Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Екстремальні задачі:
теорія, приклади, методи розв'язання

Капустян О.В., Перестюк М.О., Станжицький О.М.

Навчальний посібник

Київ - 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

В світі не відбувається нічого, в чому б не було видно сенсу якого-небудь максимуму або мінімуму

Л. Ейлер

Людям властиве бажання прагнути до найкращого, і тому, якщо вони змушені обирати серед багатьох можливостей, то бажання обрати серед них оптимальну є цілком природним.

Щоб знайти оптимальну серед можливостей, ми змушені розв'язувати задачі на відшукання максимуму або мінімуму, тобто найбільших або найменших значень якихось величин. Обидва ці поняття - максимум і мінімум - об'єднані єдиним терміном "екстремум". Тому задачі на відшукання максимуму або мінімуму називають екстремальними задачами.

Метою даного посібника є надати навички розв'язання і дослідження основних класів екстремальних задач: скінченновимірних гладких задач без обмежень і з обмеженнями типу рівностей та нерівностей, задач опуклої оптимізації, задач класичного варіаційного числення та задач оптимального керування. Посібник містить чотирнадцять занять, кожне з яких складається з теоретичної частини, прикладів розв'язання задач і завдань для аудиторної та самостійної роботи. Порядок і зміст занять повністю відповідає семестровому нормативному курсу "Варіаційне числення та методи оптимізації", що читається для студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

1. Основні поняття та формалізація екстремальних задач

Перед тим, як переходити до суто математичних постановок задач, доцільно спочатку на прикладах з'ясувати, як такі постановки виникають.

Задача 1 (Евклід, IV ст. до н.е.) У заданий трикутник ABC вписати паралелограм $ADEF$ найбільшої площі.

Задача 2 (Зенодор, II ст. до н.е.) Серед всіх трикутників з однаковим периметром знайти той, що має найбільшу площу.

Задача 3 (Й. Бернуллі, задача про брахістохрону, 1696) Знайти шлях, уздовж якого під дією лише сили тяжіння тіло від точки A до точки B переміститься за найкоротший час.

Задача 4 (Г. Монж, транспортна задача, 1781) Потрібно доставити товар від m виробників до n споживачів за найменших витрат.

Задача 5 (Л.С. Понтрягін, задача оптимальної швидкодії, 1958) Тіло рухається прямолінійно без тертя і керується зовнішньою силою, що може змінюватись у заданих межах. Знайти таке керування зовнішньою силою, що забезпечує зупинку тіла в заданій точці за найкоротший час.

Щоб формалізувати поставлені задачі, тобто звести їх до математичної постановки, потрібно чітко визначити структуру екстремальної задачі. Точно поставлена екстремальна задача містить такі елементи: простір елементів X, який ми будемо вважати нормованим з нормою $\|\cdot\|$, множина допустимих елементів (обмежень) $C \subseteq X$, цільовий функціонал $f : X \mapsto \overline{R}$, який потрібно мінімізувати або максимізувати на множині допустимих елементів, де $\overline{R} := R \cup \{\pm\infty\}$. Таким чином, потрібно звести поставлені задачі до вигляду

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \to extr \\ x \in C \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Формалізація задачі 1. Нехай точка $D \in AB$, точка $E \in BC$, точка $F \in AC$. Вважаючи, що довжина H висоти трикутника ABC, проведеної із вершини B, і довжина a сторони AC відомі, отримуємо відносно змінної x - довжини сторони AF, таку екстремальну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) = H(a-x)\frac{x}{a} \to sup \\ x \in [0, a] \end{array} \right.$$

Формалізація задачі 2. Нехай p - напівпериметр, x, y, z - довжини сторін трикутника. Тоді, використовуючи формулу Герона, відносно змінних x, y, z маємо наступну екстремальну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x,y,z) = p(p-x)(p-y)(p-z) \to sup \\ x+y+z = 2p \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right.$$

Це - гладка скінченновимірна задача ($X = R^3$) з обмеженнями типу рівностей-нерівностей.

