Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

А.П.Петравчук

АВТОМОРФІЗМИ І ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ КІЛЕЦЬ МНОГОЧЛЕНІВ

Навчальний посібник для студентів механіко-математичних факультетів університетів

Київ – 2017

УДК 554.31
К43

Рецензенти:
Л.П.Бедратюк – доктор фізико-математичних наук, професор
В.М.Бойко – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Рекомендовано до друку Вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 1 від 12 вересня 2017р.)

Петравчук А.П.
Автоморфізми і диференціювання кілець многочленів: навчальний посібник для студентів механіко-математичних факультетів університетів

Навчальний посібник є вступом в розділ алгебри, який пов'язаний з автоморфізмами і диференціюваннями поліноміальних кілець. Мета посібника – познайомити читача з основними поняттями теорії локально нільпотентних диференціювань кілець, групами автоморфізмів і алгебрами Лі диференціювань кілець многочленів, які застосовуються в математичній фізиці, теорії динамічних систем і криптографії. В останніх розділах посібника наведено ряд результатів про нільпотентні, локально нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань кілець многочленів. Вказані також алгоритми розв'язання деяких задач, пов'язаних з локально нільпотентними диференціюваннями.

Посібник призначений для студентів старших курсів університетів і аспірантів, які навчаються за математичними спеціальностями, також може бути корисним студентам, які цікавляться компютерною алгеброю

Зміст

Розділ 1

Вступ

Кільця многочленів від кількох змінних над полем є одними із найважливіших об'єктів сучасної математики, багато розділів комутативної алгебри і значна частина алгебраїчної геометрії безпосередньо пов'язані з такими кільцями. Знамениті теореми Д.Гільберта про базис, про нулі, про сизігії присвячені саме кільцям многочленів. З кожним кільцем многочленів $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ над полем $\mathbb{K}$ можна зв'язати дві алгебраїчні структури: групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ і алгебру Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Ці дві структури тісно пов'язані між собою: так само як автоморфізми природнім чином об'єднуються в такі алгебраїчні структури як групи, диференціювання об'єднуються в алгебри Лі. Більш точно це можна описати так: $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ є алгебраїчною групою (нескінченновимірною), а $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ є її алгеброю Лі, як було відзначено І.Р.Шафаревичем в [29].

З групою автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ над полем характеристики нуль пов'язана знаменита проблема якобіана: чи буде автоморфізмом відображення $\varphi : A \to A$ яке задається набором многочлена $(f_1, \ldots, f_n)$ з умовою $\det J(f_1, \ldots, f_n) = c \in \mathbb{K}^\star$ (тут $J(f_1, \ldots, f_n)$ – матриця Якобі многочленів $f_1, \ldots, f_n$)). Ця проблема відкрита навіть для многочленів від двох змінних і входить в список "Millenium problems який був складений С.Смейлом в кінці 20-го сторіччя. Група автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ цікава також з точки зору її застосувань в математичній фізиці, де вивчаються симетрії диференціальних рівнянь в частинних похідних (див., наприклад, [12], [5]), а також в теорії динамічних систем (див., наприклад, [10], розділ 8.1), теорії інваріантів (див., наприклад, [6]), криптографії (див., наприклад, [34]). Зауважимо, що група $\mathrm{Aut}(A)$ (афінна група Кремони) вивчена лише у випадку $n = 2$, для більшої розмірності відомі лише окремі факти про будову цієї групи.

Більш легкими для вивчення об'єктами є відповідні алгебри Лі диференціювань. Ці алгебраїчні структури більш лінійні, для їх вивчення можна застосовувати потужний апарат лінійної алгебри, теорії зображень і загальної теорії алгебр Лі. Знання властивостей алгебр Лі диференціювань дозволяє відновити властивості відповідних груп Лі, які несуть інформацію про симетрії різних типів рівнянь математичної фізики, що дає можливість в деяких випадках вказувати точні розв'язки таких рівнянь. Ми вивчаємо нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань поліноміальних кілець, локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань областей цілісності, а також алгебри Лі диференціювань поліноміальних кілець, які складаються із локально нільпотентних диференціювань цих кілець.

В перших трьох розділах посібника наведено основні властивості автоморфізмів і диференціювань поліноміальних кілець (і навіть більш широких класів кілець). Виклад тут опирається на фундаментальні монографії А.Новіцкі [22], А.ван ден Ессена [10] і Ж.Фройденбурга [11]. У зв'язку з обмеженнями на об'єм посібника частина результатів наводиться без доведень і, на жаль, багато цікавих тем залишилося за межами посібника (дія автоморфізмів на алгебраїчних многовидах, проблема якобіана, зв'язок з теорією інваріантів, застосування в теорії динамічних систем, в криптографії).

Наступні три розділи містять результати, які відносяться до алгебр Лі диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль, значна частина цих результатів отримана автором (у співавторстві з іншими авторами). Зокрема, в розділі 5 вивчаються алгебри Лі диференціювань областей цілісності, які складаються із локально нільпотентних диференціювань. При умові скінченновимірності таких алгебр Лі доведено, що вони нільпотентні, що дає часткову відповідь на проблему 11.7 із монографії [11]. Більш детально досліджено такі підалгебри у випадку кільця многочленів від двох змінних. В розділі 6 вивчаються нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль. Вказано оцінки для ступеня розв'язності таких алгебр Лі в залежності від їх рангу над полем часток області цілісності (тут під рангом розуміється звичайний ранг множини векторів над полем). Останній 7-й розділ присвячено дослідженню локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань областей цілісності при умові малого рангу (≤ 3). Зауважимо, що нільпотентні алгебри Лі диференціювань рангу 3 не описані до цього часу, хоча цей клас алгебр Лі розпочав вивчати ще С.Лі [18] у випадку скінченновимірних алгебр Лі диференціювань кілець многочленів від трьох змінних. Класифікаційні задачі для алгебр Лі тісно пов'язані з лінійною алгеброю, де для безнадійних задач є поняття дикості (див. [9]). Для скінченновимірних нільпотентних алгебр Лі диференціювань кільця многочленів від 4 змінних задача класифікації з точністю до ізоморфізму є дикою, як показано в роботі [4].

Розділ 2

Попередні відомості

§ 2.1 Автоморфізми кілець многочленів. Основні поняття

Нехай A – довільне асоціативно-комутативне кільце з одиницею. Автоморфізмом кільця A називається таке бієктивне відображення $\theta : A \longrightarrow A$, яке зберігає операції в A, тобто

1. $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$.

2. $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

3. $\theta(1) = 1$, де a, b – довільні елементи з A.

Автоморфізми кільця A утворюють групу $\mathrm{Aut}(A)$ відносно композиції і в багатьох випадках знання будови групи $\mathrm{Aut}(A)$ дозволяє отримати важливу інформацію про саме кільце A. Далі ми будемо розглядати алгебри над полями, в першу чергу алгебри многочленів від кількох змінних. Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – алгебра многочленів над $\mathbb{K}$. В подальшому ми розглядаємо $\mathbb{K}$-автоморфізми алгебри $\mathbb{K}[X]$, це означає, що автоморфізми є $\mathbb{K}$-лінійними відображеннями із $\mathbb{K}[X]$ в $\mathbb{K}[X]$, тобто $\theta(\lambda f) = \lambda\theta(f)$ для довільних $f \in \mathbb{K}[X]$ і $\lambda \in \mathbb{K}[X]$. Для зручності, якщо A є алгеброю над полем $\mathbb{K}$, то групу всіх $\mathbb{K}$-автоморфізмів алгебри A будемо позначати через $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ у випадках, коли це потрібно відзначити додатково.

Якщо $\theta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ – автоморфізм алгебри, то θ повністю визначається своєю дією на $x_1, \ldots, x_n$. Дійсно, якщо відомі многочлени $\theta(x_i), i = 1, \ldots, n$, то, як неважко переконатися,

$$\theta(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\theta(x_1), ..., \theta(x_n))$$

для довільного елемента $f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}[X]$. Позначимо $\theta(x_i) = F_i, F_i \in \mathbb{K}[X]$. Тоді автоморфізм θ задається набором $F = (F_1, ..., F_n)$ многочленів із $\mathbb{K}[X]$. Звичайно, те ж саме справедливо і для ендоморфізмів алгебри $\mathbb{K}[X]$ (нагадаємо, що ендоморфізмом кільця називається його гомоморфізм в себе). Навпаки, якщо ми маємо довільний набір многочленів $F = (F_1, \ldots, F_n), F_i \in \mathbb{K}[X]$, то цей набір визначає ендоморфізм $\theta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ за правилом $\theta(x_i) = F_i, i = 1, \ldots, n$ і далі $\theta(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$.

Означення 2.1.1. *Набір многочленів $F = (F_1, \ldots, F_n), F_i \in \mathbb{K}[X]$ називається координатною системою алгебри $\mathbb{K}[X]$, якщо $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[F_1, \ldots, F_n]$. Многочлен $f \in \mathbb{K}[X]$ називається координатним, якщо існують многочлени $F_2, \ldots, F_n$ із $\mathbb{K}[X]$ такі, що $f, F_2, \ldots, F_n$ – координатна система алгебри $\mathbb{K}[X]$.*

Наступне, майже очевидне твердження дає характеризацію автоморфізмів алгебри $\mathbb{K}[X]$.

Твердження 2.1.1. *Ендоморфізм θ алгебри $\mathbb{K}[X]$, заданий набором многочленів $F = (F_1, \ldots, F_n)$ буде автоморфізмом тоді і тільки тоді, коли $F_1, \ldots, F_n$ – координатна система алгебри $\mathbb{K}[X]$.*

Доведення. Нехай θ є автоморфізмом алгебри $\mathbb{K}[X]$. Тоді $\theta(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}[X]$ і, оскільки, як неважко бачити, образ $\theta(\mathbb{K}[X])$ породжується многочленами $\theta(x_i) = F_i$, то $F_1, \ldots, F_n$ – координатна система алгебри $\mathbb{K}[X]$. Нехай тепер виконується умова $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[F_1, \ldots, F_n]$. Тоді $x_i = G_i(F_1, \ldots, F_n)$ для деяких многочленів $G_i, i = 1, \ldots, n$. Це означає, що набір $G = (G_1, \ldots, G_n)$ визначає ендоморфізм, обернений до θ (це лівий обернений, бо $G \circ \theta = id$, де id – тотожне відображення кільця $\mathbb{K}[X]$ на себе, але він автоматично буде і правим оберненим). Таким чином θ – автоморфізм алгебри многочленів $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Приклад 2.1.2. *Якщо $F_i = x_i + c_i$, де $c_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$, то автоморфізм θ, визначений набором $F = (F_1, \ldots, F_n)$ називається трансляційним, він зсовує аргументи x_i на величини c_i. Всі трансляційні многочлени утворюють групу. Ця група абелева і ізоморфна прямій сумі n екземплярів адитивної групи $\mathbb{K}^+$ поля $\mathbb{K}$, тобто адитивній групі векторного простору $\mathbb{K}^n$.*

Приклад 2.1.3. *Якщо $F_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1, \ldots, n, a_{ij} \in \mathbb{K}$ і $det(a_{ij}) \neq 0$, то всі автоморфізми, які визначаються наборами $(F_1, \ldots, F_n)$ утворюють групу, яка ізоморфна повній лінійній групі $GL_n(\mathbb{K})$ (автоморфізму, який визначається набором многочленів $F = (F_i, \ldots, F_n)$ співставимо матрицю (a_{ij}), тоді композиції автоморфізмів відповідає добуток матриць). Якщо ж $F_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i, c_i \in \mathbb{K}$, то всі такі автоморфізми утворюють групу, яка містить обидві підгрупи, задані вище і є їх напівпрямим добутком. Ця група називається повною афінною групою і позначається $\mathrm{Aff_n}(\mathbb{K})$.*

Приклад 2.1.4. *Нехай $a = a(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n)$ – многочлен, в який не входить змінна x_i. Тоді, за твердженням 2.1.1, набір многочленів*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_i + a, \ldots, x_n)$$

визначає автоморфізм, який називається елементарним.

Підгрупу із $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\left(K[x_1, \ldots, x_n]\right)$, яка породжена елементами із $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{K})$ і елементарними автоморфізмами називається *ручною підгрупою* і позначається $T_n(\mathbb{K})$, елементи із $T_n(\mathbb{K})$ називаються ручними автоморфізмами.

Відома теорема Юнга-ван-дер Кулька, яку ми розглянемо пізніше, стверджує, що $T_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\left(K[x_1, x_2]\right)$, тобто всі автоморфізми алгебри многочленів від двох змінних є ручними. Довгий час стояла проблема, чи виконується рівність $T_n = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[X]$ при $n \geq 3$. М.Нагата в 1972 році запропонував контрприклад (можливий) для автоморфізму кільця многочленів від трьох змінних, який не є ручним:

$\sigma(x_1) = x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3$

$\sigma(x_2) = x_2 + 2(x_1x_3 + x_2^2)x_3, \quad \sigma(x_3) = x_3$

Недавно І.Шестаков і У.Умірбаєв розв'язали цю проблему і довели, що автоморфізм Нагати σ не є ручним [30].

Кожен набір многочленів $F = (F_1, ..., F_n), F_i \in \mathbb{K}[X]$ визначає поліноміальне відображення $F^* : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ n-вимірного афінного простору $\mathbb{K}^n$ в себе за правилом:

$(a_1, ..., a_n) \overset{F^*}{\longrightarrow} (F_1(a_1, ..., a_n), ..., F_n(a_1, ..., a_n))$.

Таке поліноміальне відображення називається оборотнім, якщо існує поліноміальне відображення $G^\star$, визначене набором многочленів $G = (G_1, ..., G_n)$ таке, що $G^* \circ F^* = E$ - тотожне відображення, тобто $G^* = (F^*)^{-1}$. Оскільки за умовою char $\mathbb{K} = 0$, то, як неважко переконатися, існує взаємно однозначна відповідність між автоморфізмами алгебри $\mathbb{K}[X]$ і оборотніми поліноміальними відображеннями n-вимірного афінного простору $\mathbb{K}^n$.

Співставлення $F \longrightarrow F^*$ є антиізоморфізмом групи $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ і групи $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n)$ всіх автоморфізмів афінного простору $\mathbb{K}^n$. Зауважимо, що група $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n)$ часто називається афінною групою Кремони. Ми будемо користуватися як мовою автоморфізмів із $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$, так і мовою оборотніх поліноміальних відображень, тобто автоморфізмів із $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n)$.

Важливою є проблема оборотності для поліноміальних ендоморфізмів: нехай $F : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ – ендоморфізм алгебри многочленів, де $F = (F_1, ..., F_n)$ – набір многочленів. Визначити по многочленах $F_1, ..., F_n$, коли F буде автоморфізмом алгебри $\mathbb{K}[X]$. В твердженні 2.1.1 вказано критерій оборотності, але він дуже незручний, бо перевірити, чи породжують многочлени $F_1, ..., F_n \in \mathbb{K}[X]$ всю алгебру $\mathbb{K}[X]$ дуже важко.

Вкажемо дуже просту необхідну умову, яка легко перевіряється:

Твердження 2.1.5. *Нехай $F : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ – автоморфізм алгебри многочленів $\mathbb{K}[X]$, який визначений набором $F = (F_1, ..., F_n)$. Тоді $\det J(F) = c \in \mathbb{K}^*$, де $J(F)$ – матриця Якобі набору F, тобто $J(F) = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$.*

Доведення. Оскільки $F = (F_1, \ldots, F_n)$ – автоморфізм кільця многочленів, то для нього існує обернений автормофізм $G = (G_1, \ldots, G_n)$ і тоді $F \circ G = X$ де X – тотожнє відображення кільця многочленів на себе, задане набором многочленів $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Обчислюючи матрицю Якобі від рівності $G \circ F = X$, отримаємо за ланцюговим правилом рівність

$JG(F(X)) \cdot JF(X) = E$, де $E = E_n$ – одинична матриця. Беручи визначник від обидвох частин останньої рівності, отримаємо $\det JG(F(X)) \cdot \det JF(X) = 1$. Обидва визначники є многочленами із $\mathbb{K}[X]$ і тому кожен з них є ненульовою константою. Звідси маємо, що $\det J(F) = c \in \mathbb{K}^*$.

□

Приклад 2.1.6. *Нехай $A = \mathbb{K}[x]$ – кільце многочленів від однієї змінної. Автоморфізм $\theta : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$ визначається деяким многочленом $f(x), f(x) = \theta(x)$ і за твердженням 2.1.5 $J(f) = f^{'}(x) = c \in \mathbb{K}^*$. Тоді $f(x) = cx + d$. Ця умова, очевидно, є і достатньою, бо обернене відображення θ^{-1} визначається многочленом $g(x) = c^{-1}x - c^{-1}d$. Таким чином, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X]) \simeq GA_1(\mathbb{K})$ – повна афінна група розмірності 1 над $\mathbb{K}$.*

Питання про те, чи є необхідна умова оборотності ендоморфізму $F : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ достатньою називається гіпотезою якобіана:

Гіпотеза якобіана: Нехай $\mathbb{K}$ – поле характеристики 0. Якщо

$$F : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

– ендоморфізм, який визначається набором многочленів $F = (F_1, ..., F_n)$ такий, що $\det J(F) = c \in \mathbb{K}^*$, то F – автоморфізм алгебри $\mathbb{K}[X]$.

Гіпотеза якобіана (яку інколи називають проблемою Келлера) була сформульована в 1939 році німецьким математиком Келлером для многочленів з цілочисельними коефіцієнтами. Ця проблема входить під номером 16 в список із 18 знаменитих нерозв'язаних проблем в статті С.Смейла "Mathematical problems for the next century"([32]). Ця проблема відкрита для $n \geq 2$ (для $n = 1$ все очевидно, див. приклад 2.1.6). З точки зору алгебри проблема якобіана є задачею про алгебраїчні властивості многочленів, які задовольняють деяке диференціальне рівняння в частинних похідних.

Для многочленів від двох змінних проблема якобіана розв'язана позитивно у випадку, коли степені усіх многочленів не перевищують 100, коли найбільший спільний дільник степенів многочленів є простим числом, або дорівнює $2p$, де p – просте число.

§ 2.2 Диференціювання кілець. Основні властивості диференціювань

Означення 2.2.1. *Нехай A – довільне кільце. Диференціюванням кільця A називається адитивне відображення $D : A \to A$, яке задовольняє правило Лейбніца, тобто таке, що*

1. $D(a + b) = D(a) + D(b)$
2. $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ *для довільних $a, b \in A$.*

Диференціювання є алгебраїчним аналогом векторного поля, оскільки для кільця гладких функцій $A = C^\infty(M, R)$ на гладкому многовиді M кожне диференціювання кільця A може розглядатися як векторне поле на M.

Множину всіх диференціювань кільця A ми будемо позначати через $\mathrm{Der}\, A$.

Приклад 2.2.1. *Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ – кільце многочленів над полем $\mathbb{K}$. Тоді кожна частинна похідна $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A$ є диференціюванням кільця A.*

Далі ми розглядаємо лише $\mathbb{K}$-*лінійні диференціювання* $\mathbb{K}$-алгебр, тобто такі, які є $\mathbb{K}$-лінійними відображеннями алгебри A в себе і тоді множина всіх $\mathbb{K}$-диференціювань алгебри A позначається через $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\, A$. Оскільки $D(1) = D(1{\cdot}1) = D(1){\cdot}1{+}1{\cdot}D(1) = 2D(1)$, то $D(1) = 0$ (основне поле $\mathbb{K}$ за умовою має характеристику нуль). Але тоді для $\mathbb{K}$-диференціювання D маємо $D(\lambda) = D(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot D(1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, тобто D переводить елементи із поля $\mathbb{K}$ в 0.

Легко бачити, що множина $\mathrm{Ker}\, D = \{a \in A \mid D(a) = 0\}$ є підалгеброю із A, яка за відзначеним вище містить підполе $\mathbb{K}$. Ядро $\mathrm{Ker}\, D$ називається множиною констант диференціювання D і часто позначається A^D.

Далі, якщо $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}\, A$ і $a \in A$, то, як неважко переконатися, $D_1 \pm D_2$, aD_1 також є диференціюванням кільця A. Композиція $D_1 \circ D_2$ може вже не бути диференціюванням, але, як неважко переконатися, комутатор $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ є диференціюванням кільця A. Якщо

A – алгебра над полем $\mathbb{K}$, то відносно операції комутування векторний простір $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ (над полем $\mathbb{K}$) є алгеброю Лі над $\mathbb{K}$. Алгебра Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ є також модулем над кільцем A (якщо $r \in A$ і $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$, то відображення $rD : A \to A$, як неважко переконатися є знову диференціюванням алгебри A).

Вкажемо тепер ряд властивостей $\mathbb{K}$-диференціювань $\mathbb{K}$-алгебри A.

Лема 2.2.2. *Нехай S – множина твірних $\mathbb{K}$-алгебри A і $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. Тоді диференціювання D однозначно визначається образами $D(s), s \in S$.*

Доведення. Кожен елемент із A записується як лінійна комбінація (над $\mathbb{K}$) елементів вигляду $s_1^{\alpha_1} \dots s_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N},\ s_i \in S$. Для таких елементів, очевидно виконується рівність (нагадаємо, що алгебра A комутативна)

$$D(s_1^{\alpha_1} \dots s_k^{\alpha_k}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_1^{\alpha_1} \dots s_i^{\alpha_i - 1} \dots s_k^{\alpha_k} D(s_i)$$

і тому дія D на $s_1^{\alpha_1} \dots s_k^{\alpha_k}$ однозначно визначається образами $D(s_i)$, $s_i \in S$. □

Лема 2.2.3. *Нехай A – асоціативно-комутативна алгебра з 1 над полем $\mathbb{K}$ і $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. Тоді*

1) Для довільних елементів $a \in A, \quad b \in A^{\star}$ виконується рівність $D(a/b) = (D(a)/b - aD(b))/b^2$;

2) Для будь-якого натурального n і довільного елемента $r \in A$ виконується рівність $D(r^n) = nr^{n-1}D(r)$. Якщо $r \in A^{\star}$, то це твердження виконується для будь-якого цілого числа n;

3) $D(ca) = cD(a)$ для довільних $c \in \mathrm{Ker}\, D, \quad a \in A$;

4) Для будь-яких $a, b \in A$ і натурального n виконується рівність

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(a) D^{n-i}(b);$$

Доведення. Справедливість тверджень 1) – 3) перевіряється безпосередньо. Твердження 4) легко довести індукцією за числом n. □

Теорема 2.2.4. *Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, або $A = \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ – алгебра формальних степеневих рядів над $\mathbb{K}$. . Тоді довільне диференціювання $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ має вигляд $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, де $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (відповідно, $f_i \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$).*

Доведення. Нехай спочатку $A = \mathbb{K}[X]$ – кільце многочленів. Тоді $x_1, \ldots, x_n$ породжують A як алгебру над полем $\mathbb{K}$. Для довільного $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ позначимо $f_i = D(x_i)$. Тоді

$$(D - \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i})(x_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

За Лемою 2.2.2 маємо $D - \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$, тобто $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Нехай тепер $A = \mathbb{K}[[X]]$ і $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Припустимо, що $D(x_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n$ і покажемо, що тоді $D = 0$. Дійсно, для довільного $f \in \mathbb{K}[[X]]$ можна записати $f = a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$, де $a_0 \in \mathbb{K}, g_i \in \mathbb{K}[[X]]$ і тому $D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(g_i)$. Це означає, що $D(f) \in I = (x_1, \ldots, x_n)$, де I – ідеал, породжений елементами $x_1, \ldots, x_n$ кільця A. Те ж саме виконується і для $D(g_i),\ i = 1, \ldots, n$ і тому $D(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(g_i) \in I^2$. Аналогічно $D(f) \in I^k,\ k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\bigcap_{k=1}^{\infty} I^k = \{0\}$, то $D(f) = 0$ і тому $D = 0$. Повторюючи проведені вище міркування легко показати, що тоді $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, де $f_i = D(x_i) \in \mathbb{K}[[X]]$. $\square$

Теорема 2.2.4 показує, що $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]$ і $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[X]]$ є вільними модулями над $\mathbb{K}[X]$ і $\mathbb{K}[[X]]$ відповідно (з базисом $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$). Нехай A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$ і $R = Q(A)$ – поле часток кільця A. Якщо $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, то D однозначно продовжується до диференціювання D поля R за правилом:

$$D(\frac{a}{b}) = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2}, \quad a, b \in A\ b \neq 0$$

(ми часто будемо позначати такі продовжені диференціювання тими ж символами). Звідси легко випливає, що алгебра Лі диференціювань поля раціональних функцій $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ є векторним простором над $\mathbb{K}(X)$ з базисом $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ (але не є алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}(X)$ в загальному випадку).

Розглянемо тепер дію диференціювань на розширеннях полів.

Теорема 2.2.5. *Нехай $R \subseteq S$ – алгебраїчне розширення полів. Тоді кожне диференціювання D поля R однозначно продовжується до деякого диференціювання $\widetilde{D}$ поля S.*

Доведення. Доведемо тільки однозначність продовження (існування доводиться складніше, див., наприклад, [17]). Нехай $D \in \operatorname{Der} R$ і $\widetilde{D}$ – продовження D на S (тобто $\widetilde{D}|_R = D$). Візьмемо довільний елемент $a \in S$ і нехай $m_a(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_{n-1}x + r_n,\ r_i \in R$ – мінімальний многочлен для a над полем R. Тоді

$$a^n + r_1 a^{n-1} + \cdots + r_{n-1}a + r_n = 0, \tag{2.1}$$

і тоді, застосувавши диференціювання $\widetilde{D}$ до обох частин рівності 2.1, отримаємо

$$na^{n-1}\widetilde{D}(a) + \widetilde{D}(r_1)a^{n-1} + (n-1)r_1 a^{n-2}\widetilde{D}(a) + \ldots$$
$$+\widetilde{D}(r_{n-1})a + r_{n-1}\widetilde{D}(a) + \widetilde{D}(r_n) = 0.$$

Звідси отримаємо

$$\widetilde{D}(a) = -\frac{\widetilde{D}(r_1)a^{n-1} + \cdots + \widetilde{D}(r_{n-1})a + \widetilde{D}(r_n)}{na^{n-1} + r_1(n-1)a^{n-2} + \cdots + r_{n-1}}. \tag{2.2}$$

Оскільки $\widetilde{D}(r_i) = D(r_i),\ i = 1, \ldots, n$, то $\widetilde{D}(a)$ однозначно задається значеннями D на $r_i,\ i = 1, \ldots, n$. Це означає, що $\widetilde{D}$ однозначно визначається для диференціювання D на R. Одночасно ми вказали вираз 2.2 для продовження D на поле S. □

Наступний наслідок із останньої теореми показує, що достатньо вивчати лише диференціювання чисто трансцендентних розширень полів.

