Довести збіжність послідовності

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \ n \geq 1.$$

5. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}, \ n \geq 1;$

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^n+1}, \ n \geq 1;$

3) $x_n = 1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}, \ n \geq 1;$

4) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, \ n \geq 1;$

5) $x_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}, \ n \geq 1;$

6) $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n+1}, \ n \geq 1;$

7) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{8}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right), \ n \geq 1;$

8) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\left(1 + \dfrac{1}{8}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right), \ n \geq 1.$

ЗАНЯТТЯ 14
ТОЧНІ МЕЖІ. ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення обмеженої зверху, обмеженої знизу та обмеженої числової множини.*
2. *Означення найбільшого і найменшого елементів числової множини.*
3. *Означення точної верхньої та точної нижньої межі числової множини.*
4. *Означення підпослідовності числової послідовності.*
5. *Означення часткової границі послідовності.*
6. *Означення верхньої та нижньої границь послідовності.*

А14

1. Для множини A визначити точні верхню та нижню межі, якщо
1) $A=(-2,3)\cup[4,5]$;
2) $A=(-1,2)\cup\{4\}\cup(5,6)$;
3) $A=(-\infty,3)$;
4) $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-1>0\right\}$;
5) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x=2,13\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots;\ \alpha_n\in\{0,1,\ldots,9\},\, n\geq 3\}$;
6) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots;\alpha_n\leq n-3\left[\frac{n}{3}\right],\ n\geq 1\}$.

2. Довести, що наступні множини дійсних чисел обмежені:
1) $A=\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}\mid n\in\mathbf{N}\right\}$; 2) $A=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}\mid n\in\mathbf{N}\right\}$.

3. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n\,:\,n\geq 1\}$, а також точні межі відповідної множини:
1) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 2) $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$.

4. Знайти множину часткових границь послідовності
$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ldots.$$

5. Нехай $a_n\to 1$ при $n\to\infty$. Довести, що послідовності $\{x_n:\ n\geq 1\}$ та $\{a_nx_n:\ n\geq 1\}$ мають одні й ті ж часткові границі.

Д1. Нехай послідовність дійсних чисел $\{x_n:\ n\geq 1\}$ і число a такі, що для довільного $\varepsilon>0$ множина $\{n\in\mathbf{N}\mid x_n<a-\varepsilon\}$ скінченна. Довести, що
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\geq a.$$

Д2. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі такої послідовності:

$$1, \tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 1+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \cdots, \tfrac{1}{n}, 1+\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n-1}+\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \cdots .$$

Б14

1. Які з наступних числових множин обмежені зверху, які обмежені знизу, які необмежені? Знайти точні верхні та нижні межі для обмежених множин.

1) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $0 < q < p$.

2) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $-q < p < 0 < q$.

3) $[2,7] \cap (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})$.

4) Множина периметрів правильних 2^{n+1}-кутників, вписаних у коло радіуса R.

5) Множина площ правильних 2^{n+1}-кутників, вписаних у коло радіуса R.

6) Множина десяткових наближень з надлишком для $\sqrt{2}$.

7) Множина десяткових наближень з недостачею для $\sqrt{2}$.

2. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі наступних послідовностей:

1) $x_n = \frac{1}{n-10{,}5}, \quad n \geq 1;$

2) $x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right), \quad n \geq 1;$

3) $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad n \geq 1;$

4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \geq 1;$

5) $x_n = (-1)^n n, \quad n \geq 1;$

6) $x_n = -(2 + (-1)^n)n, \quad n \geq 1;$

7) $x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \geq 1;$

8) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{\pi n}{4}, \quad n \geq 1;$

9) $x_n = \dfrac{n}{n+1} \sin^2 \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \geq 1;$

10) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}, \quad n \geq 1;$

11) $x_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \geq 1.$

ЗАНЯТТЯ 15
ТОЧНІ МЕЖІ. ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення обмеженої зверху, обмеженої знизу та обмеженої числової множини.*
2. *Означення найбільшого і найменшого елементів числової множини.*
3. *Означення точної верхньої та точної нижньої межі числової множини.*
4. *Означення підпослідовності числової послідовності.*
5. *Означення часткової границі послідовності.*
6. *Означення верхньої та нижньої границь послідовності.*

А15

1. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$, а також точні межі відповідної множини:

1) $x_n = 1 + n \sin \dfrac{\pi n}{2}$; 4) $x_n = 1 + \operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2})$;

2) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1} \cos \dfrac{2\pi n}{3}$; 5) $x_n = (-1)^n + 2(-1)^{n+3}$;

3) $x_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$; 6) $x_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n},\ x_{2n} = \dfrac{2^n-1}{2^n},\ n \geq 1.$

2. Довести обмеженість та визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:

1) $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 2) $\left\{\frac{n}{n+3}(2+(-1)^n) \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

3. Наведіть приклад числової множини A такої, що $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, але $A \neq [0,1]$.

4. Знайти:

1) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$; 3) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} (x^2 - 2nx)$

2) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$;

5. Довести, що множина дійсних чисел
$$A = \left\{1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}.$$
необмежена зверху.

Д1. Для обмежених послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$ довести нерівності:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Навести приклади, коли в цих співвідношеннях мають місце строгі нерівності.

Д2. Довести, що: а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k\ge n} a_k) = \sup\limits_{n\ge 1}(\inf\limits_{k\ge n} a_k)$; б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\ge n} a_k) = \inf\limits_{n\ge 1} (\sup\limits_{k\ge n} a_k)$.

Д3. Якими співвідношеннями зв'язані точні межі непорожніх обмежених множин $A \subset \mathbf{R},\ B \subset \mathbf{R}$, якщо:

1) $B = \{-x \mid x \in A\}$;
2) $B = \{x + a \mid x \in A\},\ a \in \mathbf{R}$;
3) $B = \{ax \mid x \in A\},\ a \in \mathbf{R}$;
4) $B = \{x^2 \mid x \in A\}$;
5) $B = \{x^3 \mid x \in A\}$.

Б15

1. Дослідити обмеженість та у випадку обмеженості визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:

1) $\left\{\frac{n^3}{2n^3+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 3) $\left\{\frac{1}{n^2+1} + \frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

2) $\left\{\frac{n^3}{n^4+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 4) $\left\{((-1)^n + 1)n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{n} \cos\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

2. Для яких числових множин $\inf A = \sup A$?

3. Довести обмеженість та визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:

1) $\left\{\frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 2) $\left\{1 + \frac{n}{n+2} \sin\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

4. Довести, що множина всіх правильних раціональних дробів

$$A = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{N},\ 0 < p < q\right\}$$

не має ні найменшого, ні найбільшого елементів. Знайти точні верхню та нижню межі цієї множини.

5. Знайти:

1) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{m}{m+n}$;
2) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \dfrac{m}{m+n}$;
3) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{1}{n + 2 + \operatorname{arctg} x}$.

ЗАНЯТТЯ 16
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. КРИТЕРІЙ КОШІ

Контрольні запитання

1. *Означення фундаментальної послідовності.*
2. *Властивості фундаментальних послідовностей (обмеженість, збіжність).*
3. *Критерій Коші збіжності числової послідовності.*

А16

1. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ і $\{b_n : n \geq 1\}$ – фундаментальні послідовності. Довести фундаментальність наступних послідовностей:

1) $\{|a_n| : n \geq 1\}$;
2) $\{a_n b_n : n \geq 1\}$;
3) $\{a_n^2 : n \geq 1\}$;
4) $\{a_n + b_n : n \geq 1\}$;
5) $\{a_n a_{n+2} : n \geq 1\}$;
6) $\{\max\{a_n, b_n\} : n \geq 1\}$;
7) $\{\min\{a_n, b_n\} : n \geq 1\}$.

2. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{\cos 1}{2} + \dfrac{\cos 2}{2^2} + \dfrac{\cos 3}{2^3} + \cdots + \dfrac{\cos n}{2^n}$, $n \geq 1$;

2) $x_n = \dfrac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \dfrac{\sin 3}{2 \cdot 3} + \dfrac{\sin 4}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{\sin n}{(n-1)n}$, $n \geq 2$.

3. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
$$\forall n \geq 1 : |a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}.$$
Довести, що ця послідовність фундаментальна.

4. Довести, що послідовність
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}, \ n \geq 1,$$
не є фундаментальною. Чи має границю ця послідовність?

Д1. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність. Довести фундаментальність послідовностей: $\{\sqrt{|a_n|} : n \geq 1\}, \{\sqrt[3]{a_n} : n \geq 1\}$.

Д2. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
$$\forall n \geq 2 : |a_{n+1} - a_n| < \alpha |a_n - a_{n-1}|,$$
де $\alpha \in (0, 1)$ – фіксоване число. Довести, що ця послідовність фундаментальна.

Б16

1. Довести, що підпослідовність фундаментальної послідовності фундаментальна.

2. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$ – фундаментальні послідовності і

$$\exists C > 0 \; \forall \, n \geq 1 : \; |b_n| > C.$$

Довести, що послідовність $\left\{ \dfrac{a_n}{b_n} : n \geq 1 \right\}$ фундаментальна.

3. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і

$$\forall n \geq 1 : \; |a_{n+1} - a_n| < \tfrac{1}{n(n+1)}.$$

Довести, що ця послідовність фундаментальна.

4. Нехай $\{a_n : n \geq 0\}$ – обмежена послідовність і $|q| < 1$. Довести, що послідовність

$$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n, \; n \geq 1$$

фундаментальна.

5. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dfrac{\cos 3!}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}, \; n \geq 1;$

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, \; n \geq 1.$

6. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 0\}$ така, що $a_{n+1} - a_n \to 0$. Чи обов'язково ця послідовність збіжна? Навести відповідні приклади.

ЗАНЯТТЯ 17
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ. ТОЧНІ МЕЖІ. ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$, якщо:

1) $A = \{x |\ \sin \pi x > 0\}$, $B = \{x |\ x^2 - x - 2 < 0\}$;
2) A – множина визначення функції $y = \operatorname{ctg} \pi x$, B – множина значень функції $y = \frac{2x+1}{x}$.

2. Визначити $\inf A$ і $\sup A$ для множин:

1) $A = \left\{ \dfrac{1 + n^{(-1)^n}}{1 + 2n} \mid n \geq 1 \right\}$; 2) $A = \left\{ \dfrac{2x}{1 + x^2} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$.

Для послідовності, що відповідає першій множині, визначити множину часткових границь, верхню та нижню границю.

3. Нехай $a \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$. Обчислити

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 (n+1)^{10} + \sin n + \ln n + 7}{(n-1)^{13} + \sqrt{n} + 1}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^n + 2^n}{a^n}$.

4. Довести, що послідовність

$$a_1 = \tfrac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad n \geq 1,$$

монотонна та обмежена. Знайти $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. 1) Розв'яжемо нерівності, що визначають елементи множин A та B:

$$\sin \pi x > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n,\, 2n+1), \quad A = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n,\, 2n+1);$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,\, 2), \quad B = (-1,\, 2).$$

Тому

$$A \cup B = (-1,\, 2) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}} (2n,\, 2n+1) \right), \quad A \cap B = (0,\, 1),$$

$$A \backslash B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}} (2n,\, 2n+1), \quad B \backslash A = (-1,\, 0] \cup [1,\, 2),$$

$$\overline{A} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n+1,\, 2n+2].$$

2) Оскільки

$$A=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(n,\,n+1),\quad B=(-\infty,\,2)\cup(2,\,+\infty),$$

маємо

$$A\cup B=B,\ A\cap B=A,\ A\backslash B=\varnothing,\ B\backslash A=\mathbf{Z}\backslash\{2\},\ \overline{A}=\mathbf{Z}.$$

2. 1) Для $n=2k,\ k\in\mathbf{N}:$

$$\frac{1+n^{(-1)^n}}{1+2n}=\frac{1+2k}{1+4k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+4k)};$$

для $n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}:$

$$\frac{1+n^{(-1)^n}}{1+2n}=\frac{1+\frac{1}{2k-1}}{1+2(2k-1)}=\frac{2k}{(2k-1)(4k-1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-1}.$$

Тому $\forall x\in A\ :\ x\le\frac{2}{3}\in A$. Отже, $\sup A=\max A=\frac{2}{3}$.

Далі, $\forall x\in A\ :\ x\ge 0$ та

$$\forall d>0\ \exists k\in\mathbf{N},\ k>\tfrac{d+1}{2d}\ :\ \tfrac{1}{2k-1}-\tfrac{1}{4k-1}<\tfrac{1}{2k-1}<d.$$

Звідси $\inf A=0$.

Відповідна послідовність розпадається на дві збіжні підпослідовності: $a_{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+4k)}\to\frac{1}{2},\ k\to\infty;\ a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-1}\to 0,\ k\to\infty.$ Тому множина часткових границь, верхня та нижня границі

$A_{\text{ч}}=\{0,\frac{1}{2}\},\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\frac{1}{2},\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=0.$

2) З нерівності Коші між середніми арифметичним та геометричним випливає, що

$$\forall x\in\mathbf{R}\ :\ 2|x|\le 1+x^2,$$

де знак рівності має місце при $|x|=1$, тобто при $x=\pm1$. Тому

$$\forall z\in A\ :\ -1\le z\le 1,$$

причому $\{-1,\,1\}\subset A$. Звідси $\inf A=-1,\quad \sup A=1.$

3. 1) Безпосереднє використання теореми про границю дробу неможливе, оскільки чисельник та знаменник одночасно розбігаються до $+\infty$. Розділимо чисельник і знаменник дробу на n^{13} та використаємо теорему про арифметичні дії. Враховуючи співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^{13}}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{13}}=0,\ \text{ для } \alpha>0\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)^{10}+\sin n+\ln n+7}{(n-1)^{13}+\sqrt{n}+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^{-1})^{10}+n^{-13}\sin n+n^{-13}\ln n+7n^{-13}}{(1-n^{-1})^{13}+n^{-25/2}+n^{-13}}=$$

$$= \frac{1+0+0+0}{1+0+0} = 1.$$

2) При $|a| < 2,\ a \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + 2^n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n}{1} = \infty.$$

При $a = -2$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 2^n}{2^n}$ не існує, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{2n} + 2^{2n}}{2^{2n}} \to 2,\ n \to \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{2n-1} + 2^{2n-1}}{2^{2n-1}} \to 0,\ n \to \infty.$$

При $a = 2$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 2^n}{2^n} = 2$. При $|a| > 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + 2^n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n\right) = 1.$$

4. Доведемо обмеженість цієї послідовності деяким числом $C > 0$ зверху (обмеженість знизу нулем очевидна). Використаємо метод математичної індукції.