Формалізація задачі 3. Введемо в площині, що містить задані точки A і B, систему координат так, щоб вісь OX була горизонтальна, а вісь OY була направлена вниз, точка A збігалася з початком координат. Нехай точка B має координати (x_1, y_1), $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $y(\cdot)$ - функція, що задає рівняння кривої, яка з'єднує точки A і B. Тоді швидкість тіла в точці $(x, y(x))$ дорівнює $\sqrt{2gy(x)}$, а час, необхідний тілу на проходження ділянки кривої довжиною $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ від точки $(x, y(x))$ до точки $(x + dx, y(x) + dy)$, дорівнює $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy(x)}}$. Звідси відносно змінної $y(\cdot)$ маємо таку екстремальну задачу:

$$\begin{cases} f(y(\cdot) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx \to inf \\ y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Це - задача класичного варіаціного числення, яка є частковим випадком гладких нескінченновимірних ($X = C^1([0, x_1])$) задач з обмеженнями типу рівностей.

Формалізація задачі 4. Вважаємо, що відомими є :

a_i - кількість одиниць товару, що вироблені i-тим виробником, $i = \overline{1, m}$;

b_j - кількість одиниць товару, що що потребує j-тий споживач, $j = \overline{1, n}$;

c_{ij} - вартість доставки одиниці товару i-того виробника до j -того споживача.

Тоді відносно змінних x_{ij} - кількість одиниць товару, яка доставляється від i-того виробника до j-того споживача, маємо наступну екстремальну задачу:

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to inf \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Це - задача лінійного програмування, яка є частковим випадком задач опуклої оптимізації.

Формалізація задачі 5. Нехай $x(t)$ - координата тіла в момент часу $t \in [0, T]$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ - задані початкові положення та швидкість тіла, T - кінцевий момент часу, коли тіло зупиняється в заданому положенні x_1. За 2-им законом Ньютона рух тіла описується диференціальним рівнянням 2-го порядку $m\ddot{x}(t) = u(t)$, де $u(t)$ - зовнішня сила, що змінюється в заданих межах $[u_1, u_2]$. Звідси відносно невідомих $\{x(\cdot), u(\cdot), T\}$ маємо таку екстремальну задачу

$$\begin{cases} T \to inf \\ m\ddot{x}(t) = u(t), \ t \in (0, T) \\ u(t) \in [u_1, u_2], t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = v_0 \\ x(T) = x_1, \ \dot{x}(T) = 0 \end{cases}$$

Це - задача оптимального керування.

Після формалізації екстремальної задачі виникає питання про її розв'язність.

Зауважимо, що в силу рівності

$$\sup f(x) = -\inf(-f(x)) \tag{1.2}$$

більшість теоретичних результатів будемо формулювати лише для задачі мінімізації.

При розв'язанні екстремальної задачі розрізняють глобальний і локальний екстремум.

Означення 1.1. Допустимий елемент $\bar{x}$ є точкою глобального мінімуму (максимуму) в задачі (1.1), якщо для всіх $x \in C$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (f(x) \leq f(\bar{x}))$$

Означення 1.2. Допустимий елемент $\bar{x}$ є точкою локального мінімуму (максимуму) в задачі (1.1), якщо для деякого $\delta > 0$ і для всіх $x \in O_\delta(\bar{x}) \cap C$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad (f(x) \leq f(\bar{x})),$$

де $O_\delta(\bar{x}) := \{x \in X \mid \|x - \bar{x}\| < \delta\}$.

Для гладких функцій $f : R \mapsto R$ наступна теорема дає необхідні і достатні умови локального екстремуму

Теорема 1.1 (Ферма)

1. Якщо $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) функції f, то для деякого $m \geq 1$

$$f'(\bar{x}) = ... = f^{(2m-1)}(\bar{x}) = 0,$$

$$f^{(2m)}(\bar{x}) \geq 0 \ (f^{(2m)}(\bar{x}) \leq 0).$$

2. Якщо в деякій точці $\bar{x}$ для деякого $m \geq 1$

$$f'(\bar{x}) = ... = f^{(2m-1)}(\bar{x}) = 0,$$

$$f^{(2m)}(\bar{x}) > 0 \ (f^{(2m)}(\bar{x}) < 0),$$

то $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) функції f.