Наслідок 2.2.6. *Нехай $R \subseteq S$ – розширення полів. Якщо поле S алгебраїчне над R, то для довільного R-диференціювання D поля S маємо рівність $D = 0$.*

Вкажемо тепер зв'язок між диференціюваннями і автоморфізмами кілець. Нехай (як і раніше) A – асоціативна комутативна алгебра з одиницею над полем $\mathbb{K}$ і $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Розглянемо алгебру формальних степеневих рядів $A[[t]]$, де t – нова змінна. Продовжимо D на алгебру $A[[t]]$

за правилом:

$$\widetilde{D}(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{\infty} D(a_i)t^i \qquad (\text{зокрема } \widetilde{D}(t) = 0).$$

Для зручності продовження диференціювання $\widetilde{D}$ будемо надалі позначати через D. Легко бачити, що tD є також диференціюванням кільця $A[[t]]$. Визначимо $\mathbb{K}$-лінійне відображення $\exp tD : A[[t]] \to A[[t]]$ за правилом:

$$\exp tD(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(tD)^i(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(f)t^i$$

для довільного ряду $f \in A[[t]]$.

Безпосередньо перевіряється, що для довільного елемента $r \in A$ мають місце рівності

$$\frac{d}{dt}(\exp tD)(r) = \exp tD(D(r)), \ \exp tD(r)|_{t=0} = r. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2.7. *Для довільного диференціювання D кільця A відображення $\exp tD : A[[t]] \to A[[t]]$ є автоморфізмом кільця $A[[t]]$.*

Доведення. Оскільки $\exp tD$ є сумою адитивних відображень

$$\frac{1}{i!} t^i D^i, \ i = 0, 1, \ldots,$$

то $\exp tD$ є адитивним відображенням.

Покажемо, що $\exp tD(fg) = \exp tD(f) \exp tD(g)$. Дійсно,

$$\exp tD(f) \exp tD(g) = (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(f)t^i)(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(g)t^i) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} D^i(f)D^j(g))t^n = [\text{формула Лейбніца}] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(fg)t^i = \exp tD(fg).$$

Відображення $\exp tD$ є бієкцією, оскільки, як неважко переконатися, для цього відображення існує обернене $\exp(-tD)$, яке також є гомоморфізмом кільця $A[[t]]$. $\square$

Вправи

1. Нехай основне поле $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$. Довести, що відображення $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, яке задано за правилом $\varphi(x) = x + x^3$ є бієктивним, але не оборотнім (як поліноміальне відображення).

2. Показати, що відображення Нагати $\sigma : \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] \to \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ є оборотнім в класі поліноміальних відображень (шляхом безпосереднього обчислення оберненого відображення)

3. Довести, що комутатор $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ двох диференціювань кільця A є знову диференціюванням цього ж кільця.

4. Розглянемо диференціювання D кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$, яке задано за правилом:

$$D(h) = x_2^2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_3}, h \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3].$$

   Обчислити ядро $\operatorname{Ker} D$.

5. Нехай $D = \frac{\partial}{\partial x}$ – диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x]$. Довести, що відображення $\exp D$ є автоморфізмом кільця многочленів який переводить многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ в многочлен $f(x+1)$, тобто є зсувом аргумента на 1 (скористатися формулою Тейлора для многочленів).

Розділ 3

Локально нільпотентні диференціювання поліноміальних кілець

Локально нільпотентні диференціювання складають найбільш важливий і найкраще вивчений клас диференціювань комутативних кілець. Локально нільпотентним диференціюванням кільця R природнім чином відповідають автоморфізми самого кільця R (а не тільки кільця формальних степеневих рядів $R[[t]]$, як це було показано раніше). За останні кілька десятиліть була розроблена достатньо глибока теорія таких диференціювань (див, монографії [11], [10]). Є цілий ряд нерозв'язаних проблем, пов'язаних з локально нільпотентними диференціюваннями поліноміальних кілець, куди входить і проблема якобіана, про яку ми згадували раніше у зв'язку з автоморфізмами кілець многочленів. В даному розділі ми розглянемо лише найпростіші і найважливіші для застосувань властивості локально нільпотентних диференціювань.

§ 3.1 Основні властивості локально нільпотентних диференціювань

Означення 3.1.1. *Диференціювання D кільця A називається локально нільпотентним, якщо для будь-якого $a \in A$ існує натуральне $n = n(a)$*

таке, що $D^n(a) = 0$.

Зауважимо, що для локально нільпотентного диференціювання D кільця A можна визначити автоморфізм цього кільця $\exp D$ за правилом: $\exp D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i$, де дія відображення $\exp D$ на A визначається за правилом: $\exp D(f) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^i(f)$, де $k = k(f)$ – індекс нільпотентності D на f, тобто найбільше натуральне число k, для якого $D^k(f) \neq 0$.

Приклад 3.1.1. *Диференціювання* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *поліноміального кільця*

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n],\ i = 1, \ldots, n$$

є локально нільпотентним. Зауважимо також, що для будь-якого многочлена

$$f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n].$$

диференціювання $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ *є також локально нільпотентним.*

Наступне твердження є майже очевидним.

Твердження 3.1.2. *Нехай* A *– асоціативно-комутативна алгебра над полем* $\mathbb{K}$ *з множиною твірних* S *і* $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. *Диференціювання* D *локально нільпотентне тоді і тільки тоді, коли для кожного* $s \in S$ *існує натуральне* $n = n(s)$ *таке, що* $D^n(s) = 0$.

Це твердження дає можливість вказати досить широкий клас локально нільпотентних диференціювань кілець многочленів.

Означення 3.1.2. *Диференціювання* D *поліноміального кільця* $\mathbb{K}[X]$ *називається трикутним, якщо* D *має вигляд*

$$D = f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

де $f_i \in \mathbb{K}[x_{i+1}, \ldots, x_n], f_n \in \mathbb{K}$.

Твердження 3.1.3. *Кожне трикутне диференціювання* D *поліноміального кільця* $\mathbb{K}[X]$ *є локально нільпотентним.*

Доведення. Індукція по n. Якщо $n = 1$, то $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$, $f_1 \in \mathbb{K}$ і D очевидно є локально нільпотентним.

Нехай $n \geq 2$ і запишемо D у вигляді

$$D = f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

де $f_i \in \mathbb{K}[x_{i+1}, \ldots, x_n]$. Позначимо

$$\widetilde{D} = f_2(x_3, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Тоді $D = f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \widetilde{D}$.

Очевидно, $\widetilde{D} \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_2, \ldots, x_n]$ і за індуктивним припущенням $\widetilde{D}$ - локально нільпотентне диференціювання. Але для довільного елемента $g \in \mathbb{K}[x_2, \ldots, x_n]$ маємо рівність

$$D(g) = (f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \widetilde{D})(g) = \widetilde{D}(g), \quad \text{оскільки} \frac{\partial}{\partial x_1}(g) = 0.$$

Тому $D(x_i) \in \mathbb{K}[x_2, \ldots, x_n]$, $i = 1, \ldots, n$. Для системи твірних $x_1, \ldots, x_n$ кільця $\mathbb{K}[X]$ виконуються умови Твердження 3.1.2, отже диференціювання D локально нільпотентне. □

Щоб дослідити більш детально локально нільпотентні диференціювання (а це дуже важлива задача диференціальної алгебри) нам потрібні будуть деякі нові поняття, повязані з ними. Вкажемо наступне поняття, яке є важливим інструментом для вивчення локально нільпотентних диференціювань.

Означення 3.1.3. *Нехай A – алгебра над полем $\mathbb{K}$ і $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Елемент $s \in A$ називаеться слайсом(slice) для D, якщо $D(s) = 1$.*

Легко бачити, що якщо диференціювання D має слайс s в кільці A, то він єдиний з точністю до доданка із $\operatorname{Ker} D$. Дійсно, для іншого слайса s_1 із рівності $D(s_1) = 1$ отримаємо, що $D(s_1 - s) = 0$ і тому $s_1 = s + c$ для деякого $c \in \operatorname{Ker} D$.

Приклад 3.1.4. *Диференціювання $D = \frac{\partial}{\partial x_i} \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]$ має слайс x_i, $i = 1, \ldots, n$.*

Зауважимо, що не кожне диференціювання має слайс. Дійсно, наприклад, локально нільпотентне диференціювання $x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}[x_1, x_2]$ не має слайсів, бо рівність $x_2 f'_{x_1} = 1$ не виконується в кільці $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ для будь-якого многочлена $f(x_1, x_2)$.

Покажемо тепер як, трохи розширивши кільце A, яке є областю цілісності, ми можемо завжди вказати слайс для довільного ненульового локально нільпотентного диференціювання $D \in \mathrm{Der}\, A$, $D \neq 0$. Візьмемо довільний елемент $r \in A \setminus \mathrm{Ker}\, D$. Тоді існує найменше натуральне число n, таке що $D^{n+1}(r) = 0$. Покладемо $p = D^{n-1}(r)$. Тоді $D(p) \neq 0$, $D^2(p) = 0$. Позначимо $t = D(p)$. Тоді $D(t) = 0$, тобто $t \in \mathrm{Ker}\, D$. Розширимо тепер кільце A, поклавши $\widetilde{A} = A[t^{-1}]$, де $A[t^{-1}] = \{\frac{r}{t} \mid r \in A\}$ – підкільце з поля часток $Q(A)$. Тоді елемент $s = p/t$ є слайсом для диференціювання D (ми продовжуємо D природним чином на $\widetilde{A}$). Дійсно,

$$D(s) = D(\frac{p}{t}) = \frac{D(p)t - pD(t)}{t^2} = \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

Легко бачити також, що продовжене на $A[t^{-1}]$ диференціювання $\widetilde{D}$ є локально нільпотентним. При цьому, як легко перевірити $\mathrm{Ker}\, \widetilde{D} = (\mathrm{Ker}\, D)[t^{-1}]$.

Означення 3.1.4. *Підкільце S кільця A називається факторіально замкненим в A, якщо для будь-яких елементів $a, b \in A \setminus 0$ таких, що $ab \in S$ випливає, що $a, b \in S$.*

Нехай $R = Q(A)$ – поле часток області цілісності A над полем $\mathbb{K}$. Тоді для зручності *степенем трансцендентності області A* над полем $\mathbb{K}$ будемо називати степінь трансцендентності $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} R$ поля R над $\mathbb{K}$. В наступній теоремі зібрані основні властивості локально нільпотентних диференціювань областей цілісності.

Теорема 3.1.5. *Нехай A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$ степеня трансцендентності n (над $\mathbb{K}$) і нехай D – локально нільпотентне $\mathbb{K}$-диференціювання області A. Тоді:*

1) $\ker D$ – факторіально замкнене підкільце із A;

2) Якщо D має слайс $s \in A$, тобто $D(s) = 1$, то елемент s трансцендентний над $\ker D$ і $A = \ker D[s]$, тобто кільце A ізоморфне кільцю многочленів від s над кільцем $\ker D$.

3) $\ker D$ *має степінь трансцендентності* $n-1$ *над полем* $\mathbb{K}$, *продовження* D *на поле* $R = Q(A)$ *має ядро* $Q(\ker D)$ *і степінь трансцендентності поля* R *над цим підполем дорівнює* 1.

4) Якщо для деякого елемента $r \in A, r \neq 0$ *виконується рівність* $D(r) = cr$ *для деякого* $c \in A$, *то* $c = 0$.

5) Нехай $a \in A$ *– такий елемент, що* $D(a) \neq 0$. *Позначимо через* $l_D(a)$ *найменший степінь* D, *який анулює* a. *Тоді* $l_D(a) = [Q(A) : Q(\ker D)(a))] + 1$.

Доведення. 1) Нехай $ab \in D$ для деяких елементів $a, b \in A$, $a \neq 0, b \neq 0$. Припустимо, що, наприклад, $a \notin \ker D$. Тоді із рівності $D(ab) = 0 = D(a)b + aD(b)$ випливає, що $D(b) \neq 0$, тобто $b \notin \ker D$. Нехай далі $D^m(a) \neq 0, D^{m+1}(a) = 0$ і $D^n(b) \neq 0, D^{n+1}(b) = 0$ для деяких $m, n \geq 1$. Тоді за лемою 2.2.3 маємо

$$D^{m+n}(ab) = 0 = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} D^i(a) D^{m+n-i}(b) = D^m(a) D^n(b)$$

за вибором чисел m, n. Оскільки $D^m(a) \neq 0,\ D^n(b) \neq 0$, то за умовою леми $D^m(a)D^n(b) \neq 0$, що суперечить отриманій вище рівності. Отримана суперечність показує, що $a \in \ker D, b \in \ker D$.

2) Легко перевіряється, що з умови $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$, де $a_i \in \ker D, i = 0, \ldots, n$ випливає, що всі елементи a_i дорівнюють нулю (достатньо застосувати D до рівності $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$ достатню кількість разів). Тому елемент s трансцендентний над підполем $Q(\ker D)$ поля $Q(A)$. Це означає, що підкільце, породжене $Q(\ker D)$ і s ізоморфне кільцю многочленів $Q(\ker D)[s]$ від змінної s.

Покажемо, тепер, що $A = Q(\ker D)[s]$. Нехай це не так і $a \in A \setminus (\ker D)[s]$. Позначимо через m найменше натуральне число таке, що $D^m(a) \in (\ker D)[s]$ (оскільки D – локально нільпотентне диференціювання, то таке m існує). Тоді для елемента $a_1 = D^{m-1}(a)$ маємо: $a_1 \in A \setminus (\ker D)[s]$, але $D(a_1) \in (\ker D)[s]$. Нехай $D(a_1) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_k s^k$, $b_i \in \ker D$ і покладемо $c = \sum_{i=0}^{k} b_i \frac{s^{i+1}}{i+1}$. Тоді, очевидно, $D(a_1 - c) = 0$ і тому $a_1 - c = \bar{b} \in \ker D$. Звідси отримаємо, що $a_1 = c + \bar{b} \in (\ker D)[s]$, що суперечить доведеному вище. Отримана суперечність показує, що $A = (\ker D)[s]$ – кільце многочленів від s з коефіцієнтами із $\ker D$.

3) Покажемо, що $Q(\ker D)$ має степінь трансцендентності $n-1$ над полем $\mathbb{K}$. Дійсно, легко перевірити, що $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} Q(\ker D) \le n-1$ (бо $Q(\ker D)$ – підполе із $Q(A)$, яке алгебраїчно замкнене в $Q(A)$). Припустимо, що $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} Q(\ker D) \le n-2$. Але тоді $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} Q(\ker D[s]) \le n-1$, що суперечить умові теореми, бо $Q(\ker D[s]) = Q(A)$.

4) Нехай $D(r) = cr$ для деякого $c \in A$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що A містить слайс для дифереренціювання D (інакше D можна продовжити до локально нільпотентного диференціюваня кільця $A[d^{-1}]$, де $d = D(p)$ і p – преслайс для D в кільці A). Тоді маємо рівності $r = f(s), c = g(s)$ для деяких многочленів $f(t), g(t) \in \mathbb{K}$. Рівність $D(r) = cr$ тоді запишеться у вигляді $f'(s) = f(s)g(s)$. звідси випливає, що $f'(s) = 0$ і $g(s) = 0$, бо A – область цілісності і $f(s) \ne 0$.

5) Доведення цього пункту ми не наводимо (див, наприклад, [10], стор.29).

$\square$

Якщо $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – набір многочленів в кільці $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, то, як неважко переконатися, відображення $D_{f_1,\ldots,f_n} : A \to A$, задане за правилом: $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(h) = \det J(f_1, \ldots, f_{n-1}, h),\ h \in A$ є диференціюванням кільця A. Це диференціювання називається *якобіанним* і має багато цікавих властивостей. Як показує наступне твердження, кожне локально нільпотентне диференціювання D кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ пропорційне деякому якобіанному диференціюванню. Доведення цього твердження ми не наводимо (див., наприклад, [19]).

Теорема 3.1.6. *Нехай D – ненульове локально нільпотентне диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Нехай $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – алгебраїчно незалежні над полем $\mathbb{K}$ елементи із $\mathrm{Ker}\, D$ і $D_1 = D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ – відповідне якобіанне диференціювання. Тоді $D = cD_1$ для деякого елемента $c \in Q(\ker D)$.*

Наступні дві леми показують властивості ядер локально нільпотетних диференціювань.

Лема 3.1.7. *[11, Principle 7] Нехай D – диференціювання алгебри A і $g \in A$. Диференціювання gD –локально нільпотентне тоді і тільки* *тоді, коли* $g \in \operatorname{Ker} D$ *і* D *– локально нільпотентне диференціювання області* A.

Лема 3.1.8. *[11, Principle 12] Нехай* D_1, D_2 *– локально нільпотентні диференціювання алгебри* A *такі, що* $\operatorname{Ker} D_1 = \operatorname{Ker} D_2 = B$. *Тоді існують ненульові елементи* $a, b \in B$ *такі, що* $aD_1 = bD_2$.

Локально нільпотентні диференціювання кілець многочленів є дуже важливим інструментом для вивчення груп автоморфізмів цих кілець і мають багато застосувань в алгебрі, геометрії, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, криптографії. Для локально нільпотентних диференціювань можна сформулювати дві наступні проблеми:

1) (Проблема розпізнавання): визначити, чи буде задане дифереренціюваня $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ локально нільпотентним.

2) (Проблема класифікації): описати всі локально нільпотентні диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Відповіді на ці запитання для кільця многочленів від двох змінних будуть дані в наступних підрозділах В загальному випадку ці питання залищаються відкритими.

§ 3.2 Алгоритми для локально нільпотентних диференціювань

Ми розглянемо два алгоритми для локально нільпотентних диференціювань комутативних кілець, перший з яких належить А.ван ден Ессену, а другий Х.Дерксену (див. [10]).

1. Алгоритм для знаходження ядра диференціювання.

Нехай A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$ і D – локально нільпотентне диференціювання алгебри A. Позначимо через φ автоморфізм $\varphi = \exp tD$ поліномального кільця $A[t]$ (ми продовжуємо диференціювання D на $A[t]$, покладаючи $D(t) = 0$). Тоді для довільного $a \in A$ маємо

$$\varphi(a) = \exp tD(a) = a + D(a)t + \frac{D^2(a)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{D^k(a)}{k!}t^k$$

для деякого натурального k. Фіксуємо довільний елемент $s \in A$. Тоді відображення $\pi_s : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}$ задане за правилом $\pi_s(f) = f(s)$, $f(t) \in$

$\mathbb{K}[t]$ є гомоморфізмом кілець. Позначимо через φ_s композицію цих двох гомоморфізмів $\varphi_s = \pi_s \circ \varphi : A \to A$. Відображення φ_s є ендоморфізмом алгебри A (зауважимо, що $\varphi_s = \exp sD$, якщо $s \in \operatorname{Ker} D$, але в загальному випадку $\exp sD$ невизначене на A, оскільки диференціювання sD може не бути локально нільпотентним).

Лема 3.2.1. *Нехай $D \in \mathrm{LND}(A)$ і $s \in A$ – довільний елемент. Тоді кожен елемент $a \in A$ записується у вигляді многочлена від s вигляду*

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \varphi_{-s}(D^i(a)) s^i.$$

Доведення. Образ $\varphi(a)$ елемента $a \in A$ належить кільцю $A[t]$ і тому записується у вигляді

$$\varphi(a) = \exp tD(a) = a + D(a)t + \frac{D^2(a)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{D^k(a)}{k!} t^k$$

для деякого натурального k. Тоді мають місце рівності

$$a = \exp(-tD) \exp(tD)(a) = \exp(-tD)\varphi(a) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \exp(-tD)(D^i(a)) t^i.$$

Підставляючи в останню рівність елемент s замість t отримаємо потрібний розклад. □

Теорема 3.2.2. *Нехай A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$ і D – локально нільпотентне диференцiюваня алгебри A. Якщо D має слайс s в алгебрі A, то ядро* $\ker D$ *має вигляд* $\operatorname{Ker} D = \varphi_{-s}(A)$. *Якщо G – система твірних алгебри A, то $\varphi_{-s}(G)$ – система твірних для $\mathbb{K}$-алгебри* $\operatorname{Ker} D$.

Доведення. Для довільного елемента $a \in A$ із умови $D(s) = 1$ безпосередньою перевіркою отримаємо, що

$$D(\varphi_{-s}(a)) = D(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (D^i(a)) s^i = 0.$$

Тому $\varphi_{-s}(A) \subseteq \operatorname{Ker} D$. Нехай тепер $a \in \operatorname{Ker} D$. Тоді $a = \exp tD(a)$ і тому $a = \varphi_{-s}(a) \in \varphi_{-s}(A)$. Таким чином, $\operatorname{Ker} D = \varphi_{-s}(A)$. Друга частина твердження теореми легко випливає з того, що $\varphi_{-s} : A \to A$ – гомоморфізм $\mathbb{K}$-алгебр.

□

Нехай тепер область цілісності A над полем $\mathbb{K}$ скінченнопороджена, $A = \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_n]$ і D – ненульове локально нільпотентне диференціювання алгебри A. Позначимо як і раніше через p преслайс для D в A, тобто $D^2(p) = 0, D(p) \neq 0$ і позначимо $d = D(p)$. Тоді $d \in \operatorname{Ker} D$ і продовжимо природнім чином диференціювання D до диференціювання $\widetilde{D}$ області цілісності $\widetilde{A} = A[d^{-1}]$. Тоді $\widetilde{D}$ є локально нільпотентним диференціюванням на $\widetilde{A}$ і має слайс $s = pd^{-1}$, тобто $\widetilde{D}(s) = 1$.За теоремою 3.1.5 $\operatorname{Ker} \widetilde{D}$ має вигляд $\operatorname{Ker} \widetilde{D} = \mathbb{K}[b_1, \ldots, b_n][d^{-1}]$, де $b_i = \varphi_{-s}(a_i), i = 1, \ldots, n$. З іншого боку, як неважко переконатися, ядро $\operatorname{Ker} \widetilde{D}$ має вигляд $\operatorname{Ker} \widetilde{D} = \operatorname{Ker} D[d^{-1}]$. Тому можна знайти такі цілі числа $e_i \geq 0$, що виконуються включення $c_i := d^{e_i} b_i \in C = \operatorname{Ker} D, i = 1, \ldots, n$. Позначимо $C_0 = \mathbb{K}[c_1, \ldots, c_n, d]$. Тоді маємо $C_0 \subseteq C \subseteq C_0[d^{-1}]$.

Визначимо зростаючий ряд підалгебр

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_m \subseteq ..$$

індуктивно за правилом: $C_i = \{h \in A \mid dh \in C_{i-1}\}$. Оскільки $d \in C_0$, то $C_0 \subseteq C_i$ і тому $C_{i-1} \subseteq C_i$ для довільного $i \geq 1$. Враховуючи те, що $C_0 \subseteq C$, індукцією по i покажемо, що $C_i \subseteq C$ для кожного $i > 1$. Нехай вже доведено, що $C_{i-1} \subseteq C$ і нехай $h \in C_i$ – довільний елемент. Тоді $dh \in C_{i-1} \subseteq C$ і тому $D(dh) = 0$. З урахуванням рівності $D(d) = 0$ отримаємо, що $dD(h) = 0$. Але A – область цілісності і тому $D(h) = 0$, тобто $h \in C$. Таким чином $C_i \subseteq C$.

Нам потрібне ще наступне твердження:

Теорема 3.2.3. *1) В умовах попереднього пункту підалгебра C_i скінченнопороджена для кожного $i \geq 1$.*

2) Якщо підалгебра $C = \operatorname{Ker} D$ скінченопороджена, то $C = C_r$ для деякого натурального r.

3) Якщо для деякого натурального r виконуеться рівність $C_r = C_{r+1}$, то C – скінченнопороджена підалгебра і $C = C_r$.

Доведення. 1) Індукція по i. Для $i = 0$ все очевидно і тому вважаємо, що $i \geq 1$. За індуктивним припущенням $C_{i-1} = \mathbb{K}[a_1, \ldots, a_s]$. Позначимо через I множину всіх многочленів $P \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_s]$ таких, що $P(a_1, \ldots, a_s) \in dA$. Неважко переконатися, що I – ідеал кільця $K[y_1, \ldots, y_s]$

і тому ідеал I скінченнопороджений (за теоремою Гільберта про базис). Виберемо яку-небудь систему твірних $\{P_1, \dots, P_k\}$ для ідеалу I. Тоді $P_i(a_1, \dots, a_s) = g_i d$ для деяких елементів $g_i \in A, i = 1, \dots, k$. Оскільки, як легко бачити, $P_i(a_1, \dots, a_s) \in C_{i-1}$, то за означенням $g_i \in C_i, i = 1, \dots, k$. Покажемо, що $C_i = \mathbb{K}[a_1, \dots, a_s, g_1, \dots, g_k]$. Достатньо лише показати, що $C_i \subseteq \mathbb{K}[a_1, \dots, a_s, g_1, \dots, g_k]$. Візьмемо довільний елемент $h \in C_i$. Тоді $dh \in C_{i-1}$ і тому $dh = P(a_1, \dots, a_s)$ для деякого многочлена $P \in K[y_1, \dots, y_s]$. Останнє означає, що многочлен P належить ідеалу I і як наслідок отримаємо рівність $P = \sum_{i=1}^k \varphi_i(y_1, \dots, y_s) P_i$ для деяких многочленів $\varphi_i(y_1, \dots, y_s)$, $i = 1, \dots, k$. Таким чином, $P(a_1, \dots, a_s) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(a_1, \dots, a_s) P_i(a_1, \dots, a_s)$. Звідси отримаємо з урахуванням попередніх рівностей, що $dh = \sum \varphi_i(a_1, \dots, a_s) g_i$, звідки випливає, що

$$h \in \sum \mathbb{K}[a_1, \dots, a_s] g_i \subseteq \mathbb{K}[a_1, \dots, a_s, g_1, \dots, g_k].$$

Цим доведено частину 1) теореми.

2) Нехай тепер $C = \operatorname{Ker} D$ – скінченнопороджена $\mathbb{K}$-алгебра і $C = \mathbb{K}[b_1, \dots, b_n]$ для деяких $b_i \in C$. Оскільки за відзначеним вище $C \subseteq C_0[d^{-1}]$, то існує натуральне число r таке, що $d^r b_j \in C_0, j = 1, \dots, n$. Але тоді також $d^{r-1} b_j \in C_1,\ d^{r-2} b_j \in C_2$, ... і продовжуючи ці міркування ми отримаємо, що $b_j \in C_r$. Останнє означає, що $C = C_r$.

3) Припустимо, що $C_r = C_{r+1}$ для деякого натурального r. Оскільки, очевидно, $C = \cup_{i=0}^{\infty} C_i$, то достатньо показати, що тоді

$$C_{r+2} = C_{r+1}, \dots, C_{k+1} = C_k, k \geq 1.$$

Візьмемо довільний елемент $h \in C_{r+2}$. Тоді $dh \in C_{r+1} = C_r$. Останнє означає, що $h \in C_{r+1}$, тобто з урахуванням вибору h маємо $C_{r+1} = C_{r+2}$. Повторюючи ці міркування ми бачимо, що $C_m = C_{m+1}, m \geq r$.