База: $a_1 \leq C$ – вірно при $C \geq \frac{1}{4}$.

Крок: якщо $a_n \leq C$, то $a_{n+1} = \sqrt{a_n} \leq \sqrt{C} \leq C$, остання нерівність вірна при $C \geq 1$.

Отже, послідовність обмежена зверху будь-яким числом $C \geq 1$.

Доведемо монотонність. Розглянемо деяку нестрогу нерівність між сусідніми членами послідовності, наприклад: $a_{n+1} \leq a_n$. Вона еквівалентна такій: $\sqrt{a_n} \leq a_n$. Розв'язуючи цю нерівність, отримаємо $a_n \in [1, +\infty)$. Але вище доведено, що $a_n \leq 1,\ n \geq 1$. Тому $a_{n+1} \geq a_n,\ n \geq 1$, тобто послідовність монотонно неспадна.

З монотонності і обмеженості випливає, що послідовність має деяку границю $a \in \mathbf{R}$.

Перейшовши до границі у рівності $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, отримаємо $a = \sqrt{a}$, тобто $a = 0$ або $a = 1$. Але $a_1 > 0$ і послідовність неспадна. Тому $a = 1$ – шукана границя.

ЗАНЯТТЯ 18
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ГРАНИЦЯМИ

Контрольні запитання

1. *Означення граничної точки числової множини.*
2. *Означення границі функції в точці за Коші.*
3. *Означення границі функції в точці за Гейне.*
4. *Теорема про рівносильність означень границі функції в точці за Коші і за Гейне.*

А18

1. За означенням Коші границі функції в точці довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1;$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2)=1.$

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю :

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\delta(\varepsilon)$				

2. За означенням Коші границі функції в точці довести, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

Заповнити наступну таблицю:

C	10	100	1000	10000
$\delta(C)$				

3. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0;\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

Довести, що границя функції f у точці 0 не існує.

4. Для $\alpha>0,\ b\in\mathbf{R}$ довести, що:

1) $|x|^\alpha\to 0,\ x\to 0;$ 3) $|x-b|^\alpha\to 0,\ x\to b;$

2) $x^{-\alpha}\to 0,\ x\to+\infty.$

5. Нехай $f(x)=\mathrm{arctg}(x^2),\ x\geq 0.$ Знайти $\inf f([-\sqrt[4]{3},1)),\ \sup f([-\sqrt[4]{3},1)).$

6. Нехай $n,m\in\mathbf{N};\quad a_i\in\mathbf{R},\ 0\leq i\leq n;\quad b_j\in\mathbf{R},\ 0\leq j\leq m;$ $a_0b_0\neq 0.$ Довести, що:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n=m,\\ 0, & \text{якщо } n<m.\end{cases}$$

7. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

8. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^2-4x+4)^{10}}$.

9. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

Д1. 1) Чи можна в означенні Гейне границі функції в точці замінити слова "довільна послідовність" на слова "довільна монотонна послідовність", не змінивши його змісту?

2) Нехай $\delta>0,\ x_0\in\mathbf{R},\ f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbf{R}$ і для довільної послідовності $x_n\to x_0,\ n\to\infty$, послідовність $\{f(x_n)\ :\ n\geq 1\}$ збіжна. Довести, що існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

3) Нехай $\delta>0,\ x_0\in\mathbf{R},\ f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbf{R}$ і для довільної монотонної послідовності $x_n\to x_0,\ n\to\infty$, послідовність $\{f(x_n):\ n\geq 1\}$ збіжна. Чи обов'язково існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

Д2. Функція $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ визначена так: $f(x)=q,$ якщо $x\in\mathbf{Q}$, $x=\frac{p}{q}$, де $p,\ q$ – взаємно прості числа і $f(x)=0$, якщо x – ірраціональне число. Довести, що функція f необмежена у довільному околі довільної точки $x_0\in\mathbf{R}$.

Д3. Нехай функція $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ обмежена на кожному відрізку $[a,b]$. Покладемо:

$$m(x)=\inf\{f(t)\mid a\leq t\leq x\},\quad M(x)=\sup\{f(t)\mid a\leq t\leq x\}.$$

Побудувати графіки функцій $y=m(x),\ y=M(x),\ x\geq 0$, якщо:

1) $f(x)=\sin x,\ x\geq 0$; 2) $f(x)=\cos x,\ x\geq 0$.

Д4. Дослідити поведінку коренів $x_1,\ x_2$ квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ при $a\to 0$, де $b,\ c$ – сталі, $b\neq 0$.

Б18

1. Нехай $f(x)=\dfrac{x}{1+x},\ x\geq 0$. Знайти $\inf f([0,+\infty)),\ \sup f([0,+\infty))$.

2. Знайти $\inf\{\sin x\mid x>0\},\ \sup\{\sin x\mid x>0\}$.

3. Сформулювати означення Коші границі функції у точці для таких границь ($a \in \mathbf{R},\ p \in \mathbf{R}$):

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = p$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = p$;
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = p$;
4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;
5) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;
6) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$;
7) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
8) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;
9) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;
10) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;
11) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
12) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$;
14) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
15) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$C(\varepsilon)$				

5. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\ (a > 1)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0\ \ (a > 1)$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to0} x \sin\frac{1}{x}$.

7. Довести, що не існують границі $\lim\limits_{x\to a} \sin x,\ \lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x$, де $a = -\infty,\ \infty,\ +\infty$.

8. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 1}{10x^5 - x^4 + 3}$;
2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 3x^2 - 1}$;
3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1}$;
4) $\lim\limits_{x\to0} (x^2 - x) \exp\left(-x^{-2}\right)$;
5) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}$;
6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}$;
7) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$;
8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x + 2\operatorname{ctg} x}{(\pi - x)\sin\frac{x}{2}}$;
9) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}$;
10) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$;

13) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}}$;

15) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

16) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{12}-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^5-(1-3x^2)^6}{3x^2-x^3}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$;

20) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{3-\sqrt[3]{x}}+1\right)$;

21) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x}-2\right)$;

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{4x^2-1}\right)$;

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5-3x^4+7x-1}{3x^5+2x^3-3}$;

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2+3x-1}$;

25) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{3x^4-7x+1}$;

26) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^{20}-(x+\sqrt{x^2+1})^{20}}{x^{20}}$;

28) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}$;

29) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

9. Для натуральних чисел m, n знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

ЗАНЯТТЯ 19
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. *Теорема про границю суми, різниці, добутку та частки функцій.*
2. *Таблиця основних границь.*

А19

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ де $m,n\in\mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

2. Довести рівності:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0,\ x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin x}$.

Д1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, де $m,n\in\mathbf{N}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

Д2. Знайти сталі a_1, a_2, b_1, b_2 з наступних умов:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

Б19

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

6) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, де $n\in\mathbf{N}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, де $m,n\in\mathbf{N}$;

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2 - 1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \cos 2x}$;

12) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$;

13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$;

15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 + 3x)}{\arcsin 2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} + 2^{-(x-2)^{-2}}\right)$;

ЗАНЯТТЯ 20
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. *Теорема про границю суми, різниці, добутку та частки функцій.*
2. *Таблиця основних границь.*

А20

1. Знайти границі :

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\ln(1+x)}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, де $a>0$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}$, де $\varepsilon>0$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x\geq 0$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n},\ x\geq 0$;

3) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2^n+x^n\right)}{n},\ x\geq 0$.