3. Якщо в деякій точці $\bar{x}$ для деякого $m \geq 1$

$$f'(\bar{x}) = ... = f^{(2m)}(\bar{x}) = 0,$$

$$f^{(2m+1)}(\bar{x}) \neq 0,$$

то $\bar{x}$ не є точкою локального екстремуму функції f.

Для функцій $f : [a, b] \mapsto R$ наступна теорема дає достатні умови глобального екстремуму

Теорема 1.2 (Вейєрштрас).

Неперервна функція $f : [a, b] \mapsto R$ досягає на $[a, b]$ і глобального максимуму, і глобального мінімуму.

Розв'язання задачі 1: для $f(x) = H(a-x)\frac{x}{a}$

$$f'(x) = \frac{H}{a}(a-2x) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = \frac{a}{2} \in (0,a),$$

$$f''(\bar{x}) = -2\frac{H}{a} < 0,$$

отже $\bar{x} = \frac{a}{2}$ - точка локального максимуму. Далі або з нерівності

$$\forall\ x \in [0,a]\quad f(x) = -\frac{H}{a}(x-\frac{a}{2})^2 + \frac{Ha}{4} \leq f(\bar{x}) = \frac{Ha}{4},$$

або з теореми Вейєрштраса виводимо, що $\bar{x} = \frac{a}{2}$ - точка глобального максимуму, тобто вершини D, E, F паралелограма $ADEF$ з максимальною площею лежать на серединах сторін трикутника ABC.

Вправи до заняття 1

Формалізувати і розв'язати:

1. (Герон) Знайти на заданій прямій таку точку, щоб сума відстаней від неї до двох заданих точок була мінімальною.

2. (Снеліус) Знайти траєкторію променя світла між двома точками оптично неоднорідного середовища.

Вказівка: скористатись принципом Ферма, згідно якого промінь світла проходить ту траєкторію, для проходження якої йому знадобиться найменше часу.

3. (Кеплер) Вписати в круг прямокутник найбільшої площі.

4. (Кеплер) Вписати в шар циліндр найбільшого об'єму.

5. (Архімед) Вписати в кулю конус найбільшого об'єму.

6. (Тарталья) Розбити задане додатне число на дві частини так, щоб добуток їх добутку на їх різницю був максимальним.

Формалізувати:

7. (Торрічеллі) В площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.

8. Серед всіх прямокутних паралелепіпедів з заданою сумою лінійних розмірів (довжина, ширини, висота) знайти той, об'єм якого є максимальним.

9. (задача Дідони) Серед плоских кривих фіксованої довжини, що спираються на заданий відрізок, знайти ту, яка разом з цим відрізком охоплює найбільшу площу.

10. Знайти криву з фіксованими кінцями, що лежить в 1-му квадранті площини, від обертання якої навколо осі абсцис утворюється поверхня найменшої площі.

11. Скласти раціон харчування з мінімальними витратами при фіксованому асортименті продуктів, заданій кількості в кожному з них поживних речовин і відомій вартості одиниці кожного продукту, вважаючи, що раціон повинен забезпечувати необхідну потребу організму в поживних речовинах.

12. Формалізувати задачу найкращого вибору споживача при заданому бюджеті і цінах на товари, якщо він робить вибір серед наборів з n товарів у деякій множині $X \subseteq R_+^n$ і при цьому керується функцією корисності $U : X \mapsto R$ у тому сенсі, що набір x кращий за набір y тоді й лише тоді, коли $U(x) > U(y)$.

13. Корабель рухається зі сталою швидкістю u відносно течії, швидкість якої v стала за модулем і напрямом. Знайти керування кораблем, що забезпечує досягнення ним заданої точки із заданого початкового стану за найкоротший час, вважаючи керуючим вектор $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, де $\alpha = \alpha(t)$ - кут між векторами швидкостей корабля і течії.