Опишемо тепер алгоритм знаходження ядра $\operatorname{Ker} D$ локально нільпотентного диференціювання D, який належить А. ван ден Ессену [10]. Для простоти обмежимося лише кільцем многочленів, тобто будемо вважати, що $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_s]$. Спочатку опишемо процес побудови твірних $P_1, \dots, P_k$ ідеалу I. Позначимо через J головний ідеал, породжений елементом d в кільці A, тобто $J = Ad$ і розглянемо фактор-кільце $\overline{A} = A/J$. Образи твірних кільця A в фактор-кільці $\overline{A}$ позначимо через

$\overline{a_1},\ldots,\overline{a_s}$, зрозуміло, що це система твірних для $\overline{A}$. Позначимо через I ідеал $I = \{P \in \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_s] \mid P(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_s}) = 0\}$ в $\overline{A}$. Використовуючи стандартний алгоритм відношення (relation algorithm) ми знаходимо твірні $P_1,\ldots,P_k$ ідеалу I (див., наприклад, [10]). Таким чином отримаємо рівності $P_i(a_1,\ldots,a_s) = dg_i$ для деяких елементів $g_i, i = 1\ldots,k$. Звідси легко знайдемо $g_i = P_i/d$.

$\square$

2. Алгоритм приналежності образу

Далі будемо використовувати позначення із опису алгоритму знаходження ядра локально нільпотентного диференціювання. Опишемо алгоритм, який визначає, чи належить даний елемент $a \in A$ образу $\operatorname{Im} D$ для локально нільпотентного диференціювання D алгебри A, і якщо $a \in \operatorname{Im} D$, то цей алгоритм обчислює прообраз елемента a в A відносно D (зауважимо, що цей прообраз єдиний з точністю до доданку із $\operatorname{Ker} D$). Нехай $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f_1,\ldots,f_l]$, p – преслайс для D в A, $d = D(p)$ і $s = pd^{-1}$ – слайс для D в кільці часток $\widetilde{A} = A[d^{-1}]$. Для даного фіксованого елемента $a \in A$ існує таке натуральне число m, що $D^m(a) \neq 0$, $D^{m+1} = 0$. Тоді за лемою 3.2.1 елемент a можна записати у вигляді

$$a = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} D^i(a) s^i. \tag{3.1}$$

Розглянемо вираз

$$\overline{b} = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} D^i(a) s^{i+1},$$

отриманий формальним інтегруванням правої частини рівності 3.1. Легко бачити, що $D(\overline{b}) = a$, але в загальному випадку елемент $\overline{b}$ не належить алгебрі A. Оскільки $s = pd^{-1}$, то з останньої рівності випливає, що $g := d^{m+1}\overline{b} \in A$. В попередніх позначеннях запишемо

$$a = a^\star + I,\ d = d^\star + I,\ g = G + I,\ f_i = F_i + I$$

для деяких многочленів $a^\star, d^\star, G, F_i \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ і позначимо через J ідеал, породжений в кільці $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_l]$ елементами $y_i - F_i, i = 1,\ldots m, (d^\star)^{m+1}, H_1,\ldots H_t$. На множин всіх мономів із кільця многочленів

$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_l]$ виберемо допустимий порядок такий, що $x_i > y^\alpha$ для всіх α і для всіх i і виберемо базис Грьобнера B ідеалу J по відношенню до цього порядку. Позначимо через $\overline{G}$ нормальну форму цього елемента G по відношенню до базису B. Наступна теорема, яку ми наводимо без доведення вказує критерій належності елемента a образу $\operatorname{Im} D$:

Теорема 3.2.4. *(див. [10], p.40) Елемент a належить $\operatorname{Im} D$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{G} \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_l]$. Далі, якщо останнє включення виконується, то $b := (g - \overline{G}(f_1, \ldots, f_l))/d^{m+1} \in A$ і $D(b) = a$.*

Вправи

1. Нехай D – диференціювання кільця многочленів від однієї змінної $\mathbb{K}[x]$. Довести, що D локально нільпотентне тоді і тільки тоді , коли $D = c\frac{\partial}{\partial x}$, де $c \in \mathbb{K}$.

2. Нехай $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – набір многочленів в кільці $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Довести, що відображення $D_{f_1,\ldots,f_n} : A \to A$, задане за правилом: $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(h) = \det J(f_1, \ldots, f_{n-1}, h)$, $h \in A$ є диференціюванням кільця A. Таке диференціювання називається якобіанним.

3. На векторному просторі $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ над полем $\mathbb{K}$ розглянемо бінарну операцію $[f, g] = \det J(f, g)$. Очевидно, що ця операція білінійна і $[f, f] = 0$ для довільного многочлена $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Довести, що операція $(f, g) \to [f, g]$ задовольняє тотожність Якобі
$$[[f, g], h] + [[g, h]f] + [[h, f], g] = 0, \quad f, g, h \in \mathbb{K}[x_1, x_2],$$
і таким чином $P_2(\mathbb{K}) := \mathbb{K}[x_1, x_2]$ є алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$.

4. Довести, що центр алгебри Лі $P_2(\mathbb{K})$ збігається з підполем $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Розділ 4

Диференціювання і автоморфізми кільця многочленів від двох змінних

В цьому розділі ми більш детально розглянемо локально нільпотентні диференціювання і автоморфізми кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ від двох змінних, де $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль. Для кільця многочленів від однієї змінної $\mathbb{K}[x]$ все ясно (див. вправу 1 після розділу 3): диференціювання D кільця $\mathbb{K}[x]$ є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $D = c\frac{\partial}{\partial x}$, де $c \in \mathbb{K}$; кожен автоморфізм кільця $\mathbb{K}[x]$ має вигляд $\theta(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{K}^{\star}, b \in \mathbb{K}$. Тому $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x]) \simeq Aff_1(\mathbb{K})$ – повна афінна група. Для кільця многочленів від двох змінних також можна описати локально нільпотентні диференціювання і дати більш менш задовільний опис групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2]$, це складає зміст двох наступних підрозділів.

§ 4.1 Теорема Ренчлера

Інформація про будова ядра диференціювання, зокрема локально нільпотентного, є дуже важливою в багатьох випадках для розуміння будови диференціювання і для застосувань.У зв'язку з цим наступний результат М.Нагати і А.Новіцького, який ми наводимо без доведення, представляє великий інтерес.

Теорема 4.1.1. *([23]) Нехай $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль і D – ненульове диференціювання кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]$. Тоді $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f]$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$.*

Цей результат можна узагальнити для кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$, але тільки для локально нільпотентних диференціювань:

Теорема 4.1.2. *(див., наприклад, [10]) Нехай D – ненульове локально нільпотентне диференціювання кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Тоді $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f, g]$ для деяких алгебраїчно незалежних над $\mathbb{K}$ многочленів f, g.*

Доведення цієї теореми, яка належить Міяніші дуже складне і ми його не наводимо.

Наступний результат дає достатню умову існування слайсу для локально нільпотентного диференціювання кільця многочленів від двох змінних.

Теорема 4.1.3. *Нехай $D = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ – локально нільпотентне диференціювання кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ і* НСД*($(a_1, a_2) = 1$. Тоді D має слайс в $\mathbb{K}[x_1, x_2]$.*

Доведення. Не втрачаючи загальності можна вважати, що основне поле алгебраїчно замкнене. Дійсно, інакше розглянемо алгебраїчне замикання $\overline{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}$ і кільце $\overline{\mathbb{K}} \bigotimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Продовжимо D природнім чином до диференціювання цього кільця. Легко бачити, що рівність НСД$(a_1, a_2) = 1$ виконується і в кільці $\overline{\mathbb{K}}[x_1, x_2]$. Далі, виберемо преслайс $p(x_1, x_2)$ для D в кільці $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ найменшого можливого степеня. Покажемо, що $D(p) \in \mathbb{K}$ (зауважимо, що $D(p) \neq 0$). Припустимо від супротивного, що $D(p) \notin \mathbb{K}$. Візьмемо який-небудь незвідний дільник $q(x_1, x_2)$ многочлена $D(p)$. Тоді $D(p) \in (q)$, де (q) – головний ідеал, породжений многочленом q. Розглянемо диференціювання $\overline{D}$ фактор-кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]/(q)$ індуковане диффеенціюванням D (за правилом: $\overline{D}(f + (q)) = D(f) + (q)$). Очевидно, $\overline{D}$ – локально нільпотентне диференіюівання області цілісності $\mathbb{K}[x_1, x_2]/(q)$ і $\overline{D} \neq 0$. Дійсно, якщо $\overline{D} \neq 0$, то $D(x_i) = a_i \in (q)$ і тоді НСД$((a_1, a_2)$ ділиться на q, що суперечить умові теореми.

Легко бачити, що ядро $\operatorname{Ker}\overline{D}$ збігається з полем $\mathbb{K}$. Дійсно, якщо $f+(q)\in\operatorname{Ker}\overline{D}, f\notin\mathbb{K}$, то степінь трансцендентності $\operatorname{Ker}\overline{D}$ над $\mathbb{K}$ не менше 1 і тоді, враховуючи рівність $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x_1,x_2]/(q)=1$, отримаємо, що $\overline{D}=0$, що неможливо за доведеним вище. Таким чином, $\operatorname{Ker}\overline{D}=\mathbb{K}$. Оскільки $D(p)\in(q)$, то $\overline{D}(p+(q))=0$ і тому $p+(q)=\lambda+(q)$ для деякого $\lambda\in\mathbb{K}$. Остання рівність означає, що $p-\lambda=hq$ для деякого многочлена $h\in K[x_1,x_2]$. Далі, $D^2(p)=0$ і тому $D^2(p-\lambda)=D^2(hq)=0$. Оскільки $q|D(p)$ і $D(p)\in\operatorname{Ker}D$, то $D(q)=0$ за теоремою 3.1.5 Тому $D^2(hq)=qD^2(h)=0$ і тоді рівність $p-\lambda=hq$ дає нерівність $\deg h<\deg q$, що суперечить мінімальності степеня многочлена p як преслайса для D. □

Зауваження 4.1.4. *Результат попередньої теореми не переноситься на кільця многочленів від $n\geq 3$ змінних. Дійсно, диференціювання $D=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\in\operatorname{Der}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3]$ є локально нільпотентним, задовольняє умову* НСД*$((a_1,a_2,a_3)=1$, але не має слайсів в кільці $\mathbb{K}[x_1,x_2,x_3]$. Дійсно, з рівності $x_2\frac{\partial s}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial s}{\partial x_3}=1$ при $x_2=0,x_3=0$ випливає рівність $0=1$, що неможливо.*

Наступна теорема є основним результатом даного розділу:

Теорема 4.1.5. *(Rentschler, [28]). Нехай D – ненульове локально нільпотентне диференціювання поліноміального кільця $\mathbb{K}[x_1,x_2]$. Тоді існує ручний автоморфізм $\varphi\in\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x_1,x_2]$ і многочлен $f(x_2)\in\mathbb{K}[x_2]$ такі, що $\varphi^{-1}D\varphi=f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Доведення. Ми доведемо тільки спрощений варіант цієї теореми, а саме не будемо доводити ручність автоморфізму φ, оскільки це найгроміздкіша частина доведення. Нехай

$$D=a\frac{\partial}{\partial x_1}+b\frac{\partial}{\partial x_2}, a,b\in\mathbb{K}[x_1,x_2]$$

і $g=$НСД(a,b). Розглянемо редуковане диференціювання $D_0=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, де $ga_1=a, gb_1=b$. За лемою 3.1.7 диференціювання D_0 локально нільпотентне і $D_0(g)=0$. За теоремою 4.1.3 існує слайс $f_1\in\mathbb{K}[x_1,x_2]$, тобто $D_0(f_1)=1$. Далі, за теоремою 3.1.5 $\mathbb{K}[x_1,x_2]=\operatorname{Ker}D[f_1]$, а за теоремою 4.1.1 виконується рівність $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f_2]$ для деякого многочлена $f_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Але тоді $\mathbb{K}[x_1, x_2] = \mathbb{K}[f_1, f_2]$, тобто f_1, f_2 – координатна система многочленів кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]$. Позначимо через φ автоморфізм кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]$, який визначається набором многочленів (f_1, f_2), тобто $\varphi(h(x_1, x_2)) = h(f_1, f_2)$ для довільного $h \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Оскільки $g \in \operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f_2]$, то $g = f(f_2)$ для деякого многочлена $f(t) \in \mathbb{K}[t]$. Далі, розглянемо диференціювання $D_1 = \varphi^{-1} D \varphi = \varphi^{-1} g D_0 \varphi$. Безпосередньо перевіряється, що виконуються рівності $D_1(x_1) = f(x_2), D_1(x_2) = 0$. Це означає, що $D_1 = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$. □

Розглянемо тепер проблему розпізнавання для локально нільпотентних диференціювань. Кожне диференціювання

$$D = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

визначає векторне поле $\overrightarrow{v}$ з поліноміальними коефіцієнтами на многовиді $\mathbb{K}^n$, яке діє на поліноміальні функції $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ за правилом $\overrightarrow{v}(f) = D(f)$. Дивергенція $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$ цього векторного поля називається *дивергенцією диференціювання* D, тобто $\operatorname{div} D = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$. Наступне твердження дає необхідну умову локальної нільпотентності для диференціювань поліноміальних кілець.

Теорема 4.1.6. *Якщо D – локально нільпотентне диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, то $\operatorname{div} D = 0$.*

Доведення. Продовжимо диференціювання D на кільце формальних степеневих рядів $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n, t]]$ і розглянемо автоморфізм $\exp tD$ цього кільця, який визначений за правилом:

$$\exp tD(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i(f) t^i, \ \ f \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n, t]].$$

Оскільки диференціювання D локально нільпотентне, то, як неважко переконатися, $\exp tD$ переводить підкільце многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]$ в себе (зокрема, при $t = 1$ ми маємо автоморфізм $\exp D$ кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$). Розглянемо матрицю Якобі $J(\exp tD)$ автоморфізму $\exp tD$ поліноміального кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]$. Як відзначалося раніше, якобіан $\det J(\exp tD)$ є ненульовою константою. Зокрема, в запису $\det J(\exp tD)$ коефіцієнт при змінній t дорівнює нулю. Обчислимо цей коефіцієнт. Автоморфізм $\exp tD$ задається набором многочленів $f_1, \dots, f_n, g$, де $f_i = \exp tD(x_i), g = \exp tD(t)$ (зауважимо, що $g = 1$ за визначенням $\exp tD$). Запишемо

$$f_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t) = \exp tD(x_i) = x_i + D(x_i)t + \cdots$$

(далі степені t більші за 1). Тому матриця Якобі $J(\exp tD)$ має вигляд

$$J(\exp tD) = I_{n+1} + \begin{pmatrix} (\frac{\partial D(x_i)}{\partial x_j})_{1 \le i,j \le n} & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \cdots ,$$

де далі записані добутки матриць на степені t, більші ніж 1. Зауважимо, що в верхньотрикутній матриці при змінній t на головній діагоналі стоять елементи $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, 0$. Звідси випливає, що коефіцієнт при t у визначнику $\det J(\exp tD)$ дорівнює $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{divD}$. Таким чином, $\mathrm{divD} = 0$. □

Наступне твердження дає легкий спосіб розпізнавання локально нільпотентних диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Теорема 4.1.7. *Нехай $D = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ – ненульове диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2]$. Позначимо $d = max \deg_{x_i} a_j$. Диференціювання D локально нільпотентне тоді і тільки тоді, коли $D^{d+2}(x_i) = 0, i = 1, 2$.*

Доведення. Достатність випливає із твердження 3.1.2. Доведемо необхідність. Нехай D – локально нільпотентне диференціювання. Тоді за теоремою 4.1.6 маємо $\mathrm{divD} = \frac{\partial \mathrm{a}_1}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\partial \mathrm{a}_2}{\partial \mathrm{x}_2} = 0$. Покажемо, що D є якобіанним диференціюванням, тобто $D = D_g$ для деякого многочлена g. Дійсно, оскільки $\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial a_2}{\partial x_2}$, то існує такий многочлен $g = g(x_1, x_2)$, що $a_1 = \frac{\partial g}{\partial x_2}, a_2 = -\frac{\partial g}{\partial x_1}$ (g – потенціал векторного поля $\overrightarrow{v} = a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$). Тоді $D = \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$, тобто $D = D_g$ – якобіанне диференціювання. При цьому $g \neq const$, бо $D \neq 0$.

Якщо $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$, то $g = g(x_2)$ і $D = g'(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1}$ і тоді твердження теореми очевидне. Аналогічно розглядається випадок, коли $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$. Тому далі вважаємо, що g'_{x_1} і g'_{x_2} – ненульові многочлени. Це означає, що $D(x_i) \neq 0, i = 1, 2$. Безпосередньо перевіряється, що для степенів розширень полів виконуються наступні співвідношення:

$$[\mathbb{K}(x_1, x_2) : \mathbb{K}(g)(x_1)] = \deg_{x_2} g,\ [\mathbb{K}(x_1, x_2) : \mathbb{K}(g)(x_2)] = \deg_{x_1} g.$$

Легко бачити також, що

$$[\mathbb{K}(x_1, x_2) : \mathbb{K}(g)(x_i)] \geq [\mathbb{K}(x_1, x_2) : Q(\operatorname{Ker} D)(x_i)], i = 1, 2$$

оскільки $g \in \operatorname{Ker} D$. Позначимо через N максимум степенів $\deg_{x_1} g, \deg_{x_2} g$. Тоді за теоремою 3.1.5, п.5 маємо $D^{N+1}(x_i) = 0, i = 1, 2$. Але з іншого боку

$$d = \max_{i,j} \deg_{x_i} a_j = \max_{i} \deg_{x_i} g - 1 = N - 1$$

і тому $N = d + 1$, що і доводить твердження теореми.

□

§ 4.2 Теорема Юнга-ван дер Кулька

Нехай як і раніше $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – кільце многочленів від n змінних. В групі автоморфізмів $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ як вже відзначалося у підрозділі 2.1 є важлива підгрупа, яка складається із автомофізмів, що задаються наборами многочленів $(F_1, \ldots, F_n)$, де $F_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i, a_{ij}, c_i \in \mathbb{K}$ і при цьому $\det(a_{ij}) \neq 0$ (ця підгрупа ізоморфна повній афінній групі $\operatorname{Aff}_n(\mathbb{K})$). В $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$ є ще одна (набагато "більша") підгрупа, підгрупа Жонк'єра $J_n(\mathbb{K})$, яка складається із так званих трикутних автоморфізмів, тобто автоморфізмів вигляду

$$\varphi = (a_1x_1 + f_1(x_2, \ldots, x_n), a_2x_2 + f_2(x_3, \ldots, x_n), \ldots, a_nx_n + f_n),$$

де $a_i \in \mathbb{K}^*,\ f_i \in \mathbb{K}[x_{i+1}, \ldots, x_n],\ f_n \in \mathbb{K}$.

Означення 4.2.1. *Ручною підгрупою* $T_n(\mathbb{K})$ *із* $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} A$ *називається підгрупа, яка породжена підгрупами* $\operatorname{Aff}_n(\mathbb{K})$ *і* $E_n(\mathbb{K})$, *тобто*
$T_n(\mathbb{K}) = \langle \operatorname{Aff}_n(\mathbb{K}), E_n(\mathbb{K}) \rangle$.

Неважко перевірити, що кожен елементарний автоморфізм є добутком деякої кількості елементів із $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{K})$ і $J_n(\mathbb{K})$. Тому має місце рівність $T_n(\mathbb{K}) = \langle \mathrm{Aff}_n(\mathbb{K}), J_n(\mathbb{K}) \rangle$.

Знаменита теорема Юнга – ван дер Кулька стверджує, що $T_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}[x_1, x_2]$, тобто кожен автоморфізм кільця многочленів від двох змінних є ручним. Для того, щоб сформулювати і довести цю теорему нам потрібно поняття амальгамованого вільного добутку двох груп G_1 і G_2. Спочатку нагадаємо більш просте поняття вільного добутку двох груп. Обмежимося "внутрішнім"добутком: Нехай G_1 і G_2 – підгрупи групи G такі, що $G_1 \cap G_2 = \{1\}$. Група G є вільним добутком підгруп G_1 і G_2, якщо кожен елемент $g \in G$ однозначно записується у вигляді добутку $g = g_1 g_2 \cdots g_n$, $n \geq 0$ (при $n = 0$ добуток завжди покладаємо рівним 1, де $g_i \in G_{j_i} \setminus \{1\}, j_i = 1, 2, j_i \neq j_{i+1}$. Позначення $G = G_1 \star G_2$. Якщо група G_i задана своїми твірними S_i і визначальними співвідношеннями $R_i, i = 1, 2$, то $G = G_1 \star G_2$ задається множиною твірних $S = S_1 \cup S_2$ і множиною визначальних співвідношень $R = R_1 \cup R_2$.

Трохи складніше визначається розклад групи G у вільний добуток двох своїх підгруп G_1 і G_2 з амальгамованою підгрупою $H = G_1 \cap G_2$, такий добуток позначається через $G_1 \star_H G_2$.

Теорема 4.2.1. *Група G розкладається у вільний добуток своїх підгруп G_1 і G_2 з амальгамованою підгрупою $H = G_1 \cap G_2$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови:*

1. *група G породжується підгрупами G_1, G_2;*

2. *якщо $g_1 g_2 \dots g_n = e$ в групі G, де $g_i \in G_{k_i}$, $k_i \in \{1, 2\}$, і $k_i \neq k_{i+1}$, то $g_i \in H$ для деякого i.*

Для підгрупи H групи $G_i, i = 1, 2$ виберемо повну систему T_i представників правих суміжних класів G_i за підгрупою H (суміжному класу H завжди відповідає представник 1). Тоді остання теорема означає, що група G є вільним добутком підгруп G_1 і G_2 з амальгамованою підгрупою $H = G_1 \cap G_2$, якщо кожен елемент $g \in G$ однозначно записується у вигляді добутку $g = h g_1 g_2 \cdots g_n$, $n \geq 0$, де $h \in H$, $g_i \in T_{k_i} \setminus \{1\}$, $k_i = 1$, або $k_i = 2$ і $k_i \neq k_{i+1}$.

Теорема (Юнг – ван дер Кульк)**.** *Нехай $\mathbb{K}$ - довільне поле. Тоді має місце рівність $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2] = T_2(\mathbb{K})$. Більш того, $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2]$ є амальгамованим вільним добутком підгруп $\operatorname{Aff}_2(\mathbb{K})$ і $J_2(\mathbb{K})$ над їх перетином.*

Доведення. Покажемо лише, що $T_2(\mathbb{K}) = \operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Візьмемо довільний автоморфізм $\varphi = (F_1, F_2)$ кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2]$. Тоді $\mathbb{K}[x_1, x_2] = \mathbb{K}[F_1, F_2]$ і диференціювання $\frac{\partial}{\partial F_1}$ цього кільця є локально нільпотентним. Тому за теоремою Ренчлера існує автоморфізм $\varphi \in T_2(\mathbb{K})$ і многочлен $f(x_2) \in \mathbb{K}[x_2]$ такі, що $\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}\varphi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$. Візьмемо довільний многочлен $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Тоді маємо $\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}\varphi(g) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(g) \in \operatorname{Ker}\frac{\partial}{\partial F_1} = \mathbb{K}[F_2]$. Це означає, що

$$\operatorname{Ker}\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}\varphi = \mathbb{K}[\varphi^{-1}(F_2)].$$

Але з іншого боку $\operatorname{Ker} f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} = \mathbb{K}[x_2]$ і тому $\mathbb{K}[x_2] = \mathbb{K}[\varphi^{-1}(F_2)]$. Легко бачити, що тоді $\varphi^{-1}(F_2) = cx_2 + d$ для деяких елементів $c \in \mathbb{K}^*$, $d \in \mathbb{K}$. Звідси отримаємо, що $F_2 = c\varphi(x_2) + d$. Оскільки $\frac{\partial F_1}{\partial F_1} = 1$, то $(\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial F_1}\varphi)(\varphi^{-1}F_1) = 1$ і тому $f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi^{-1}F_1) = 1$. Звідси випливає, що $\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi^{-1}F_1) \in \mathbb{K}^*$ і тому $\varphi^{-1}(F_1) = c_1x_1 + d_1(x_2)$ для деяких $c_1 \in \mathbb{K}^*$ і $d_1(x_2) \in \mathbb{K}[x_2]$. Але тоді $F_1 = c_1\varphi(x_1) + d_1\varphi(x_2)$. Таким чином ми отримали рівність

$$(F_1, F_2) = (c_1\varphi(x_1) + d_1\varphi(x_2), c\varphi(x_2) + d).$$

За умовою $\varphi \in T_2(\mathbb{K})$ і тоді із останньої рівності випливає, що

$$F = (F_1, F_2) \in T_2(\mathbb{K}).$$

□

Вправи

1. Показати, що кожен елемент групи $J_2(\mathbb{K})$ має вигляд $\varphi\psi_1 \cdots \psi_k$, де $\varphi \in \operatorname{Aff}_2(\mathbb{K})$ і кожен автоморфізм ψ_i є елементарним.

2. Нехай D – диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Многочлен f називається многочленом Дарбу D, якщо $D(f) = \lambda f$ для

деякого многочлена λ (не обов'язково $\lambda \in \Bbbk$). Многочлен λ називається комножником диференціювання D , який відповідає многочлену Дарбу f.

а) Довести: якщо f і g є многочленами Дарбу деякого диференціювання D, що відповідають комножникам λ і μ відповідно, то fg є многочленом Дарбу диференціювання D з комножником $\lambda + \mu$;

б) Нехай h многочлен Дарбу диференціювання D. Тоді довільний дільник многочлена h теж є многочленом Дарбу для δ.

3. Диференціюванням Ейлера кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ називається диференціювання $E = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Знайти всі многочлени Дарбу для диференціювання D (скористатися формулою Ейлера для однорідних многочленів).

Розділ 5

Алгебри Лі, що складаються з локально нільпотентних диференціювань

Як і раніше через A будемо позначати область цілісності над полем $\mathbb{K}$ і через $R = Q(A)$ – поле часток алгебри A. Як вже зазначалося раніше, кожне диференціювання D в A однозначно продовжується до диференціювання поля R.

Позначимо для зручності через $\mathrm{LND}(A)$ множину всіх локально нільпотентних диференціювань алгебри $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. Ця множина не є підалгеброю алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$, вона навіть не є $\mathbb{K}$-підпростором із $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. Легко показати, що сума двох локально нільпотентних диференціювань може вже не бути локально нільпотентним диференціюванням. Дійсно, $y\frac{\partial}{\partial x}$ і $x\frac{\partial}{\partial y}$ є локально нільпотентними диференціюваннями кільця многочленів $\mathbb{K}[x, y]$, але сума $y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ і комутатор $[y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}]$ вже не належать множині $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$. Тим не менше цікавим є питання про властивості підалгебр алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$, які містяться в множині $\mathrm{LND}(A)$, оскільки за такими підалгебрами можна будувати групи автоморфізмів алгебри A. Відкритим є питання про опис алгебр Лі, які містяться в множині $\mathrm{LND}(A)$ всіх локально нільпотентних диференціювань алгебри A (див., Проблему 11.7 в монографії [11]). Вивченню цього питання і присвячено даний розділ посібника.

