КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів спеціальності "механіка"
механіко–математичного факультету

(II семестр першого курсу)

2016

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (спеціальність "механіка", 2 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Назаренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – Електронне видання. – 2016. – 75 с.

Рецензенти

А. С. Романюк, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою Радою
механіко–математичного факультету
08 жовтня 2018 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з математичного аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.

У другому семестрі, як правило, проводяться дві контрольні роботи, зразки умов та розв'язання (частково) яких наведено в тексті.

У посібнику також вміщено програму курсу "Математичний аналіз"для студентів спеціальності "механіка" I курс, II семестр".

При підборі задач використано такі збірники задач:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичні розробки:

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр першого курсу) // Упорядн. А.Я.Дороговцев, О.О.Курченко, М.О.Денисьєвський. – К.,1994,

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр першого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр першого курсу) // Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський, О.Н. Нестеренко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина II) / Упорядн. А. Я. Дороговцев, О. Г. Кукуш, М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

ЗАНЯТТЯ 1
ТЕОРЕМИ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА І КОШІ. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Контрольні запитання

1. *Теореми Ролля, Лагранжа та Коші.*
2. *Правила Лопіталя.*

А1

1. Довести нерівності:
1) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|,\ x,\ y \in \mathbf{R}$;
2) $|\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y| \le \frac{1}{10}|x-y|,\ x, y \in [3,4]$.

2. За допомогою теореми Ролля довести, що рівняння
$$x^4 - 4x - 1 = 0$$
не може мати більше двох дійсних коренів. Показати, що два дійсних кореня існують (можна застосувати теорему про нуль неперервної функції).
3. Знайти наступні границі. Визначити, в яких випадках варто застосувати правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\varepsilon} \ln x$ де $\varepsilon > 0$;
4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2 \ln(1+x^2))}{(2^x - 1)^4}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;
8) $\lim\limits_{n\to \infty} n^3 \left(\sin \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right)$;
9) $\lim\limits_{n\to \infty} n \left(\operatorname{arctg} n - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Д1. Нехай функція $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ має похідну у кожній точці (a,b), причому ця похідна обмежена на (a,b). Довести, що функція f рівномірно неперервна на (a,b).

Д2. Нехай для деякого натурального n функція $f \in \mathbf{C}^{(n-1)}([a_0, a_n])$, n раз диференційовна на інтервалі (a_0, a_n) і виконуються рівності
$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n), \text{де } a_0 < a_1 < \cdots < a_n.$$
Довести, що існує точка $c \in (a_0, a_n)$ така, що $f^{(n)}(c) = 0$.

Б1

1. Довести, що рівняння $x^6 - x - 1 = 0$ має рівно два дійсні корені.
2. Довести, що всі корені похідної многочлена
$$P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$
дійсні числа і вказати інтервали, на яких вони знаходяться.

3. Чи задовольняє функція
$$y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \le 0, \\ \sin \pi x, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \end{cases}$$
умови теореми Ролля на відрізку $[-1, 1]$?

4. Чи задовольняють наступні функції умови теореми Лагранжа на відрізку $[-1, 1]$: 1) $y = |x|$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2}$?

Дати геометричну інтерпретацію.

5. Довести нерівності:

1) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, де $0 < y < x,\ p > 1$;

2) $\forall\, a,\ b \in \mathbf{R}:\ |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a-b|$;

3) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, де $0 < b < a$.

6. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{100}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \ln(1-x)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$;

8) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\cos\dfrac{1}{n} - 1 + \dfrac{1}{2n^2}\right)$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{arcctg} 3n$.

ЗАНЯТТЯ 2
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Контрольні запитання

1. *Означення диференціалів вищих порядків.*
2. *Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано та Лагранжа.*
3. *Формула Тейлора-Маклорена для функцій* e^x, $\sin x$, $\cos x,\ x \in \mathbf{R};\ \ln(1+x),\ x > -1;\ (1+x)^\alpha,\ x > -1\ (\alpha \in \mathbf{R})$.

А2

1. Розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано наступні функції:

1) $f(x) = e^{2+x/2}, x_0 = 0;$
2) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}, x_0 = 1;$
3) $f(x) = (x-1)e^{2x}, x_0 = 0;$
4) $f(x) = \ln \dfrac{3+x}{5+x}, x_0 = 0;$
5) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+x-12}, x_0 = -1;$
6) $f(x) = \sqrt[3]{2+5x^2}, x_0 = 0;$
7) $f(x) = \cos^2 x, x_0 = 0;$
8) $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right), x_0 = 0.$

2. Записати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано з точністю до x^3 включно для функції $f(x) = \ln(\cos x)$.
3. Записати перші п'ять членів розкладу функції $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ за формулою Маклорена. Чому дорівнює $f^{(4)}(0)$?
4. Застосувати формулу Тейлора для обчислення наступних границь:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^2 - x\sin x};$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\cos x - 1 + \sin^2 x};$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x} - 1} - \dfrac{2}{x^2}\right);$
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x});$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{x + \sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

5. За допомогою формули Тейлора оцінити абсолютну похибку наближеної формули $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ |x| \le 1$.
6. Обчислити $\cos\frac{5\pi}{8}$ з точністю до 10^{-4}.
Д1. Нехай $f \in \mathbf{C}^2((-1,1)),\ f''(0) \neq 0$ і для кожного $x \in (-1,1)$ значення $\theta(x)$ визначається як одне з чисел θ, для яких

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x,$$
де θ належить інтервалу з кінцями 0 та x. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\theta(x)}{x}$.

Б2

1. Многочлен
$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$
розкласти за натуральними степенями двочлена $x + 1$.

2. Записати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано з точністю до x^3 включно для таких функцій:

1) $f(x) = \sin(\sin x)$;
2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - 2x}$.

3. Записати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано для таких функцій:

1) $f(x) = \log_3(2 + 5x^3)$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$;
3) $f(x) = \cos\left(2 + \dfrac{x}{2}\right)$;
4) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$;
5) $f(x) = x\sin^2 2x$;
6) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2 - 4}$.

4. Функцію розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом $o((x - x_0)^n)$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;
4) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x - 2}{5 - x}}$, $x_0 = 3$;
5) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 5}$, $x_0 = 1$.

5. Обчислити:

1) число e з точністю до 10^{-9};
2) $\sqrt{5}$ з точністю до 10^{-4}.

6. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{2\operatorname{ch} x - 2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ЗАНЯТТЯ 3
ДОСЛІДЖЕННЯ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЙ. ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ. ОПУКЛІСТЬ ФУНКЦІЇ

Контрольні запитання

1. *Означення точок локального екстремума функції.*
2. *Необхідна умова локального екстремуму.*
3. *Достатня умова локального екстремуму.*
4. *Дослідження монотонності функцій за допомогою похідної.*
5. *Означення опуклої функції.*
6. *Дослідженя опуклості функцій.*

А3

1. Дослідити монотонність та знайти точки локального екстремуму функції $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3$. Знайти найменше й найбільше значення цієї функції на відрізку $[0, 4]$.

2. Довести нерівності: а) $e^x > 1 + x, x \neq 0$; б) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, x > 0$.

3. Знайти проміжки монотонності та точки локальних екстремумів наступних функцій:

1) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;
4) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

4. Знайти найменше й найбільше значення функції $f(x) = (x-3)^3 e^{|x|}$ на відрізку $[-1, 4]$.

5. Дослідити опуклість і знайти точки перегину наступних функцій:

1) $y = x + \sin x$;
2) $y = e^{-x^2}$.

6. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – фіксовані дійсні числа.

7. Знайти найменше та найбільше значення на $\mathbf{R}$ функції

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

8. Для яких значень параметра a функція $f(x) = \sin x + ax$ зростає на $\mathbf{R}$?

Д1. Довести, що похідна функції

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

не зберігає знак ні праворуч, ні ліворуч точки 0, яка є точкою строгого локального мінімуму функції f.

Д2. Нехай a – додатне дійсне число. Довести, що для всіх додатних x
$$x^a \geq 1 + a \ln x.$$

Д3. Нехай f – парна, неперервно диференційовна на $\mathbf{R}$ функція, $f''(0) \neq 0$. Довести, що 0 – точка строгого локального екстремуму цієї функції.

Д4. Знайти найбільший член послідовності $\left\{ \dfrac{\sqrt{n}}{n+20} \ : \ n \geq 1 \right\}$.

Д5. Довести, що функція
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$
має зліченну кількість точок максимуму й мінімуму на відрізку $[0,1]$.

Б3

1. Довести, що функція $y = \operatorname{arctg} x - x$ спадає на $\mathbf{R}$.

2. Для яких значень параметра a функція $f(x) = x^3 - ax$ зростає на $\mathbf{R}$?

3. Знайти проміжки монотонності наступних функцій:

1) $f(x) = 2 + x - x^2$;
2) $f(x) = 3x - x^3$;
3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$;
4) $f(x) = x + \sin x$;
5) $f(x) = 2^{-x} x^2$;
6) $f(x) = x^n e^{-x}$.

4. Довести нерівності:

1) $\forall x \neq 0 \ : \ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$;
2) $\forall x \geq 0 \ : \ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$;
3) $\forall x > 0 \ : \ x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;
4) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ : \ \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{6}$.

5. Знайти проміжки монотонності, локальні екстремуми наступних функцій та побудувати їх графіки:

1) $y = x^2(x-4)$;
2) $y = \operatorname{ch} x$.

6. Чи існують найменше й найбільше значення функції $y = \frac{1}{x} + x^2$, $x \in (0,4]$?

7. Дослідити опуклість і знайти точки перегину наступних функцій:

1) $y = 3x^2 - x^3$;
2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;
3) $y = x + \sqrt[3]{x}$;
4) $y = \sqrt{1+x^2}$.

8. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного у півколо радіуса R.

9. Якими мають бути розміри скрині у формі паралелепіпеда з квадратною основою й об'ємом V, щоб площа її поверхні (без кришки) була мінімальною?