Д1. Знайти границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)(x^2-5x+8)-(x-2)(x-3)}{(x^2-1)x(x+2)-24}.$$

Д2. Нехай для функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x\to\ x_0}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)=0.$$

Знайти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Д3. Нехай $f(x)\to 0,\ x\to 0$. Довести, що $f(x)+f(2x)\to 0,\ x\to 0$. Навести приклад, який показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується.

Б20

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{2x-1}\right)^{x^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg}2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

11) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$;

20) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x}$;

21) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty} \lg \dfrac{100+x^2}{1+100x^2}$;

24) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$;

25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\lg(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$, де $x>0$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$,

де $a,\ b,\ c\in(0,+\infty)$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\ x\neq 0$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$;

3) $y=\lim\limits_{n\to\infty} (x-1)\ \mathrm{arctg}\, x^n$.

ЗАНЯТТЯ 21
ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ. ВІДНОШЕННЯ "O", "o" ТА ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означеня односторонніх границь.*
2. *Означення відношення "O".*
3. *Означення відношення "o".*
4. *Означення відношення еквівалентності.*
5. *Означення головної частини функції відносно шкали порівняння.*
6. *Означення порядку одної функції відносно іншої.*

A21

1. Знайти односторонні границі функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|},\ x \neq 0,$ при $x \to 0.$

2. Чи має функція $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$, односторонні границі при $x \to 0$?

3. Довести наступні твердження:

1) $x \sin\frac{1}{x} = O(|x|),\ x \to 0;$
2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1),\ x \to 0;$
3) $\ln x = o\left(x^{-\varepsilon}\right),\ x \to 0, \varepsilon > 0;$
4) $\ln x = o(x^{\varepsilon}),\ x \to +\infty, \varepsilon > 0;$
5) $x^2 = o(e^x),\ x \to +\infty;$
6) $x \ln x = o(e^x),\ x \to +\infty;$
7) $x^{\ln x} = o(e^x),\ x \to +\infty;$
8) $x = o(x^2),\ x \to \infty;$
9) $\ln x \neq O\left(o(\ln x^2)\right),\ x \to +\infty;$

10) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x},\ x \to 0;$

11) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x},\ x \to +\infty;$

12) $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2,\ x \to +\infty.$

4. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\{x^{\alpha} \mid \alpha > 0\}$ при $x \to 0$, якщо:
1) $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5$; 2) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}.$

5. Визначити головну частину функції $f(x) = x^3 - 3x + 2$ відносно шкали порівняння $\{(x-1)^{\alpha} \mid \alpha > 0\}$ при $x \to 1$.

6. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\left\{x^{-\alpha} \mid \alpha > 0\right\}$ при $x \to +\infty$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4+1}$;   2) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

7. Знайти порядок відносно функції $\beta(x) = x$ при $x \to 0$ функції $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + x^4$.

8. Знайти порядок відносно функції $\beta(x) = \frac{1}{x-3}$ при $x \to 3$ функції $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sin \pi x}$.

Д1. Нехай $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ і $f(x) = o(g(x))$ при $x \to +\infty$. Довести, що $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$ при $x \to +\infty$.

Д2. Нехай $f(x) = o(g(x)),\ x \to 0$. Довести, що існує функція h така, що $f(x) = o(h(x)),\ x \to 0$ і $h(x) = o(g(x)),\ x \to 0$.

Д3. Чи існує функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) > 0$, $x \neq 0$, така, що $f(x) = o(x^n),\ x \to 0$ для кожного $n \in \mathbf{N}$?

Б21

1. Знайти односторонні границі наступних функцій при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \le 2, \\ -2x+1, & \text{якщо } x > 2, \quad x_0 = 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{|x-1|},\ x \neq 1, \quad x_0 = 1;$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x},\ x \neq 0, \quad x_0 = 0;$

4) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)^3},\ x \neq 3, \quad x_0 = 3;$

5) $f(x) = x + \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{2-x}}},\ x \neq 2, \quad x_0 = 2;$

6) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 1, \\ -2x, & \text{якщо } x \ge 1, \quad x_0 = 1; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \\ 0, & \text{якщо } x > 0, \quad x_0 = 0; \end{cases}$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}}, \quad x\neq 0, \quad x_0=0;$

9) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2-3x}, \quad x\neq 0, \quad x_0=0.$

2. Довести рівності:

1) $2x-x^2=O(x),\ x\to 0;$ 2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}}),\ x\to 0;$

3. Довести рівності:

1) $2x-x^2=O(x),\ x\to 0;$

2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}}),\ x\to 0;$

3) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\to+\infty;$

4) $x+x^2\sin x=O(x^2),\ x\to+\infty;$

5) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\ x\to\infty;$

6) $(1+x)^n=1+nx+o(x),\ x\to 0,$ де $n\in\mathbf{R}$;

7) $2x^3-3x^2+1=O(x^3),\ x\to+\infty;$

3. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\left\{x^{-\alpha}\mid \alpha\in\mathbf{R}\right\}$ при $x\to+\infty$, якщо:

1) $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x};$ 2) $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}.$

4. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\left\{(x-1)^{-\alpha}\mid \alpha>0\right\}$ при $x\to 1$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1};$

2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x};$

4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}.$

5. Знайти порядки відносно функції $\beta(x)=x$ при $x\to 0$ наступних функцій:

1) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x};$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}};$

3) $f(x)=x+\sqrt[3]{\sin x};$

4) $f(x)=\operatorname{tg} x-\sin x;$

5) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}};$

6) $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{\sin x}{2}\right);$

7) $f(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x};$

8) $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}.$

6. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = x$ при $x \to +\infty$ наступних функцій:

1) $f(x) = x^3 + 2x - 3;$
2) $f(x) = \dfrac{3x^3}{1 - 2x + x^2};$
3) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - \sqrt{x}} + \sqrt{x};$
4) $f(x) = \ln(2 + e^{3x^2});$
5) $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x}}.$

7. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = x - 1$ при $x \to 1$ наступних функцій:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 3;$
2) $f(x) = \ln(x^2 + x - 1);$
3) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}};$
4) $f(x) = x^x - 1.$

8. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$ наступних функцій:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 1};$
2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{1 - x^2}};$
3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}};$
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}.$

ЗАНЯТТЯ 22
НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

Контрольні запитання

1. *Означення функції, неперервної в точці.*
2. *Теорема про арифметичні дії над неперервними функціями.*
3. *Теорема про суперпозицію неперервних функцій.*
4. *Неперервність основних елементарних функцій.*
5. *Означення точки розриву та класифікація точок розриву.*

А22

1. Нехай $f(x) = x^2,\ x \in \mathbf{R}$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$.

2. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функції

$$f(x) = \sin^3 2x + e^{3x}(x^2 - x - 5), \quad x \in \mathbf{R}.$$

3. Дослідити неперервність та побудувати графіки наступних функцій ($a \in \mathbf{R}$):

1) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & \text{якщо } x \neq 0, \\ a, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$

5. Визначити точки розриву функцій та дослідити характер розривів, якщо:

1) $y = \frac{x+1}{x^3+1}$; 2) $y = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

6. Дослідити неперервність наступних функцій та дослідити характер розривів, якщо вони є:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ 1, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$

7. Наступні функції визначити в точці 0 так, щоб вони були неперервними у цій точці (довизначити за неперервністю в точці 0):

1) $y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

Д1. Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох функцій, одна з яких неперервна в точці x_0, а друга розривна в точці x_0 ? Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох розривних в точці x_0 функцій? Ті ж питання для добутку замість суми.