§ 5.1 Скінченновимірний випадок

В цьому підрозділі ми даємо відповідь на проблему 11.7 із книги [11]) у скінченновимірному випадку, а саме ми покажемо, що кожна скінченновимірна (над полем $\mathbb{K}$) підалгебра з алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$, що складається з локально нільпотентних диференцювань, нільпотентна (Теорема 5.1.2). Цей опис може бути суттєво покращений у випадку кільця многочленів від двох змінних: а саме, якщо $A = \mathbb{K}[x, y]$, то доведено, що кожна підалгебра $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$ в $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ спряжена з деякою підалгеброю з трикутної алгебри Лі $u_2(\mathbb{K})$ за допомогою деякого автоморфізму з $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$. Нагадаємо, що за теоремою Ренчлера для кожного ненульового диференціювання $D \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$ існує многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ і автоморфізм $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$ такі, що $\theta D \theta^{-1} = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$. З використанням цієї теореми доведено, що кожна алгебра Лі L, що лежить в $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$, повністю міститься в принаймні одній з підалгебр, спряжених з $u_2(\mathbb{K})$ (Теорема 5.2.12).

Для доведення основних результатів цього розділу нам буде потрібен наступний, добре відомий критерій нільпотентності для скінченновимірних алгебр Лі (див., наприклад, [14]).

Лема 5.1.1. *Нехай L – скінченновимірна алгебра Лі над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$. Алгебра Лі L нільпотентна тоді і тільки тоді, коли кожна її двовимірна підалгебра абелева.*

Теорема 5.1.2. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$. Якщо підалгебра L алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ скінченновимірна над полем $\mathbb{K}$ і кожен елемент із L є локально нільпотентним диференціюванням області A, то алгебра Лі L нільпотентна.*

Доведення. Візьмемо довільну двовимірну підалгебру M із алгебри Лі L. Покажемо, що підалгебра M абелева. Дійсно, нехай це не так і M неабелева. Виберемо базис $\{D_1, D_2\}$ неабелевої підалгебри M такий, що $[D_1, D_2] = D_2$ і покажемо, що $\mathrm{Ker}\, D_1 \subseteq \mathrm{Ker}\, D_2$. Візьмемо довільний елемент $a \in \mathrm{Ker}\, D_1$. Тоді

$$D_2(a) = [D_1, D_2](a) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)(a) =$$

$$= D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(f)) = D_1(D_2(a)),$$

тому що $D_2(D_1(a)) = D_2(0) = 0$. Оскільки $D_1 \in \mathrm{LND}(A)$ і $D_1(D_2(a)) = D_2(a)$, то $D_2(a) = 0$ (за теоремою 3.1.5) і тому маємо $a \in \operatorname{Ker} D_2$. Але тоді $\operatorname{Ker} D_1 \subseteq \operatorname{Ker} D_2$, тому що елемент $a \in \operatorname{Ker} D_1$ був обраний довільно.

Нехай δ_1, δ_2 – продовження диференціювань D_1 і D_2 на поле часток $R = Q(A)$ відповідно. Позначимо через R_1, R_2 підполя констант в R для диференціювань δ_1 і δ_2 відповідно. Ненульові диференціювання D_1, D_2 локально нільпотентні в A, тому за теоремою 3.1.5 отримаємо рівності $Q(\operatorname{Ker} D_1) = R_1$ і $Q(\operatorname{Ker} D_2) = R_2$. З включення $\operatorname{Ker} D_1 \subseteq \operatorname{Ker} D_2$ випливає $R_1 \subseteq R_2$. Далі, з огляду на теорему 3.1.5(1,3) підполя R_1, R_2 алгебраїчно замкнені в полі R і тому $\mathrm{tr.deg}_{R_1} R = \mathrm{tr.deg}_{R_2} R = 1$. Але тоді, як неважко переконатися, $R_1 = R_2$, і тому $\operatorname{Ker} D_1 = \operatorname{Ker} D_2$. Позначимо для зручності $B = \operatorname{Ker} D_1 = \operatorname{Ker} D_2$. Використовуючи Лему 3.1.8, отримаємо, що існують ненульові елементи $c, d \in B$ такі, що $cD_1 = dD_2$. Але тоді

$$[cD_1, dD_2] = cd[D_1, D_2] = cdD_2 = 0$$

за теоремою 3.1.5. Оскільки $D_2 \neq 0$, то $cd = 0$. Останнє неможливо, тому що за умовою теореми A – область цілісності. Отримана суперечність показує, що кожна двовимірна підалгебра із скінченновимірної алгебри Лі L абелева. Тому за лемою 5.1.1 підалгебра L нільпотентна. Теорема доведена. □

Нагадаємо, що алгебра Лі L над полем $\mathbb{K}$ називається *локально скінченновимірною*, якщо кожна її скінченнопороджена підалгебра є скінченновимірною над $\mathbb{K}$.

Наслідок 5.1.3. *Нехай L – локально скінченновимірна підалгебра з алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Якщо $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$, то алгебра Лі L локально нільпотентна.*

§ 5.2 Підалгебри із $W_2(\mathbb{K})$, що складаються з локально нільпотентних диференціювань

В цьому підрозділі $A = \mathbb{K}[x, y]$ – кільце многочленів від двох змінних над полем $\mathbb{K}$ і $R = \mathbb{K}(x, y)$ – поле раціональних функцій.

Через $W_2(\mathbb{K})$ позначатимемо алгебру Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x,y])$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань алгебри A. Як відзначалося раніше, довільний елемент $D \in W_2(\mathbb{K})$ має вигляд

$$D = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

для деяких $f, g \in \mathbb{K}[x,y]$, де $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ – звичайні частинні похідні в $\mathbb{K}[x,y]$. Оскільки алгебра Лі $W_2(\mathbb{K})$ є векторним простором над полем $\mathbb{K}$ і одночасно модулем над кільцем $\mathbb{K}[x,y]$, то ми можемо говорити про лінійну залежність над $\mathbb{K}[x,y]$ для елементів з $W_2(\mathbb{K})$ і про ранг $\mathrm{rk}_A L$ над $A = \mathbb{K}[x,y]$ для будь-якої підалгебри $L \subseteq W_2(\mathbb{K})$.

Нагадаємо, що многочлен $a = a(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ називається *координатним*, якщо існує многочлен $b = b(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ такий , що $\mathbb{K}[x,y] = \mathbb{K}[a,b]$. Кажуть, що тоді многочлени a та b утворюють *координатну пару* (a,b).

Далі, для довільних многочленів $f,\ g \in \mathbb{K}[x,y]$ через $[f,g]$ позначатимемо якобіан цих многочленів, тобто визначник $\det J(f,g)$. Далі ми доведемо цілий ряд технічних лем, які потрібні для доведення основниї теореми цього підрозділу. Методи доведення цих лем можуть бути корисними і при дослідженні інших класів алгебр Лі, які складаються із локально нільпотентних диференціювань, тому ми наводимо достатньо розгорнуті доведення.

Нехай $f \in \mathbb{K}[x,y]$. Нагадаємо, що відображення $D_f : \mathbb{K}[x,y] \to \mathbb{K}[x,y]$, задане за правилом $D_f(h) = \det J(f,h),\ h \in \mathbb{K}[x,y]$, яке, як неважко переконатися, є диференціюванням кільця многочленів $\mathbb{K}[x,y]$, називається диференціюванням Якобі цього кільця, або якобіанним диференціюванням.

Лема 5.2.1. *([11], Corollary 4.7) Диференціювання D кільця многчленів $A = \mathbb{K}[x,y]$ є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $D = D_{f(a)} = f'(a)D_a$ для деякого координатного многочлена $a \in A$ і деякого многочлена від однієї змінної $f \in \mathbb{K}[t]$.*

Лема 5.2.2. *Нехай D_f, D_g – якобіанні диференціювання поліноміального кільця $A = \mathbb{K}[x,y]$. Тоді має місце рівність $[D_f, D_g] = D_{[f,g]}$, де $[f,g] = \det J(f,g)$ – визначник Якобі многочленів $f,\ g \in A$.*

Доведення. Пряма перевірка. $\square$

Далі для зручності будемо користуватися записом

$$[D_1, \underbrace{D_2, \ldots, D_2}_{k}] := [\ldots[[D_1, \underbrace{D_2], D_2], \ldots, D_2}_{k}].$$

Наслідок 5.2.3. *Нехай L – підалгебра з алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Якщо $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$, то L задовільняє умову Енгеля, тобто для довільних $D_1, D_2 \in L$ існує ціле число $k \geq 1$ (що залежить від D_1, D_2) таке, що*

$$[D_1, \underbrace{D_2, \ldots, D_2}_{k}] = 0.$$

Доведення. Виберемо довільні елементи $D_1, D_2 \in L$. Оскільки $D_1, D_2 \in \mathrm{LND}(A)$, то за лемою 5.2.1 маємо, що $D_1 = D_f$ та $D_2 = D_g$ для деяких $f, g \in A$. Використовуючи лему 5.2.2 отримаємо рівність $[D_1, D_2] = D_{[f,g]} = -D_g(f)$, де $[f, g] = \det J(f, g)$ – многочлен Якобі для $f, g \in A$. Далі,

$$[D_1, \underbrace{D_2, \ldots, D_2}_{k}] = D_h,$$

де $h = [\ldots[[f, \underbrace{g], g], \ldots, g}_{k}] = [f, \underbrace{g, g, \ldots, g}_{k}]$. Легко перевірити, що

$$[f, \underbrace{g, g, \ldots, g}_{k}] = (-1)^k D_g^k(f).$$

Оскільки диференціювання D_g локально нільпотентне, то ми отримаємо рівність $D_g^k(f) = 0$ для достатньо великого k. Останнє означає, що $[D_1, \underbrace{D_2, \ldots, D_2}_{k}] = 0.$ $\square$

Твердження 5.2.4. *[22, Corollary 7.2.10] Нехай $f,\ g \in \mathbb{K}[x, y]$ несталі многочлени такі, що $[f, g] = 0$. Тоді якобіанні диференціювання D_f і D_g лінійно залежні над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$.*

Зауважимо, що із [22, Proposition 7.2.4] випливає наступне твердження: якщо $a \in \mathbb{K}[x, y]$ – координатний многочлен і D_a – якобіанне диференціювання, індуковане a, то $\operatorname{Ker} D_a = \mathbb{K}[a]$.

Лема 5.2.5. *Нехай D_1, D_2 – локально нільпотентні диференціювання кільця $A = \mathbb{K}[x, y]$. Тоді*

1. *Якщо диференціювання D_1 і D_2 лінійно залежні над A, то існує координатний многочлен $a \in A$ такий, що $D_1 = D_{f(a)}$, $D_2 = D_{g(a)}$ для деяких $f, g \in \mathbb{K}[t]$.*

2. *Якщо D_1 і D_2 – лінійно незалежні над A комутуючі диференціювання, то існує координатна пара (a, c) така, що $D_1 = D_a$, $D_2 = D_c$.*

Доведення. Оскільки $D_1 \in \mathrm{LND}(A)$, то із леми 5.2.1 випливає, що $D_1 = D_{f(a)}$ для деякої координатної пари (a, b) і деякого $f \in \mathbb{K}[t]$. Аналогічно, оскільки $D_2 \in \mathrm{LND}(A)$, існує координатна пара (c, d), така що $D_2 = D_{g(c)}$ для деякого $g \in \mathbb{K}[t]$.

1. Нехай $r_1 D_1 + r_2 D_2 = 0$ для деяких $r_1, r_2 \in A$ і хоча б один із коефіцієнтів r_1, r_2 ненульовий. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_1 \neq 0$ і $D_2 \neq 0$. Тоді, як легко бачити, виконується рівність $\operatorname{Ker} D_1 = \operatorname{Ker} D_2$. Оскільки $\operatorname{Ker} D_1 = \mathbb{K}[a]$ і $\operatorname{Ker} D_2 = \mathbb{K}[c]$, то ми маємо рівність $\mathbb{K}[a] = \mathbb{K}[c]$. Але тоді $c = \varphi(a)$ для деякого $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, і

$$D_2 = D_{g(c)} = D_{g(\varphi(a))} = D_{g_1(a)}.$$

2. Нехай $D_1, D_2 \in \mathrm{LND}(A)$ – лінійно незалежні над A, комутуючі диференціювання. З огляду на лему 5.2.2 виконуються рівності

$$[D_1, D_2] = [D_{f(a)}, D_{g(c)}] = D_{[f(a), g(c)]} = 0,$$

де $[f(a), g(c)] = \det J(f(a), g(c))$. Неважко переконатися, що виконується рівність $[f(a), g(c)] = f'(a) g'(c) [a, c]$. Тоді ми отримаємо

$$D_{[f(a), g(c)]} = D_{f'(a) g'(c) [a, c]} = 0,$$

і тому $f'(a) g'(c) [a, c] \in \mathbb{K}$.

Покажемо тепер, що $f'(a) g'(c) [a, c] \in \mathbb{K}^*$. Дійсно, якщо $f'(a) g'(c) [a, c] = 0$, то $[a, c] = 0$, оскільки $f'(a) \neq 0$, $g'(c) \neq 0$ (зауважимо, що $\deg f \geq 1$ і $\deg g \geq 1$). Із рівності $[a, c] = 0$ випливає, що D_a і D_c лінійно залежні над A за твердженням 5.2.4, що суперечить нашому припущенню.

Отже, $f'(a)g'(c)[a,c] \in \mathbb{K}^*$, і зокрема $[a,c] \in \mathbb{K}^*$. Оскільки (a,b) – координатна пара, то існує многочлен $p(u,v) \in \mathbb{K}[u,v]$ такий, що $c = p(a,b)$. Звідси отримаємо, що

$$[a,c] = [a, p(a,b)] = \frac{\partial}{\partial b}(p(a,b))[a,b] \in \mathbb{K}^*.$$

Тому $\frac{\partial}{\partial b}(p(a,b)) \in \mathbb{K}^*$. З цього співвідношення випливає, що $c = p(a,b) = \mu b + q(a)$ для деякого $\mu \in \mathbb{K}^*$ і $q \in \mathbb{K}[t]$. Оскільки многочлени a та $\mu b + q(a)$ утворюють координатну пару в $A = \mathbb{K}[x,y]$, то набір (a,c) також є координатною парою в A. Далі, із співвідношення $f'(a)g'(c)[a,c] \in \mathbb{K}^*$ отримаємо рівності $\deg f = \deg g = 1$. Запишемо $f(t) = \alpha t + \beta$, $g(t) = \gamma t + \delta$ для $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$, $\alpha, \gamma \neq 0$. Тоді $D_1 = D_{\alpha a + \beta}$ і $D_2 = D_{\gamma b + \delta}$. Очевидно, що многочлени $\alpha a + \beta$ та $\gamma b + \delta$ утворюють координатну пару в A. Не втрачаючи загальності, можна позначити $\alpha a + \beta$ через a, $\gamma b + \delta$ – через c, і отримати $D_1 = D_a$, $D_2 = D_c$, де (a,c) – також координатна пара в A. $\square$

Лема 5.2.6. *Нехай L – абелева підалгебра з алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ (не обов'язково скінченновимірна над $\mathbb{K}$). Якщо $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$, то L – одна з наступних алгебр Лі:*

1. *$L = \mathbb{K}\big\langle \{f_i(a)D_a\}_{i \in I} \big\rangle$, де $\{f_i(t) \in \mathbb{K}[t], i \in I\}$ – скінченна або злічена нескінченна множина многочленів, які лінійно незалежні над $\mathbb{K}$, і $a \in A$ – координатний многочлен.*

2. *$L = \mathbb{K}\langle D_a, D_b \rangle$, де (a,b) – координатна пара в A.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $\mathrm{rk}_A L = 1$ і $D \in L$ – ненульовий елемент. За Лемою 5.2.1, існує координатний многочлен $a \in A$ такий, що $D = D_{f(a)} = f'(a)D_a$ для деякого $f \in \mathbb{K}[t]$. Виберемо довільний елемент $D_1 \in L$. Тоді D_1 та D лінійно залежні над A. За Лемою 5.2.5(1) існує $g \in \mathbb{K}[t]$ такий, що $D_1 = D_{g(a)} = g'(a)D_a$. Тому, $L \subseteq \mathbb{K}[a]D_a$. Оскільки $\mathbb{K}[a]D_a$ має злічений базис над $\mathbb{K}$, то можна вибрати скінченний або злічений базис $\{f_i(a)D_a\}_{i \in I}$ алгебри Лі L. Бачимо, що L – алгебра Лі типу 1 з умови леми.

Нехай тепер $\mathrm{rk}_A L = 2$. Виберемо довільні $D_1, D_2 \in L$, які лінійно незалежні над A. Оскільки алгебра Лі L абелева, то $[D_1, D_2] = 0$. За

Лемою 5.2.5(2) існує координатна пара $(a, b) \in A$ така, що $D_1 = D_a$, $D_2 = D_b$. Тоді для кожного $D = fD_a + gD_b \in L$, де $f, g \in A$ отримаємо

$$0 = [D_a, D] = D_a(f)D_a + D_a(g)D_b,$$

$$0 = [D_b, D] = D_b(f)D_a + D_b(g)D_b.$$

Оскільки D_a і D_b лінійно незалежні над A, то виконуються рівності $D_a(f) = D_a(g) = 0$ і $D_b(f) = D_b(g) = 0$. З цих рівностей випливає, що $f, g \in \operatorname{Ker} D_a \cap \operatorname{Ker} D_b = \mathbb{K}$. Тому $L = \mathbb{K}\langle D_a, D_b \rangle$. □

Лема 5.2.7. *Нехай L – підалгебра рангу 2 над A алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Якщо $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$, то існують лінійно незалежні (над A) елементи $D_1, D_2 \in L$ такі, що $[D_1, D_2] = 0$. Більше того, існує координатна пара $(a, b) \in A$ така, що $D_1 = D_a, D_2 = D_b$.*

Доведення. Виберемо довільні лінійно незалежні над A елементи $D_1, D_2 \in L$. Визначимо послідовність елементів $D_2, D_3, \ldots, D_k, \ldots \in L$ покладаючи $D_{k+1} = [D_k, D_1] \in L$ для $k \geq 2$. За Наслідком 5.2.3, існує таке найменше натуральне s, $s \geq 2$, що $D_{s+1} = 0$. Якщо D_1 і D_s лінійно незалежні над A, тоді перепозначимо D_s через D_2 і твердження леми виконується. Припустимо, що D_1, D_s лінійно залежні над A. Тоді за лемою 5.2.5(1) існує координатний многочлен $a \in A$ такий, що $D_1 = D_{f(a)}$, $D_s = D_{h(a)}$ для деяких $f, h \in \mathbb{K}[t]$. Оскільки $D_{s-1} \in \mathrm{LND}(A)$, то з леми 5.2.1 випливає, що існує координатний многочлен $c \in A$ такий, що $D_{s-1} = D_{g(c)}$ для деякого $g \in \mathbb{K}[t]$. Зауважимо далі, що D_1 і D_{s-1} лінійно незалежні над A. Дійсно, в іншому випадку $D_1 = D_{f_1(d)}$ і $D_{s-1} = D_{g_1(d)}$ для деякого координатного многочлена $d \in A$ і $f_1, g_1 \in \mathbb{K}[t]$ (див. Лема 5.2.5). За Лемою 5.2.2,

$$[D_{g_1(d)}, D_{f_1(d)}] = D_{g_1'(d) f_1'(d)[d,d]} = 0,$$

і тому $[D_{s-1}, D_1] = D_s = 0$. Останнє суперечить нашому вибору елемента D_s.

Із лінійної незалежності елементів D_1 і D_{s-1} випливає, що $\det J(a, c) = [a, c] \neq 0$. Справді, якщо $[a, c] = 0$, то за твердженням 5.2.4 диференціювання D_a і D_c лінійно залежні. Але тоді диференціювання $D_1 = D_{f(a)} =$

$f'(a)D_a$ і $D_2 = D_{g(c)} = g'(c)D_c$ також лінійно залежні, що суперечить нашому припущенню. Далі ми маємо

$$D_s = [D_{s-1}, D_1] = [D_{g(c)}, D_{f(a)}] = D_{[g(c),f(a)]} = D_{g'(c)f'(a)[c,a]},$$

і оскільки $D_s = D_{h(a)}$, то отримаємо

$$g'(c)f'(a)[c,a] = h(a) + \gamma. \tag{5.1}$$

для деякого $\gamma \in \mathbb{K}$. Поле $\mathbb{K}$ алгебраїчно замкнене, тому маємо розклад многочлена в добуток лінійних множників

$$h(a) + \gamma = \mu(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\dots(a - \alpha_k),$$

де $\mu \in \mathbb{K}^\star$ і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – всі корені многочлена $h(a) + \gamma$. Перепишемо рівність (5.1) у вигляді

$$g'(c)f'(a)[c,a] = \mu(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\dots(a - \alpha_k). \tag{5.2}$$

Многочлен a – координатний і тому, як неважко переконатися, всі многочлени $a - \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, – незвідні.

Покажемо, що $[c,a] \in \mathbb{K}^*$. За відзначеним вище, $[c,a] \neq 0$. Припустимо, що $[c,a] \in \mathbb{K}[x,y] \setminus \mathbb{K}$. Із рівності (5.2) випливає, що $[c,a]$ ділиться на деякий многочлен $a - \alpha_i$, не втрачаючи загальності можна вважати, що на $a - \alpha_1$.Але тоді $[c,a] = D_c(a) = (a - \alpha_1)u(x,y)$ для деякого $u(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$. Очевидно, що $D_c(a - \alpha_1) = (a - \alpha_1)u(x,y)$ і звідси $D_c(a - \alpha_1) = 0 = [c,a]$ (див., теорема 3.1.5). Отримана суперечність показує, що $[c,a] \in \mathbb{K}^\star$. З цього співвідношення випливає $[D_c, D_a] = D_{[c,a]} = 0$. Оскільки диференціювання D_a і D_c лінійно незалежні над A, то за Лемою 5.2.5, ми бачимо що (a,c) – координатна пара для $A = \mathbb{K}[x,y]$.

Тепер знайдемо елемент $\widetilde{D}$ такий, що D_{s-1} і $\widetilde{D}$ лінійно незалежні над A і $[\widetilde{D}, D_{s-1}] = 0$. З рівності (5.2) випливає, що $g'(c)$ – ненульова константа, оскільки вираз $\mu(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\dots(a - \alpha_k)$ ділиться на $g'(c)$ і многочлени a, c алгебраїчно незалежні над полем $\mathbb{K}$. Але тоді $g(c) = \beta c + \sigma$ для деяких $\beta \in \mathbb{K}^*$, $\sigma \in \mathbb{K}$ і $D_{s-1} = D_{g(c)} = D_{\beta c + \sigma}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_{s-1} = D_c$ і $[a,c] = 1$. Позначимо степінь многочлена $f(t)$ через m (нагадаємо, що $D_1 = D_{f(a)}$) і покладемо

$$\widetilde{D} = [D_1, \underbrace{D_{s-1}, \dots, D_{s-1}}_{m-1}] = D_{f^{(m-1)}(a)[a,c]} \in L,$$

де $f^{(m-1)}(t)$ – $(m-1)$-а похідна многочлена $f(t)$. Оскільки $\deg f(t) = m$, то $\widetilde{D} = D_{\delta a+\tau}$ для деякого $\delta \in \mathbb{K}^*$, $\tau \in \mathbb{K}$ і, не втрачаючи загальності можна вважати, що $\widetilde{D} = D_a$. Тому D_{s-1} і $\widetilde{D}$ лінійно незалежні над A. Більше того, $[\widetilde{D}, D_{s-1}] = D_\delta = 0$. Отже, позначившии $D_1 = \widetilde{D}$ і $D_2 = D_{s-1}$, ми отримаємо потрібні диференціювання, і таким чином (a, c) – координатна пара в A. □

Лема 5.2.8. *Нехай L – підалгебра рангу 2 над A із алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Якщо $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$ і $\dim_{\mathbb{K}} L \geq 3$, то існує автоморфізм θ кільця A такий, що $\theta L \theta^{-1}$ містить елементи $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}$.*

Доведення. За лемою 5.2.7 алгебра Лі L містить елементи D_a, D_b для деякої координатної пари (a, b). Ці елементи лінійно незалежні над A і $[D_a, D_b] = 0$. Визначимо автоморфізм $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ за правилом: $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$. Тоді φ індукує автоморфізм $\widetilde{\varphi}$ алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$, а саме: $\widetilde{\varphi}(D) = \varphi D \varphi^{-1}$ для довільного $D \in W_2(\mathbb{K})$ (див., наприклад, [3]). Легко бачити, що $\varphi D_a \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial y}$ і $\varphi D_b \varphi^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x}$. Позначимо $L_1 = \varphi L \varphi^{-1}$. Підалгебра L_1 алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ складається з локально нільпотентних диференціювань кільця A і $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in L_1$.

Покажемо, що підалгебра L_1 містить елемент D вигляду

$$D = p(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

з $\deg p \leq 1, \deg q \leq 1$, де хоча б один із цих многочленів несталий. Візьмемо довільний елемент $D_1 \in L_1 \setminus \mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ (такий елемент існує, оскільки $\dim_{\mathbb{K}} L \geq 3$). Запишемо його у вигляді

$$D_1 = u(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

де $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\deg u \geq \deg v$ and $\deg u \geq 1$. Далі, використовуючи наступні співвідношення

$$[\frac{\partial}{\partial x}, D_1] = u'_x \frac{\partial}{\partial x} + v'_x \frac{\partial}{\partial y}, \quad [\frac{\partial}{\partial y}, D_1] = u'_y \frac{\partial}{\partial x} + v'_y \frac{\partial}{\partial y},$$

можна показати, що для деяких $s, k,\ s \geq k$ виконується

$$\frac{\partial^s u}{\partial x^k y^{s-k}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^s v}{\partial x^k y^{s-k}} \frac{\partial}{\partial y} \in L_1,$$

де многочлен $\frac{\partial^s u}{\partial x^k \partial y^{s-k}}$ степеня 1 і $\frac{\partial^s v}{\partial x^k \partial y^{s-k}}$ степеня меншого або рівного 1. Тому можна вважати, що підалгебра L_1 містить елемент

$$D = p(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

де $\deg p \leq 1$, $\deg q \leq 1$ і $D \notin \mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in L_1$, то елемент D може бути вибраний у вигляді

$$D = (\alpha_{11} x + \alpha_{12} y) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_{21} x + \alpha_{22} y) \frac{\partial}{\partial y},$$

де $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \in \mathbb{K}$ і хоча б один із цих коефіцієнтів ненульовий.