ЗАНЯТТЯ 4
ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Контрольне запитання

1. *Означення вертикальних, горизонтальних та похилих асимптот для графіка функції.*
2. *Схема побудови графіка функції.*

А4

1. Дослідити наступні функції та побудувати їх графіки:

1) $y = 3x - x^3$;
2) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$;
3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
4) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$;
5) $y = \ln(x^2 - 1)$;
6) $y = x + e^{-x}$;
7) $y = e^{-2x} \sin^2 x$;
8) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Б4

1. Побудувати графіки наступних раціональних функцій:

1) $y = x(x-1)^3$;
2) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$;
4) $y = 2x^2 - \dfrac{3}{x^3}$.

2. Побудувати графіки наступних ірраціональних функцій:

1) $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$;
2) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

3. Дослідити функції й побудувати їх графіки:

1) $y = \sin^2 x + \cos x$;
2) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;
3) $y = e^{x^2 - 2x}$;
4) $y = \frac{e^{-x}}{x+1}$;
5) $y = x + \frac{\ln x}{x}$;
6) $y = x\,(\ln x + 1)$;
7) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$;
8) $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$;
9) $y = x + \operatorname{arctg} x$;
10) $y = x^x$.

ЗАНЯТТЯ 5
ПОБУДОВА ГРАФІКІВ (ПРОДОВЖЕННЯ)

А5

1. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$;
2) $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$;
3) $y = \dfrac{3x + |\,x^2 - 4|}{|\,x - 2|}$;
4) $y = x + \sqrt{|\,1 - x^2|}$;
5) $y = \dfrac{2x}{1 - x^2} + \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$;
6) $y = x - 2 - 2\ln x$;
7) $y = \log_{|\,x|} 2$;
8) $y = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} + \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

Б5

1. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \dfrac{x}{2x - 1}$;
2) $y = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$;
3) $y = \dfrac{1}{x} - \ln x$;
4) $y = \dfrac{x}{|\,x - 2|} + \dfrac{x - 2}{|\,x|}$;
5) $y = 1 + \sin 2x - \cos 2x$;
6) $y = \arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}$.

ЗАНЯТТЯ 6
ПЕРВІСНА Й НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Контрольні запитання

1. *Означення первісної і невизначеного інтеграла.*
2. *Таблиця основних інтегралів.*
3. *Елементарні властивості невизначених інтегралів.*

А6

1. Для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $(1, \pi)$.
2. Нехай функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непарна і має первісну F на $\mathbf{R}$. Довести, що функція F – парна.
3. Знайти інтеграли:
1) $\int (x^2+1)^2 dx$;
2) $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) dx$;
3) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{\sqrt{x}} dx$;
4) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$;
5) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$;
6) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$;
7) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;
8) $\int (a \sin x + b \cos x)\, dx$.

4. Знайти інтеграли:
1) $\int |x| dx$;
2) $\int (|x+1| - |x-1|)\, dx$;
3) $\int e^{-|x|} dx$;
4) $\int \max(1, x^2) dx$.

Д1. Знайти $\int [x] |\sin \pi x| dx$.

Б6

1. Нехай функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ парна і має первісну F на $\mathbf{R}$. Довести, що функція $F - F(0)$ – непарна.
2. Знайти інтеграли:
1) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;
2) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$;
3) $\int \sqrt[3]{x \sqrt[5]{x\sqrt{x}}} dx$;
4) $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} dx$;
5) $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$;
6) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;
7) $(2^x + 3^x)^2\, dx$;
8) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$;
9) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

3. Знайти інтеграли:
1) $\int x|x| dx$;
2) $\int (x+|x|)^2\, dx$;
3) $\int \min(1, x^2) dx$;
4) $\int \sin |x| dx$.

ЗАНЯТТЯ 7
ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ТАБЛИЦІ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ОСНОВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

А7

1. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-2)^5}};$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})};$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x};$

6) $\displaystyle\int \cos^2 x dx;$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}};$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x};$

9) $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}};$

10) $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$

13) $\displaystyle\int x(1-x)^{10}dx;$

14) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^{100}}dx;$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}};$

16) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}};$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2};$

18) $\displaystyle\int \sin x\sin(x+a)dx;$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x};$

20) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8-2}.$

2. За допомогою виділення повних квадратів знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+6x+2};$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}.$

Д1. Знайти інтеграли: $1)\int \mathrm{ch}^2 x dx;\ 2)\int \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, 3x dx.$

Б7

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-7x}}$;

2) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

4) $\int \left(e^{-x}+e^{-2x}\right) dx$;

5) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

6) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$;

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$;

8) $\int x \exp(-x^2) dx$;

9) $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$;

10) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$;

11) $\int \operatorname{tg} x dx$;

12) $\int \sin^2 x dx$;

13) $\int \cos^4 x dx$;

14) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

15) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$;

16) $\int \frac{x^4}{(x^5+1)^4} dx$;

17) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$;

18) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$;

19) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+3)}$;

20) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$;

21) $\int \cos 2x \cos 3x dx$;

22) $\int \sin^3 x dx$;

23) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

24) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x dx$.

2. За допомогою виділення повних квадратів знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

2) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

ЗАНЯТТЯ 8
ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Теорема про представлення правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних дробів.*
2. *Метод невизначених коефіцієнтів.*
3. *Інтегрування елементарних раціональних дробів.*

A8

1. Шляхом представлення правильних дробів у вигляді суми елементарних знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

2) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$;

7) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+x}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$.

2. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Д1. Обчислити

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^{n+1}}dx,$$

де P – многочлен n-го степеня.

Д2. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

де n – натуральне число.

Б8

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)}$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$;

3) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^2+x-2}$;

5) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+1)}$.

2. За допомогою різних прийомів знайти наступні інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+3}dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^9dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}dx$.

ЗАНЯТТЯ 9
ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВКИ

Контрольне запитання

1. *Формула заміни змінної для невизначеного інтеграла.*

А9

1. За допомогою відповідних підстановок знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

2) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$;

3) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$;

4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

6) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

2. За допомогою тригонометричних або гіперболічних підстановок знайти наступні інтеграли (параметри додатні):

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

2) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$;

3) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx$.

3. Шляхом виділення повного квадрата квадратного тричлена знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$;

2) $\int \frac{dx}{x-a)(b-x)}$;

3) $\int \sqrt{-x^2+3x-2}dx$.

4. Обчислити невизначений інтеграл $\int \sin x\cos x dx$ трьома способами: 1) підстановкою $\sin x = t$; 2) підстановкою $\cos x = t$; 3) перетворенням підінтегрального виразу за допомогою формули $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Порівняти відповіді.

Д1. Знайти інтеграл $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

Д2. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ знайти:

1) шляхом виділення повного квадрата квадратного тричлена;

2) за допомогою підстановки $\sqrt{x^2+x+1} = 1+tx$.

Чи відрізняються отримані відповіді?

Б9

1. За допомогою вказаної підстановки знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \quad (x+1=t^2); \quad 2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \left(x=\frac{1}{t}\right).$$

2. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;

2) $\int \frac{e^x\sqrt{\arctan e^x}}{1+e^{2x}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\ln x \ln(\ln x)}$;

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$;

5) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

3. Знайти інтеграли:

1) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}dx$;

2) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$;

4) $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx$.

ЗАНЯТТЯ 10
ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольне запитання

1. *Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.*

А10

1. За допомогою інтегрування частинами знайти інтеграли:

1) $\int \ln x dx;$

2) $\int x^n \ln x dx, \quad n \neq -1;$

3) $\int x \sin x dx;$

4) $\int x^2 \arccos x dx;$

5) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$

6) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$

7) $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

8) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

2. Знайти інтеграли:

1) $\int (x^2 + x + 1) e^x dx;$

2) $\int (x^2 - x + 1) \sin x dx;$

3) $\int e^{ax} \sin bx dx;$

4) $\int e^{ax} \cos bx dx;$

5) $\int (\arcsin x)^2 dx;$

6) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x} dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

7) $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

Д1. Нехай функції $u : I \to \mathbf{R}$, $v : I \to \mathbf{R}$ мають неперервні на інтервалі похідні $n+1$-го порядку. Довести наступну формулу:

$$\int u v^{(n+1)} dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} - (-1)^n \int u^{(n+1)} v dx, \quad x \in I.$$

Цю формулу називають узагальненою формулою інтегрування частинами.

Д2. Нехай P – многочлен n-го степеня. Довести, що

$$\int P(x) e^{ax} dx = \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} \right) e^{ax} + C.$$

Б10

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

2) $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx;$

3) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx;$

4) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$

5) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$

6) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$

2. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$

2) $\int x^2 e^{-2x} dx;$

3) $\int x \cos x dx;$

4) $\int \arctan x dx;$

5) $\int x \arctan x dx;$

6) $\int x \arctan^2 x dx;$

7) $\int x \sin^2 x dx;$

8) $\int e^{\sqrt{x}} dx;$

9) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$

10) $\int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx;$

11) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$

ЗАНЯТТЯ 11
ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ
А11

1. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\frac{dx}{(x+1)^2};$ 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}};$ 4) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx.$

2. Знайти інтеграли від наступних квадратичних ірраціональностей:

1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx;$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

3. Застосовуючи різні методи, знайти такі інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}};$ 3) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}};$

4. За допомогою підстановок Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, якщо $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$,

знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}};$ 3) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$

5. Інтеграл від біномного диференціала

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

де m, n, p– раціональні числа, може бути зведений до інтегрування раціональних функцій лише в наступних трьох випадках (теорема Чебишева):

Випадок 1. Нехай p – ціле. Застосовуємо підстановку $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n.

Випадок 2. Нехай $\frac{m+1}{n}$ – ціле. Застосовуємо підстановку $a+bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Випадок 3. Нехай $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле. Застосовуємо підстановку $ax^{-n}+b = t^N$, де N – знаменник дробу p.

Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;

2) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}dx$.

Б11

1. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

3) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$;

7) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

8) $\displaystyle\int \frac{xdx}{1-3x^2-2x^4}$;

9) $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$;

10) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

ЗАНЯТТЯ 12
ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. *Інтегрування виразів* $\sin^m x \cos^n x,\ m, n \in \mathbf{Z}$.
2. *Інтегрування виразів* $R(\sin x, \cos x)$, *де* R *– раціональна функція. Універсальна тригонометрична підстановка.*

А12

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \cos^2 x dx$;
2) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;
3) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;
4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$;
5) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;
6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

2. Вивести рекурентну формулу для обчислення невизначеного інтеграла

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \geq 2.$$

За допомогою цієї формули обчислити інтеграл $\int \sin^4 x dx$.