14. Розглядається модель одновидової популяції, маса якої описується логістичним рівнянням з керуючим зовнішнім втручанням, що може змінюватись в заданих межах. Знайти такий закон керування системою, який би забезпечив максимальну масу популяції в заданий момент часу.

15.Навести приклади функцій $f : R \mapsto R$, що мають наступні властивості:

a) глобальний мінімум і максимум досягаються в нескінченній кількості точок;

b) функція обмежена, глобальний максимум досягається, мінімум - ні;

c) функція обмежена, але не має локальних екстремумів;

d) функція обмежена, має критичні точки, але не має локальних екстремумів;

e) функція обмежена, має локальні екстремуми, але не досягає глобальних екстремумів;

f) функція має єдиний локальний екстремум, що не є глобальним;

g) функція має нескінченно багато локальних максимумів, але жодного локального мінімуму.

2. Необхідні і достатні умови екстремуму в скінченновимірних задачах без обмежень

Розглядаємо задачу

$$
\begin{cases} f(x) \to extr \\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n \end{cases} \tag{2.1}
$$

Тут $C = X = R^n$ з нормою $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Наступні теореми дають необхідні і достатні умови локального екстремуму в задачі (2.1)

Теорема 2.1 (необхідні умови першого порядку)

Якщо $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) функції f, і f диференційовна в точці $\bar{x}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0$$

Теорема 2.2 (необхідні умови другого порядку)

Якщо $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) функції f, і $f \in C^2(O_\delta(\bar{x}))$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0,$$

і матриця

$$f''(\bar{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{n}$$

невід'ємно (недодатно) визначена.

Теорема 2.3 (достатні умови)

1. Якщо $f \in C^2(O_\delta(\bar{x}))$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0,$$

і матриця

$$f''(\bar{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{n}$$

додатно (від'ємно) визначена, то $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) функції f.

2. Якщо $f \in C^2(O_\delta(\bar{x}))$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0,$$

а матриця

$$f''(\bar{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{n}$$

не є знаковизначеною, то $\bar{x}$ не є точкою локального екстремуму функції f.

Нагадаємо, що симетрична матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

а) додатно (від'ємно) визначена, якщо

$$\forall\ h = (h_1, ..., h_n) \in R^n \setminus \{0\} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j > 0\ (< 0);$$

b) невід'ємно (недодатно) визначена, якщо

$$\forall\ h = (h_1, ..., h_n) \in R^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq 0\ (\leq 0);$$

c) не є знаковизначеною, якщо порушується пункт b).

Критерій Сільвестра. Нехай

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ ...,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- кутові мінори симетричної матриці A. Тоді A додатно (від'ємно) визначена $\Longleftrightarrow$

$$\forall\ 1 \leq k \leq n\ \ A_k > 0\ (\ (-1)^k A_k > 0\ ).$$

A невід'ємно визначена $\Longleftrightarrow$ всі її головні мінори невід'ємні.

Приклад. Дослідити на локальний екстремум:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy$$

Розв'язання. Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\ \Rightarrow\ \bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0$$

Знаходимо в точці $\bar{x}, \bar{y}$ матрицю других похідних:

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ця матриця є додатно визначеною, то т.$(0,0)$ є точкою локального мінімуму f.

Питання про те, чи є локальний екстремум $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ глобальним, залежить від геометричних властивостей функції f і може бути з'ясоване в один із наступних трьох способів:

1) встановити безпосередньо нерівність $f(x) \geq (\leq) f(\bar{x})\ \forall\ x \in R^n$;

2) скористатись теоремою Вейєрштраса або її наслідком.

Теорема 2.4 (Вейєрштраса в R^n).

Нехай $A \subset R^n$ - обмежена, замкнена множина, $f \in C(A)$. Тоді f досягає на A і глобального мінімуму, і глобального максимуму.

Наслідок. Нехай $f \in C(R^n)$ така, що

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty(-\infty).$$

Тоді f досягає мінімуму (максимуму) на будь-якій замкненій підмножині R^n (зокрема і на всьому R^n).

3) скористатись опуклістю f: якщо f двічі неперервно диференційовна і матриця $f''(x)$ є невід'ємно (недодатно) визначеною $\forall\, x \in R^n$, то будь-який локальний мінімум (максимум) функції f є глобальним.