Локально нільпотентне диференціювання D має нульову дивергенцію з огляду на теорему 4.1.6, тому має місце рівність $\alpha_{11} + \alpha_{22} = \mathrm{div} D = 0$. Але тоді можна записати

$$D = (\alpha_{11} x + \alpha_{12} y) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_{21} x - \alpha_{11} y) \frac{\partial}{\partial y}$$

звідки $D = D_h$ для многочлена

$$h = \alpha_{21} x^2/2 - \alpha_{11} xy - \alpha_{12} y^2/2.$$

За лемою 5.2.1 існує координатний многочлен $c \in A$ такий, що $h = g(c)$ для деякого многочлена $g(t) \in \mathbb{K}[t]$. Якщо $\deg g = 1$, то h є координатним многочленом, що неможливо, оскільки многочлен h звідний, як однорідний многочлен від двох змінних. Звідси отримаємо $\deg g = 2$ і $\deg c = 1$. Пряма перевірка показує, що існують $\mu, \nu \in \mathbb{K}$ такі, що $h = (\mu x + \nu y)^2$. Виберемо многочлен $\mu_1 x + \nu_1 y$ $(\mu_1, \nu_1 \in \mathbb{K})$ так, щоб $\mu \nu_1 - \mu_1 \nu = 1$. Тоді многочлени $\mu x + \nu y,\ \mu_1 x + \nu_1$ утворюють координатну пару в $\mathbb{K}[x, y]$, і тому існує автоморфізм ψ кільця A визначений за правилом:

$$\psi(\mu x + \nu y) = x, \quad \psi(\mu_1 x + \nu_1 y) = y.$$

Позначимо $L_2 = \psi L_1 \psi^{-1}$. Легко перевірити, що

$$\psi D_{\mu x+\nu y}\psi^{-1} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \psi D_{\mu_1 x+\nu_1 y}\psi^{-1} = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

Оскільки $D_{\mu x+\nu y},\ D_{\mu_1 x+\nu_1 y} \in L_1$, то мають місце включення $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in L_2$. Далі, з рівності $\psi D_h \psi^{-1} = 2x\frac{\partial}{\partial y}$ випливає, що $x\frac{\partial}{\partial y} \in L_2$. Тому $L_2 = \theta L \theta^{-1}$ і $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\} \subseteq L_2$, де $\theta = \psi\varphi \in \mathrm{Aut}A$. $\square$

Лема 5.2.9. *Нехай L – підалгебра з алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ така, що $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$. Якщо $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\} \subseteq L$, то кожен елемент $D = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ з L такий, що $\max\{\deg p, \deg q\} \leq 1$, належить підалгебрі Лі $\mathbb{K}\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\rangle$.*

Доведення. Оскільки $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \in L$, то не втрачаючи загальності можна вважати, що елемент D має вигляд

$$D = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y)\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_{21}x + \alpha_{22}y)\frac{\partial}{\partial y},$$

де $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \in \mathbb{K}$ і хоча б один із цих коефіцієнтів ненульовий. Диференціювання D локально нільпотентне, тому ми маємо $\mathrm{div}D = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$ за теоремою 4.1.6. Тоді

$$[x\frac{\partial}{\partial y}, D] = \alpha_{12}(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) - 2\alpha_{11}x\frac{\partial}{\partial y} \in L.$$

Оскільки $x\frac{\partial}{\partial y} \in L$ одержуємо $\alpha_{12}(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) \in L$. Але $(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) \notin \mathrm{LND}(A)$ і тому $\alpha_{12} = 0$. Отже, $D = \alpha_{11}(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) + \alpha_{21}x\frac{\partial}{\partial y}$. Аналогічно можна показати, що $\alpha_{11} = 0$. Звідси отримаємо, що $D = \alpha_{21}x\frac{\partial}{\partial y}$ і $D \in \mathbb{K}\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\rangle$. $\square$

Лема 5.2.10. *Нехай L – підалгебра алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ така, що $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$. Якщо $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\} \subseteq L$, то для довільного диференціювання $D = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in L$ з $\max\{\deg p, \deg q\} \geq 1$ виконуються наступні умови:*

1. $\deg p < \deg q$;

2. *старша однорідна компонента многочлена* $q = q(x, y)$ *залежить лише від* x.

Доведення. Припустимо від супротивного, що диференціювання $D = p(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \in L$ задовольняє умови леми і $\deg p \geq \deg q$. Позначимо $m = \deg p$. Тоді $m \geq 1$ за умовою леми. Оскільки

$$[\frac{\partial}{\partial x}, D] = p'_x\frac{\partial}{\partial x} + q'_x\frac{\partial}{\partial y} \in L \text{ і } [\frac{\partial}{\partial y}, D] = p'_y\frac{\partial}{\partial x} + q'_y\frac{\partial}{\partial y} \in L,$$

то, як неважко показати, для всіх невід'ємних цілих $k, s,\ k \leq s$, має місце співвідношення

$$\frac{\partial^s p}{\partial x^k \partial y^{s-k}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^s q}{\partial x^k \partial y^{s-k}}\frac{\partial}{\partial y} \in L.$$

Позначимо через $p_m(x, y)$ старшу однорідну компоненту многочлена $p(x, y)$. Запишемо цю компоненту у вигляді $p_m(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i,m-i}x^i y^{m-i}$ для $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j = 0, 1, \ldots, m$, і нехай, наприклад, $\alpha_{k,m-k} \neq 0$. Припустимо спочатку, що $k > 0$. Тоді як і вище маємо включення

$$D_1 := \frac{\partial^{m-1} p}{\partial x^{k-1} \partial y^{m-k}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^{m-1} q}{\partial x^{k-1} \partial y^{m-k}}\frac{\partial}{\partial y} \in L,$$

і D_1 має вигляд

$$D_1 = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\delta_1 x + \mu_1 y + \nu_1)\frac{\partial}{\partial y},$$

де коефіцієнти при x і y лежать в полі $\mathbb{K}$. Оскільки $\alpha_{k,m-k} \neq 0$, то маємо $\alpha_1 \neq 0$. Останнє неможливо за лемою 5.2.9 і тому $k = 0$, тобто $\alpha_{0,m} \neq 0$. Але тоді ми маємо

$$D_2 := \frac{\partial^{m-1} p}{\partial y^{m-1}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^{m-1} q}{\partial y^{m-1}}\frac{\partial}{\partial y} \in L.$$

Таким чином, D_2 має вигляд

$$D_2 = (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\frac{\partial}{\partial x} + (\delta_2 x + \mu_2 y + \nu_2)\frac{\partial}{\partial y}$$

з коефіцієнтами в полі $\mathbb{K}$. Як і раніше виконується співвідношення $\alpha_2 \neq 0$, оскільки $\alpha_{0,m} \neq 0$, що неможливо. Тому $\deg p < \deg q$ для довільного диференціювання $D = p(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \in L$.

Позначимо $n = \deg q(x,y)$ і нехай $q_n(x,y)$ – старша однорідна компонента многочлена q. Припустимо, що $\deg_y q_n(x,y) = l \geq 1$. Тоді як і в попередніх пунктах можна показати, що виконується включення

$$D_3 := \frac{\partial^{n-1}p}{\partial x^{n-l}\partial y^{l-1}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^{n-1}q}{\partial x^{n-l}\partial y^{l-1}}\frac{\partial}{\partial y} \in L$$

і D_3 має вигляд

$$D_3 = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + (\beta x + \gamma y + \delta)\frac{\partial}{\partial y}$$

з $\gamma \neq 0$ тому, що за нашим припущенням $\deg_y q_n = l$. Оскільки $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\} \subseteq L$, то отримаємо включення $y\frac{\partial}{\partial y} \in L$, що неможливо, тому що $y\frac{\partial}{\partial y} \notin \mathrm{LND}(A)$. Отримана суперечність показує, що $\deg_y q_n(x,y) = 0$ і тому $q_n = q_n(x)$. □

Лема 5.2.11. *Нехай L – підалгебра із алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ така, що $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$. Якщо $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}\} \subseteq L$, то кожен елемент $D \in L$ має вигляд $D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + q(x)\frac{\partial}{\partial y}$, де $\alpha \in \mathbb{K}$ і $q(t) \in \mathbb{K}[t]$.*

Доведення. Припустимо, що L містить елементи D виду $D = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ з $p(x,y) \in \mathbb{K}[x,y] \setminus \mathbb{K}$. Виберемо серед них який-небудь елемент $D = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ з найменшим $\deg q$. Покажемо, що $p(x,y)$ – многочлен лише від змінної x. Припустимо від супротивного, що $p'_y(x,y) \neq 0$. Тоді

$$D_1 := [x\frac{\partial}{\partial y}, D] = [x\frac{\partial}{\partial y}, p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}] = xp'_y\frac{\partial}{\partial x} + (-p + xq'_y)\frac{\partial}{\partial y}$$

і $D_1 \in L$. Оскільки $xp'_y \neq \mathrm{const}$, ми маємо, що $\deg(-p + xq'_y) \geq \deg q$ за вибором многочлена q. За лемою 5.2.10(1), $\deg p < \deg q$, а за лемою 5.2.10(2), $\deg q'_y \leq \deg q - 2$. Тому $\deg(-p + xq'_y) < \deg q$. Це суперечить нашому вибору елемента D, і отримана суперечність показує, що $p'_y = 0$, тобто $p = p(x)$.

Далі маємо включення

$$[\frac{\partial}{\partial x}, D] = p'_x\frac{\partial}{\partial x} + q'_x(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in L$$

і $\deg q'_x < \deg q$. За вибором елемента D отримаємо включення $p'_x \in \mathbb{K}$. Оскільки $p(x) \in \mathbb{K}[x,y] \setminus \mathbb{K}$, то $p(x) = \alpha x + \beta$ для деякого $\alpha \in \mathbb{K}^\star, \beta \in \mathbb{K}$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\beta = 0$, оскільки за умовою леми $\frac{\partial}{\partial x} \in L$. Але тоді

$$D = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

і тому

$$[\frac{\partial}{\partial x}, D] = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + q'_x(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in L.$$

Із останнього співідношення отримаємо $q'_x(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in L$. Із включення $L \subseteq \mathrm{LND}(A)$ випливає, що кожен елемент із підалгебри L має нульову дивергенцію і тоді, як легко бачити, $q''_{xy}(x,y) = 0$.

Далі, як неважко переконатися, $q(x,y) = u(y) + r(x)$ для деяких многочленів від однієї змінної $u(t), r(t) \in \mathbb{K}[t]$. Останнє означає, що

$$D = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + (u(y) + r(x))\frac{\partial}{\partial y},$$

і оскільки $\mathrm{div} D = \alpha + u'(y) = 0$, то ми отримаємо рівність $u(y) = -\alpha y + \delta$ для деякого $\delta \in \mathbb{K}$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial y} \in L$, то можна вважати, що $\delta = 0$ і тоді

$$D = \alpha(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) + r(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

За лемою 5.2.1 елемент D має вигляд $D = D_{-\alpha xy + s(x)}$ для деякого многочлена $s(x)$ такого, що $s'(x) = r(x)$. За тією ж лемою ми маємо рівність $-\alpha xy + s(x) = f(a)$ для координатного многочлена $a = a(x,y)$ і деякого $f(t) \in \mathbb{K}[t]$. Зауважимо, що $a'_y(x,y) \neq 0$, бо в іншому випадку $\alpha = 0$, що суперечить нашому припущенню щодо α (нагадаємо $\alpha \in \mathbb{K}^*$).

Згідно останнього зауваження, якщо $\deg f(t) \geq 2$, то ми маємо нерівність $\deg_y f(a) \geq 2$, що неможливо в силу рівності $f(a) = -\alpha xy + s(x)$. Отже, $\deg f(t) = 1$ і $f(a) = \alpha xy + s(x)$ –координатний многочлен кільця $\mathbb{K}[x,y]$. Позначимо через s_0 вільний член многочлена $s(x)$. Очевидно, що $f(a) - s_0 = -\alpha xy - s(x) - s_0$ також є координатним многочленом.

Але многочлен $\alpha xy - s(x) - s_0$ ділиться на x і тому є звідним. Отримана суперечність показує, що кожен елемент $D \in L$ має вигляд

$$D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Оскільки $\mathrm{div}D = q'_y(x,y) = 0$, то многочлен q залежить тільки від x. Отже, диференціювання D має вигляд $D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + q(x)\frac{\partial}{\partial y}$. □

Нагадаємо, що трикутна підалгебра $u_2(\mathbb{K})$ алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ складається з усіх диференціювань кільця $\mathbb{K}[x,y]$ вигляду $D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x)\frac{\partial}{\partial y}$, де $\alpha \in \mathbb{K}, \beta(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Теорема 5.2.12. *Нехай L – підалгебра із алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$. Якщо кожен елемент із L є локально нільпотентним диференціюванням кільця $\mathbb{K}[x,y]$, то існує автоморфізм $\varphi : \mathbb{K}[x,y] \to \mathbb{K}[x,y]$ такий, що $L_1 = \varphi L \varphi^{-1}$ – підалгебра із трикутної алгебри Лі $u_2(\mathbb{K})$.*

Доведення. Якщо алгебра L абелева, то твердження теореми випливає з леми 5.2.6. Нехай L неабелева. Тоді $\mathrm{rk}_A(L) = 2$ і $\dim_{\mathbb{K}} L \geq 3$. За лемою 5.2.8, існує автоморфізм φ кільця многочленів $\mathbb{K}[x,y]$ такий, що алгебра Лі $L_1 = \varphi L \varphi^{-1}$ містить елементи $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}$. За лемою 5.2.11, кожен елемент $D \in L_1$ має вигляд $D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + q(x)\frac{\partial}{\partial y}$. Останнє означає, що $L_1 \subseteq u_2(\mathbb{K})$. □

Наслідок 5.2.13. *Кожна максимальна (за включенням) підалгебра із алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$, яка міститься в множині $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x,y])$, збігається або з трикутною підалгеброю $u_2(\mathbb{K})$, або з однією з її підалгебр спряжених за допомогою автоморфізмів кільця $\mathbb{K}[x,y]$.*

На жаль, небагато відомо про підалгебри алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$, які складаються із локально нільпотентних диференціювань. Відзначимо лише деякі результати про будову диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x,y,z]$, які могли б бути корисними при вивченні під алгебр із $W_3(\mathbb{K})$.

Теорема 5.2.14. *(Теорема Міяніші) див., наприклад, [11], Th. 5.1) Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле характеристики нуль і D – ненульове локально нільпотентне диференціювання кільця $\mathbb{K}[x,y,z]$. Тоді $\mathrm{Ker}\,D = \mathbb{K}[f,g]$ для деяких алгебраїчно незалежних над $\mathbb{K}$ многочленів $f,\ g \in \mathbb{K}[x,y,z]$.*

Визначимо диференціювання Якобі $D_{(f,g)}$ для многочленів $f, g \in \mathbb{K}[x, y, z]$, як $D_{(f,g)}(h) = \det J(f, g, h)$ для всіх $h \in \mathbb{K}[x, y, z]$, де $J(f, g, h)$ – матриця Якобі многочленів f, g і h.

Теорема 5.2.15. *[7] Нехай диференціювання $D \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y, z])$ ненульове і $f, g \in \mathbb{K}[x, y, z]$ такі, що $\mathrm{Ker}\, D = \mathbb{K}[f, g]$. Тоді $D = hD_{(f,g)}$, де $D_{(f,g)}$ – диференціювання Якобі і $h \in \mathrm{Ker}\, D$.*

Відзначимо, що ці результати не дозволяють довести, що кожна алгебра Лі $L \subseteq \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y, z])$ є енгелевою (як у наслідку 5.2.3). Зокрема тому, що на відміну від випадку двох змінних, многочлени f і g з теореми Міяніші не є координатними, тобто в загальному випадку $\mathbb{K}[x, y, z] \neq \mathbb{K}[f, g, t]$ для деякого $t \in \mathbb{K}[x, y, z]$.

Вправи

1. Довести, що відображення D_f кільця многочленів в себе, задане за правилом $D_f(h) = \det J(f, h)$, $h \in \mathbb{K}[x, y]$ є диференціюваням кільця $\mathbb{K}[x, y]$.

2. Показати, що векторний простір $\mathbb{K}[x, y]$ (над полем $\mathbb{K}$) з бінарною операцією $[f, g] = \det J(f, g)$ утворює алгебру Лі над полем $\mathbb{K}$. Ця алгебра Лі позначається через $P_2(\mathbb{K})$ і є насправді алгеброю Пуассона над $\mathbb{K}$.

3. Довести, що центр Z алгебри Лі $P_2(\mathbb{K})$ співпадає з $\mathbb{K}$, а фактор-алгебра $P_2(\mathbb{K})/Z$ є простою алгеброю Лі (нескінченновимірною).

Розділ 6

Розв'язні і нільпотентні алгебри Лі диференціювань

В цьому розділі ми розглянемо алгебри Лі диференціювань довільних областей цілісності, а обмеження будуть накладатися на самі алгебри Лі. Ми будемо розглядати такі алгебри, які мають скінченний ранг над полем часток області цілісності. Нехай A – область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль і R – поле часток алгебри A. Як вже згадувалося, кожне диференціювання D області A однозначно продовжується до диференціювання поля часток R за правилом: $D(a/b) = (D(a)b - aD(b))/b^2$. Очевидно, що $R \operatorname{Der} A$ є підалгебра алгебри Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ and $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ ізоморфно вкладається в алгебру Лі $R \operatorname{Der} A$. Для зручності ми будемо позначати алгебру Лі $R \operatorname{Der} A$ через $W(A)$, вона є векторним простором над полем R і алгеброю Лі над $\mathbb{K}$, але не над R в загальному випадку. Якщо L – підалгебра із $W(A)$, то розмірність векторного простору RL над полем R будемо називати *рангом* алгебри L над R і позначати $\mathrm{rk}_R L$.

Всі підпростори і всі підалгебри із $W(A)$ розглядаються над полем $\mathbb{K}$, якщо не вказане інше поле. Якщо L – підалгебра алгебри Лі $W(A)$, то поле $F = \{r \in R \mid D(r) = 0 \text{ for all } D \in L\}$ будемо називати *полем констант* для алгебри Лі L в полі R. Через $s(L)$ будемо позначати ступінь розв'язності (розв'язної) алгебри Лі L. Якщо алгебра Лі L містить ідеал N і підалгебру B такі, що $L = N + B, N \cap B = 0$, то ми позначаємо через $L = B \leftthreetimes N$ напівпрямий добуток алгебр Лі B і N.

§ 6.1 Нільпотентні підалгебри скінченного рангу алгебри Лі $W(A)$

Далі будуть використовуватися наступні твердження, які перевіряються безпосередньо.

Лема 6.1.1. *Нехай $D_1, D_2 \in W(A)$ і $a, b \in R$. Тоді мають місце рівності:*

1. $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$.
2. *Якщо $a, b \in \ker D_1 \cap \ker D_2$, то $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.*

Нехай L – ненульова підалгебра рангу k над R із алгебри Лі $W(A)$ і $\{D_1, \dots, D_k\}$ – базис L над R (тобто максимальна лінійно незалежна система векторів із множини L). Нагадаємо, що підмножина RL із $W(A)$ складається із усіх $\mathbb{K}$-лінійних комбінацій елементів aD, де $a \in R$, $D \in L$; аналогічно можна визначити множину FL (F=F(L) – поле констант для алгебри Лі L в R).

Лема 6.1.2. *Нехай L – ненульова підалгебра із $W(A)$ і нехай FL, RL – $\mathbb{K}$-простори, визначені вище. Тоді:* 1. *FL і RL – $\mathbb{K}$-підалгебри алгебри Лі $W(A)$. Більш того, FL є алгеброю Лі над полем F.*

2. *Якщо алгебра Лі L є абелевою, нільпотентною або розв'язною, то такою ж відповідно буде і алгебра Лі FL.*

Доведення. Безпосередня перевірка. □

Лема 6.1.3. *Нехай L – підалгебра скінченного рангу над R із алгебри Лі $W(A)$, $Z = Z(L)$ – центр алгебри L і F– поле констант для L. Тоді $\mathrm{rk}_R Z = \dim_F FZ$ і FZ – підалгебра із центру $Z(FL)$. Зокрема, якщо L – абелева, то FL також абелева підалгебра із $W(A)$ і $\mathrm{rk}_R L = \dim_F FL$.*

Доведення. Нехай $\{D_1, \dots, D_k\}$ – базис Z над R. Візьмемо довільний елемент $D \in Z$ і запишемо $D = a_1D_1 + \dots + a_kD_k$, де $a_i \in R$. Тоді для довільного елемента $S \in L$ маємо :

$$0 = [S, D] = [S, a_1D_1 + \dots + a_kD_k] = S(a_1)D_1 + \dots + S(a_k)D_k.$$

Оскільки елементи $D_1, \dots, D_k$ лінійно незалежні над R, то із останніх співвідношень випливає, що $S(a_i) = 0, i = 1, \dots, k$. Таким чином, $a_i \in F, i = 1, \dots, k$ і $\{D_1, \dots, D_k\}$ – базис алгебри Лі FL над F. Останнє означає, що $\mathrm{rk}_R Z = \dim_F FZ$. $\square$

Лема 6.1.4. *Нехай L – підалгебра алгебри Лі $W(A)$ і I – ідеал алгебри L. Тоді векторний простір $RI \cap L$ (над полем $\mathbb{K}$) є також ідеалом алгебри Лі L.*

Доведення. Візьмемо довільний елемент $\sum_{k=1}^m r_k i_k \in RI \cap L$ з $r_k \in R$, $i_k \in I$, $k = 1, \dots, m$. Тоді для довільного елемента $D \in L$ отримаємо:

$$[D, \sum_{k=1}^m r_k i_k] = \sum_{k=1}^m (D(r_k) i_k + r_k [D, i_k]) \in RI \cap L.$$

Це завершує доведення леми. $\square$

Лема 6.1.5. *Нехай L – нільпотентна підалгебра рангу $k > 0$ над R із алгебри Лі $W(A)$. Тоді:*

1. *L містить ряд ідеалів*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_k = L \tag{6.1}$$

таких, що $\mathrm{rk}_R I_s = s$, $s = 0, \dots, k$.

2. *L містить R-базис $\{D_1, \dots, D_k\}$ такий, що $I_s = L \cap (RD_1 + \cdots + RD_s)$, $s = 1, \dots, k$ і $[L, D_s] \subset I_{s-1}$.*

3. $\dim_F FL/FI_{k-1} = 1$.

4. $[I_j, I_j] \subset I_{j-1}$, $j = 1, \dots, k$.

Доведення. 1-2. Візьмемо ненульовий елемент $D_1 \in Z(L)$ і покладемо $I_1 = RD_1 \cap L$. Тоді I_1 – ідеал із L за Лемою 6.1.4. Припустимо, що ми вже побудували множину елементів $D_1, \dots, D_j$ таких, що $\mathbb{K}$-простори $I_s = L \cap (RD_1 + \cdots + RD_s)$, $s = 1, \dots, j$ є ідеалами алгебри Лі L і $[L, D_s] \subset I_{s-1}$ для $s = 1, \dots, j$ з $\mathrm{rk}_R I_s = s$. Візьмемо одновимірний ідеал $\langle D_{j+1} \rangle + I_j$ нільпотетної фактор-алгебри L/I_j. Тоді $[L, D_{j+1}] \subset I_j$ і елементи $D_1, \dots, D_{j+1}$ лінійно незалежні над R. Покладемо $I_{j+1} = L \cap (RD_1 + \cdots + RD_{j+1})$. Тоді

I_{j+1} – ідеал із L за Лемою 6.1.4 і $\text{rk}_R I_{j+1} = j + 1$. Таким чином ми побудували по індукції ланцюг (6.1) ідеалів і базис $\{D_1, \ldots, D_k\}$ алгебри Лі L. Цей базис, очевидно, задовольняє умову 2 of даної леми.

3. Візьмемо довільні елементи $D = a_1 D_1 + \cdots + a_k D_k \in L$ і D_i з базису $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Тоді, використовуючи Лему 6.1.1 отримаємо:

$$[D_i, \sum_{j=1}^{k} a_j D_j] = \sum_{j=1}^{k} D_i(a_j) D_j + \sum_{j=1}^{k} a_j [D_i, D_j]$$

Оскільки $[D_i, I_s] \subseteq I_{s-1}$, то, як легко бачити із останнього співвідношення $D_i(a_k) = 0, i = 1, \ldots, k$. Це означає, що $a_k \in F$ і таким чином $\dim_F FL/FI_{k-1} = 1$. Частина 3 Леми доведена.

4. Нехай $S = \sum_{i=1}^{j} a_i D_i$ і $T = \sum_{i=1}^{j} b_i D_i$ – довільні елементи із I_j. Тоді:

$$[S, T] = [\sum_{i=1}^{j} a_i D_i, \sum_{i=1}^{j} b_i D_i] = \tag{6.2}$$

$$= [\sum_{i=1}^{j-1} a_i D_i, \sum_{i=1}^{j-1} b_i D_i] + [\sum_{i=1}^{j-1} a_i D_i, b_j D_j] + +[a_j D_j, \sum_{i=1}^{j-1} b_i D_i] + [a_j D_j, b_j D_j].$$

Перші три доданки в праві частині останньої рівності лежать в $RD_1 + \ldots + RD_{j-1}$ з огляду на частину 2 даної леми. Покажемо, що $[a_j D_j, b_j D_j] = 0$. Дійсно, застосовуючи частину 3 даної леми до алгебри Лі I_j (замість L) ми бачимо, що $\dim_{F_j} F_j I_j / F_j I_{j-1} = 1$, де F_j – поле констант для I_j. Таким чином елементи a_j і b_j лінійно залежні над F_j, нехай, наприклад, $\alpha a_j + \beta b_j = 0$ для деяких $\alpha, \beta \in F_j$. Якщо $\alpha \neq 0$, то $a_j = -\alpha^{-1} \beta b_j$ і $[a_j D_j, b_j D_j] = [-\alpha^{-1} \beta b_j D_j, b_j D_j] = 0$ оскільки $\alpha^{-1} \beta \in F_j \subseteq ker D_j$. Аналогічно $[a_j D_j, b_j D_j] = 0$ при умові, що $\beta \neq 0$. Таким чином, права частина рівності (6.2) лежить в I_{j-1}. Частина 4 доведена. $\square$

Наслідок 6.1.6. *Нехай L – нільпотентна підалгебра рангу k над R із алгебри Лі $W(A)$. Тоді ступінь розвязності алгебри L не перевищує k.*

Доведення. Див. частину 4 леми 6.1.5. $\square$

Зауваження 6.1.7. *Ми будемо далі використовувати наступне майже очевидне твердження: якщо V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і U, W*

– підпростори із V скінченної ковимірності, то підпростір $U \cap W$ має також скінченну ковимірність в V.