3. Знайти інтеграли:

1) $\int \sin 5x \cos x dx$;
2) $\int \sin^2 2x \cos^2 3x dx$;
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\sin(a-b) \neq 0$;
4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$;
5) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$;
6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
7) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$.

Д1. Нехай q, r – раціональні числа. За допомогою підстановки $z = \sin^2 x$ звести інтеграл $\int \cos^q x \sin^r x dx$ до інтеграла від біномного диференціала. Для яких значень $q, r \in \mathbf{Q}$ цей інтеграл виражається через елементарні функції?

Д2. Довести, що

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C,$$

де A, B, C – сталі.

Вказівка. Покласти $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, де A та B – сталі.

Б12

1. Знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;

4) $\int \sin 3x \cos 2x dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;

7) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^3 x}{3\cos^2 x + \sin^4 x} \sin x dx$;

8) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$;

10) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$;

11) $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx$;

12) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$.

2. Вивести формули пониження для інтегралів:

1) $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}, n > 2$;

2) $K_n = \displaystyle\int \frac{dx}{cos^n x}, n > 2$.

Застосувати отримані формули для знаходження $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ і $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

ЗАНЯТТЯ 13
РІЗНІ ПРИЙОМИ ІНТЕГРУВАННЯ

А13

1. Знайти інтеграли:

1) $\int x^2 e^{2x} dx$;
2) $\int x^7 e^{-x^2} dx$;
3) $\int e^{ax} \cos^2 bx dx$;
4) $\int x^2 e^x \cos x dx$;
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{e^x}+\sqrt[3]{e^x}+\sqrt[6]{e^x}}$;
6) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx$;
7) $\displaystyle\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$;
8) $\int \ln^n x dx,\ n \in \mathbf{N}$;
9) $\displaystyle\int \frac{\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]}{(x+a)(x+b)} dx$;
10) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) dx$;
11) $\int x \arcsin(1-x) dx$;
12) $\displaystyle\int x \arccos\frac{1}{x} dx$;
13) $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$;
14) $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx$.

Д1. Нехай R – раціональна функція n змінних, $a_i \in \mathbf{Q},\ \ 1 \le i \le n$. Довести, що інтеграл

$$\int R(\exp(a_1 x), \exp(a_2 x), ..., \exp(a_n x)) dx$$

виражається через елементарні функції.

Б13

1. Знайти інтеграли:

1) $\int x^2 \sin 5x dx$;
2) $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx$;
3) $\int x e^x \sin x dx$;
4) $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$;
5) $\displaystyle\int \frac{1+\exp\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\exp\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2} dx$;
6) $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} dx$;
7) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x}\right) e^{-x} dx$;
8) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$;
9) $\int x \arctan(x+1) dx$;
10) $\int \arcsin\sqrt{x} dx$;
11) $\displaystyle\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$;
12) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx$.

ЗАНЯТТЯ 14
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Довести нерівність: $2|\sin x - \sin y| \le |x - y|,\ x, y \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.
2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - x^2$ на відрізку $[-2, 2]$.
3. Виконати повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:

1) $y = x - 3\operatorname{arctg} 2x$;
2) $y = \frac{x^2}{7x+1}$.

4. Знайти первісну функції $f(x) = \min\{\sin x, \cos x\},\ x \in (0, \pi/2)$.
5. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$;
2) $\int \frac{(6-2x-x^2)dx}{(x+2)^2(x^2+2)}$;
3) $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$;
4) $\int\limits_1^e \sin(\ln x)dx$;
5) $\int\limits_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2}$;

РОЗВ'ЯЗКИ

1. Застосуємо теорему Лагранжа: $|\sin x - \sin y| = |\cos c(x-y)| \le \frac{1}{2}|x-y|,\ x, y, c \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.
2. Знайдемо похідну: $f'(x) = 4x^3 - 2x$. Вона рівна нулю при $x = 0; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Підставимо ці точки та кінці відрізку в функцію: $f(-2) = 12; f(2) = 12; f(0) = 0; f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{4}$. Отже, мінімальне значення рівне $-\frac{1}{4}$, а максимальне 12.
3. 1) Область визначення $D(f) = \mathbf{R}$.

Точка перетину з осями: $(0, 0)$.

$f(-x) = -f(x), x \in \mathbf{R}$, отже, функція непарна.

$f'(x) = 1 - \frac{6}{1+4x^2},\ x \in \mathbf{R}$. Тому $f'(x) > 0, x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{5}{4}}) \cup (\sqrt{\frac{5}{4}}, +\infty)$, і $f'(x) < 0, x \in (-\sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{5}{4}})$. Це означає, що f зростає на $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{4}})$ і на $(\sqrt{\frac{5}{4}}, +\infty)$, і спадає на $(-\sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{5}{4}})$. Точка $-\sqrt{\frac{5}{4}}$ – точка локального масимума, $\sqrt{\frac{5}{4}}$ – точка локального мінімума.

$f''(x) = \frac{48x}{(1+4x^2)^2},\ x \in \mathbf{R}$. Тому $f''(x) > 0,\ x > 0$, і $f''(x) < 0, x < 0$. Це означає, що f опукла вгору на $(-\infty, 0)$ і опукла вниз на $(0, +\infty)$. Точка 0 – точка перегину.

Функція неперервна на $\mathbf{R}$, тому вертикальних асимптот не існує.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - 3\operatorname{arctg} 2x}{x} = 1;\ b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3\operatorname{arctg} 2x) = \frac{3\pi}{2};\ b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3\operatorname{arctg} 2x) = -\frac{3\pi}{2}$.

При $x \to -\infty$ маємо похилу асимптоту $y = x - \frac{3\pi}{2}$.

При $x \to +\infty$ маємо похилу асимптоту $y = x + \frac{3\pi}{2}$.

2) Область визначення $D(f) = \mathbf{R}\backslash\{-\frac{1}{7}\}$.

Точка перетину з осями: $(0, 0)$.

Функція не є парною або непарною.

$f'(x) = \frac{2x(7x+1) - 7x^2}{(7x+1)^2},\ x \in \mathbf{R}$. Тому $f'(x) > 0, x \in (-\infty, -\frac{2}{7}) \cup (\frac{2}{7}, +\infty)$, і $f'(x) < 0, x \in (-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}) \cup (-\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$. Це означає, що f зростає на $(-\infty, -\frac{2}{7})$ і на $(\frac{2}{7}, +\infty)$, і спадає на $(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7})$ і на $(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$. Точка $-\frac{2}{7}$ – точка локального масимума, $\frac{2}{7}$ – точка локального мінімума.

$f''(x) = \frac{(14x+2)(7x+1) - 14(7x^2+2x)}{(7x+1)^4} = \frac{2}{(7x+1)^4} > 0,\ x \neq -\frac{1}{7}$. Це означає, що f опукла вгору на $(-\infty, -\frac{1}{7})$ і на $(-\frac{1}{7}, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{7}} \frac{x^2}{7x+1} = \infty$.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{7x^2+x} = \frac{1}{7};\ b = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{7x+1} - \frac{x}{7}) = -\frac{1}{49}$.

При $x \to \pm\infty$ маємо похилу асимптоту $y = \frac{x}{7} - \frac{1}{49}$.

3. Маємо $f(x) = \begin{cases} \sin x,\ 0 < x \le \frac{\pi}{4}; \\ \cos x,\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ Функція f на проміжках $(0, \pi/4)$ і $(\pi/4, \pi/2)$ має первісну F, причому $F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ \sin x + C_2,\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Співвідношення між сталими C_1 і C_2 визначимо з умови неперервності первісної на інтервалі $(0, \pi/2)$: $F(\frac{\pi}{4}-) = F(\frac{\pi}{4}+)$.

Тому $-\frac{1}{\sqrt{2}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + C_2,\ C_2 = C_1 - \sqrt{2}$.

Покажемо, що $F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ \sin x + C_2,\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ є шуканою первісною, тобто, що $F'(x) = f(x),\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Для точок $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$ це випливає з правил диференціювання, а для $x = \frac{\pi}{4}$ – з наслідку з теореми Лагранжа: оскільки існують односторонні границі похідних $F'(\frac{\pi}{4}+) = f(\frac{\pi}{4}), F'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$, то існують односторонні похідні $F'_+(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$ і $F'_-(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$. Отже, існує $F'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$.

Відповідь:

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1, \ 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ \sin x + C_2, \ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

4. 1) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x+2} \\ x = t^2 - 2, dx = 2tdt \end{matrix} \right| =$
$\int \frac{2tdt}{(t+1)\sqrt{t-1}} = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{t-1} \\ t = u^2 + 1, dt = 2udu \end{matrix} \right| =$
$4\int \frac{(u^2+1)udu}{(u^2+2)u} = 4\left(\int du - \int \frac{du}{u^2+2}\right) =$
$4u - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C$, де $u = \sqrt{\sqrt{x+2} - 1}$.

2) Розклад підінтегральної раціональної функції шукаємо у вигляді суми елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами $\frac{6-2x-x^2}{(x+2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$.

Зводячи до спільного знаменника і прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях у чисельниках, знаходимо $A = 1, B = 1, C = -1, D = 0$. Тому $\int \frac{(6-2x-x^2)dx}{(x+2)^2(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{x}{x^2+2}\right) =$
$\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$.

3) Використаємо універсальну тригонометричну підстановку:
$\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{-t^2+t+2} =$
$-\int \frac{dt}{(t+1)(t-2)} = -\frac{1}{3}\int(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{3}\ln|\frac{t+1}{t-2}| + C$, де $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4) Двічі застосуємо формулу інтегрування частинами: $\int\limits_1^e \sin(\ln x)dx =$
$\left| \begin{matrix} u = \sin(\ln x), \ u' = \frac{\cos(\ln x)}{x} \\ v' = 1, \ v = x \end{matrix} \right| = x\sin(\ln x) \Big|_e^1 - \int\limits_1^e \cos(\ln x)dx =$
$\left| \begin{matrix} u = \cos(\ln x), \ u' = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \\ v' = 1, \ v = x \end{matrix} \right| = x\sin(\ln x) \Big|_e^1 -$

$\left(x\cos(\ln x) \Big|_e^1 + \int\limits_1^e \sin(\ln x)dx \right) = e\sin 1 - e\cos 1 + 1 - \int\limits_1^e \sin(\ln x)dx.$

Отримали лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла, з якого знаходимо $\int\limits_1^e \sin(\ln x)dx = \frac{e\sin 1 - e\cos 1 + 1}{2}$.