Проілюструємо ці підходи на нашому прикладі:

1) $\forall\, x, y \;\; f(x,y) = \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 \geq 0 = f(0,0) \;\Rightarrow\;$ т.$(0,0)$ є точкою глобального мінімуму.

2) $f(x,y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{3}{4}(x^2+y^2) \to +\infty$ при $x^2+y^2 \to \infty \Rightarrow$ функція f в R^2 має точку глобального мінімуму, отже т.$(0,0)$ є точкою глобального мінімуму.

3) $\forall\, x, y \;\; f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$ будь-який локальний мінімум f є глобальним, отже т.$(0,0)$ є точкою глобального мінімуму.

В якості іншого прикладу розв'яжемо задачу 7 (Торрічеллі) з попереднього заняття.

Приклад. В площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.

Розв'язання. Нехай $A = (a_1, a_2), B(b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ - задані вершини трикутника, $D = (x_1, x_2)$ - шукана точка. Тоді маємо задачу

$$f(x_1,x_2) = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} + \sqrt{(x_1-b_1)^2+(x_2-b_2)^2} + \sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2} \to \inf$$

Оскільки

$$f(x_1,x_2) \geq \sqrt{\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2) - 3(a_1^2+a_2^2)} + \sqrt{\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2) - 3(b_1^2+b_2^2)} +$$
$$+ \sqrt{\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2) - 3(c_1^2+c_2^2)} \to +\infty,\;\; x_1^2+x_2^2 \to \infty,$$

то за наслідком з теореми Вейєрштраса в R^n функція f досягає глобального мінімуму в R^2, отже задача має розв'язок. Для його знаходження застосуємо необхідні умови 1-го порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1 - a_1}{|\vec{DA}|} + \frac{x_1 - b_1}{|\vec{DB}|} + \frac{x_1 - c_1}{|\vec{DC}|} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2 - a_2}{|\vec{DA}|} + \frac{x_2 - b_2}{|\vec{DB}|} + \frac{x_2 - c_2}{|\vec{DC}|} = 0$$

Це означає, що сума трьох векторів одиничної довжини

$$e_1 = \frac{\vec{DA}}{|\vec{DA}|},\;\; e_2 = \frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|},\;\; e_3 = \frac{\vec{DC}}{|\vec{DC}|}$$

дорівнює нулю, а отже кути між ними дорівнюють 120^0. Отже, якщо всі кути трикутника ABC менші за 120^0, то шукана точка - це точка, з якої всі кути трикутника видно під кутом 120^0 (точка Торрічеллі). Якщо один з кутів $\geq 120^0$, то розв'язком є саме вершина цього кута.

Вправи до заняття 2

Дослідити на локальний і глобальний екстремум

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$
2. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 10xy - x + y$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
4. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$
5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
6. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
7. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}$
8. $f(x,y) = \sin y - x^2$
9. $f(x,y) = xe^x - (1 + e^x)\cos y$
10. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$
11. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$
12. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y,\ x > 0,\ y > 0$
13. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
14. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
15. $f(x,y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

3. Необхідні і достатні умови екстремуму в скінченновимірних задачах з обмеженнями типу рівностей

Розглядаємо задачу

$$(3.1) \qquad \begin{cases} f_0(x) \to extr \\ f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0, \\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n \end{cases}$$

Тут $m < n$, $X = R^n$, множина допустимих елементів $C = \{x \in X \mid f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0\}$.

В множині допустимих елементів нас будуть цікавити локальні і глобальні екстремуми задачі (3.1) (див. Означення 1.1, 1.2)

Функція Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

Наступні теореми дають необхідні і достатні умови локального екстремуму в задачі (3.1)

Теорема 3.1 (необхідні умови першого порядку)

Якщо допустима $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) задачі (3.1), а функції $f_0, ..., f_m$ - неперервно диференційовні в деякому околі точці $\bar{x}$, то існують одночасно не рівні нулю *множники Лагранжа* $\lambda_0, ..., \lambda_m$ такі, що

$$(3.2) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0$$

При цьому якщо вектори $\nabla f_1(\bar{x}), ..., \nabla f_m(\bar{x})$ є лінійно незалежними, то $\lambda_0 \neq 0$ (і може бути покладеним рівним довільному додатному числу).