Лема 6.1.8. *Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і L – скінченновимірний $\mathbb{K}$-підпростір із $\mathrm{End}(V)$. Припустимо, що L діє нільпотентно на V (тобто, $L^n(V) = 0$ для деякого $n \geq 1$). Якщо векторний простір $V_0 = \{v \in V \mid Lv = 0\}$ скінченновимірний над $\mathbb{K}$, то $\dim V < \infty$.*

Доведення. Індукція за найменшим числом n таким, що $L^n(V) = 0$. Якщо $n = 1$, то $LV = 0$, $V = V_0$ і тоді $\dim(V) < \infty$ за умовами леми. Розглянемо $\mathbb{K}$-підпростір $U = L(V)$ простору V. Векторний простір $U_0 = \{u \in U \mid Lu = 0\}$ має, очевидно, скінченну розмірність над $\mathbb{K}$ і $L^{n-1}(U) = 0$. За індуктивним припущенням $\dim U < \infty$. Виберемо баазис $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ із L над $\mathbb{K}$. Із доведеного вище випливає, що $\dim V/\ker g_i < \infty$ оскільки лінійний оператор g_i відображає V в U і при цьому $\dim U < \infty$. Але тоді $\dim V/\cap_{i=1}^k \ker g_i < \infty$ за зауваженням 6.1.7 і таким чином V_0 має скінченну ковимірність в V. Оскільки $\dim V_0 < \infty$ за умовами леми, то $\dim V < \infty$. □

Теорема 6.1.9. *Нехай L – нільпотентна підалгебра скінченного рангу над R із алгебри Лі $W(A)$ і $F = F(L)$ – поле констант для L. Тоді алгебра Лі FL скінченновимірна над полем F.*

Доведення. Нехай $k = \mathrm{rk}_R L$ і $0 = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_k = L$ ряд ідеалів алгебри Лі L, який був побудований в лемі 6.1.5. Візьмемо базис $\{D_1, \ldots, D_k\}$ алгебри L над R отриманий таким способом як в лемі 6.1.5. Доведемо індукцією за i, що $\dim_F FL/FI_{k-i} < \infty$. Це виконується для $i = 1$ за лемою 6.1.5, part (3). Припустимо, що $\dim_F FL/FI_j < \infty$ for $j = k - i$ і розглянемо природню дію (за допомогою множення) алгебри FL на F-просторі $V = FI_j/FI_{j-1}$. За лемою 6.1.5 виконується включення $[FI_j, FI_j] \subset FI_{j-1}$ і тому $FI_jV = 0$. Отже V є модулем над скінченновимірною (over F) алгеброю Лі FL/FI_j. Алгебра Лі FL/FI_j діє нільпотентно на V оскільки алгебра FL нільпотентна. Нехай $V_0 = \{v \in V \mid (FL/FI_j)v = 0\}$ і $D = a_1D_1 + \cdots + a_jD_j$ – представник довільного елемента із $V_0 \subseteq V = FI_j/FI_{j-1}$. Тоді для $i = 1, \ldots, k$ отримаємо

$$[D_i, D] = [D_i, a_1D_1 + \ldots a_jD_j] =$$

$$= [D_i, a_1D_1 + \dots a_{j-1}D_{j-1}] + a_j[D_i, D_j] + D_i(a_j)D_j \in I_{j-1}.$$

Перший і другий доданки в правій частині останньої рівності лежать в I_{j-1}, і тому $D_i(a_j)D_j \in I_{j-1}$. Це означає, що $D_i(a_j) = 0, i = 1, \dots, k$, отже $a_j \in F$ за означенням поля F. Таким чином, $\dim_F V_0 = 1$ і за лемою 6.1.8 отримаємо, що $\dim_F FI_j/FI_{j-1} < \infty$. Але тоді $\dim_F FL/FI_{j-1} = \dim_F FL/FI_{k-(i+1)} < \infty$. Коли $i = k$ ми отримаємо нерівність $\dim_F FL < \infty$. □

Твердження 6.1.10. *Нехай L – нільпотентна підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і $F = F(L)$ її поле констант. Тоді:*

1. *Якщо* $\mathrm{rk}_R L = 1$, *то* L *абелева і* $\dim_F FL = 1$.

2. *Якщо* $\mathrm{rk}_R L = 2$, *то існують елементи* $D_1, D_2 \in FL$ *і* $a \in R$ *такі, що*

$$FL = F\langle D_1, aD_1, \dots, \frac{a^k}{k!}D_1, D_2\rangle,\ k \geq 0\ (\textit{if}\, k = 0,\ \textit{then put}\, FL = F\langle D_1, D_2\rangle),$$

де $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = 1$.

Доведення. 1. Твердження випливає із леми 6.1.5, ч. 3.

2. Нехай $\mathrm{rk}_R L = 2$. Припустимо, що $\mathrm{rk}_R Z(L) = 2$ і let $\{D_1, D_2\}$ – базис центру $Z(L)$ над R. Покладемо $I_k = RD_k \cap L,\ k = 1, 2$. Оскільки $I_1 \cap I_2 = 0$ і $\dim_F FL/FI_k = 1, k = 1, 2$ за лемою 6.1.5, то ми бачимо, що $\dim_F FL = 2$ і $FL = F\langle D_1, D_2 \mid [D_1, D_2] = 0\rangle$ типу 2 із леми. Нехай тепер $\mathrm{rk}_R Z(L) = 1$, $D_1 \in Z(L)$ – ненульовий елемент і $I_1 = RD_1 \cap L$. Тоді I_1 – абелевий ідеал алгебри L і $\dim_F FL/FI_1 = 1$ за лемою 6.1.5. Виберемо довільний ненульовий елемент $D_2 \in L \setminus I_1$. Елементи D_1, D_2 утворюють базис алгебри L над R і $[D_1, D_2] = 0$. Оскільки алгебра Лі L нільпотентна, то оператор $\mathrm{ad}\, D_2$ діє нільпотентно на абелевому ідеалі FI_1 алгебри FL над полем F.

Покажемо, що $\mathrm{ad}\, D_2$ має в деякому базисі векторного простору FI_1 (над F) матрицю, яка складається із однієї жорданової клітинки. Дійсно, кожен жордановий ланцюжок для оператора $\mathrm{ad}\, D_2$ на FI_1 містить один елемент вигляду aD_1 такий, що $[D_2, aD_1] = 0$. Але тоді $D_2(a) = 0$ і приймаючи до уваги рівність $D_1(a) = 0$ ми отримаємо $a \in F$. Останнє означає, що $\mathrm{ad}\, D_2$ має точно один жордановий ланцюжок $\{D_1, a_1D_1, \dots, a_kD_1\}$

на I_1 з $a_i \in R$ і його матриця в цьому базисі є жордановою клітинкою. Оскільки $[D_2, D_1] = 0, [D_2, a_1 D_1] = D_1, \ldots, [D_2, a_k D_1] = a_{k-1} D_1$, то ми маємо

$$D_2(a_1) = 1, D_2(a_2) = a_1, \ldots, D_2(a_k) = a_{k-1}.$$

Позначаючи $a = a_1$, отримаємо $D_2(a_2 - a^2/2!) = 0$. Далі, з рівності $D_1(a_2 - a^2/2!) = 0$ отримаємо включення $a_2 - a^2/2! \in F$. Але тоді без втрати загальності можна взяти $a_2 = a^2/2!$. Повторюючи ці міркування ми отримаємо базис $\{D_1, aD_1, \ldots, (a^n/n!)D_1\}$ ідеалу FI_1. $\square$

Зауваження 6.1.11. *Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – кільце многочленів від n змінних над полем $\mathbb{K}$. Тоді $\operatorname{Der} A = W_n(\mathbb{K})$– алгебра Лі всіх векторних полів на многовиді $\mathbb{K}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами. Візьмемо елементи $D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ із алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ і покладемо $a = x_2 \in A$. Очевидно, що алгебра Лі*

$$L_n = F\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, (x_2^n/n!)\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\rangle,$$

де $F = \mathbb{K}(x_3, \ldots, x_n)$ – поле констант для L, нільпотентна класу нільпотентності $n-2$. Якщо ми розглянемо об'єднання $L = \cup_{i=1}^{\infty} L_i$ зростаючої послідовності алгебр Лі $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots$, то алгебра Лі L розвязна ступеня розв'язності 2 і нескінченновимірна над полем F.

§ 6.2 Розв'язні підалгебри із алгебри Лі $W(A)$

Лема 6.2.1. *Нехай L – розв'язна підалгебра рангу 1 над R із алгебри Лі $W(A)$ і $F = F(L)$ – її поле констант в R. Тоді:*

1. *Якщо L абелева, то алгебра Лі FL має розмірність 1 над полем F.*
2. *Якщо L неабелева, то $\dim_F FL = 2$. Зокрем, $s(L) = 2$.*

Доведення. 1. Нехай L абелева. Оскільки L нільпотентна рангу 1 над R, то з урахуванням Твердження 6.1.10 отримаємо, що $\dim_F FL = 1$. 2. Припустимо, що L неабелева і візьмемо максимальний (за включенням) абелевий ідеал $I \subset L$ і ненульовий елемент $D_1 \in I$. Тоді $FI = FD_1$

має розмірність 1 над полем F за доведеним вище. Виберемо довільні два елементи $b_1D_1, b_2D_1 \in L \setminus I$ (нагадаємо, що всі елементи із L мають вигляд aD_1 для деякого $a \in R$). Оскільки I – максимальний абелевий ідеал алгебри L, то ми маємо $C_L(I) = I$ і тому $[D_1, b_iD_1] = D_1(b_i)D_1 \neq 0, i = 1, 2$. Позначаючи $D_1(b_i) = a_i, i = 1, 2$ отримаємо із останніх співвідношень, що a_1, a_2 – ненульові елементи із поля $F = \ker D_1$. Але тоді $D_1(a_1^{-1}b_1 - a_2^{-1}b_2) = 0$ і таким чином $a_1^{-1}b_1 - a_2^{-1}b_2 \in F$. Останнє включення означає, що елементи b_1D_1, b_2D_1 лінійно залежні над F і FL неабелева алгебра Лі розмірності 2 над полем F. □

Зауваження 6.2.2. *Виникає природне запитання: як будувати розвязні підалгебри рангу* 1 *із алгебр Лі* $W(A)$*? Відповідь наступна: для того, щоби побудувати абелеву алгебру Лі потрібно взяти довільний* $\mathbb{K}$*-підпростір* V *із підполя* $\ker D_1$ *і покласти* $L = VD_1$*. Тоді алгебра Лі* L *абелева і кожна абелева алгебра Лі рангу* 1 *над* R *може бути отримана таким способом. Щоб побудувати неабелеву алгебру Лі потрібно взяти диференціювання* D_1*, для якого існує елемент* $b \in R$ *з властивістю* $D_1(b) = 1$*. Тоді* L *є підалгеброю алгебри Лі* $(\ker D_1)D_1 + (b \ker D_1)D_1$*. Остання алгебра Лі ізоморфна повній афінній алгебрі Лі* $ga_1(\ker D_1)$*.*

Лема 6.2.3. *Нехай* L *– розв'язна підалгебра рангу* k *над* R *із алгебри Лі* $W(A)$ *з полем констант* $F = F(L)$ *і* I *– ідеал алгебри* L *такий, що* $I = RI \cap L$*. Якщо* $\mathrm{rk}_R I = k-1$*, то* $\dim_F FL/FI \leq 2$*, зокрема,* $s(L/I) \leq 2$*. Крім того, якщо* $\dim_F FL/FI = 2$*, то* $s(L/I) = 2$*.*

Доведення. Візьмемо R-базис $\{D_1, \ldots, D_k\}$ алгебри Лі L такий, що елементи $D_1, \ldots, D_{k-1}$ утворюють R-базис ідеалу I. Розглянемо наступний $\mathbb{K}$-підпростір $M \subset RL$:

$$M = \{a_kD_k \mid \exists a_1, \ldots, a_{k-1} \text{ з } a_1D_1 + \cdots + a_{k-1}D_{k-1} + a_kD_k \in L\}.$$

Легко бачити, що M – підалгебра рангу 1 над R із алгебри Лі RL. Оскільки підалгебра M має ступінь розв'язності ≤ 2 за лемою 6.2.1 і $L/I \simeq M$, то ми отримаємо $s(L/I) \leq 2$.

Візьмемо довільний ненульовий абелевий ідеал J/I алгебри Лі L/I. Довільний елемент $D \in J \setminus I$ може бути записаний у вигляді $D = a_1D_1 +$

$\ldots + a_k D_k$ з $a_i \in R$ і $a_k \neq 0$. Тоді

$$[D_i, D] = [D_i, (\sum_{i=1}^{k-1} a_i D_i) + a_k D_k] = [D_i, (\sum_{i=1}^{k-1} a_i D_i)] + [D_i, a_k D_k] =$$

$$= i_1 + D_i(a_k) D_k + a_k [D_i, D_k], \ i = 1, \ldots, k-1,$$

де $i_1 = [D_i, \sum_{i=1}^{k-1} D_i] \in I$ за вибором базису $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Оскільки $[D_i, D] \in I, i = 1, \ldots, k-1$, ми отримаємо $D_i(a_k) = 0, \ i = 1, \ldots, k-1$. Далі, не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_k \in J$. Далі, з того, що фактор-алгебра J/I абелева випливає, що $[D_k, a_k D_k] \in I$ і таким чином $D_k(a_k) = 0$. Тоді $a_k \in F$ і $\dim_F FJ/FI = 1$. Зокрема, якщо $\dim_F FL/FI = 2$, то $s(L/I) = 2$. Якщо фактор-алгебра L/I абелева, то виконується рівність $\dim_F FL/FI = 1$. Нехай FL/FI неабелева. Тоді її комутант (похідна підалгебра) абелевий і тому одновимірний над полем F за лемою 6.2.1. Ми можемо вважати, що $FD_k + FI/FI$ є похідною підалгеброю фактор-алгебри FL/FI. Якщо $\dim_F FL/FI > 2$, то існує елемент $i_1 + aD_k \in FL \setminus (FD_k + FI)$ з умовою $i_1 \in RI$ і $a \in R$ такі, що $[D_k, i_1 + a_k D_k] \in I$. Останнє означає, що $D_k(a) = 0$ і, беручи до уваги рівності $D_1(a_k) = 0, i = 1, \ldots, k-1$, отримані аналогічно ми бачимо, що $a_k \in F$. Але тоді $i_1 + a_k D_k \in FD_k + FI$. Останнє включення неможливе за вибором цього елемента і отримана суперечність показує, що $\dim_F FL/FI = 2$. □

Наступне твердження легко виводиться із теореми С.Лі для розв'язних алгебр Лі над полями характеристики нуль і її модифікації для поля простої характеристики (див., наприклад, [13], Теорема 4.1 і Вправа 2 на стор.20). Ми не вимагаємо, щоб основне поле було алгебраїчно замкнене, оскільки завжди можна розглядати всі об'єкти над алгебраїчним замиканням $\overline{\mathbb{K}}$. Нагадаємо, що через $s(L)$ ми позначаємо ступінь розв'язності (розв'язної) алгебри Лі L.

Лема 6.2.4. *Нехай $\mathbb{K}$ – поле, V – векторний простір розмірності n над $\mathbb{K}$ і L – розвязна підалгебра із повної лінійної алгебри Лі $gl_n(\mathbb{K})$. Якщо* $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$ *або* $\mathrm{char}\mathbb{K} > n$, *то* $s(L) \leq n$.

Теорема 6.2.5. *Нехай L – розвязна підалгебра рангу k над R алгебри Лі $W(A)$. Якщо основне поле $\mathbb{K}$ характерики нуль, то ступінь розвязності $s(L)$ алгебри L не перевищує $2k$. Більш того, якщо L скінченновимірна над полем констант $F(L)$, то $s(L) \leq k+1$.*

Доведення. Оскільки $s(L) = s(FL)$ ми можемо зразу вважати, що $L = FL$. Нехай J_1 – абелевий ідеал алгебри L максимального рангу над R, і нехай $\mathrm{rk}_R J_1 = k_1$. Виберемо базис $D_1, \dots, D_{k_1}$ ідеалу J_1 над R і позначимо $I_1 = RJ_1 \cap L$. Тоді I_1 є також ідеалом алгебри L за лемою 6.1.4 і при цьому $\mathrm{rk}_R I_1 = k_1$. Нехай J_2/I_1 – абелевий ідеал фактор-алгебри L/I_1 такий, що J_2 має максимальний ранг над R. Позначимо $I_2 = RJ_2 \cap L$. Тоді I_2 – ідеал алгебри L рангу k_2 над R. Як і раніше візьмемо базис $D_{k_1+1}, \dots, D_{k_2}$ алгебри Лі J_2/I_1. Продовжуючи ці міркування ми побудуємо ряд ідеалів:

$$0 \subset J_1 \subseteq I_1 \subset \cdots \subset J_s \subseteq I_s = L,$$

з $\mathrm{rk}_R I_j = \mathrm{rk}_R J_j = k_j$, де J_j/I_{j-1} абелева, $I_j = RJ_j \cap L, j = 1, \dots, s$. Одночасно ми отримаємо R-базис $\{D_1, \dots, D_{k_s}\}$ алгебри L такий, що $D_{k_{j-1}+1}, \dots, D_{k_j}$ – базис факто-алгебри J_j/I_{j-1}, $j = 1 \dots s$.

Доведення теореми проведемо індукцією за числом s. Якщо $s = 0$, то $L = \{0\}$ і доведення очевидне. Нехай $s \geq 1$. За індуктивним припущенням $s(I_{s-1}) \leq 2k_{s-1}$. Покажемо, що абелевий ідеал J_s/I_{s-1} має розмірність $k_s - k_{s-1}$ над полем F. Дійсно, для кожного елемента

$$D = c_1 D_1 + \cdots + c_{k_{s-1}} D_{k_{s-1}} + c_{k_{s-1}+1} D_{k_{s-1}+1} + \cdots + c_{k_s} D_{k_s} \in J_s$$

ми маємо $[D_j, D] \in I_{s-1}$, $j = 1 \dots k_s$. Тому можна записати:

$$[D_j, D] = \sum_{i=k_{s-1}+1}^{k_s} (D_j(c_i) D_i + c_i [D_j, D_i]) + [D_j, \sum_{i=1}^{k_{s-1}} c_i D_i].$$

Оскільки $[D_j, D_i] \in I_{s-1}, i = k_{s-1}+1, \dots, k_s$ і друга сума в правій частині рівності лежить в I_{s-1}, ми отримаємо, що $D_j(c_i) = 0$, $j = 1 \dots, k_s$, $i = k_{s-1}+1, \dots, k_s$. Отже $c_i \in F$, $i = k_{s-1}+1, \dots, k_s$ за означенням поля F. Таким чином, $\dim_F J_s/I_{s-1} = k_s - k_{s-1}$.

Зауважимо, що ми також довели, що централізатор ідеалу J_s/I_{s-1} в алгебрі Лі L/I_{s-1} співпадає з J_s/I_{s-1}. Тому алгебра L/J_s діє точно на F-просторі J_s/I_{s-1} розмірності $k_s - k_{s-1}$ над полем F. Оскільки $C_{L/J_s}(J_s/I_{s-1}) =$

J_s/I_{s-1}, то розв'язна алгебра Лі L/J_s може бути ізоморфно вкладена в повну лінійну алгебру Лі $gl_{k_s-k_{s-1}}(F)$. Відомо, що розв'язні підалгебри цієї алгебри Лі мають ступінь розв'язності $\leq k_s - k_{s-1}$ (за лемою 6.2.4), тому маємо $s(L/J_s) \leq k_s - k_{s-1}$. Але тоді $s(L) \leq 2k_{s-1} + k_s - k_{s-1} \leq 2k_s = 2k$.

Якщо L скінченновимірна над полем F, то $[L, L]$ нільпотентна ступеня розв'язності $\leq k$ за наслідком 6.1.6. Але тоді $s(L) \leq k + 1$. Це завершує доведення теореми. □

Зауваження 6.2.6. *Перша частина теореми 6.2.5 залишається справедливою і для випадку простої характеристики основного поля $\mathbb{K}$ при умові, що $\mathrm{char}\mathbb{K} > k$ (оскільки доведення використовує лише лему 6.2.4 з таким обмеженням на ранг k).*

Наслідок 6.2.7. *Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле і A – одна із наступних алгебр над $\mathbb{K}$:*

(1) $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – поліноміальна алгебра;

(2) $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ – алгебра формальних степеневих рядів;

(3) $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ – поле раціональних функцій;

(4) $\mathbb{K}((x_1, \ldots, x_n))$ – поле часток алгебри $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Нехай $\mathfrak{D}(A)$ – алгебра Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань D алгебри A вигляду $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ з $f_i \in A$ (у випадках (1) і (2) $\mathfrak{D}(A)$ співпадає очевидно з $\mathrm{Der}\, A$). Якщо L – нільпотентна підалгебра із $\mathfrak{D}(A)$, то L скінченновимірна над полем констант $F(L)$ і її ступінь розв'язності $s(L) \leq n$. Якщо L розв'язна і основне поле $\mathbb{K}$ має характеристику нуль, то $s(L) \leq 2n$.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ і $\overline{W}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Der}\, A$ – алгебра Лі всіх векторних полів з коефіцієнтами. які є формальними степеневими рядами.

Наслідок 6.2.8. *Нехай L – нільпотентна (розв'язна) підалгебра із алгебри Лі $\overline{W}_n(\mathbb{K})$. Тоді ступінь розв'язності алгебри L не перевищує n ($2n$ відповідно).*

Останнє твердження було доведено в роботі [21], де воно використовувалося для вивчення груп автоморфізмів кільця формальних степеневих рядів. Як показує наступний приклад, оцінка із теореми 6.2.5 не може бути покращена (див. також [21]).

Приклад 6.2.9. *Нехай* $L = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \overline{W}_n(\mathbb{K}) \mid a_j \in \mathbb{K}[[x_1, \ldots x_{j-1}]] + x_j\mathbb{K}[[x_1, \ldots x_{j-1}]]\}$. *Тоді ступінь розв'язності підалгебри* L *дорівнює* $2n$.

Наслідок 6.2.10. *Нехай* X *– незвідний афінний многовид розмірності* n *над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль і* A_X *– його координатне кільце. Якщо* L *нільпотентна (розв'язна) підалгебра із* $\mathrm{Der}\, A_X$, *то ступінь розв'язності* L *не перевищує* n *(ii*$2n$*).*

Якщо L – розв'язна підалгебра рангу 2 над R із алгебри Лі $W(A)$, то L міститься в деякій максимальній (за включенням) розв'язній підалгебрі рангу 2 над R. Дійсно, нехай S_2 – множина всіх розв'язних підалгебр рангу 2 над R із $W(A)$. Використовуючи теорему 6.2.5 можна показати, що множина S_2 індуктивно впорядкована (за включенням) і тому за лемою Цорна існує максимальний елемент в множині S_2. Наступне твердження показує можливі типи таких максимальних розв'язних підалгебр рангу 2 над R. Оскільки кожне розв'язна підалгебра L рангу 2 над R із $W(A)$ міститься в деякій максимальній підалгебрі того ж самого типу, то ми отримаємо (грубу) характеризацію таких алгебр Лі.

Твердження 6.2.11. *Нехай* L *– розв'язна підалгебра із* $W(A)$ *яка є максимальною за включенням серед всіх розв'язних підалгебр рангу* 2 *над* R *із* $W(A)$ *і нехай* $F = F(L)$ *– її поле констант. Якщо основне поле* $\mathbb{K}$ *має характеристику нуль, то* L *– алгебра Лі* F, *алгебра* L *містить елементи* D_1, D_2 *з умовою* $[D_2, D_1] = aD_1$ *для деякого* $a \in F_1 = \ker D_1$ *і* L *є алгеброю одного із типів над над полем* F :

1. $L = \langle D_2 \rangle \leftthreetimes F_1D_1$.

2. $L = \langle D_2 \rangle \leftthreetimes (F_1D_1 + bF_1D_1)$, *де* $b \in R, D_1(b) = 1$, $D_2(b) = ab + a_1$ *для деякого* $a_1 \in F_1$.

3. $L = (\langle D_2 \rangle \leftthreetimes \langle cD_1 + dD_2 \rangle) \leftthreetimes F_1D_1$, *де* $c \in R, d \in F_1$ *такий елемент, що* $D_1(c) \in F_1, D_2(d) = 1$, $D_2(c) = -ac + r$ *для деякого* $r \in F_1$.

4. $L = (\langle D_2 \rangle \leftthreetimes \langle cD_1 + dD_2 \rangle) \leftthreetimes (F_1D_1 + F_1bD_1)$, *де* $D_1(b) = 1$, $D_2(d) = 1, d \in F_1, D_1(c) \in F_1$, $D_2(c) = ac + r$, $D_2(b) = ab + a_1$ *для деякого елемента* $r, a_1 \in F_1$.

5. L *ізоморфна розв'язній підалгебрі повної афінної алгебри Лі* $ga_2(F)$ *яка містить* F^2, *зокрема,* $2 \le \dim_F L \le 5$.

Доведення. Нехай L – підалгебра алгебри Лі $W(A)$, яка задовольняє умови цього твердження. Тоді FL як алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$ також задовольняє ці умови і при цьому $L \subseteq FL$. Отже $FL = L$ за умовою максимальності підалгебри L і L є алгеброю Лі над полем F. Розглянемо два випадки в залежності від властивостей максимальних абелевих ідеалів алгебри L :

Випадок 1. Кожен максимальний абелевий ідеал із L має ранг 1 над полем R. Візьмемо які-небудь два ідеали I і J із L і нехай $D_1 \in I, D_2 \in J$ – довільні ненульові елементи. Якщо D_1 і D_2 лінійно незалежні над R, то $I \cap J = 0$ і $I + J$ – абелевий ідеал рангу 2 над R із L. Але тоді $I + J$ міститься в деякому максимальному абелевому ідеалі 2 над R із L, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, D_1 і D_2лінійно незалежні над R і $I + J$ рангу 1 над R. Оскільки $I + J$ – нільпотентний ідеал із L, то із Твердження 6.1.10 випливає, що ідеал $I + J$ абелевий. Але тоді $I = J$ і I – єдиний максимальний абелевий ідеал рангу 1 із L. Позначимо $I_1 = RI \cap L$. Ідеал I_1 має ранг 1 над R і $\dim_F L/I_1 \leq 2$ за лемою 6.2.3. Візьмемо довільний елемент D_1 із I_1, якщо I_1абелевий, або із абелевого ідеалу $[I_1, I_1]$ в протилежном увипадку (нагадаємо, що I_1 розвязний ступеня розвязності не більше ніж 2). Можна легко показати, що $[D_2, D_1] = aD_1$ для деякого елемента $a \in F_1 = \ker D_1$ і $F_1 I_1$ – підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ рангу 1 над R. Неважко також довести, що $[D_2, F_1 I_1] \subseteq F_1 I_1$ і тому $L + F_1 I_1$ – розвязна підалгебра рангу 2 із $W(A)$. Але тоді $L = L + F_1 I_1$ з огляду на максимальність L і тому $F_1 I_1 \subseteq L$. Останнє означає, що $F_1 I_1 = I_1$ і I_1 – алгебра Лі над полем F_1.

Підвипадок 1. Ідеал I_1 абелевий. Якщо $\dim_F L/I_1 = 1$, то вибираючи довільний елемент $D_2 \in L \setminus I_1$, ми бачимо, що $L = \langle D_2 \rangle \leftthreetimes F_1 D_1$ – алгебра Лі типу 1. Нехай $\dim_F L/I_1 = 2$. Тоді L/I_1 – неабелева фактор-алгебра за лемою 6.2.3. Візьмемо одновимірний ідеал $\langle D_2 + I_1/I_1$ із фактор-алгебри L/I_1. Візьмемо також який-небудь елемент $cD_1 + dD_2 \in L$ такий, що $[D_2, cD_1 + dD_2] = D_2 + rD_1$ для деякого елемента $rD_1 \in I_1$. Отримаємо рівність

$$D_2(c)D_1 + caD_1 + D_2(d)D_2 = D_2 + rD_1,$$

із якої вуипливає, що $D_2(d) = 1$ і $D_2(c) = -ac + r$. Крім того, із включення $[D_1, cD_1 + dD_2] \in I_1$ отримаємо рівність $D_1(d) = 0$, тобто $d \in F_1$. Те ж саме співвідношеня показує, що $D_1(c) \in F_1$. Ми бачимо, що L – алгебра Лі типу 3 із даного твердження.