5) $\int\limits_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2} = \frac{1}{2} \int\limits_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{dx^2}{(x^4+1)\operatorname{arctg} x^2} = \frac{1}{2} \int\limits_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{d(\operatorname{arctg} x^2)}{\operatorname{arctg} x^2} =$
$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{arctg} x^2| \Big|_{\sqrt[4]{3}}^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}.$

ЗАНЯТТЯ 15
ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА РІМАНА. ІНТЕГРАЛ, ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ

Контрольні запитання

1. *Означення розбиття, розміру розбиття, підрозбиття.*
2. *Означення верніх і нижніх сум Дарбу.*
3. *Означення верхнього та нижнього інтеграла Рімана.*
4. *Критерій інтегровності.*
5. *Означення інтегральних сум.*
6. *Означення границі інтегральних сум.*
7. *Теорема Дарбу.*

А15

1. Записати верхні й нижні суми Дарбу та обчислити за означенням верхній і нижній інтеграли для функцій:

1) $f(x) = \dfrac{1-x}{2}, x \in [-1, 1];$ 2) $f(x) = x^2, x \in [0, 1].$

(*Вказівка.* Застосувати нерівність $a^2 \leq \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3} \leq b^2, \quad 0 \leq a < b$).
Зробити висновок щодо інтегровності за Ріманом цих функцій.
2. За допомогою критерію інтегровності довести, що функція $f(x) = x^3 - 1, \ x \in [0, 1]$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, 1]$.
3. Довести, що для функції Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}; \\ 0, & \text{якщо } x \in [0,1] \backslash \mathbf{Q} \end{cases}$$

границя інтегральних сум не існує.
4. Функції

1) $f(x) = x^2, \ x \in [0, 1];$
2) $f(x) = \sin x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$
3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in [0, 1],$

інтегровні за Ріманом на відповідних відрізках. Підібравши зручні інтегральні суми, обчислити інтеграли Рімана цих функцій.

5. Довести збіжність наступних послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, виразити значення границь цих послідовностей через визначені інтеграли:

1) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n};$
2) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{3n};$
3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2};$
4) $a_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \alpha \geq 0;$
5) $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k};$
6) $a_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)};$
7) $a_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2};$
8) $a_n = \sin \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n+1} + \cdots + \sin \frac{1}{2n}.$

Д1. Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ і послідовність $\{z_n : n \geq 1\}$ такі, що:

1) функція f обмежена на відрізку $[a,b]$;
2) $f \in C\left([a,b] \backslash \{z_n : n \geq 1\}\right)$;
3) послідовність $\{z_n : n \geq 1\}$ збіжна.

Довести, що $f \in R([a,b])$.

Д2. Нехай $\omega\left(f, [a,b]\right) = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\} - \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$ – коливання функції $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ на відрізку $[a,b]$. Довести, що

$$\omega\left(f, [a,b]\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| \;\; |x, y \in [a,b]\} =$$
$$= -\inf\left\{f(x) - f(y) \mid x, y \in [a,b]\right\}.$$

Д3. Функція $f \in R([a,b])$ така, що

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [a,b] \; \exists c \in (\alpha, \beta) : f(c) = 0.$$

Довести, що $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Д4. Завдання задачі 5 для послідовностей:

1) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$;

2) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k,j=1}^{n} \cos\frac{k}{n}\cos\frac{j}{n}$;

3) $a_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$, де $f \in C([0,1]), f(x) > 0,\ x \in [0,1]$;

4) $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{ka_k}{n}$, де послідовність $a_n \to a \in \mathbf{R}, n \to \infty$;

5) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$;

6) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{2n-1} k\exp\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$.

Б15

1. Записати верхні й нижні суми Дарбу та обчислити за означенням верхній і нижній інтеграли для функцій:

1) $f(x) = e^x, x \in [0,1]$;

(*Вказівка.* Застосувати нерівність $e^a(b-a) \le e^b - e^a \le e^b(b-a), a \le b.$)

2) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1,2]$.

(*Вказівка.* Застосувати нерівність $\frac{b-a}{b} \le \ln b - \ln a \le \frac{b-a}{a}, 1 \le a \le b.$)

3) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}; \\ 0, & \text{якщо } x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Зробити висновок щодо інтегровності за Ріманом цих функцій.

2. Чи існує скінченна границя інтегральних сум для функції

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{якщо } 0 \le x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } x = \frac{\pi}{2}? \end{cases}$$

3. Функції

1) $f(x) = e^x, \ x \in [0, 1];$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \ x \in [1, 4];$

3) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \in [1, 2];$

4) $f(x) = |x|, \ x \in [0, 1],$

інтегровні за Ріманом на відповідних відрізках. Підібравши зручні інтегральні суми, обчислити інтеграли Рімана цих функцій.

4. Довести збіжність наступних послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, виразити значення границь цих послідовностей через визначені інтеграли:

1) $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 + k^2};$

2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n + k)^2};$

3) $a_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k \sqrt[n]{e^k};$

4) $a_n = \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3};$

5) $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n};$

6) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2};$

7) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}};$

8) $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi k}{4n}}.$

ЗАНЯТТЯ 16
ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Контрольні запитання

1. *Елементарні властивості визначеного інтеграла.*
2. *Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.*
3. *Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.*
4. *Формула Ньютона-Лейбніца.*
5. *Теорема про середнє значення.*

A16

1. Обчислити інтеграли за допомогою формули Ньютона-Лейбніца:

1) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}dx;$

2) $\int\limits_0^\pi \cos x dx;$

3) $\int\limits_0^2 |1-x|dx;$

4) $\int\limits_{-2}^1 f(x)dx,$

де $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & \text{якщо} \quad -2 \le x \le 0; \\ 2-x & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

2. Чи правомірне застосування формули Ньютона-Лейбніца у наступних рівностях:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = 0?$$

3. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} u)^2 du}{\sqrt{x^2+1}};$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^x \exp(u^2)du\right)^2}{\int\limits_0^x \exp(2u^2)du}.$

4. Оцінити визначений інтеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}.$

5. Який знак має інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx$?

6. Який інтеграл більший: $\int\limits_0^1 e^{-x}dx$ чи $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$? Чому?

7. Довести нерівність $\frac{1}{2} < \int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}dx < 1$.

8. Оцінити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}dx$;2) $\int\limits_0^1 \exp(-x^2)dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx$.

9. Знайти границю послідовності $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^{13}}dx, \ n \geq 1$.

Д1. Нехай функція $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Довести, що $\forall x \in [a,b] : f(x) = 0$. Чи істотна умова неперервності ?

Д2. Навести приклад функції $f \in R([a,b])$, яка не має первісної на відрізку $[a,b]$.

Д3. Навести приклад функції $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, яка має первісну на відрізку $[a,b]$, але не інтегровна за Ріманом на цьому відрізку $[a,b]$.

Д4. Нехай $f \in R([a,b]), \ F(x) = \int\limits_a^x f(u)du, x \in [a,b]$ і $F \in C^{(1)}([a,b])$. Чи вірно, що функція f неперервна на відрізку $[a,b]$?

Б16

1. За допомогою формули Ньютона-Лейбніца обчислити наступні інтеграли і зобразити криволінійні трапеції, площі яких виражають ці інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^8 \sqrt[3]{x}dx$;

2) $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\int\limits_{\operatorname{ch}3}^{\operatorname{ch}5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

4) $\int\limits_{-1}^3 |x|dx$;

5) $\int\limits_{-2}^2 |x^2-1|dx$;

6) $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|dx$;

7) $\int\limits_0^3 x[x]dx$;

8) $\int\limits_0^4 [x^2]dx$.

Символ $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a.

2. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{\sqrt{1-\ln^2 x}};$ 3) $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx;$ 5) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{e^x}{e^x-1}dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx;$ 4) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^3}{x^8+1}dx;$ 6) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx.$

3. Переконатися, що формальне застосування формули Ньютона-Лейбніца до наступних інтегралів дає хибні результати:

1) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4};$ 2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx.$

4. Знайти похідні наступних функцій:

1) $F(x)=\int\limits_1^x \ln t dt,\ x>0;$ 2) $F(x)=\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt,\ x>0.$

5. Знайти границі:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos u^2 du}{x};$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} u}du}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin u}du}.$

6. Довести, що $\int\limits_0^x \exp(u^2)du \sim \frac{1}{2x}\exp(x^2),\ x\to\infty.$

7. Довести нерівності:

1) $\displaystyle 9<\int\limits_8^{18} \frac{x+1}{x+2}dx<\frac{19}{2};$ 2) $\displaystyle \frac{1}{e}\le\int\limits_0^{1} x^x dx \ge 1;$

ЗАНЯТТЯ 17
ІНТЕГУВАННЯ ЧАСТИНАМИ. ЗАМІНА ЗМІННОЇ

Контрольні запитання

1. *Формула інтегрування частинами для інтеграла Рімана.*
2. *Формула заміни змінної для інтеграла Рімана.*

А17

1. Обчислити інтегруванням частинами:

1) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчислити за формулою заміни змінної:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

3. Чи можна в інтегралі $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ покласти $x=\sin t$? Чому? Обчислити цей інтеграл.

4. Знайти $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\cos x}$.

5. Вивести рекурентну формулу для інтеграла

$$I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx,\ n\ge 1,$$

і обчислити його.

6. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\int\limits_0^x e^{u^2}du,\ x\in\mathbf{R}$; 2) $f(x)=\int\limits_0^x e^{-u^2}du,\ x\in\mathbf{R}$.

Д1. Нехай функція $f\in C([0,1])$. Довести, що:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

Д2. Нехай функція $f\in C(\mathbf{R})$. Довести, що функція f парна тоді й тільки тоді, коли

$$\forall\, x\in\mathbf{R}:\ \int\limits_{-x}^{x} f(u)\,du = 2\int\limits_0^x f(u)\,du.$$

Дати геометричне тлумачення.

