

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

(для вступників 2019 року)

1. Спростити вираз

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right) \cdot \left(a - \frac{ab + b^2}{a+b}\right).$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

3. Побудувати графіки функцій: а)  $y = \sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x + 2}} - x$ ;

$$\text{б) } y = \sqrt{\log_2 \sin \pi x}.$$

4. Довести, що при будь-якому натуральному  $n$  число  $n^5 - 5n^3 + 4n$  ділиться на 120 без остачі.

5. Хорда, довжина якої 12 см, перпендикулярна до діаметра кола і ділить його на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 9 см. Знайти довжину кола.

6. Для квадратичної функції  $f(x) = ax^2 + bx + c$  виконуються нерівності  $f(-1) > 0$ ,  $f(1) < 4$ ,  $f(-3) < -5$ . Визначити знак числа  $a$ .

7. Розв'язати рівняння  $2^x = 1 + 15 \log_5(x + 1)$ .

8. Основою піраміди є трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 3 см, 25 см, 26 см. Площі відповідних граней дорівнюють  $12 \text{ см}^2$ ,  $100 \text{ см}^2$ ,  $104 \text{ см}^2$ . Знайти довжину висоти піраміди.

9. Нехай дві менші сторони трикутника дорівнюють 2 см і 4 см. У яких межах може змінюватися середній за величиною кут трикутника?