Підвипадок 2. Ідеал I_1 неабелевий. Припустимо спочатку, що $\dim_F L/I_1 = 1$ і візьмемо який-ненбудь елемент $D_2 \in L \setminus I_1$. З огляду на лему 6.2.1, $I_1 = F_1D_1 + F_1bD_1$ для деякого елемента $b \in R$ такого, що $D_1(b) = 1$. Оскільки $[D_2, D_1] = aD_1$ для деякого $a \in F_1$, то виконуються рівності $[D_1, D_2](b) = aD_1(b) = a$. З іншого боку $(D_1D_2 - D_2D_1)(b) = D_1(D_2(b)) = a$. Але тоді $D_1(ba - D_2(b)) = a - a = 0$ і тому $ba - D_2(b) \in F_1$. Звідси отримаємо $D_2(b) = ba + a_1$ для деякого елемента $a_1 \in F_1$ і таким чином L є алгебра Лі типу 2.

Нехай тепер $\dim_F L/I_1 = 2$. Фактор-алгебра FL/FI_1 неабелева за лемою 6.2.3. Візьмемо одновимірний ідеал $\langle D_2 + I_1\rangle$ із фактор-алгебри L/I_1 (над F) і нехай $cD_1 + dD_2$ – такий елемент, що $[D_2, cD_1 + dD_2] = D_2 + rD_1$ для деякого елемента $rD_1 \in I_1$. Із цього співвідношення випливає, що $D_2(d) = 1$ і $D_2(d) = -ac + r$ для $r \in F_1$. Далі, із включення $[D_1, cD_1 + dD_2] \in I_1$ отримаємо, що $D_1(d) = 0$. Це означає, що $d \in F_1$. Використовуючи те ж саме включення ми також отримаємо $D_1(c) \in F_1$. Можна також показати (використовуючи той же підхід), що $D_2(b) = ab + a_1$ для деякого елемента $a_1 \in F_1$ і тому L – алгебра Лі типу 4.

Випадок 2. L містить хоча б один максимальний абелевий ідеал рангу 2 над R. Позначимо цей ідеал через J і виберемо довільні два елементи D_1 і D_2 із J, які лінійно незалежні над полем R. Якщо $D = u_1D_1 + u_2D_2 \in J$, то із рівності

$$0 = [D_i, D] = [D_i, u_1D_1 + u_2D_2] = D_i(u_1)D_1 + D_i(u_2)D_2, i = 1, 2$$

отримаємо, що $D_i(u_j) = 0$. Останнє означає, що $u_i \in F$, тобто $\dim_F J = 2$. Оскільки J – максимальний абелевий ідеал алгебри L, то виконується рівність $C_L(J) = J$. Тому $\dim_F L/J \leq 3$ з огляду на розвязність фактор-алгебри L/J і рівність $\dim J = 2$. Розглянемо випадок $\dim L/J = 1$ і візьмемо довільний елемент $D_3 \in L \setminus J$. Тоді $D_3 = u_1D_1 + u_2D_2$ для деяких $u_1, u_2 \in R$. Оскільки

$$[D_i, D_3] = D_i(u_1)D_1 + D_i(u_2)D_2 \in J,$$

то ми отримаємо $D_i(u_j) \in F,\ i,j = 1,2$. Якщо матриця

$$\begin{pmatrix} D_1(u_1) & D_2(u_1) \\ D_1(u_2) & D_2(u_2) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

невироджена, то застосовуючи підходяще лінійне перетворення ми можемо записати

$$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2,\ u_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2$$

для деяких $\alpha_{ij} \in F$ і $D_i(v_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Очевидно, що $L_1 = F\langle D_1, D_2, v_iD_j \mid i,j = 1,2\rangle$ – алгебра Лі розмірності 6 над полем F, яка ізоморфна загальній афінній алгебрі Лі $ga_2(F)$. Але тоді

$$D_3 = u_1D_1 + u_2D_2 = (\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2)D_1 + (\alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2)D_2$$

– елемент із L_1 і L – підалгебра із алгебри Лі L_1.

Нехай тепер матриця (6.3) вироджена. Оскільки $D_3 \in L \setminus J$, то хоча б один із рядків матриці (6.3) ненульовий, нехай, наприклад, перший. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_1(u_1) = 1,\ D_2(u_1) = \gamma$ для деякого $\gamma \in F$. Другий рядок матриці (6.3) пропорційний першому і тому $u_2 = \alpha u_1 + \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in F$. Тоді маємо рівність $D_3 = u_1D_1 + (\alpha u_1 + \beta)D_2$. Замінюючи елемент D_3 на елемент $D_3 - \beta D_2$ можна вважати, що $D_3 = u_1D_1 + \alpha u_1D_2$. Якщо $\gamma = 0$, то $D_1(u_1) = 1, D_2(u_1) = 0$ і L ізоморфна підалгебрі алгебри Лі $ga_2(F)$. У випадку $\gamma \neq 0$ ми вибираємо базис $D_1' = D_1, D_2' = D_1 - \gamma^{-1}D_2$ абелевого ідеалу J. Тоді ми отримаємо $D_1'(u_1) = 1, D_2'(u_1) = 0$ і все ясно. Аналогічно можна розглянути випадки $\dim L/J = 2$ і $\dim L/J = 3$ і показати, що L ізоморфна підалгебрі алгебри Лі $ga_2(F)$. $\square$

Вправи

1. Довести, що FL є алгеброю Лі над полем констант $F = F(L)$ алгебри Лі L в полі $R = Q(A)$.

2. Довести, що якщо L є абелевою, нільпотентною або розвязною алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$, то такою ж буде і алгебра Лі FL над полем F.

3. Нехай $D_1, D_2 \in W(A)$ і $a, b \in R$. Довести, що мають місце рівності:

   1) $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$.

   2) Якщо $a, b \in \ker D_1 \cap \ker D_2$, то $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.

4. Довести, що об'єднання зростаючого ланцюга нільпотентних (розв'язних) підалгебр із $W(A)$ буде локально нільпотентною (локально розв'язною) підалгеброю із $W(A)$

Розділ 7

Локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань комутативних кілець

В попередніх розділах ми розглядали трикутну алгебру Лі диференціювань кільця многочленів як приклад локально нільпотентних алгебр Лі. Виявляється, що трикутна алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$ є, в деякому сенсі, модельною алгеброю, а саме, в багатьох випадках локально нільпотентні алгебри Лі ізоморфні підалгебрам з трикутної алгебри Лі.

§ 7.1 Будова локально нільпотентних підалгебр скінченного рангу над R із $W(A)$

Нагадаємо, що будова нільпотентних підалгебр з $W(A)$ рангів 1 та 2 була описана в Твердженні 6.1.10 (див, також [20]).

В цьому підрозділі ми опишемо будову локально нільпотентних підалгебр з $W(A)$ рангів 1 та 2 над R.

Доведемо спочатку наступне твердження.

Лема 7.1.1. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра скінченного рангу над R з алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант для L. Тоді алгебра Лі FL (над полем F) також локально нільпотентна.*

Доведення. Візьмемо довільну скінченну множину елементів

$$T_1,\ T_2, \ldots, T_n \in FL$$

і позначимо через M підалгебру з FL, породжену цими елементами. Кожен елемент T_i за означенням алгебри Лі FL може бути записаний у вигляді

$$T_i = \sum_{j=1}^{k_i} f_{ij} D_{ij},\ \ f_{ij} \in F, D_{ij} \in L.$$

Позначимо через N підалгебру алгебри Лі L, яка породжена елементами D_{ij} для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k_i$. Тоді N – нільпотентна підалгебра з L і, оскільки $f_{ij}D_{ij} \in FN$, то $M \subseteq FN$. З огляду на Лему 6.1.2 алгебра Лі FN нільпотентна і тому її підалгебра M також нільпотентна. Це означає, що FL – локально нільпотентна алгебра Лі. □

Лема 7.1.2. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра рангу n над R з алгебри Лі $W(A)$. Тоді L – розв'язна алгебра Лі ступеня розв'язності не більше ніж n.*

Доведення. Нехай $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ – скінченна підмножина з L. Оскільки L – локально нільпотентна, то ця підмножина породжує нільпотентну підалгебру з L, яку ми позначимо через M. Ясно, що

$$\mathrm{rk}_R\, M \leq \mathrm{rk}_R\, L = n.$$

Тоді за Наслідком 6.1.6 підалгебра M розв'язна та її ступінь розв'язності $s(M) \leq n$. Це означає, що всі скінченно породжені підалгебри в L є розв'язними ступеня розв'язності не більше n. Звідси випливає, що алгебра Лі L розв'язна і $s(L) \leq n$. □

Означення 7.1.1. *Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ (не обов'язково скінченновимірний) і T – лінійний оператор на V. Оператор T називається* локально нільпотентним, *якщо для кожного $v \in V$ існує натуральне число $n = n(v)$ таке, що $T^n(v) = 0$.*

Очевидно, що кожен нільпотентний оператор є локально нільпотентним, обернене твердження в загальному випадку не має місця.

Наступна лема є узагальненням (на нескінченновимірні векторні простори) стандартного факту про комутуючі нільпотентні оператори.

Лема 7.1.3. *Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ (не обов'язково скінченновимірний) і $T_1,\ T_2,\dots,T_k$ – попарно комутуючі локально нільпотентні оператори на V. Тоді існує такий ненульовий елемент $v_0 \in V$, що*

$$T_1(v_0) = T_2(v_0) = \dots = T_k(v_0) = 0.$$

Доведення. Нехай $v \in V$ – довільний ненульовий вектор. Розглянемо підпростір W в V, породжений всіма елементами вигляду $T_1^{s_1} T_2^{s_2} \dots T_k^{s_k}(v)$, де $s_1,\ s_2,\dots,\ s_k \geq 0$. Оскільки $T_1,\ T_2,\dots,T_k$ локально нільпотентні і попарно комутують, то W буде скінченновимірним підпростором в V. Крім того, W інваріантний відносно операторів $T_1,\ T_2,\dots,T_k$. Тоді звуження $T_1,\ T_2,\dots,T_k$ на скінченновимірний підпростір W мають, як відомо, спільний власний вектор $v_0 \in W$ такий, що $T_1(v_0) = \dots = T_k(v_0) = 0$. □

Лема 7.1.4. *Нехай L – підалгебра рангу n над R з алгебри Лі $W(A)$ і $L' = [L, L]$ – її похідна підалгебра рангу k над R. Тоді $M = RL' \cap L$ – ідеал алгебри Лі L такий, що $\mathrm{rk}_R M = \mathrm{rk}_R L'$ і FL/FM – абелева алгебра Лі розмірності $n-k$ над полем констант F алгебри L.*

Доведення. За Лемою 6.1.4 $M = RL' \cap L$ – ідеал алгебри Лі L, оскільки L' є ідеалом в L і, як легко бачити, $\mathrm{rk}_R M = \mathrm{rk}_R L'$. Оскільки $L' \subseteq M$, то L/M – абелева алгебра Лі. Тоді FL/FM також абелева алгебра Лі. Покажемо, що $\dim_F FL/FM = n-k$.

Виберемо який-небудь базис $D_1,\ D_2,\dots,D_k$ ідеалу M над полем R і доповнимо його елементами $D_{k+1},\dots,D_n$ до базису алгебри Лі L над R. Візьмемо довільний $D \in L$. Його можна записати у вигляді

$$D = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \dots + r_n D_n$$

для деяких $r_1,\dots,r_n \in R$. Для довільного базисного елемента $D_j \in L$ ($j = 1, 2, \dots, n$), використовуючи Лему 6.1.1, маємо

$$[D_j, D] = \sum_{i=1}^{n} r_i [D_j, D_i] + \sum_{i=1}^{n} D_j(r_i) D_i.$$

Оскільки $[D_j, D_i] \in L'$ та $[D_j, D] \in L'$, то

$$\sum_{i=1}^{n} D_j(r_i) D_i = [D_j, D] - \sum_{i=1}^{n} r_i [D_j, D_i] \in M.$$

Тоді $\sum_{i=1}^{n} D_j(r_i)D_i$ є лінійною комбінацією елементів $D_1,\ D_2,\dots,D_k$ над R. З довільності обраного D_j випливає, що $D_j(r_i) = 0$ для всіх $j = 1,2,\dots,n$ і $i = k+1,\dots,n$. Останнє означає, що $r_{k+1},\dots,r_n \in F = F(L)$ і

$$r_{k+1}D_{k+1} + \cdots + r_nD_n \in FL.$$

Оскільки $r_1D_1 + r_2D_2 + \cdots + r_kD_k \in M$, то

$$D + M = r_{k+1}D_{k+1} + \cdots + r_nD_n + M.$$

Звідси випливає, що $\dim_F FL/FM = n - k$. □

Лема 7.1.5. *Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра рангу n над R з алгебри Лі $W(A)$. Тоді похідна алгебра $L' = [L, L]$ має ранг над R не більший ніж $n - 1$.*

Доведення. Припустимо, що існує така локально нільпотентна підалгебра L алгебри Лі $W(A)$, що задовольняє умови леми і $\operatorname{rk}_R L = \operatorname{rk}_R L' = n$. Виберемо довільний базис $\{D_1,\ D_2,\dots,D_n\}$ алгебри Лі L' над R. Очевидно, що $\{D_1,\ D_2,\dots,D_n\}$ – базис алгебри L над R. Кожен базисний елемент $D_i \in L'$ записується у вигляді суми певної кількості комутаторів елементів з L, а саме

$$D_i = \sum_{j=1}^{k_i} [S_j^{(i)}, T_j^{(i)}]$$

для деяких $S_j^{(i)}, T_j^{(i)} \in L,\ i = 1,2,\dots,n, j = 1,\dots,k_i$. Позначимо через M підалгебру в L, породжену множиною елементів

$$\{S_j^{(i)}, T_j^{(i)} \mid j = 1,2,\dots,k_i,\ i = 1,2,\dots,n\}.$$

Оскільки L – локально нільпотентна алгебра Лі, то M – нільпотентна підалгебра з L, при цьому $D_1,\ D_2,\dots,D_n \in M'$. Це означає, що $\operatorname{rk}_R M' = \operatorname{rk}_R M = n$. Останнє призводить до суперечності, оскільки за Лемою 6.1.5 $[M, M] \subset I_{n-1}$, де I_{n-1} – ідеал в M рангу $n-1$ над R. Отже, наше припущення хибне і $\operatorname{rk}_R L' \le n - 1$. □

Теорема 7.1.6. *Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра з алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над R. Тоді центр алгебри Лі L ненульовий.*

Доведення. Нехай $\operatorname{rk}_R L = n$. Оскільки L ненульова, то $n \geq 1$. Проведемо доведення індукцією за рангом алгебри Лі L.

Якщо $n = 1$, то L – абелева і тому $Z(L) \neq 0$. Нехай доведено, що центр $Z(L)$ ненульовий для алгебр Лі рангу меншого за n над R. Доведемо, що $Z(L) \neq 0$ для L рангу n над R.

Нехай $\operatorname{rk}_R L' = k$, де $L' = [L, L]$ – похідна алгебра Лі для L. За Лемою 7.1.5 $k < n$. Позначимо $M = RL' \cap L$. Тоді M – ідеал алгебри Лі L рангу k над R і $\dim_F FL/FM = n-k$ за Лемою 7.1.4, де F – поле констант для L. За припущенням індукції центр $Z(M) \neq 0$. Очевидно, що $Z(M)$ є векторним простором над полем $\mathbb{K}$ (можливо нескінченновимірним). Виберемо елементи $D_1,\ D_2, \ldots, D_{n-k} \in L$ так, щоб класи суміжності

$$\{D_1 + FM,\ D_2 + FM, \ldots, D_{n-k} + FM\}$$

утворювали базис в фактор-просторі FL/FM над полем F. Лінійні оператори

$$\operatorname{ad} D_1,\ \operatorname{ad} D_2, \ldots, \operatorname{ad} D_{n-k}$$

локально нільпотентні на векторному просторі $Z(M)$ (над $\mathbb{K}$). Оскільки

$$[\operatorname{ad} D_i, \operatorname{ad} D_j] = \operatorname{ad}[D_i, D_j] \ i\ [D_i, D_j] \in M,$$

то лінійні оператори $\operatorname{ad} D_i$ і $\operatorname{ad} D_j$ комутують на $Z(M)$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n-k$. За Лемою 7.1.3 існує ненульовий $D_0 \in Z(M)$ такий, що

$$\operatorname{ad} D_i(D_0) = [D_i, D_0] = 0$$

для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-k$. Більше того, легко бачити, що $[FD_i, D_0] = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n-k$. Оскільки $D_0 \in Z(M)$, то $[FM, D_0] = 0$. Але

$$FL = FD_1 + FD_2 + \cdots + FD_{n-k} + FM,$$

і тому $[FL, D_0] = 0$, тобто $D_0 \in Z(FL)$. Це означає, що $D_0 \in Z(L)$. $\square$

§ 7.2 Локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань малого рангу над R

Теорема 7.2.1. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант алгебри L. Тоді*

1. *якщо* $\mathrm{rk}_R\, L = 1$, *то* L *абелева і* $\dim_F FL = 1$;

2. *якщо* $\mathrm{rk}_R\, L = 2$, *то* FL *або нільпотентна скінченновимірна над полем* F, *або* FL *нескінченновимірна над* F *і існують* $D_1,\ D_2 \in L$, $a \in R$ *такі, що*

$$FL = F\langle D_2, D_1, aD_1, \dots, \frac{a^k}{k!}D_1, \dots\rangle,$$

де $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$ *та* $D_2(a) = 1$.

Доведення. Оскільки алгебра Лі L локально нільпотентна (над $\mathbb{K}$), то FL локально нільпотентна як алгебра Лі над F за Лемою 7.1.1.

(1) Нехай $\mathrm{rk}_R\, L = 1$. Тоді $L = RD$ для деякого $D \in L$, $D \neq 0$. Кожна скінченно породжена підалгебра з L нільпотентна і за Лемою 6.1.10 абелева. Таким чином, алгебра L абелева і $\dim_F FL = 1$ за Лемою 6.1.10.

(2) Достатньо розглянути випадок, коли FL нескінченновимірна над F. Дійсно, якщо FL скінченновимірна над F, то вона нільпотентна і описана в Лемі 6.1.10.

За Теоремою 7.1.6 центр алгебри Лі L ненульовий. Нехай $D_1 \in Z(L)$, $D_1 \neq 0$. Покладемо $I_1 = RD_1 \cap L$. Тоді I_1 – ідеал алгебри L за Лемою 6.1.4 і $\mathrm{rk}_R\, I_1 = 1$. Покажемо, що $\dim_F FL/FI_1 = 1$. Дійсно, припустимо, що це не так і виберемо $D_2, \overline{D}_2 \in L \setminus I_1$ такі, що $D_2 + FI_1$ і $\overline{D}_2 + FI_1$ лінійно незалежні над F в фактор-алгебрі FL/FI_1. Підалгебра M, породжена елементами $D_1, D_2, \overline{D}_2$ в алгебрі Лі L має ранг 2 над полем R і $\dim_{\mathbb{K}} M \geq 3$. Позначимо $J_1 = RD_1 \cap M$. Тоді J_1 – ідеал з M рангу 1 над полем R і $\dim_F FM/FJ_1 = 1$ за Лемою 6.1.5. Останнє суперечить вибору елементів $D_2, \overline{D}_2$ і отримана суперечність показує, що $\dim_F FL/FI_1 = 1$.

Візьмемо довільну скінченно породжену (над $\mathbb{K}$) неабелеву підалгебру L_1 з L. Тоді L_1 нільпотентна і $\mathrm{rk}_R\, L_1 = 2$. Дійсно, $\mathrm{rk}_R\, L_1 \neq 1$ бо L_1 неабелева за твердженням 6.1.10. Підалгебра FL_1 з FL скінченновимірна над F за теоремою 6.1.9.

Виберемо довільний елемент $D_2 \in L$ такий, що $D_2 \notin I_1$. Тоді $FL = FI_1 + FD_2$ згідно зауваженої рівності $\dim_F FL/FI_1 = 1$. Розглянемо підалгебру $\overline{L}_1 = F\langle L_1, D_1, D_2\rangle$ в FL. Ясно, що $\overline{L}_1$ скінченновимірна над F і за твердженням 6.1.10

$$\overline{L}_1 = F\langle D_2, D_1, aD_1, \dots, a^s/s!D_1\rangle,$$

для деякого цілого числа $s > 0$ і елемента $a \in R$ такого, що $D_1(a) = 0$ і $D_2(a) = 1$.

Аналогічно розглянемо довільну іншу скінченновимірну підалгебру $\overline{L}_2$ з FL, яка містить елементи $D_1,\ D_2$. За твердженням 6.1.10 існує деякий елемент $b \in R$ такий, що $D_1(b) = 0$ і $D_2(b) = 1$ і натуральне число t таке, що

$$\overline{L}_2 = F\langle D_2, D_1, bD_1, \ldots, b^t/t!D_1\rangle.$$

Тоді $D_1(a - b) = 0$ і $D_2(a - b) = 0$, звідки випливає, що $a - b \in F$. Тому $b = a - \gamma$ для $\gamma \in F$ і

$$\overline{L}_2 = F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^t/t!D_1\rangle.$$

Це означає, що кожна неабелева скінченновимірна підалгебра з FL, яка містить D_1 і D_2, має вигляд

$$F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^k/k!D_1\rangle$$

для деякого цілого $k > 0$. Звідси випливає, що

$$FL = F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^k/k!D_1, \ldots\rangle$$

і $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = 1$. □

Наслідок 7.2.2. *Нехай L – неабелева локально нільпотентна підалгебра рангу 2 над R з алгебри Лі диференціювань $W(A)$, яка є нескінченновимірною над своїм полем констант F. Тоді алгебра Лі FL ізоморфна алгебрі Лі $u_2(F)$ всіх трикутних диференціювань кільця многочленів $F[x, y]$.*

Доведення. З попередньої Леми зразу маємо, що

$$FL = \langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_1, \ldots\rangle,$$

де $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$ і $D_2(a) = 1$. Тоді ізоморфізм $\varphi\colon L \to u_2(F)$ алгебр Лі можна задати за правилом: $\varphi(D_1) = \frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi(D_2) = \frac{\partial}{\partial y}$, $\varphi(a) = y$. □

Наслідок 7.2.3. *Якщо L – неабелева локально нільпотентна підалгебра з алгебри Лі диференціювань $W(A)$ рангу 2 над R і F – її поле констант, то алгебра Лі FL міститься в єдиній максимальній локально нільпотентній підалгебрі рангу 2 з $W(A)$.*

§ 7.3 Про ряди ідеалів в локально нільпотентних алгебрах Лі диференціювань

Як вже відзначалося раніше, якщо L – підалгебра з $W(A)$, то множина RL визначається як R-лінійна оболонка елементів rD для всіх $r \in R$ і $D \in L$. Аналогічно ми визначаємо множину FL для поля констант $F = F(L)$.

Лема 7.3.1. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$ і $L_1 \subseteq L_2$ – підалгебри з L такі, що $L_1 = RL_1 \cap L_2$ є ідеалом в L_2. Якщо $\mathrm{rk}_R\, L_2/L_1 = 1$, то L_2/L_1 – абелева фактор-алгебра Лі.*

Доведення. Нехай $D + L_1$ – будь-який ненульовий елемент з L_2/L_1. Тоді кожен елемент з L_2/L_1 має вигляд $rD + L_1$ для деякого $r \in R$. Елементи D та rD породжують нільпотентну підалгебру $L_3 = \mathbb{K}\langle D, rD\rangle$ в L (оскільки L – локально нільпотентна алгебра Лі). Але кожна нільпотентна підалгебра з $W(A)$ рангу 1 над R є абелевою (див. твердження 6.1.10) і тому підалгебра L_3 абелева. Але тоді

$$[D + L_1, rD + L_1] = [D, rD] + L_1 \subseteq L_1.$$

Оскільки елементи D, rD обиралися довільно, то $[L_2/L_1, L_2/L_1] \subseteq L_1$ і фактор-алгебра – L_2/L_1 абелева. □

Зауваження 7.3.2. *Нехай L – підалгебра з алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над R та I – власний ідеал в L, такий що $I = RI \cap L$. Тоді $\mathrm{rk}_R\, L > \mathrm{rk}_R\, I$.*

Лема 7.3.3. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над R і I – ідеал алгебри Лі L такий, що $I = RI \cap L$. Якщо фактор-алгебра L/I ненульова, то $\mathrm{rk}_R(L/I)' < \mathrm{rk}_R(L/I)$.*

Доведення. Припустимо, що це не так і існує така підалгебра L з $W(A)$ та ідеал I в L, що задовільняють умови леми і $\mathrm{rk}_R(L/I)' = \mathrm{rk}_R(L/I)$. Тоді цей ранг дорівнює $n - k$, де $\mathrm{rk}_R\, L = n$, $\mathrm{rk}_R\, I = k$. Виберемо який-небудь базис $\{\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_{n-k}\}$ множини векторів $(L/I)'$ над R. За нашим припущенням цей базис буде також базисом в L/I. Кожен $\overline{D}_i \in (L/I)'$ є сумою деяких комутаторів з L/I, тобто

$$\overline{D}_i = \sum_{j=1}^{k_i}[\overline{S}_j^{(i)}, \overline{T}_j^{(i)}] = \sum_{j=1}^{k_i}[S_j^{(i)}, T_j^{(i)}] + I, \quad k_i \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-k$$

для деяких $\overline{S}_j^{(i)}$, $\overline{T}_j^{(i)} \in L/I$. Позначимо через N підалгебру в L, породжену представниками $S_j^{(i)}$, $T_j^{(i)}$ класів суміжності $\overline{S}_j^{(i)}$, $\overline{T}_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k_i$, $i = 1, \ldots, n-k$. Оскільки алгебра Лі L локально нільпотентна, то підалгебра N нільпотентна. Позначимо $L_1 = N + I$. Легко бачити,

$$\mathrm{rk}_R(L_1/I) = \mathrm{rk}_R(L_1/I)' = n - k = \mathrm{rk}_R(L/I).$$

Звідси випливає, що $\mathrm{rk}_R(L_1) = \mathrm{rk}_R\, L_1' = n$. Оскільки

$$L_1/I = N + I/I \simeq N/(N \cap I)$$

– нільпотентна фактор-алгебра Лі, то центр $Z(L_1/I)$ ненульовий. Виберемо який-небудь ненульовий елемент $D_1 + I \in Z(L_1/I)$ і покладемо $J_1 = R(D_1 + I) \cap L_1$. Тоді J_1 – ідеал з L_1 за Лемою 6.1.4 і $\mathrm{rk}_R\, J_1 = k+1$, оскільки за умовою $RI \cap L = I$ і $D_1 \notin I$. Якщо $k+1 < n$, то візьмемо ненульовий елемент $D_2 + J_1 \in Z(L_1/J_1)$ і розглянемо $J_2 = R(D_2 + J_1) \cap L_1$. Тоді J_2 – ідеал алгебри Лі L_1 рангу $k+2$ над R і $RJ_2 \cap L_1 = J_2$. Продовжуючи ці міркування, побудуємо ланцюг ідеалів алгебри Лі $L_1 = N + I$ вигляду:

$$I \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-k-1} \subset J_{n-k} = L_1.$$

Оскільки фактор-алгебра L_1/J_{n-k-1} має ранг 1 над R і нільпотентна, то, як легко бачити, L_1/J_{n-k-1} – абелева алгебра Лі (Лема 7.3.1). Але тоді $L_1' \subseteq J_{n-k-1}$ і тому $\mathrm{rk}_R(L_1)' \leq n-1$. Останнє суперечить рівності $\mathrm{rk}_R\, L_1' = n$. Отримана суперечність показує, що $\mathrm{rk}_R(L/I)' < \mathrm{rk}_R(L/I)$. $\square$

Лема 7.3.4. *Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над R і I – власний ідеал з L такий, що $I = RI \cap L$. Тоді центр алгебри Лі L/I ненульовий.*

Доведення. Припустимо, що твердження леми не виконується і існують ненульові підалгебри $L \subseteq W(A)$ з власним ідеалом I, що задовольняють умови леми і для яких $Z(L/I) = 0$. За зауваженням 7.3.2 $\mathrm{rk}_R\, I < \mathrm{rk}_R\, L$. Серед таких алгебр Лі виберемо яку-небудь з найменшим можливим рангом $\mathrm{rk}_R\, L/I$. Тоді $\mathrm{rk}_R\, L/I > 1$, бо інакше за Лемою 7.3.1 алгебра Лі L/I була б абелевою і мала б нетривіальний центр, що суперечило б вибору алгебри L.