Д3. Нехай функція $f \in C(\mathbf{R})$. Довести, що функція f періодична з періодом $T > 0$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall x \in \mathbf{R}: \int\limits_x^{x+T} f(u)\,du = \int\limits_0^T f(u)\,du.$$

Дати геометричну інтерпретацію.

Б17

1. Обчислити інтегруванням частинами:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx;$
2) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx;$
3) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx;$
4) $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x\,dx;$
5) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx;$
6) $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x\,dx;$
7) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\,dx.$

2. Нехай $f \in C^{(2)}([a,b])$. Довести, що

$$\int\limits_a^b xf''(x)\,dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a)).$$

3. Обчислити за формулою заміни змінної:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$
2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx;$
3) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$
4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x};$
5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}.$

4. Пояснити, чому формальна заміна змінної $t = \sqrt[3]{x^2}$ в інтегралі $\int\limits_{-1}^{1} dx$ приводить до помилкового результату.

5. Довести, що одна з первісних парної неперервної функції є функція непарна, а кожна первісна непарної неперервної функції є функція парна.

6. Довести, що первісна неперервної на R періодичної з періодом T функції є періодичною з періодом T функцією тоді й тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^T f(x)\,dx = 0.$$

7. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x) = \int\limits_1^x \frac{e^u}{u}du, x \geq 1;$
2) $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u}du, x \in \mathbf{R}.$

ЗАНЯТТЯ 18
ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ

Контрольні запитання

1. *Формули для площі криволінійної трапеції та криволінійного сектора.*

А18

1. Обчислити площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій системі координат

1) $ax = y^2,\ ay = x^2,\ a > 0;$
2) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0;$
3) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0;$
4) $y^2 = x^2(a^2 - x^2);$

2. Обчислити площі фігур, обмежених кривими у полярній системі координат:

1) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ *(лемніската)*;
2) $r = a \sin 3\varphi,\ a > 0$ *(трилисник)*.

3. За допомогою переходу до полярної системи координат, обчислити площу фігури, обмеженої кривою $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Д1. Знайти площі фігур, обмежених кривими

1) $x^3 + y^3 = 3axy,\ a > 0$ *(лист Декарта)*;
2) $x^4 + y^4 = ax^2y,\ a > 0$.

Б18

1. Обчислити площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій системі координат

1) $y = x^2 + 1,\ x + y = 3;$
2) $y^2 = 2x + 1,\ x - y = 1;$
3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$
4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ x = 2a,\ a > 0;$
5) $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$

2. Обчисдити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до неї в точці $M(3;5)$ і віссю ординат.

3. Обчислити площі фігур, обмежених кривими у полярній системі координат:

1) $r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$ *(кардіоїда)*;
2) $r = a\sin 2\varphi;$
3) $r = 2a\cos 3\varphi,\ r \ge a.$

4. За допомогою переходу до полярної системи координат, обчислити площу фігури, обмеженої кривою $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ *(лемніската)*.

ЗАНЯТТЯ 19
ДОВЖИНА ДУГИ. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ. ЦЕНТР ВАГИ

Контрольні запитання

1. *Формули для довжини кривої в декартових, полярних координатах та заданої параметрично.*
2. *Формули для площі поверхні обертання.*
3. *Формули для координат центру мас фігури та кривої.*
4. *Перша та друга теореми Гульдіна.*

A19

1. Знайти довжини кривих (параметри додатні):

1) $y^2 = 4x,\ 0 \le x \le 1;$
2) $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le b;$
3) $x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t;$
4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *(астроїда)*;
5) $r = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ *(спіраль Архімеда)*.

2. Знайти площі поверхонь, утворених обертанням кривих:

1) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}},\ \ 0 \le x \le a,$ навколо осі абсцис;
2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі абсцис;
3) $r = a(1 + \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

3. Визначити координати центра ваги дуги кола $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi, |\varphi| \le \alpha,$ де $a > 0,\ 0 < \alpha \le \pi$ – сталі.

4. Визначити координати центра ваги фігури, обмеженої параболами $ax = y^2,\ ay = x^2$, де $a > 0$ – стала.

Д1. Обчислити довжину кривої $y = \int\limits_0^x \sqrt{\sin u}\, du,\ 0 \le x \le \pi.$

Б19

1. Знайти довжини кривих (параметри додатні):

1) $y^2 = x^3$, що відтинається прямою $x = \frac{4}{3}$;
2) $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$, що відтинається віссю абсцис;
3) $y^2 = (x+1)^3$, що відтинається прямою $x = 4$;
4) $y = \ln \sin x,\ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;
5) $x = e^t(\cos t + \sin t),\ y = e^t(\cos t - \sin t),\ t \in [0, 1]$;
6) $r = a(1 + \cos\varphi)$ *(кардіоїда)*;
7) $r\varphi = 1,\ \dfrac{1}{2} \le \varphi \le 2$ *(гіперболічна спіраль)*.

2. Обчислити периметр фігури, обмеженої лініями $x^2 = (y+1)^3$ і $y = 4$.

3. Знайти площі поверхонь, утворених обертанням кривих:

1) $y^2 = 4x, 0 \le x \le 1$, навколо кожної з осей Ox та Oy;
2) $y^2 = 4+x$ що відтинається прямою $x = 2$, навколо осі абсцис;
3) $y = \cos\dfrac{\pi x}{2a},\ -a \le x \le a$, навколо осі абсцис.

4. Знайти центр ваги арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

5. За допомогою теорем Гульдіна знайти

1) центр ваги півкола $\gamma = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 = a^2,\ y \ge 0\}$;
2) центр ваги півкруга $F = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\}$.

6. Знайти координати центра ваги однорідної фігури

$$\left\{(x, y)|\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

ЗАНЯТТЯ 20
ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ

Контрольні запитання

1. *Формули для об'єму тіла.*

А20

1. Знайти об'єм зрізаного конуса, основи якого – еліпси з півосями a_1, b_1 та a_2, b_2 відповідно, а висота дорівнює h.
2. Знайти об'єм параболоїда обертання, площа основи якого рівна S, а висота дорівнює H.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2,\ y = 0$ навколо: а) осі абсцис; б) осі ординат.
4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.
5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої півобертом спіралі Архімеда $r = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$.
6. Знайти об'єм і площу поверхні тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y-b)^2 = a^2,\ 0 < a \le b$, навколо осі абсцис.
Д1. Нехай $0 \le \alpha \le \beta \le \pi,\ r \in C([\alpha,\ \beta]; [0, +\infty))$. Довести, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі криволінійного сектора $\{(r, \varphi) |\ 0 \le r \le r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\}$ дорівнює

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi.$$

Б20

1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

1) $xy = 4,\ x = 1,\ y = 0$ навколо осі абсцис;
2) $y^2 = (x+4)^3,\ x = 0$ навколо осі ординат;
3) $(y-3)^2 + 3x = 0,\ x = -3$ навколо осі абсцис;
4) $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої кривою $x = a\sin t,\ y = b\sin 2t$.
3. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$*(еліпсоїд);*
2) $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2;$
3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax;$
4) $x + y + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$
5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = \dfrac{c}{a}x,\ z = 0,$

де $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$
4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 + \cos\varphi)$.

ЗАНЯТТЯ 21
НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ. ОЗНАЧЕННЯ ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення невласного інтеграла по необмеженому проміжку.*
2. *Означення невласного інтеграла від необмеженої функції.*

А21

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^b},\ a>0,\ b>0$; 4) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx,\ n\in\mathbf{N}$.

4. Обчислити інтеграли $(a>0,\ b\in\mathbf{R})$:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx$.

Д1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 x\, dx$.

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$;

Б21

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$; 5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$; 9) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^4}\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4}$; 6) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+3)^4}$; 10) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; 7) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(x+2)^2}{x^4}\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^5}\,dx$; 8) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$;

2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; 7) $\int\limits_{0}^{1} x\ln(1-x)\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 8) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} x\ln x\,dx$; 10) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{8-12x+6x^2-x^3}}$.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|1-2x|}}$; 4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{|1-x|}}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}\,dx}{1+|x|^3}$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$; 7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; 10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x(1-x)}}\,dx$.

ЗАНЯТТЯ 22
НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ

Контрольне запитання

1. *Ознаки поріняння для невласних інтегралів від невід'ємних функцій.*

A22

1. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+7x+1}{x^4+5x+3}\,dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a \operatorname{arctg} x}{1+x^b},\ a,b \in \mathbf{R};$

3) $\int\limits_1^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx, \quad a \in \mathbf{R};$

4) $\int\limits_0^1 x^a e^{-x}\,dx, \quad a \in \mathbf{R};$

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$

2. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}};$

2) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\ln x};$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+\ln x}{1+x^4}\,dx;$

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a \ln^b x},\ a,b \in \mathbf{R};$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{1+x^2}\,dx, \quad a \in \mathbf{R};$

6) $\int\limits_1^{+\infty} x^a e^{-x^2}\,dx, \quad a \in \mathbf{R}.$

3. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+4}};$

2) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}\sqrt[5]{x+1}}.$

Д1. Нехай $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ – монотонна функція і $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний.

Довести, що

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$$

Д2. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}\cdot|x-a_2|^{p_2}\cdot\ldots\cdot|x-a_n|^{p_n}}$, $\{a_i\,|\,1\le i\le n\}\subset \mathbf{R}$; $a_i\ne a_j, i\ne j$; $\{p_i\,|\,1\le i\le n\}\subset\mathbf{R}$;

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{|\sin x|}}$.

Д3. Нехай $\{a,b,c\}\subset\mathbf{R}$ – фіксовані сталі. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|\,dx}{\exp(x^2\sin^2 x)}$;

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^a\,dx}{\exp(x^b|\sin x|^c)}$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x^a|}{x^b}\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(x^a+\ln^b x)|}{x}\,dx$;

5) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^a|\sin x|^b}$;

6) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^a|\sin x|^{x^b}\,dx$.