Д2. Функція
$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in\mathbf{Q},\\ 0, & \text{якщо } x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$$
називається функцією Діріхле. Довести, що в кожній точці $x_0\in\mathbf{R}$ ця функція має розрив другого роду.

Д3. Дослідити неперервність наступної функції:
$$f(x)=\begin{cases}x(x-2), & \text{якщо } x\in\mathbf{Q},\\ 0, & \text{якщо } x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Б22

1. За означенням Коші (у термінах $\varepsilon-\delta$) довести неперервність наступних функцій:

1) $y=\dfrac{x+3}{2-3x}$ у точці $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $y=\sqrt{x}$ у точці $x_0>0$.

2. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функцій

1) $y=2^{\frac{1}{1+x^2}},\ x\in\mathbf{R}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{x}{2}\right),\ x\in\mathbf{R}$.

3. Дослідити неперервність, неперервність справа і зліва, характер точок розриву і побудувати графіки наступних функцій:

1) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; 2) $y=\begin{cases}\frac{x^3}{x-1}, & \text{якщо } x\neq 1,\\ 4, & \text{якщо } x=1.\end{cases}$

4. Знайти точки розриву та визначити характер розривів таких функцій:

1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2}, & x\in[0,1),\\ x^2+1, & x\geq 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1,\\ x^3, & x>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 0,\\ 1-x, & 0<x\leq 1,\\ \frac{1}{1-x}, & x>1;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \operatorname{tg}x+1, & x>0.\end{cases}$

5. Довизначити функцію f за неперервністю в точці 0:

1) $f(x)=\frac{\ln(1-3x)}{x}$; 5) $f(x)=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$;

2) $f(x)=\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}$; 6) $f(x)=\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;

3) $f(x)=\frac{2^{3x}-1}{3x}$; 7) $f(x)=x^x$;

4) $f(x)=\frac{\arcsin x}{2\operatorname{tg}x}$; 8) $f(x)=x\ln^2 x$.

ЗАНЯТТЯ 23
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ. РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Контрольні запитання

1. *Властивості неперервних на відрізку функцій.*
2. *Означення рівномірно неперервної функції.*
3. *Теорема Кантора.*

А23

1. Нехай функція $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:
1) $f \in C((a,b))$; 2) $\forall\, x \in (a,b)\ :\ f(x) \neq 0$.
Довести, що функція f зберігає знак на інтервалі (a,b).

2. Розв'язати нерівність
$$(2x-1)(x-2)^3(x+1)(x+2)^2 < 0$$
методом інтервалів та обгрунтувати цей метод.

3. Довести, що многочлен $P(x) = x^5 - 3x + 1,\ x \in \mathbf{R}$, має корінь на інтервалі $(1,2)$.

4. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції до функцій:
1) $f(x) = \cos x,\ x \in [0,\pi]$; 3) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \geq 1$.
2) $f(x) = x^2 - 2x,\ x \leq 1$;

5. Нехай $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 > 0$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 > 0$. Як змінюється $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ зі зменшенням ε? зі зменшенням додатного x_0? Чи є функція f рівномірно неперервною на множині $(0,1)$?

6. Довести, що функція $f(x) = 5x - 3,\ x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

7. Довести, що сума двох рівномірно неперервних на множині A функцій є рівномірно неперервною на цій множині функцією.

8. В термінах $(\varepsilon - \delta)$ сформулювати, що функція $f : A \to \mathbf{R}$ не є рівномірно неперервною на множині $\mathbf{R}$. Довести, що функція f неперервна на множині A, але не рівномірно неперервна на цій множині, якщо:
1) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in A = (0,1)$; 3) $f(x) = x^2,\ x \in A = \mathbf{R}$;
2) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x},\ x \in A = (0,1)$; 4) $f(x) = \sin x^2,\ x \in A = \mathbf{R}$.

9. Застосувати теорему Кантора для доведення рівномірної неперервності на множині A наступних функцій:
1) $f(x) = \frac{x}{4-x^2},\quad A = [-1,1]$; 2) $f(x) = \frac{\sin x}{x},\quad A = (0,\pi)$.

Д1. Довести, що довільне алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Д2. Довести, що неперервна на $\mathbf{R}$ періодична функція приймає найбільше і найменше значення на $\mathbf{R}$.

Д3. Знайти всі неперервні на $\mathbf{R}$ функції, які задовольняють співвідношенню
$$\forall x,\ y \in \mathbf{R}:\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Це співвідношення називають *функціональним рівнянням Коші*.

Д4. Довести, що функція $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$, рівномірно неперервна на $[0, +\infty)$.

Д5. Нехай функція $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:
1) $f \in C([a, +\infty))$;
2) існує $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = p \in \mathbf{R}$.

Довести, що функція f рівномірно неперервна на $[a, +\infty)$.

Б23

1. Довести, що наступні рівняння мають розв'язки на вказаних інтервалах:
1) $x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0,\ x \in (0, 2)$;
2) $8^x - 2^x - 16 = 0,\ x \in (0, 2)$;
3) $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Знайти обернену функцію до розривної в точці 0 функції $y = (1 + x^2)\operatorname{sign} x,\ x \in \mathbf{R}$, і довести, що обернена функція неперервна на множині визначення.

3. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції для функцій:
1) $y = \frac{2x}{1+x^2},\ x \leq -1$;
2) $y = \frac{2x}{1+x^2},\ -1 \leq x \leq 1$;
3) $y = \frac{2x}{1+x^2},\ x \geq 1$;
4) $y = \operatorname{ctg} x,\ \ x \in (0, \pi)$.

4. Довести, що многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x,\ \ x \in \mathbf{R}$, набуває найбільшого і найменшого значення на інтервалі $(-1, 1)$.

5. Довести, що функція $f(x) = 2\cos(3x + 5),\ x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

6. Довести рівномірну неперервність на множині A наступних функцій:
1) $y = x^2,\ A = (-1, 1)$;
2) $y = \sin x^2,\ A = (-2, 3)$;
3) $y = \sqrt{x},\ A = [1, +\infty)$.

7. Довести, що функція $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, не рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

8. Довести, що добуток скінченного числа рівномірно неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій є рівномірно неперервною на $[a, b]$ функцією.

9. Довести, що функція $f(x) = \frac{|\sin x|}{x},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, рівномірно неперервна на кожному з інтервалів $(-1, 0)$ та $(0, 1)$, але не рівномірно неперервна на об'єднанні цих інтервалів.

ЗАНЯТТЯ 24
ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Контрольні запитання

1. *Означення похідної функції в точці.*
2. *Таблиця похідних.*
3. *Теореми про похідну від суми, різниці, добутку та частки функцій.*
4. *Теорема про похідну суперпозиції функцій.*

A24

1. За означенням похідної знайти похідну функції f в точці x_0, якщо
1) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R},\ x_0 = 0;$ 2) $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1.$

2. Довести, що функція $f(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.