Нехай $\mathrm{rk}_R\, L = n, \mathrm{rk}_R\, I = k$. Тоді $\mathrm{rk}_R\, L/I = n - k$. Похідна підалгебра $(L/I)' = L' + I$ алгебри Лі L/I має ранг менший за $\mathrm{rk}_R\, L/I$ за Лемою 7.3.3. Покладемо $M = R(L' + I) \cap L$. За Лемою 6.1.4 M – ідеал з L і $\mathrm{rk}_R\, M = \mathrm{rk}_R(L' + I) < n$. Неважко переконатися, що $\mathrm{rk}_R\, M/I = \mathrm{rk}_R(L/I)' < \mathrm{rk}_R\, L/I$. Підалгебра M з L локально нільпотентна і тому за вибором алгебри L маємо $Z(M/I) \neq 0$. Очевидно $Z(M/I)$ – ненульовий векторний простір над полем $\mathbb{K}$, можливо, нескінченновимірний. Зауважимо також, що фактор-алгебра L/M абелева і $\dim_F FL/FM = n - k$ за Лемою 7.1.4, де $F = F(L)$ – поле констант для L.

Виберемо елементи $D_1,\ D_2, \ldots, D_{n-k} \in L$ так, щоб суміжні класи $D_1 + FM, \ldots, D_{n-k} + FM$ утворювали базис векторного простору FL/FM над F. Тоді лінійні оператори $\mathrm{ad}\, D_1,\ \mathrm{ad}\, D_2, \ldots, \mathrm{ad}\, D_{n-k}$ локально нільпотентні на векторному просторі $Z(M/I)$ над полем $\mathbb{K}$ (зауважимо, що $Z(M/I)$ інваріантний відносно цих лінійних операторів як характеристичний ідеал алгебри Лі M/I). Оскільки $[\mathrm{ad}\, D_i, \mathrm{ad}\, D_j] = \mathrm{ad}[D_i, D_j]$ і $[D_i, D_j] \in M$, то лінійні оператори $\mathrm{ad}\, D_i,\ \mathrm{ad}\, D_j$ попарно комутують на лінійному просторі $Z(M/I)$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n - k$. За Лемою 7.1.3 існує ненульовий елемент $D_0 + I \in Z(M/I)$ такий, що

$$\mathrm{ad}\, D_i(D_0 + I) = \mathrm{ad}\, D_i(D_0) + I = 0 + I \text{ для всіх } i = 1, 2, \ldots, n - k.$$

Звідси $[FD_i, D_0 + I] \subseteq FI$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n - k$. Крім того, $[M, D_0 + I] \subseteq I$, тому $[FM, D_0 + I] \subseteq FI$. Оскільки $FL = FD_1 + FD_2 + \cdots + FD_m + FM$, то $[FL, D_0 + I] \subseteq FI$. Останнє означає, що $D_0 + I \in Z(FL/FI)$, а отже з урахуванням умови $I = RI \cap L$ отримаємо, що $D_0 \in Z(L/I)$. □

Наслідок 7.3.5. *(див. також Теорему 7.1.6). Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра з $W(A)$ скінченного рангу над R. Тоді центр алгебри L ненульовий.*

Теорема 7.3.6. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра рангу n над R з алгебри Лі $W(A)$ і F – її поле констант. Тоді*

1. *L містить ряд ідеалів*
$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L \tag{7.1}$$
такий, що $\mathrm{rk}_R L_s = s$ і фактор-алгебра L_s/L_{s-1} – абелева для всіх $s = 1, 2, \ldots, n$;

2. *В L існує базис $\{D_1, \ldots, D_n\}$ над R такий, що*
$$L_s = (RD_1 + RD_2 + \cdots + RD_s) \cap L, \ [L, D_s] \subseteq L_{s-1}, \ s = 1, 2, \ldots, n.$$

3. $\dim_F FL/FL_{n-1} = 1.$

Доведення. *(1)-(2)* За Наслідком 7.3.5 в алгебрі Лі L існує ненульовий елемент $D_1 \in Z(L)$. Покладемо $L_1 = RD_1 \cap L$. За Лемою 6.1.4 L_1 є ідеалом в L рангу 1 над R. Припустимо, що ми побудували в L елементи базису $D_1, \ D_2, \ldots, D_k$ над R такі, що $L_s = (RD_1 + RD_2 + \cdots + RD_s) \cap L$ і $[L, D_s] \subseteq L_{s-1}$ для $s = 1, 2, \ldots, k$. Побудуємо D_{k+1}. За Лемою 7.3.4 центр $Z(L/L_k)$ нетривіальний, тобто існує $D_{k+1} \neq 0$ таке, що $D_{k+1} + L_k \in Z(L/L_k)$. Тоді $[L, D_{k+1}] \subseteq L_k$ і легко бачити, що $D_1, \ldots, D_k, \ D_{k+1}$ лінійно незалежні над R. За Лемою 6.1.4 $L_{k+1} = RD_{k+1} \cap L + L_k$ також ідеал з L/L_k, і з урахуванням будови ідеалу L_k маємо, що $L_{k+1} = (RD_1 + \cdots + RD_k + RD_{k+1}) \cap L$ – ідеал з L рангу $k+1$ над R. Ми побудували ряд ідеалів (7.1) та шуканий базис з умови теореми. Крім того, оскільки $\mathrm{rk}_R L_{s+1}/L_s = 1$, то за Лемою 7.3.1 фактор-алгебри L_{s+1}/L_s – абелеві для всіх $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

(3) Візьмемо довільний $D \in L$. Згідно щойно доведеному, в L існує базис $\{D_1, \ldots, D_n\}$ з пункту 2 твердження теореми. Нехай $D = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \cdots + r_n D_n$ для деяких $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$. Для довільного D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, розглянемо добуток
$$[D_i, D] = \sum_{j=1}^{n} D_i(r_j) D_j + \sum_{j=1}^{n} r_j [D_i, D_j].$$

Оскільки $[L, D_i] \subseteq L_{i-1}$, то $D_i(r_j) = 0$ для всіх $j \geq i$. Зокрема, $D_i(r_n) = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Тому $r_n \in F$, при чому це виконується для довільного $D \in L$. Звідси одразу маємо твердження пункту 3 теореми. $\square$

§ 7.4 Локально нільпотентні підалгебри рангу 3 із алгебри Лі $W(A)$

Для того, щоб вивчати локально нільпотентні алгебри Лі рангу 3 із $W(A)$ нам потрібна інформація про нільпотентні алгебри Лі такого рангу. Як відзначалося раніше опису таких алгебр Лі не існує і є сумніви, чи такий опис взагалі можливий, тому мова йде лише про деяку характеризацію нільпотентних алгебр Лі рангу 3. В наступній лемі зібрані основні результати роботи [24].

Лема 7.4.1. *[24, Lemmas 8, 9] Нехай L – нільпотентна підалгебра рангу 3 над R з алгебри Лі $W(A)$, $Z(L)$ – центр алгебри L і F – її поле констант. Якщо $\dim_F FL \geq 4$, то існують елементи a, $b \in R$, цілі числа $k \geq 1$, $n \geq 0$, $m \geq 1$, і попарно комутуючі між собою елементи D_1, D_2, $D_3 \in L$ такі що алгебра Лі FL міститься в нільпотентній підалгебрі $\widetilde{L}$ з $W(A)$ одного з типів:*

1. *Якщо $\mathrm{rk}_R Z(L) = 2$, то*

$$\widetilde{L} = F\langle D_3, D_1, aD_1, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_1, D_2, aD_2, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_2\rangle,$$

   де $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$.

2. *Якщо $\mathrm{rk}_R Z(L) = 1$, то $\widetilde{L}$ або такого самого виду, що і в пункті (1), або*

$$\widetilde{L} = F\langle D_3, D_2, aD_2, \ldots, \frac{a^n}{n!}D_2, \left\{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_1\right\}_{i,j=0}^{n,m}\rangle,$$

   де $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$, $D_1(b) = D_3(b) = 0$ і $D_2(b) = 1$.

В Теоремі 7.2.1 було дано опис локально нільпотентних підалгебр з $W(A)$ рангів 1 та 2. Наступний результат відноситься до таких алгебр Лі рангу 3.

Теорема 7.4.2. *Нехай L – максимальна (за включенням) локально нільпотентна підалгебра з $W(A)$ рангу 3 над R і F – її поле констант. Тоді $FL = L$ і L – алгебра Лі над полем F одного з наступих типів:*

(1) L – нільпотентна алгебра Лі розмірності 3 над полем F;

(2) $L = F\langle D_3, \{\frac{a^i}{i!}D_1\}_{i=0}^{\infty}, \{\frac{a^i}{i!}D_2\}_{i=0}^{\infty}\rangle$, де $D_1,\ D_2,\ D_3 \in L$ і $a \in R$ такі, що $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$ і $[D_i, D_j] = 0$ для $i, j = 1, 2, 3$;

(3) $L = F\langle D_3, \{\frac{a^i}{i!}D_2\}_{i=0}^{\infty}, \{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_1\}_{i,j=0}^{\infty}\rangle$, де $D_1,\ D_2,\ D_3 \in L$ і $a,\ b \in R$ такі, що $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$, $D_1(b) = D_3(b) = 0$ і $D_2(b) = 1$ і $[D_i, D_j] = 0$ для $i, j = 1, 2, 3$.

Доведення. Оскільки алгебра Лі FL локально нільпотентна за Лемою 7.1.1, то з урахуванням максимальності підалгебри L з $W(A)$ маємо, що $FL = L$. За наслідком 7.3.5 $Z(L) \neq 0$. Якщо $\mathrm{rk}_R\, Z(L) = 3$, то легко бачити, що L – абелева алгебра Лі, а отже L – абелева алгебра Лі розмірності 3 над полем F і тоді L типу (1) з умови теореми.

Випадок 1. Нехай $\mathrm{rk}_R\, Z(L) = 2$. Виберемо довільні лінійно незалежні над R елементи $D_1,\ D_2 \in Z(L)$ і покладемо $I = (RD_1 + RD_2) \cap L$. Тоді в силу теореми 7.3.6 I – ідеал алгебри Лі L рангу 2 над R і $\dim_F(FL/FI) = 1$. Легко перевірити, що ідеал I – абелевий. Справді, візьмемо довільний $D = r_1 D_1 + r_2 D_2 \in I$. Тоді

$$[D_1, D] = D_1(r_1)D_1 + D_1(r_2)D_2 = 0, \quad [D_2, D] = D_2(r_1)D_1 + D_2(r_2)D_2 = 0,$$

звідки випливає, що $r_1,\ r_2 \in \mathrm{Ker}\, D_1 \cap \mathrm{Ker}\, D_2$. Але тоді для довільних елементів $D, D' \in I$ отримаємо $[D, D'] = 0$.

Виберемо довільний елемент $D_3 \in L \backslash I$. За відзначеним вище $FL = FI + FD_3$. Розглянемо неабелеву скінченно породжену (над $\mathbb{K}$) підалгебру M з алгебри Лі L таку, що $D_1,\ D_2,\ D_3 \in M$. Оскільки $\mathrm{rk}_R\, M = 3$ і $\mathrm{rk}_R\, Z(M) = 2$, то за Лемою 7.4.1 FM міститься в деякій підалгебрі L_M з $W(A)$ вигляду

$$L_M = F\langle D_3, D_1, aD_1, \ldots, a^n/n!D_1, D_2, aD_2, \ldots, a^n/n!D_2\rangle,$$

де $a \in R$ такий, що $D_3(a) = 1$ і $D_1(a) = D_2(a) = 0$. Але тоді M міститься в локально нільпотентній алгебрі Лі вигляду

$$L_1 = F\langle D_3, D_1, aD_1, \dots, a^n/n!D_1, \dots, D_2, aD_2, \dots, a^n/n!D_2, \dots \rangle,$$

причому елемент $a \in R$ визначається диференціюваннями $D_1,\ D_2,\ D_3$ з точністю до деякого доданку з F. Оскільки підалгебра M обиралася довільним чином в L, то і $L \subseteq L_1$. З огляду на максимальність L отримаємо, що $L = L_1$ і L типу (2) з умови теореми.

Випадок 2. Нехай $\mathrm{rk}_R\, Z(L) = 1$. Якщо $\dim_F FL = 3$, то алгебра L нільпотентна розмірності 3 над F і L – типу 1 з умови теореми. Тому далі вважаємо, що $\dim_F FL \geq 4$. Виберемо довільнй ненульовий елемент $D_1 \in Z(L)$. Тоді $I_1 = RD_1 \cap L$ – ідеал алгебри L рангу 1 над R (за Лемою 6.1.4). Центр фактор-алгебри L/I_1 нетривіальний за Лемою 7.3.4 і тому можна вибрати ненульовий $D_2 + I_1 \in Z(L/I_1)$. За теоремою 7.3.6 перетин $I_2 = (RD_1 + RD_2) \cap L$ – ідеал алгебри L, $\mathrm{rk}_R\, I_2 = 2$ і $\dim_F FL/FI_2 = 1$. Тоді для деякого $D_3 \in FL \backslash FI_2$ маємо $FL = FI_2 + FD_3$. Крім того, з вибору D_2 легко бачити, що $[D_3, D_2] \in I_1$, тобто $[D_3, D_2] = r_3 D_1$ для деякого $r_3 \in R$. Зокрема, з цього випливає, що диференціювання D_2 і D_3 комутують на елементах з ядра $\mathrm{Ker}\, D_1$, тобто

$$D_3(D_2(x)) = D_2(D_3(x)) \text{ для всіх } x \in \mathrm{Ker}\, D_1. \tag{7.2}$$

Покажемо, що ідеал FI_2 неабелевий. Припустимо, що це не так і FI абелевий. Оскільки $\dim_F FL \geq 4$, то $\dim_F FI_2 \geq 3$. Тоді знайдеться такий елемент $D = r_1 D_1 + r_2 D_2 \in FI_2$, що принайні один з коефіцієнтів $r_1,\ r_2$ не лежить в F. З очевидних рівностей

$$[D_1, D] = D_1(r_1)D_1 + D_1(r_2)D_2 = 0, \quad [D_2, D] = D_2(r_1)D_1 + D_2(r_2)D_2 = 0$$

випливає, що $r_1,\ r_2 \in \mathrm{Ker}\, D_1 \cap \mathrm{Ker}\, D_2$.

Оскільки хоча б один з елементів r_1, r_2 не лежить в F, то або $D_3(r_1) \neq 0$, або $D_3(r_2) \neq 0$. Нехай спочатку $D_3(r_2) \neq 0$. З відзначеної вище рівності $[D_3, D_2] = r_3 D_1$ отримаємо, що для цілого $m \geq 1$

$$(\mathrm{ad}\, D_3)^m(D) = R_m D_1 + D_3^m(r_2) D_2 \text{ для деякого } R_m \in R.$$

Оскільки лінійний оператор $\operatorname{ad} D_3$ локально нільпотентний на L, то існує таке ціле $k > 1$, що
$$D_3^{k-1}(r_2) \neq 0,\ \ D_3^k(r_2) = 0.$$
Позначимо $r_0 = D_3^{k-2}(r_2)$. Тоді $D_3(r_0) \neq 0$ і $D_3^2(r_0) = 0$. При цьому, як неважко переконатися, $D_1(r_0) = D_2(r_0) = 0$. Покладемо $a = \frac{r_0}{D_3(r_0)} \in R \setminus F$. Неважко перевірити, що тоді $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$.

Нехай тепер $D_3(r_2) = 0$, тобто $r_2 \in F$. Тоді $r_1 \notin F$ і $r_1 D_1 \in FI_2$ (бо $r_2 D_2 \in FI_2$ і $D \in FI_2$). Тоді $D_3(r_1) \neq 0$, бо $r_1 \notin F$. Використовуючи рівність
$$(\operatorname{ad} D_3)^m (r_1 D_1) = D_3^m(r_1) D_1, \quad m \geq 1$$
так само як у випадку $r_2 \notin F$, можна показати, що існує таке $a \in R$, що $D_1(a) = D_2(a) = 0$ і $D_3(a) = 1$.

Доведемо тепер, що $FI_1 = F[a]D_1$, де $F[a] = \{f(a) | f(t) \in F[t]\}$. Розглянемо суму $L_1 = L + F[a]D_1$. Оскільки $[I_2, F[a]D_1] = 0$ і $[D_3, F[a]D_1] \subseteq F[a]D_1$, то L_1 є підалгеброю в $W(A)$, що містить алгебру Лі L. В силу максимальності L, маємо, що $L_1 = L$, звідки $F[a]D_1 \subseteq FI_1$. Навпаки, візьмемо довільний елемент $rD_1 \in I_1$. Тоді $D_1(r) = 0$ і $D_2(r) = 0$, бо ідеал FI_2 абелевий за нашим припущенням. Оператор $\operatorname{ad} D_3$ діє локально нільпотентно на rD_1, тому $D_3^k(r) = 0$ для деякого цілого $k \geq 1$. Неважко довести, що тоді r є лінійною комбінацією елементів $1,\ a, \ldots, a^t$ з коефіцієнтами із поля F, а тому $rD_1 \in F[a]D_1$. Отже, $I_1 \subseteq F[a]D_1$ і $FI_1 = F[a]D_1$.

Тепер, оскільки $[D_3, D_2] \in I_1$, то $[D_3, D_2] = f(a)D_1$ для деякого многочлена $f(t) \in F[t]$. Поле F має нульову характеристику, тому існує многочлен $g(t) \in F[t]$ такий, що його (звичайна) похідна співпадає з $f(t)$, тобто $g'(t) = f(t)$. Зауважимо, що оскільки $D_3(a) = 1$, то $D_3(g(a)) = f(a)$. Покладемо $\widetilde{D}_2 = D_2 - g(a)D_1 \in I_2$. Тоді $[D_3, \widetilde{D}_2] = 0$, при цьому всі інші властивості диференціювання D_2 зберігаються і для $\widetilde{D}_2$. Тому без обмеження загальності можемо вважати, що $[D_3, D_2] = 0$. Але тоді $D_2 \in Z(L)$ і тому $\operatorname{rk}_R Z(L) = 2$, що суперечить нашому припущенню. Отримана суперечність показує, що ідеал FI_2 алгебри Лі FL неабелевий.

Покажемо, що L – алгебра Лі типу 3 з умови теореми. Візьмемо довільну неабелеву скінченно породжену підалгебру M з FI_2 таку, щоб $D_1,\ D_2 \in M$ (це можливо, бо FI_2 – неабелевий ідеал в L). Позначимо через N підалгебру з L, породжену алгеброю M та елементом D_3. Тоді $\mathrm{rk}_R N = 3$ і N –неабелева алгебра Лі, яка містить неабелевий ідеал N_2 рангу 2 над R такий, що $\dim_F FN/FN_2 = 1$. За Лемою 7.4.1 існують $a,\ b \in R$ такі, що $D_1(a) = D_2(a) = 0$, $D_3(a) = 1$, $D_1(b) = D_3(b) = 0$ і $D_2(b) = 1$ і FN міститься в алгебрі Лі L_N виду

$$L_N = F\langle D_3, D_2, aD_2, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_2, \left\{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_1\right\}_{i,j=0}^{k,m}\rangle.$$

Елементи $a, b \in R$ визначаються диференціюваннями $D_1,\ D_2,\ D_3$ однозначно з точністю до доданків з F. Тому N міститься в алгебрі Лі виду

$$L_2 = F\langle D_3, D_2, aD_2, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_2, \ldots, \left\{\frac{a^i b^j}{i!j!}D_1\right\}_{i,j=0}^{\infty}\rangle.$$

Остання є локально нільпотентно підалгеброю з $W(A)$ рангу 3 над R. Підалгебра N з L була обрана довільно, тому і вся L міститься в L_2. Враховуючи максимальність алгебри Лі L, отримаємо $L = L_2$. Теорему доведено. $\square$

Приклад 7.4.3. *Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ і $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$. Тоді алгебра Лі $L = \mathbb{K}\langle x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\rangle$ – абелева, $\mathrm{rk}_R L = 3$, і L – максимально локально нільпотентна підалгебра з алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$.*

Вправи

1. Нехай M – підалгебра алгебри Лі L. Довести, що множина $N_L(M)$ є підалгеброю із L, яка містить M, підалгебра M є ідеалом в $N_L(M)$ і $N_L(M)$ – найбільша підалгебра із L з цією властивістю. Підалгебра $N_L(M)$ називається нормалізатором підалгебри M в L.

2. Довести, що кожна власна підалгебра M скінченновимірної нільпотентної алгебри Лі L строго міститься в своєму нормалізаторі $N_L(M)$.

3. Довести, що трикутна алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$ локально нільпотентна, але не нільпотентна.

Список використаних джерел

[1] I.V.Arzhantsev, E.A.Makedonskii and A.P.Petravchuk, Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one, Ukrainian Math. Journal, (2011), v.63, no. 5, 708–712.

[2] H.Bass, E.Connel and D.Wright, The Jacobian Conjecture: reduction on degree and formal expansion of the inverse, Bull. Math Soc. 7 (1982), 287–330.

[3] V.V. Bavula, Lie algebras of unitriangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras. arXiv:math.RA:1204.4908.

[4] Bondarenko V.M., Petravchuk A.P., Wildness of the problem of classifying nilpotent Lie algebras of vector fields in four variables, Linear Algebra and its Applications, March 2018, DOI: 10.1016/j.laa.2018.07.031

[5] V.M.Boyko, J.Patera and R.O.Popovych, Invariants of triangular Lie algebras, J. Phys. A 40 (2007), 7557-–7572.

[6] L. Bedratyuk, Derivations and Identitites for Fibonacci and Lucas Polynomials, Fibonacci Quart. 51 (2013), no. 4, 351-366

[7] D. Daigle, On some properties of locally nilpotent derivations, J. Pure Appl. Algebra, **114** (1997), 221–230.

[8] J. Draisma, Transitive Lie algebras of vector fields: an overview. Qual. Theory Dyn. Syst. 11 (2012), no. 1, 39-60.

[9] Ju.A. Drozd, Tame and wild matrix problems, in: Representations and Quadratic Forms, pp. 39–74, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979 (in Russian; English translation: Amer. Math. Soc. Transl. 128 (1986) 31–55).

[10] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobiam Conjecture, Progr. Math. 190, Birkhäuser, 2000.

[11] Gene Freudenburg, Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Encyclopaedia of Math. Sciences, **136** (2006).

[12] П.Олвер, Приложения групп Ли к дифференциальним уравнениям, М.: Мир, 1989, 637с.

[13] J.E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer Verlag, New York, 1972.

[14] N. Jacobson, Lie algebras, New York–London: Interscience Publishers, 1962.

[15] S. Kaliman, Polynomials with general $\mathbb{C}^2$-fibers are variables, Pacific J. Math., **203** (2002), 161–189.

[16] O.-H. Keller, Ganze Cremona-Transformationen // Monatsh. Math, und Phis. 1939. Bd. 47. S. 299-306.

[17] С.Ленг, Алгебра, М.: Мир, 1968, 564с.

[18] S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 3, Leipzig, 1893.

[19] L. Makar-Limanov, Locally nilpotent derivations of affine domains, MPIM Preprint Series, **92** (2004).

[20] Ie. O. Makedonskyi, A.P. Petravchuk. On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. Journal of Algebra, 2014, **401**, 245–257.

[21] M. Martelo and J. Ribon, Derived length of solvable groups of local diffeomorphisms, arXiv:math.DS:1108.5779.

[22] A. Nowicki. Polynomial Derivations and their Rings of Constants. Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun. 1994.

[23] A. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k-derivations of $k[x_1, \ldots, x_n]$. J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), no. 1, 111–118.

[24] A. P. Petravchuk. On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields. Algebra Discrete Math., 2016, **22**, 116–128.

[25] A.P.Petravchuk, K.Ya.Sysak, On Lie algebras consisting of locally nilpotent derivations, Journal of Lie Theory, (2017), v.27, no.4, 1057-1068

[26] A.P.Petravchuk, O.M.Shevchyk, K.Ya.Sysak, On locally nilpotent Lie algebras of derivations of integral domains. Appl. Problems of Mech. and Math. **15**, 7-15 (2017).

[27] А. П. Петравчук, К. Я. Сисак. Про локально нільпотентні алгебри Лі лиференціювань комутативних кілець. Наук. вісник Ужгород. ун-ту, 2016, **29**, Вип. 2.

[28] R. Rentschler, Operations du groupe additif sur le plan affine, C. R. Acad. Sc. Paris, **267** (1968), 384–387.

[29] И.Р.Шафаревич, О некоторых бесконечномерных группах. II , Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 214–226.

[30] I.P.Shestakov, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables Journal of the American Mathematical Society, (2004), 17 (1), 197–227.

[31] T. Siebert, Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic 0, Math. Ann, 305, (1996), 271-286.

[32] S. Smale, Mathematical Problems for the Next Century, in Arnold V.I.; Atiyah M.; Lax P.; Mazur B., Mathematical frontiers and perspectives, Americal Mathmatical Society (1999), pp. 271–294

[33] K. Ya. Sysak. On nilpotent Lie algebras of derivations with large center. Algebra Discrete Math., 2016, **21**, 153–162.

[34] V.A.Ustimenko, On new multivariate cryptosystems with nonlinearity gap, Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). No 2, P. 132-148