Б22

1. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{2x^5+x^4+1}$;

2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$;

3) $\int\limits_{0}^{x^{2002}e^{-x^2}\,dx}$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} ax}{x\sqrt{x}}\,dx,\ a\ne 0$;

6) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln\ln(e+x)}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$;

7) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{\ln x\cdot\ln\ln x}}$;

8) $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$;

9) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-|x-10|}\,dx$;

10) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+x+\ln(1+x)}$.

2. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $b\in(0,+\infty)$ – фіксовані сталі. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln^a(1+x)}$;

2) $\int\limits_0^1 x^a \ln^b \frac{1}{x}\, dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^a e^{-x^2}\, dx$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

6) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+\sqrt{x}}\, dx$;

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt[3]{x}}\, dx$;

8) $\int\limits_0^2 \sqrt{x}(2-x)^{-\frac{1}{3}}\, dx$;

9) $\int\limits_2^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x-2}}$;

10) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

3. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $b \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$ – фіксовані сталі. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x^3}\, dx$;

2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^a}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \ln \frac{1}{x}}}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x(x+1)}}\, dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+x)}{x^n}\, dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^x - 1}$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$;

8) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln \ln x}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} x^b |x-2|^a\, dx$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3+x}}$.

4. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2\sqrt[3]{x-1}}$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{5} \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x-3}}$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2-1)\sqrt{x}}$.

ЗАНЯТТЯ 23
АБСОЛЮТНА І УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютно та умовно збіжних невласних інтегралів.*
2. *Ознаки Діріхле та Абеля збіжності невласних інтегралів.*

А23

1. Нехай функція $f :\to [0, +\infty)$ визначається співвідношенням
$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad x \in [n-1, n),\ n \in \mathbf{N}.$$
Довести, що $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається умовно. Побудувати графік функції f.

2. Довести умовну збіжність інтеграла
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$
Побудувати графік підінтегральної функції.

3. Довести збіжність інтеграла
$$\int\limits_1^{+\infty} x^a \cos(x^3)\,dx, \quad a < 2.$$
Чи збігається цей інтеграл абсолютно?

4. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} x^3 \sin(e^x)\,dx$.

Побудувати ескізи графіків підінтегральних функцій.

5. Довести збіжність інтеграла
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$$
Чи збігається цей інтеграл абсолютно?

6. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x(e^x+1)}\,dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$.

Д1. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx.$$

Д2. Чи випливає зі збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f^3(x)\,dx$?

Б23

1. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність наступні інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1000}\,dx$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$;
3) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\sec x)\,dx$;
4) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx$;
5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x}\,dx$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^{-1})}{x}\,dx$;
7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\sin x}{1+x^2}\,dx$;
8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x}\,dx$;
9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\cos 2x}{1+x^2}\,dx$;
10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$.

2. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$;
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln(1+x)}\,dx$;
3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^{100} x\cdot\sin x}{1+x}\,dx$;
4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x}{1+x}\,dx$;
5) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^3)\,dx$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} x\cos(x^4)\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\cdot\sin x}{x}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+\sqrt{x}+x}\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\sqrt{x}}\cdot\sin(e^x)\,dx$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\ln x}{1+x+\ln x}\,dx$.

3. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\cdot\sin x}{x(\ln x+1)}\,dx$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x(x^2+1)}{x(x^2-10x+26)}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg}\cdot\sin(x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\sin(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}\,dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\,dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sin(x^2)dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^x}\cdot\sin(x^2)\,dx$;

10) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^x\,dx$.

4. За допомогою заміни $x=1/t$ звести інтеграли від необмежених функцій до інтегралів по нескінченному проміжку і за ознакою Діріхле довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{2/\pi} \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{2/\pi} \cos\frac{1}{x}\,dx$.

5. За допомогою заміни $x=1/t$ звести інтеграли від необмежених функцій до інтегралів по нескінченному проміжку і за ознакою Абеля довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{2/\pi} \frac{e^x}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{2/\pi} \cos\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\,dx$.

ЗАНЯТТЯ 24
ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Контрольні запитання

1. *Означення числового ряду, його часткової суми.*
2. *Означення збіжного числового ряду, його суми і залишка.*
3. *Необхідні умови збіжності числового ряду.*
4. *Критерій збіжності ряду з невід'ємними доданками.*
5. *Геометричний та гармонічний ряди.*
6. *Ознаки порівняння для рядів з невід'ємними членами.*

А24

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots;$

2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\ldots;$

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

4) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$

5) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\ldots+$
$+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\ldots.$

2. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються. Довести збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2;$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}.$

3. Дослідити збіжність рядів:

1) $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots;$

2) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+\ldots;$

3) $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{3001}+\ldots+\dfrac{1}{1000n+1}+\ldots;$

4) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\ldots;$

5) $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\ldots;$

6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\ldots+\dfrac{n}{n+1}+\ldots.$

4. З допомогою ознак порівняння дослідити збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n^4+1}};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{2^n(2^n-1)};$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{1+n^2}{n^2};$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$

Д1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суму та залишок ряду
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots.$$

Д2. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ з невід'ємними доданками збігається. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$. Навести приклад, який показує, що зворотне твердження невірне.

Д3. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається. Чи випливає звідси збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$? Навести відповідні приклади.

Д4. Нехай ряди з невід'ємними доданками $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ розбігаються. Що можна стверджувати про збіжність рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$?

Б24

1. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{16}+\ldots+\dfrac{3^{n+1}}{4^n}+\ldots;$

2) $\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\ldots+\ln\dfrac{n+2}{n+1}+\ldots;$

3) $\ln\dfrac{3\cdot 1}{2^2}+\ln\dfrac{4\cdot 2}{3^2}+\ldots+\ln\dfrac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}+\ldots;$

4) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

5) $\dfrac{2}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}+\ldots;$

6) $\dfrac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$

7) $\dfrac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}+\ldots.$

2. Використовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести розбіжність рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

3. Оцінюючи часткові суми, довести розбіжність рядів:

1) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ldots;$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}+\ldots.$

4. З допомогою ознак порівняння дослідити збіжність наступних рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1};$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 4n}{n^3};$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}};$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}};$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{4n-2}.$

ЗАНЯТТЯ 25
ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Контрольні запитання

1. *Ознаки Даламбера і Коші.*
2. *Логарифмічна ознака і ознака Раабе.*
3. *Інтегральна ознака Маклорена - Коші.*

А25

1. Використовуючи ознаки Даламбера або Коші дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена-Коші, дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ в залежності від параметра p.

3. Використовуючи ознаки Раабе та логарифмічну, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n}$.

4. Використовуючи різні ознаки, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln n + n + \sqrt{n}}{1 + n^2 \ln^3 n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n + 1}{4^{n+1} + n^2 + 3}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{(2n)! + n^2}$;

Д1. Довести, що для будь-якого збіжного ряду з невід'ємними доданками і залишками $\{r_n \,:\, n \geq 1\}$ існує збіжний ряд з невід'ємними доданками і залишками $\{r'_n \,:\, n \geq 1\}$, що задовольняють умові $r_n = o(r'_n),\ n \to \infty$.

Д2. Нехай послідовність невід'ємних чисел $\{a_n \,:\, n \geq 1\}$ монотонно не зростає. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Б25

1. Використовуючи ознаки Коші або Даламбера дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^4}}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \dfrac{1}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4\left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n}{4^n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2. Використовуючи інтегральну ознаку Маклорена-Коші дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p(\ln n)^q}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

3. Використовуючи ознаки Раабе або логарифмічну, дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

4. Використовуючи різні ознаки, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n+1)!+n+\sqrt{n}}{(n+3)!+n^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n+n}{n5^{n+2}-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^7\ln^2 n+n+1}{(n+2)^8\ln^4 n+n^2+1}$.

ЗАНЯТТЯ 26
АБСОЛЮТНО І УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ

Контрольні запитання

1. *Означення абсолютно і умовно збіжних рядів.*
2. *Ознаки Лейбніца, Діріхле, Абеля.*

А26

1. Дослідити абсолютну та умовну збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\ln n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{arctg} n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

2. Довести умовну збіжність наступних рядів на інтервалі $(0,\pi)$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$.

3. Для рядів

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^p}$;

де $x \in (0,\pi)$, знайти множини параметрів (x,p), для яких вони збігаються **а)** абсолютно; **б)** умовно.

4. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

5. Довести, що для кожного $p > 0$ сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ лежить на інтервалі $\left(\frac{1}{2},\, 1\right)$.

6. Оцінити залишок ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ і вказати скільки доданків треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon = 10^{-8}$.

7. Довести збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

і знайти його суму.

Д1. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n + (-1)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n} \cos \dfrac{\pi n^2}{n+1}$.

Д2. Дослідити абсолютну та умовну збіжність наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^n \sin^{2n} x}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

Д3. Дослідити збіжність рядів:

1) $\dfrac{1}{1^p} - \dfrac{1}{2^q} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^q} + \dfrac{1}{5^p} - \dfrac{1}{6^q} + \ldots$;

2) $1 + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{1}{4^p} + \ldots$.

Б26

1. Встановити, які з наступних знакозмінних рядів збігаються абсолютно, умовно або розбігаються:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{n}$.

2. Переконатися в тому, що доданки ряду

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

не задовольняють умовам ознаки Лейбніца. Чи збігається цей ряд?

3. Нехай заданий ряд умовно збігається. Чи збережеться його збіжність, якщо для деякого числа N переставити перші N доданків? Чи збережеться при цьому його сума?

4. Дослідити абсолютну та умовну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+1)^p}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{\sqrt[3]{n}+1}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n+1)}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\pi(n+1)}{\ln^2 n}$.

ЗАНЯТТЯ 27
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ. ДОБУТОК РЯДІВ. НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

Контрольні запитання

1. *Теорема про арифметичні дії зі збіжними рядами.*
2. *Перестановка доданків абсолютно та умовно збіжних рядів.*
3. *Добуток рядів за Коші. Теореми про достатні умови збіжності добутку рядів.*
4. *Означення нескінченного числового добутку, його часткового добутку. Означення збіжного числового добутку.*
5. *Необхідна та достатні умови збіжності нескінченних добутків. Зв'язок зі збіжністю числових рядів.*
6. *Абсолютна збіжність нескінченних добутків.*

А27

1. Знайти суми наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

2. Знайти суму ряду: $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$.