3. За означенням похідної знайти похідну функції f, якщо:
1) $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0;$ 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbf{R}.$

4. За допомогою таблиці похідних та правил знаходження похідних знайти похідні наступних функцій:

1) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20};$
2) $y = \dfrac{2x}{1-x^2};$
3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$
4) $y = \cos 2x - 2\sin x;$
5) $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x;$
6) $y = e^x(x^2 - 2x + 2);$
7) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x};$
8) $y = \ln(\ln(\ln x));$
9) $y = \frac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1};$
10) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2};$
11) $y = \arccos\dfrac{1}{x};$
12) $y = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x));$
13) $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x};$
14) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x};$
15) $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x;$

16) $y = \dfrac{e^x \cos x}{\sin x^2}$;

17) $y = \cos^3 x^3 - e^{x^2} \operatorname{tg} x$;

18) $y = \exp(\operatorname{arctg} \sqrt{x+4})^2$;

19) $y = \sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

5. Знайти $f'(1)$, якщо $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

Д1. Нехай функція f має похідну в точці x_0 . Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0 + \tfrac{1}{n}\right) - f(x_0)\right) = f'(x_0).$$

Навести приклад, коли ця границя існує, але функція не має похідної в точці x_0.

Д2. Знайти точки, в яких функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}, \end{cases}$$

має похідну.

Д3. Для яких значень параметра α функція

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має похідну в точці $x_0 = 0$?

Д4. Нехай $f \in C^1([a,b]),\ x_0 \in (a,b)$. Довести, що для довільних послідовностей $\{x_n\ :\ n \geq 1\}$ і $\{z_n\ :\ n \geq 1\}$ таких, що $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, $z_n \to x_0,\ n \to \infty$, вірно, що

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \to f'(x_0),\ x \to x_0.$$

Чи можна відмовитися від умови неперервності похідної?

Б24

1. За означенням похідної знайти похідну функції f у точці x_0, якщо

1) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1$.

2. Довести, що функція $f(x) = (1+|x|)^2, \quad x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.

3. За означенням похідної знайти похідну функції f, якщо:

1) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

4. Нехай $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Знайти $f'(1),\ f'(2),\ f'(3)$.

5. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$;

2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$;

4) $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$;

5) $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$;

6) $y = e^x(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2})$;

7) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$;

8) $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$;

9) $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

11) $y = \sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

12) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

13) $y = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;

14) $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$;

15) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

16) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x$;

17) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$;

18) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

19) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$;

20) $y = \arcsin(\sin x)$;

21) $y = \arccos(\cos^2 x)$;

22) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

23) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

24) $y = \operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

ЗАНЯТТЯ 25
ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Теорема про похідну суперпозиції функцій.

A25

1. Знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$;

2) $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$;

3) $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Нехай $f : A \to (0, +\infty)$ має похідну на множині A. Похідна від логарифма функції f називається логарифмічною похідною функції f:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Знайти логарифмічну похідну функції

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}.$$

3. Нехай функції $u : A \to (0, +\infty)$, $v : A \to \mathbf{R}$ мають похідні в точці x_0. Довести, що функція $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $x \in \mathbf{R}$, має похідну в точці x_0 та знайти цю похідну.

4. Знайти похідні:

1) $y = x^{\sin x}$;

2) $y = x + x^x + x^{x^x}$;

3) $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$;

4) $y = \log_x e$.

5. Отримати формули для сум:

1) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

2) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

6. Нехай парна функція має похідну на множині визначення. Довести, що ця похідна є непарною функцією. Аналогічно, довести, що похідна непарної функції є функція парна.

Д1. Функція f має похідну в точці a, причому $f(a) > 0$. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$.

Д2. Обчислити наступні суми:

1) $x+3x^3+5x^5+\dots+(2n+1)x^{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k$.

Б25

1. За допомогою таблиці похідних та правил їх знаходження знайти похідні наступних функцій:

1) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$;

2) $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$;

3) $y=e^{m\ \arcsin x}(\cos(m\ \arcsin x)+\sin(m\ \arcsin x))$;

4) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}$;

5) $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^a}$;

6) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

7) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$;

8) $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$;

9) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$;

10) $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\ \operatorname{arcctg} a^{-x}$.

2. Знайти логарифмічну похідну функції y, якщо:

1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 2) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

3. Нехай періодична функція має похідну на $\mathbf{R}$. Довести, що ця похідна також функція періодична з тим самим періодом.

ЗАНЯТТЯ 26
ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ). ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Контрольне запитання

1. *Формула для обчислення похідної оберненої функції.*
2. *Формула для обчислення похідної функції, заданої параметрично.*
3. *Обчислення похідних функцій, заданих неявно.*
4. *Геометричний зміст похідної.*

А26

1. За допомогою теореми про похідну оберненої функції, знайти похідну функції, оберненої до функції $g(y), y \in A$:
1) $g(y) = y^3 + 3y,\ y \in \mathbf{R}$; 3) $g(y) = y + e^y,\ y \in \mathbf{R}$;
2) $g(y) = y + \ln y,\ y > 0$.

2. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:
1) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$; 2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

3. Функція $y = y(x),\ x \in A$ задана у неявному вигляді співвідношенням

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Знайти похідну y'. Обчислити y', якщо $x = 2$ і $y = 4$; якщо $x = 2$ і $y = 0$.

4. Записати формули переходу від полярної системи координат (r, φ) до декартової системи координат (x, y), якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а напрямок полярної вісі з напрямком вісі абсцис. Знайти y'_x, якщо $r = a\varphi$ (спіраль Архімеда).

5. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - x^4$, в точці $x = 2$.

6. Під яким кутом графік функції $y = \ln x,\ x > 0$, перетинає вісь абсцис?

7. При яких значеннях незалежної змінної дотичні до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ паралельні?

8. На параболі $y = x^2$ вибрано дві точки з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Через ці точки проведена січна. У якій точці на параболі дотична до неї паралельна проведеній січній?

Д1. Довести, що сімейства гіпербол $x^2 - y^2 = a,\ a > 0$ і $xy = b$, $b > 0$ утворюють ортогональну сітку, тобто криві цих сімейств перетинаються під прямими кутами.

Д2. Довести, що дотична до логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$, де $a,\ m$ – фіксовані, утворює сталий кут з радіусом-вектором точки дотику.

Д3. Нехай $a > 0$. Графік функції $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a},\ x \in \mathbf{R}$, називається *ланцюговою лінією*. Записати рівняння нормалі до графіка цієї функції у точці $M(x_0, y_0)$. Знайти довжину відрізка MK, де K – точка перетину цієї нормалі з віссю абсцис.

Б26

1. Нехай $0 < \varepsilon < 1$. Довести, що функція $g(y) = y - \varepsilon\sin y, \quad y \in \mathbf{R}$, має обернену функцію. Знайти похідну оберненої функції.

2. Вказати інтервали, на яких наступні функції мають обернені функції. Побудувати графіки обернених функцій і знайти їх похідні, якщо:

1) $y = 2x^2 - x^4$; 2) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; 3) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

3. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $x = \sin^2 t, \ \ y = \cos^2 t, \ t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
2) $x = a\cos t, \ \ y = a\sin t, \ t \in (0, \pi)$;
3) $x = a(t - \sin t), \ \ y = a(1 - \cos t), \ t \in \mathbf{R}$.

4. Знайти похідну $y'(x)$ наступних функцій, заданих у неявному вигляді:

1) $y^2 = 2px$ (парабола);
2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (еліпс);
3) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ (логарифмічна спіраль).