Теорема 3.2 (необхідні умови другого порядку)

Якщо допустима $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) задачі (3.1), $f_0, ..., f_m \in C^2(O_\delta(\bar{x}))$, вектори $\nabla f_1(\bar{x}), ..., \nabla f_m(\bar{x})$ є лінійно незалежними, то існують множники Лагранжа $\lambda_0 = 1, \lambda_1, ..., \lambda_m$ такі, що мають місце рівності (3.2) і

$$(3.3) \qquad (L''_{xx}(\bar{x}, \lambda)h, h) \geq 0 (\leq 0) \ \forall \ h \in P = \{h \in R^n \mid (\nabla f_i(\bar{x}), h) = 0, \ i = 1, ..., m\}$$

Теорема 3.3 (достатні умови)

Нехай $f_0, ..., f_m \in C^2(O_\delta(\bar{x}))$, вектори $\nabla f_1(\bar{x}), ..., \nabla f_m(\bar{x})$ є лінійно незалежними. Тоді якщо при деяких $\lambda_0 = 1, \lambda_1, ..., \lambda_m$ мають місце рівності (3.2) і

$$(3.4) \qquad (L''_{xx}(\bar{x}, \lambda)h, h) > 0 (< 0) \ \forall \ h \in P \backslash \{0\},$$

то $\bar{x}$ - точка локального мінімуму (максимуму) задачі (3.1).

Якщо ж при вказаних умовах квадратична форма $(L''_{xx}(\bar{x}, \lambda)h, h)$ не є знаковизначеною на P, то $\bar{x}$ не є точкою локального екстремуму.

Приклад.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \to extr \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Тут $f_0(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_1(x, y, z) = x + 2y + z - 3$ є двічі неперервно диференційовними на R^3.

Функція Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_1(x + 2y + z - 3)$$

Необхідні умови 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 x + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda_0 y + 2\lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda_0 z + \lambda_1 = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

При $\lambda_0 = 0$ маємо $\lambda_1 = 0$, що протирічить необхідним умовам. Отже можемо вважати $\lambda_0 = 1$. Тоді єдиним розв'язком системи є $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $\bar{y} = 1$, $\bar{z} = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = -1$.

Достатні умови:

$\nabla f_1 = (1, 2, 1) \neq (0, 0, 0)$, для $L = x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - z + 3$

$$L'' = \begin{pmatrix} 2 \; 0 \; 0 \\ 0 \; 2 \; 0 \\ 0 \; 0 \; 2 \end{pmatrix} > 0$$

отже $\bar{u} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ - точка локального мінімуму.

Питання про те, чи є локальний екстремум $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ глобальним, залежить від геометричних властивостей неперервних функцій $f_0, ..., f_m$. Оскільки множина $C = \{x \in X \mid f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0\}$ є замкеною, то тут може бути застосована Теорема 2.4 (Вейєрштраса в R^n) або її наслідок.

Для розглянутого прикладу, позначивши $u = (x, y, z)$, маємо

$$f_0(u) = \|u\|^2 \to +\infty, \ \|u\| \to \infty,$$

отже f_0 досягає глобального мінімуму на замкеній множині $C = \{x + 2y + z = 3\}$. Таким чином, точка $\bar{u}$ - точка глобального мінімуму.

Зауваження щодо обмежень типу строгих нерівностей. Розглянемо задачу

$$(3.5) \qquad \begin{cases} f_0(x) \to extr \\ f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0, \\ g_1(x) < 0, ..., g_k(x) < 0, \\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n \end{cases}$$

Вважаємо всі функції $f_1, ..., f_m, g_1, ..., g_k$ неперервними на R^n.