3. Використовуючи множення рядів за Коші, обчислити добуток

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{n!}.$$

4. Використовуючи множення рядів за Коші, довести рівність

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,q^n,\ \text{де } |q|<1.$$

5. Знайти часткові добутки і довести наступні рівності:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$;

2) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x},\ |x|<1$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$;

4) $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

6. Дослідити збіжність наступних нескінченних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^p}\right)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$.

7. Дослідити абсолютну і умовну збіжність наступних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$;

2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Д1. Переставити доданки збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ таким чином, щоб одержаний ряд: а) був розбіжним; б) був розбіжним до $+\infty$.

Д2. Довести, що доданки умовно збіжного ряду можна не змінюючи їх порядку згрупувати таким чином, що одержаний ряд буде абсолютно збіжним.

Д3. Довести, що квадрат в розумінні Коші збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є розбіжний ряд.

Д4. Чи випливає зі збіжності добутків $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ збіжність добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n+q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

Д5. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збігається. Довести, що тоді збігається нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos a_n$.

Б27

1. Що можна стверджувати про суму двох рядів, з яких

1) один ряд збігається, а інший розбігається;
2) обидва ряди розбігаються ?

2. Знайти суму ряду: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$.

3. Довести, що

1) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

4. Знайти часткові добутки і довести наступні рівності:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$;

2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$;

3) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = 2$.

5. Дослідити збіжність наступних нескінченних добутків:

1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^p$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}$, де $c > 0$;

6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

6. Дослідити абсолютну і умовну збіжність наступних добутків:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$;

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$;

3) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$;

5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

ЗАНЯТТЯ 28
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Знайти довжину дуги кривої $y = x^2 + x,\ x \in [0, 1]$.
2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y = 2^{\sin x}\sqrt{\sin 2x},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, навколо осі Ox.

3. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4(1-x)}}dx$.

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x \operatorname{arctg} 3x}{x}dx$.

5. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sin \frac{1}{n}$.

6. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n}$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. За формулою довжини дуги $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{(2x+1)^2 + 1}dx =$
$\left| \begin{matrix} 2x + 1 = \operatorname{sh} t \\ dx = \frac{\operatorname{ch} t}{2},\ t_1 = 0,\ t_2 = Arsh3 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int\limits_0^{Arsh3} \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{Arsh3} (1 + \operatorname{ch} 2t)dt =$
$\frac{Arsh3}{4} + \frac{\operatorname{sh}(2Arsh3)}{8} = \frac{\ln(3+\sqrt{1+3^2})+3\sqrt{1+3^2}}{4} = \frac{\ln(3+\sqrt{10})+3\sqrt{10}}{4}$.

2. За формулою об'єму $V = \pi \int\limits_0^{\pi/2} y^2(x)dx = \pi \int\limits_0^{\pi/2} 4^{\sin x} \sin 2x dx =$
$2\pi \int\limits_0^{\pi/2} 4^{\sin x} \sin x \cos x dx = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} 4^{\sin x} \sin x d(\sin x) =$
$\frac{2\pi}{\ln 4} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x d(4^{\sin x}) = \frac{2\pi}{\ln 4} \left(4^{\sin x} \sin x \Bigg|_{\pi/2}^{0} - \int\limits_0^{\pi/2} 4^{\sin x} d(\sin x) \right) =$
$\frac{2\pi}{\ln 4} \left(4^{\sin x} \sin x \Bigg|_{\pi/2}^{0} - \frac{1}{\ln 4} 4^{\sin x} \Bigg|_{\pi/2}^{0} \right) = \frac{2\pi}{\ln 4} \left(4 - \frac{3}{\ln 4}\right)$.

3. Невласний інтеграл має точки невласності 0 та $+\infty$. Дослідимо його за ознакою порівняння на проміжках $[0, 1],\ [1, +\infty)$.

1) $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4(1-x)}} \sim \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \to 0$. Оскільки $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ – збіжний інтеграл (степінь знаменника менше одиниці), то $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4(1-x)}} dx$ – збіжний.

2) $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4(1-x)}} \sim -\frac{\pi/2}{\sqrt[3]{x^5}}, x \to +\infty$. Оскільки $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ – збіжний інтеграл (степінь знаменника більше одиниці), то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4(1-x)}} dx$ – збіжний.

Отже, інтеграл в умові - збіжний.

4. Інтеграл збіжний за ознакою Абеля. Дійсно, функція $\operatorname{arctg} 3x$ монотонна та обмежена, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$ збіжний за ознакою Діріхле.

Інтеграл інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin 2x| \operatorname{arctg} 3x}{x} dx$ розбіжний за ознакою порівняння, бо $\frac{|\sin 2x| \operatorname{arctg} 3x}{x} \geq \frac{\sin^2 2x \operatorname{arctg} 3x}{x} = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x} - \frac{\cos 4x \operatorname{arctg} 3x}{x}$.

Дійсно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x} dx$ розбіжний за ознакою порівняння: $\frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x} \sim \frac{\pi/2}{2x}, x \to +\infty$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{2x} dx$ – розбіжний, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x \cos 4x}{2x} dx$ збіжний за ознакою Абеля аналогічно до початкового. Сума збіжного та розбіжного інтегралів – розбіжний інтеграл.

Отже, початковий інтеграл умовно збіжний.

5. а) Ряд знакосталий, бо $a_n = \ln \frac{n^2+1}{n^2} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо ознаку порівняння в формі еквівалентності. Оскільки $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$, і $\frac{1}{n^2} \to 0,\ n \to \infty$, то $a_n = \ln \frac{n^2+1}{n^2} = \ln(1 + \frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2} = b_n,\ n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

б) Ряд знакосталий, бо $a_n = \frac{6^n (n!)^2}{n^{2n}} > 0,\ n \geq 1$. Оскільки у виразі для a_n присутній факторіал, зручно застосувати ознаку Д'Аламбера. Маємо: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^{n+1}((n+1)!)^2 n^{2n}}{6^n (n!)^2 (n+1)^{2(n+1)}} = 6(n+1)^2 \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} = 6(\frac{n}{n+1})^{2n} = 6((1 + \frac{1}{n})^n)^{-2} \to 6e^{-2} = r,\ n \to \infty$. Значення $r = 6e^{-2} < 1$. Тому за ознакою

Д'Аламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

в) Ряд знакосталий, бо $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n} > 0,\ n \geq 1$. Застосуємо спочатку ознаку порівняння в формі еквівалентності. Оскільки $\sin x \sim x,\ x \to 0,\ \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$, і $n \sim (n+1),\ n \to \infty$, то $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = b_n$. Збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ еквівалентна збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Цей ряд зручно дослідити за інтегральною ознакою Коші. Введемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},\ x \in [1, +\infty)$. Тоді $b_n = f(n),\ n \geq 1$, а функція f монотонно спадає на $[1, +\infty)$. Інтеграл $\int\limits_1^A f(x)dx = \int\limits_1^A \frac{1}{\ln(x+1)} d(\ln(x+1)) = \ln(\ln(x+1))|_{x=1}^{x=A} = \ln\ln(A+1) - \ln\ln 2 \to +\infty,\ A \to +\infty$. Тому за інтегральною ознакою ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний. За ознакою порівняння є розбіжним також ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Ряд знакозмінний: $a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n} < 0$ при непарних n і $a_n > 0$ при парних n. Застосуємо ознаку Лейбніца. $a_n = (-1)^n c_n$ і $c_n = \frac{\ln^2 n}{n} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \to 0,\ n \to \infty$. Доведемо, що послідовність $\{c_n : n \geq 1\}$ монотонна, починаючи з деякого номера. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x},\ x \in [1, +\infty)$. Маємо: $f'(x) = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2} < 0,\ x > e^2$. Отже, функція f спадає на проміжку $[e^2, +\infty)$. Оскільки $c_n = f(n)$, то послідовність монотонна, починаючи з деякого номера n_0 $(n_0 = [e^2] + 1 = 8)$. За ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збіжний. Перевіримо абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. До ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$, який є знакосталим, застосуємо ознаку порівняння в формі нерівності. Маємо: $|a_n| = \frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{1}{n},\ n \geq 3$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, як гармонічний, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ також розбіжний. Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ збігається умовно.

ЗАНЯТТЯ 29
ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Контрольні запитання

1. *Означення функції обмеженої варіації.*
2. *Означення варіації.*
3. *Властивості варіації.*
4. *Розклад Жордана функції обмеженої варіації.*

A29

1. Довести, що наступні функції мають обмежену варіацію та визначити $V(f,[a,b])$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in [-1;1]\backslash\{0\}; \end{cases} \quad a = -1,\ b = 1,;$

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1 - x, & x \in (0;1) \\ 2, & x = 1; \end{cases},\ a = 0,\ b = 1;$

3) $f(x) = |\sin x|,\ [a,b] = [0, n\pi],\ n \in \mathbf{N}.$

2. Довести, що функція $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ не має обмеженої варіації на $[0;1]$:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0;1]; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\,\mathrm{sign}+(\sin\frac{\pi}{x}), & x \in (0;1]. \end{cases}$

3. Нехай функція $f \in \mathbf{BV}([a,b]),\ g(x) = Af(x) + B,\ x \in [a,b]$. Довести, що $V(g,[a,b]) = |A| V(f,[a,b])$.

4. Нехай функція $f \in C([a,b])$ така, що $|f| \in \mathbf{BV}([a,b])$. Довести, що $f \in \mathbf{BV}([a,b])$. Навести приклад, який показує, що умова неперервності в цьому твердженні істотна.

5. Нехай функція $\varphi \in C([a,b])$ і $f(x) := \int\limits_a^x \varphi(u)du,\ x \in [a,b]$. Довести, що $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ і $V(f,[a,b]) = \int\limits_a^b |\varphi(u)|du$.

6. Для функції $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ нехай $F(a) := 0;\ F(x) := V(f,[a,x]),\ x \in [a,b]$. Визначити функцію F, якщо
1) $f(x) = |x|,\ [a,b] = [-1,1]$;
2) $f(x) = \sin x,\ [a,b] = [0,2\pi]$;
3) $f(x) = x - |x|,\ [a,b] = [0,3]$.