5. Нехай (r, φ) - полярні координати, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Знайти похідну $y'(x)$, якщо:

1) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардіоїда);
2) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмічна спіраль).

6. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \sin x - \cos x$, в точці $x = \pi$.

7. Під якими кутами перетинаються графіки наступних функцій:

1) $y = \sin x$ і $y = \cos x$; 2) $y = 1/x$ і $y = \sqrt{x}$?

8. При яких значеннях незалежної змінної дотичні до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ перпендикулярні?

ЗАНЯТТЯ 27
ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Контрольні запитання

1. *Означення диференційовності функції в точці.*
2. *Означення диференціалу функції в точці.*
3. *Геометричний зміст диференціалу.*
4. *Критерій диференційовності функції в точці.*

A27

1. Знайти диференціали:

1) $d\,(\sin x - x\cos x)$; 2) $\dfrac{d(4^x - 2^x - 1)}{d(2^x)}$.

2. Записати повний приріст та диференціал функції $f(x) = x^3,\ x \in \mathbf{R}$, у точці $x_0 = 1$. Обчислити та порівняти їх значення при таких значеннях приросту аргумента: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0,1$; 3) $\Delta x = 0,01$.

3. Замінити повний приріст функції диференціалом і знайти наближене значення $\operatorname{arctg} 1,01$. Порівняти з точним значенням $0,79037...$ $(\pi \approx 3,1416)$.

4. Знайти наближене значення $\sqrt{2}\cos 46^o$. Порівняти з точним значенням $0,982395...$ $(\pi \approx 3,1416)$.

5. Довести, що наступні функції недиференційовні:

1) $f(x) = |x-1|$ у точці $x = 1$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ у точці $x = 1$.

Чи існують однобічні похідні в точках недиференційовності?

6. Знайти похідні, побудувати графіки наступних функцій та їх похідних:

1) $y = |x|$; 2) $y = x|x|$; 3) $y = \ln|x|$.

7. Довести, що функція

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має похідну на $\mathbf{R}$. Дослідити неперервність цієї похідної.

8. Навести приклад неперервної на $\mathbf{R}$ функції, яка не має похідної в заданих точках $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$.

Д1. Дослідити диференційовність функції
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ -x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}. \end{cases}$$
Д2. Довести, що функція
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{якщо } \dfrac{1}{n+1} \le |x| < \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$
недиференційовна у точці 0.

Д3. Знайти диференціал функції $y = y(x)$, заданої у полярній системі координат рівнянням $r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 < \varphi < \pi$, в точці $(0, a)$.

Д3. Для яких значень параметра $n \in \mathbf{Z}$ функція
$$y = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$
1) неперервна на $\mathbf{R}$; 2) має неперервну похідну на $\mathbf{R}$?

Д4. Чи можна твердити, що сума функцій f та g не має похідної у точці x_0, якщо:

1) функція f має похідну у точці x_0, а функція g не має похідної у цій точці?
2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0?

Д5. Чи можна твердити, що добуток функцій f та g не має похідної у точці x_0, якщо:

1) функція f має похідну у точці x_0, а функція g не має похідної у цій точці?
2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0?

Розглянути приклади:
1) $f(x) = x,\ \ g(x) = |x|$;
2) $f(x) = |x|,\ g(x) = |x|$, де $x_0 = 0$.

Б27

1. Знайти:

1) $\dfrac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}$; 2) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; 3) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$.

2. Нехай формула $x = 5t^2$, де час t вимірюється у секундах, а шлях x у метрах, задає рівняння руху. Для моменту часу $t = 2$ сек. визначити приріст шляху Δx і диференціал шляху dx, якщо:

1) $\Delta t = 1$ сек.; 2) $\Delta t = 0,1$ сек.; 3) $\Delta t = 0,01$ сек.

3. Знайти наближені значення

1) $\sin 29^\circ$; 2) $\cos 151^\circ$; 3) $\lg 11$

за допомогою заміни приросту функції диференціалом. Порівняти з точними значеннями.

4. Знайти похідні і побудувати графіки функцій та їх похідних:

1) $y = \begin{cases} (1-x)(2-x), & \text{якщо } 1 \le x \le 2, \\ -(2-x), & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$

5. Довести, що функція

$$y = \begin{cases} x^2 \left|\cos \dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

не має похідної в точках будь-якого околу точки 0, але існує похідна $f'(0)$.

6. Дослідити диференційовність наступних функцій:

1) $y = \sqrt[5]{(x-1)^2}$;

2) $y = |\ln x|$;

3) $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

7. Дослідити диференційовність наступних функцій. Чи існують односторонні похідні у точках недиференційовності?

1) $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$;

2) $y = \ln|x^2 - 4x + 3|$;

3) $y = \arccos \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

ЗАНЯТТЯ 28
ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Контрольні запитання

1. *Означення похідних вищих порядків.*
2. *Похідні порядку* $n,\ n \in \mathbf{N}$, *для функцій* $x^\alpha,\ x > 0\ (\alpha \in \mathbf{R})$; $a^x,\ x \in \mathbf{R}\ (a > 0)$; $\sin x,\ x \in \mathbf{R}$; $\cos x,\ x \in \mathbf{R}$; $\ln x,\ x > 0$.
3. *Формула Лейбніца для старших похідних від добутку.*
4. *Означення диференціалів вищих порядків.*

А28

1. Знайти другу похідну таких функцій:

1) $y = e^{-x}$; 2) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.

2. Нехай $u : A \to (0, +\infty)$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції. Знайти другу похідну функції $y = u^v$.

3. Знайти $d^2(\sqrt{1 + x^2})$.

5. Нехай $x(t) = 2t - t^2, \quad y(t) = 3t - t^3$. Знайти похідні

$$\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

6. Знайти похідну порядку 100 функції $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

7. Знайти похідну n-го порядку таких функцій :

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

8. Нехай $y = x^n e^x$, де n – натуральне число. Знайти $d^n y$.

9. Знайти $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - 2x)(1 + x)}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$.

Д1. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Д2. Нехай функція $f : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовна у точці $x_0 \in A$. Довести, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{(\Delta x)^2} = f''(x_0).$$

Навести приклад, коли границя у лівій частині цієї рівності існує, але функція f не має похідної другого порядку у точці x_0.

Б28

1. Знайти другу похідну таких функцій:

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $y = e^{-x^2}$;

4) $y = \operatorname{tg} x$;

5) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $y = x \ln x$.

2. Нехай $u : A \to \mathbf{R}$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції, $u(x)v(x) > 0,\ x \in A$. Знайти другу похідну функції $y = \ln \frac{u}{v}$.

3. Знайти $d^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

4. Знайти $d^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

5. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ наступних функцій, заданих параметрично:

1) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$;

2) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

6. Знайти похідну порядку n наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x},\ n = 8$;

2) $y = \dfrac{e^x}{x},\ n = 10$;

3) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x,\ n = 10$.

7. Знайти $d^{10}(x\cos 2x)$.

8. Знайти похідну n-го порядку таких функцій:

1) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$;

2) $y = \sin^2 x$;

3) $y = \cos ax \cos bx$;

4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

5) $y = \dfrac{e^x}{x}$;

6) $y = e^x \sin x$.

9. Нехай $y = \frac{\ln x}{x}$, n – натуральне число. Знайти $d^n y$.

10. Знайти $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 e^{ax}$;

2) $f(x) = e^{ax}\cos bx$.

11. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

нескінченно диференційовна у точці $x = 0$.

ЗАНЯТТЯ 29
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. За означенням границі функції в точці довести, що
$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0},\quad x_0\ge 0.$$
2. Обчислити:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$; 2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

3. Знайти точки розриву та визначити їх тип: $f(x)=\frac{\sin x}{x}+e^{1/(x-1)}$.

4. Обчислити похідну: $f(x)=\frac{x^2+\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt{2x}}-\ln\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)$.

5. Обчислити похідну порядку n: $f(x)=x^2\sin 4x$.

6. Обчислити похідну неявно заданої функції $y=y(x)$: $e^{xy}=x^2+y^2$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. Оскільки
$$\forall\{x_0,x\}\subset[0,+\infty)\;:\;|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|\le\sqrt{|x-x_0|},$$
то
$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\varepsilon^2\;\forall x\in[0,+\infty)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}:$$
$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|\le\sqrt{|x-x_0|}<\sqrt{\delta}=\varepsilon.$$
Таким чином, виконані умови означення Коші границі функції в точці.

2. 1) Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Усунемо цю невизначеність алгебраїчними перетвореннями та застосуємо теорему про арифметичні дії:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{4/5}+x^{3/5}+x^{2/5}+x^{1/5}+1)}{(x-1)(x^{2/3}+x^{1/3}+1)}=\frac{5}{3}.$$
2) Маємо невизначеність типу (1^{∞}). Зведемо задачу до застосування

співвідношення $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right)^{\frac{1\cdot x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$, то

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{\sin(1/x)}{1/x}+\tfrac{-2\sin^2(1/2x)}{4x\cdot(1/2x)^2}\right) = 1.$$

Остаточно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3. В усіх точках, крім $x=0$ та $x=1$ функція неперервна за теоремами про арифметичні дії та суперпозицію. Точка $x=0$ є усувним розривом 1 роду, бо $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1+1/e, f(0)$ не існує. Точка $x=1$ є розривом 2 роду, бо $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.

4. Користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання, отримаємо: $f'(x) = \frac{(2x+\frac{1}{1+(1-x)^2}\cdot(-1))\cdot\sqrt{2x}-(x^2+\mathrm{arctg}(1-x))\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}}{2x} - \frac{\cos 2x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot\cos 2x-\sin x\cdot(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x} = \frac{3x^2-\frac{2x}{1+(1-x)^2}-\mathrm{arctg}(1-x)}{2x\sqrt{2x}} - \mathrm{ctg}\, x - 2\,\mathrm{tg}\, 2x$.

5. Використовуючи формулу Лейбніца, отримаємо:
$f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(\sin 4x)^{(n-k)}$. Враховуючи, що $(x^2)^{(k)} = 0,\ k \ge 3$, отримаємо $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{2} C_n^k(x^2)^{(k)}(\sin 4x)^{(n-k)} = C_n^0 x^2(\sin 4x)^{(n)} + C_n^1(x^2)'(\sin 4x)^{(n-1)} + C_n^2(x^2)''(\sin 4x)^{(n-2)} = x^2(\sin 4x)^{(n)} + n2x(\sin 4x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}2(\sin 4x)^{(n-2)} = x^2 4^n \sin 4(x - \frac{\pi n}{2}) + 2nx4^{n-1}\sin 4(x-\frac{\pi(n-1)}{2}) + \frac{n(n-1)}{2}2\cdot 4^n \sin 4(x-\frac{\pi(n-2)}{2})$.

6. Диференціюємо цю рівність: $e^{xy}(y+xy') = 2x+2yy'$. Виражаючи звідси похідну, отримаємо: $y' = \frac{2x-ye^{xy}}{e^{xy}x-2y}$.

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ "МЕХАНІКА". І КУРС, І СЕМЕСТР

Лекцій – 60 годин
Практичних занять – 60 годин

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Перетворення виразів, що містять операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, логарифмування. Розв'язання алгебраїчних, ірраціональних, логарифмічних та показникових рівнянь, нерівностей, систем рівнянь. Перетворення тригонометричних виразів, розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей. Розв'язання рівнянь та нерівностей з параметром. Метод математичної індукції. Арифметична та геометрична прогресії. Властивості функцій: множина визначення, парність, непарність, періодичність. Графіки основних елементарних функцій. Елементарні перетворення графіків функцій. Побудова геометричних місць точок. Полярна система координат.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Логічні символи. Поняття множини. Операції над множинами. Правила де Моргана. Декартів добуток множин. Загальне поняття відображення. Образ, прообраз, графік. Сюр'єкція, ін'єкція, бієкція. Суперпозиція відображень. Обернене відображення.Рівнопотужні множини. Зліченні множини та їх властивості. Приклад незліченної множини. Означення дійсного числа, порівняння дійсних чисел. Числова пряма. Нерівність Коші-Буняковського. Нерівність Коші між середнім геометричним та середнім арифметичним.

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Означення границі числової послідовності. Приклади. Теорема про єдиність границі послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Теорема про три послідовності. Теорема про арифметичні дії над границями послідовностей. Теорема Тьопліца про регулярне перетворення послідовності. Теорема Штольца, приклади застосування. Монотонні послідовності. Теорема про збіжність монотонної обмеженої послідовності, приклади застосування. Лема про вкладені відрізки. Число e. Підпослідовності. Часткові границі. Теорема про характеризацію часткової границі. Теорема про існування монотонної підпослідовності.

Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Теорема про існування найбільшого і найменшого елемента у множині часткових границь. Верхня і нижня границі послідовності. Теорема про характеризацію верхньої та нижньої границь послідовності. Обмежені числові множини. Точні верхня і точна нижня межі. Теорема про існування точних меж. Фундаментальні послідовності та їх властивості. Критерій Коші.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Гранична точка множини. Теорема про характеризацію граничної точки. Означення Коші границі функції у точці. Приклади. Означення Гейне границі функції у точці. Еквівалентність означень Коші і Гейне границі функції у точці. Властивості границі функції у точці. Односторонні границі. Теореми про існування границі функції у точці. Відношення підпорядкованості "O" та його властивості, приклади. Відношення нехтування "o" та його властивості, приклади. Відношення еквівалентності та його властивості, приклади. Порядок однієї функції відносно іншої. Шкала порівняння, приклади. Головна частина. Єдиність головної частини. Асимптотичний розклад, приклад.
Неперервні функції. Неперервність справа і зліва. Класифікація точок розриву функції. Теорема про арифметичні дії над неперервними функціями, приклади. Елементарні властивості неперервних функцій. Теорема про існування і неперервність оберненої функції. Приклади застосування. Визначні границі. Перша та друга теореми Вейєрштрасса. Теорема про перетворення функції в нуль та теорема Коші про проміжне значення, приклад. Означення рівномірної неперервності та приклади. Теорема Кантора. Многочлени Бернштейна і теорема Вейєрштрасса про наближення многочленами неперервної на відрізку функції.

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Означення похідної, приклади. Фізична інтерпретація похідної. Геометрична інтерпретація похідної. Правила обчислення похідних. Похідна суперпозиції функцій. Похідна оберненої функції. Приклади обчислення похідних. Односторонні похідні. Означення диференційовності, диференціал. Геометрична інтерпретація диференціала. Диференційовність і похідна. Правила диференціювання. Інваріантність форми першого диференціала. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца. Диференціали вищих порядків.