Множиною допустимих елементів цієї задачі є множина

$$C' = \{x \in X \mid f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0, \; g_1(x) < 0, ..., g_k(x) < 0\}$$

Нехай, наприклад, $\bar{x}$ - точка локального мінімуму задачі (3.5), тобто для деякого $\delta' > 0$

$$\forall \; x \in O_{\delta'}(\bar{x}) \cap C' \quad f_0(x) \geq f_0(\bar{x})$$

Оскільки $\bar{x} \in C'$, то в силу неперервності функцій $g_1, ..., g_k$ маємо, що для деякого $\delta < \delta'$

$$\forall \; x \in O_{\delta}(\bar{x}) \; g_1(x) < 0, ..., g_k(x) < 0$$

Це означає, що $\forall \; x \in O_{\delta}(\bar{x}) \cap C \quad f_0(x) \geq f_0(\bar{x})$, тобто $\bar{x}$ - точка локального мінімуму задачі (3.1). І навпаки, якщо $\bar{x}$ - точка локального мінімуму задачі (3.1), в якій $g_1(\bar{x}) < 0, ..., g_k(\bar{x}) < 0$, то $\bar{x}$ - точка локального мінімуму задачі (3.5).

Це означає, що для пошуку локальних екстремумів задачі (3.5) обмеження типу строгих нерівностей можна відкинути, знайти локальні екстремуми відповідної задачі (3.1), потім вибрати ті з них, що задовольняють строгим нерівностям - це і будуть локальні екстремуми задачі (3.5). При цьому питання про глобальність цих екстремумів потребує додаткових міркувань. Зауважимо, що безпосередньо до задачі (3.5) не може бути застосована жодна з теорем Вейєрштраса, оскільки допустима множина C' не є замкненою.

В якості прикладу задачі (3.5) розглянемо задачу 8 заняття 1.

Приклад. Серед всіх прямокутних паралелепіпедів з заданою сумою лінійних розмірів (довжина, ширини, висота) знайти той, об'єм якого є максимальним.

Розв'язання. Позначаючи через x, y, z лінійні розміри паралелепіпеда, а через $a > 0$ - їх задану суму, одержуємо задачу

$$\begin{cases} xyz \to \sup \\ x + y + z = a \\ x > 0, \; y > 0, \; z > 0 \end{cases}$$

Тут $f_0(x, y, z) = xyz$, $f_1(x, y, z) = x + y + z - a$, $g_1(x, y, z) = -x$, $g_2(x, y, z) = -y$, $g_3(x, y, z) = -z$ є двічі неперервно диференційовними на R^3.

Переходимо до задачі з обмеженнями-рівностями

$$\begin{cases} xyz \to \sup \\ x + y + z = a \end{cases}$$

Функція Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 xyz + \lambda_1(x + y + z - a)$$

Необхідні умови 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 yz + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 xz + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_0 xy + \lambda_1 = 0 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

При $\lambda_0 = 0$ маємо $\lambda_1 = 0$, що протирічить необхідним умовам. Отже можемо вважати $\lambda_0 = 1$. Тоді розв'язками системи є точки $u_1 = (a, 0, 0)$, $u_2 = (0, a, 0)$, $u_3 = (0, 0, a)$, $\bar{u} = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$. За умов задачі нас цікавить саме точка $\bar{u}$ з $\lambda_1 = -\frac{a^2}{9}$. Перевіримо для неї достатні умови:

$\nabla f_1 = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, для $L = xyz - \frac{a^2}{9}(x + y + z - 3)$

$$L''(\bar{u}) = \frac{a}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

$$\forall\ u = (x, y, z) \in P \setminus (0, 0, 0) \quad (L''(\bar{u})u, u) = -\frac{2a}{3}(x - y)^2 < 0$$

Отже $\bar{u} = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ - точка локального максимуму. Оскільки $a > 0$, то $\bar{u}$ - точка локального максимуму і для вихідної задачі.