7. Подати у вигляді різниці двох неспадних функцій наступні функції:
1) $f(x) = x^2,\ x \in [-1;1]$;
2) $f(x) = x^3 - |x|,\ x \in [-1;1]$;
3) $f(x) = \cos x,\ x \in [0;2\pi]$.

Д1. Нехай $f \in \mathbf{BV}([a;b]) \cap C([a;b])$. Довести, що функція $V(f,[a,b])$ неперервна на $[a,b]$ і функцію f можна подати у вигляді різниці двох неперервних і монотонно неспадних на відрізку $[a;b]$ функцій.
Д2. Довести, що функція обмеженої варіації має не більш ніж зліченну множину точок розриву.
Д3. Нехай $f \in \mathbf{BV}([0;1])$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V(f;[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}])$ збіжний.
Д4. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0;\ \beta > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$ Довести, що $V(f,[0,1]) = +\infty$ при $\alpha \le \beta$. При яких значеннях α,β функція $f \in \mathbf{BV}([0,1])$?

Б29

1. Довести, що функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \end{cases}$ не має обмеженої варіації на $[0,1]$.
2. Довести, що наступні функції мають обмежену варіацію та визначити $V(f,[a,b])$, якщо:
1) $f(x) = \cos x,\ [a,b] = [0,2\pi]$;
2) $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-1;0]; \\ x - x^2, & x \in (0;1] \end{cases},\ [a;b] = [-1;1]$;

3) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [0;1); \\ 5, & x = 1; \\ x^2, & x \in (1;2], \end{cases}$, $[a;b] = [0;2]$;

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sign}(\sin \frac{\pi}{x}), & x \in (0;1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $[a;b] = [0;1]$.

3. Нехай $f \in \mathbf{BV}([a,b])$. Довести, що $|f| \in \mathbf{BV}([a,b])$.

4. Функція $f \in C^{(1)}([a,b])$. Довести, що $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ і $V(f,[a,b]) = \int\limits_a^b |f'(x)|dx$.

5. Нехай функція $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ інехай $F(x) := V(f,[a,x]),\ x \in [a,b]$. Визначити функцію F, якщо

1) $f(x) = |\sin x|,\ [a,b] = [0, 2\pi]$;
2) $f(x) = x - x^2,\ [a,b] = [-1,1]$.

6. Подати у вигляді різниці двох неспадних функцій наступні функції:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < |x| \le 1; \end{cases}$
2) $f(x) = |x|,\ x \in [-2;1]$;
3) $f(x) = \cos \frac{\pi x^3}{2},\ x \in [-1;1]$.

ЗАНЯТТЯ 30
ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА

Контрольні запитання

1. *Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса.*
2. *Теорема про збіжність інтегральних сум до інтеграла Рімана-Стілтьєса.*
3. *Класи інтегровних функцій.*
4. *Формули для обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса.*

А30

1. Обчислити наступні інтеграли Рімана-Стілтьєса, як границі відповідних інтегральних сум:

1) $\int\limits_0^1 x^2 d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 3, & x = 1; \end{cases}$

2) $\int\limits_0^3 f(x) d\alpha(x)$, якщо $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2), \\ x, & x \in [2;3], \end{cases}$ $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1], \\ x, & x \in (1;2], \\ 2, & x \in (2;3]. \end{cases}$

2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^1 x d(\operatorname{arctg} z)$;

2) $\int\limits_{-1}^1 2^x d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ 1, & x \in (0;1]; \end{cases}$

3) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x+1}{2}, & x \in (0;\pi] \\ \frac{x^2}{2}, & x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}], \\ 20, & x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]; \end{cases}$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \alpha(x) d(\sin x)$, для функції α з пункту 3).

3. Нехай одинична маса рівномірно розподілена на відрізку $[0;2]$, а також в точках $x = 1$ і $x = 2$ додатково розміщені одиничні маси. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що зосереджена на відрізку $[0;x]$. 1) Побудувати графік функції

$\alpha(x),\ x \in [0;2]$. 2) Обчислити масу відрізка $[x_1, x_2],\ 0 \le x_1 < x_2 \le 2$.
3) Обчислити інтеграли: $\int\limits_0^2 x d\alpha(x),\ \int\limits_0^2 (x+1)^2 d\alpha(x)$.

4. Нехай в точках $x_n = \frac{1}{n},\ n \ge 1$, зосереджені маси $m_n = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}$, де $\lambda > 0$. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що міститься на $[0; x],\ 0 \le x \le 1$. Обчислити $\int\limits_0^1 d\alpha(x),\ \int\limits_0^1 x d\alpha(x)$.

5. Нехай $f \in C([a,b]),\ \alpha \in C([a,b])$ і монотонно не спадає на відрізку $[a;b]$. Покладемо $F(x) := \int\limits_a^x f(u)d\alpha(u),\ x \in [a,b]$. Довести, що $F \in C([a,b]) \cap \mathbf{BV}([a,b])$.

Д1. Навести приклад двох монотонно неспадних розривних на $[a;b]$ функцій α_1, α_2 таких, що: 1) інтеграл $\int \alpha_1(x)d\alpha_2(x)$ існує; 2) інтеграл $\int \alpha_1(x)d\alpha_2(x)$ не існує.

Б30

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^a x^2 d(\ln(1+x)),\ a > 0$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} 2^x d(\mathrm{sign}(\cos x))$;

3) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)d\alpha(x)$, якщо $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1;0], \\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}, & x \in (0;1]; \end{cases}$

4) $\int\limits_{-1}^1 \alpha(x)d(x^2+1)$, якщо α – функція з пункту 3).

2. Нехай в точках $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ числової прямої відповідно зосереджені маси $m_1, m_2, \ldots, m_n,\ a < x_1,\ b > x_n$. Нехай $\alpha(x)$ – маса, що міститься на відрізку $[a, x],\ x \in [a,b]$. Побудувати графік функції α. Обчислити інтеграли: 1) $\int\limits_a^b x d\alpha(x)$; 2) $\int\limits_a^b x^2 d\alpha(x)$; 3) $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$, де $f \in C([a,b])$.

3. Нехай $f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0), \\ 1, & x \in [0;1]. \end{cases}$ Довести, що f не належить класу $RS(\alpha, [-1;1])$.

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ "МЕХАНІКА". І КУРС, ІІ СЕМЕСТР

Лекцій – 60 годин
Практичних занять – 60 годин

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Теореми Ферма і Ролля. Теорема Лагранжа і наслідки. Теорема Коші. Застосування до доведення нерівностей. Дослідження монотонності функцій за допомогою похідних. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано. Формули Маклорена для функцій $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Перше та друге правила Лопіталя. Означення опуклості функції. Теореми про умови опуклості. Нерівність Ієнсена та приклади застосування. Локальний екстремум. Необхідні умови існування локального екстремуму. Достатні умови існування локального екстремуму. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Дослідження функції та побудова її графіка.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна. Структура множини первісних. Невизначений інтеграл і його елементарні властивості. Таблиця інтегралів. Інтегрування частинами та за допомогою підстановки. Інтегрування раціональних функцій. Розклад на елементарні дроби. Інтегрування елементарних дробів. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування функцій, що містять ірраціональності.

ІНТЕГРАЛ РІМАНА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Задача обчислення площі криволінійної трапеції. Поняття, пов'язані з визначеним інтегралом: розбиття, підрозбиття, діаметр розбиття, суми Дарбу, інтегральна сума; їх геометрична інтерпретація. Верхній і нижній інтеграли. Інтеграл Рімана та інтегровні функції. Властивості сум Дарбу. Приклад неінтегровної функції. Критерій інтегровності. Класи інтегровних функцій: монотонні, неперервні, обмежені зі скінченною кількістю розривів. Інтеграл, як границя інтегральних сум. Теорема Дарбу. Властивості визначеного інтеграла: інтегровність суми, добутку і модуля інтегровної функції, теорема про середнє значення.

Інтеграл як функція верхньої межі інтегрування: умови неперервності і диференційовності. Теорема про існування первісної неперервної на відрізку функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Диференціювання інтеграла зі змінними межами. Формула інтегрування частинами, приклад. Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Формула заміни змінної. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Задача обчислення площі. Означення квадровності. Квадровність криволінійної трапеції і криволінійного сектора. Об'єм тіла обертання та тіла з відомими перерізами. Спрямлювані криві. Довжина дуги кривої. Площа поверхні обертання. Центр ваги фігури та кривої. Теореми Гульдіна.

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення збіжності невласного інтеграла по необмеженому проміжку. Властивості невласного інтеграла. Критерій Коші. Збіжність невласного інтеграла від степеневої функції. Теорема про збіжність невласного інтеграла від невід'ємної функції. Перша та друга ознаки порівняння. Означення абсолютно та умовно збіжних невласних інтегралів. Ознаки Діріхле та Абеля. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Їх властивості.

ЧИСЛОВІ РЯДИ І ДОБУТКИ

Числові ряди. Часткові суми, сума ряду, збіжні і розбіжні ряди, необхідна умова збіжності. Приклади, зокрема, гармонічний ряд, геометричний ряд. Елементарні властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності числового ряду. Умова збіжності ряду з невід'ємними членами. Ознаки порівняння. Приклади. Ознаки збіжності рядів: Даламбера, Коші, логарифмічна, інтегральна Маклорена - Коші. Приклади застосування. Приклад знакочергувального ряду і його властивості. Абсолютна і умовна збіжність. Збіжність абсолютно збіжного ряду і нерівність для його суми. Умовно збіжні ряди. Ознака Лейбніца. Ознаки Діріхле і Абеля. Теорема Рімана. Множення рядів. Теорема про добуток рядів. Нескінченні добутки. Основні поняття. Необхідна і достатня умова збіжності. Дві достатні умови. Абсолютна збіжність.

ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ ТА ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА

Властивості монотонних функцій. Функції обмеженої варіації, варіація. Варіація монотонної функції. Приклад функції з необмеженою варіацією. Властивості варіації. Теорема Жордана. Теорема про спрямлюваність кривої.

Суми Дарбу-Стілтьєса відносно монотонної функції, їх властивості. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса відносно монотонної функції. Необхідна і достатня умова інтегровності. Класи інтегровних функцій. Означення інтеграла Стілтьєса відносно функцій обмеженої варіації. Обчислення інтеграла Стілтьєса.