Для того, щоб з'ясувати, чи буде цей максимум глобальним, розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases} xyz \to \sup \\ x + y + z = a \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Ця задача має принаймні одну точку глобального максимуму $\hat{u} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ за теоремою Вейєрштраса. Оскільки $f_0(\bar{u}) > 0$, то, очевидно, $\hat{x} > 0$, $\hat{y} > 0$, $\hat{z} > 0$. Але тоді $\hat{u}$ - локальний максимум у вихідній задачі, отже $\hat{u} \equiv \bar{u}$, і, таким чином, $\bar{u} = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ - глобальний максимум нашої задачі, тобто серед всіх прямокутних паралелепіпедів з заданою сумою лінійних розмірів найбільший об'єм має куб.

Вправи до заняття 3

Дослідити на локальний і глобальний екстремум

1. $\begin{cases} x^2+y^2-12x+16y \to extr \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{x^3}{3}+y \to extr \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^4+y^4+8z^4 \to extr \\ x+y+z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xyz \to extr \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xyz \to extr \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} xyz \to extr \\ x+y+z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy+yz \to extr \\ x^2+y^2=2 \\ y+z=2 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} xy^2z^3 \to extr \\ x+2y+3z=1 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$

9. Довести нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним: для всіх невід'ємних $x_1, ..., x_n$

$$(x_1 ... x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

10. Довести нерівність між середнім арифметичним і середнім квадратичним: для всіх невід'ємних $x_1, ..., x_n$

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

4. Теореми Вейєрштраса та задачі апроксимації в нормованих просторах

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - нормований простір.

Означення 4.1. Функціонал $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ називається напівнеперервним знизу (н.н.зн.) у точці x_0, якщо

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) \tag{4.1}$$

Функціонал $f : X \mapsto R \cup \{-\infty\}$ називається напівнеперервним зверху (н.н.зв.) у точці x_0, якщо

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \tag{4.2}$$

Якщо функціонал є н.н.зн. (н.н.зв.) в кожній точці $x_0 \in C$, то кажуть, що функціонал є н.н.зн. (н.н.зв.) на C.

Очевидно, що функціонал $f : X \mapsto R$, який одночасно є н.н.зн. і н.н.зв. у точці x_0, є неперервним в цій точці.

Оскільки f є н.н.зн. у точці x_0 тоді і лише тоді коли $-f$ є н.н.зв. у точці x_0, то надалі основну увагу зосередимо на н.н.зн. фукціоналах, які відіграють важливу роль в задачах мінімізації

$$\begin{cases} f(x) \to inf \\ \quad x \in C \end{cases} \tag{4.3}$$

Теорема 4.1 (Вейєрштрасса).

Якщо $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ - н.н.зн. і скінченна на компакті $C \subset X$, то існує $\bar{x} \in C$ - точка глобального мінімуму задачі (4.3).

Приклад. Нехай $g : X \times K \mapsto R$ - н.н.зн., K - компакт. Довести, що функція

$$f(x) = \inf_{y \in K} g(x, y)$$

є н.н.зн. на X.

Розв'язання. Нехай $A = \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$. Оскільки K - компакт, то за теоремою Вейєрштраса для кожного x_n існує $y_n \in K$ таке, що

$$f(x_n) = \inf_{y \in K} g(x_n, y) = g(x_n, y_n)$$

Існує підпослідовність $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ така, що $y_{n_k} \to y_0 \in K$. Тоді

$$A = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \to \infty} g(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq$$

$$\liminf_{x \to x_0, y \to y_0} g(x, y) \geq g(x_0, y_0) \geq f(x_0),$$

що і доводить шукане.

Оскільки замкнена, обмежена множина C може не бути компактною в нескінченовимірному просторі, зокрема, замкнена куля не є компактом, то для розв'язності задачі (4.3) для таких C необхідно підсилювати умови на f. Однією з таких додаткових умов може слугувати опуклість множини C і функції f (див. означення 5.1, 5.2)

Теорема 4.2 (Вейєрштраса в банаховому просторі).

Якщо X - рефлексивний простір, C - обмежена, замкнена, опукла множина, $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ - скінченна, опукла, н.н.зн. на C. Тоді існує $\bar{x} \in C$ - точка глобального мінімуму задачі (4.3).

Приклад. Нехай X - рефлексивний простір, M - замкнена, опукла множина, $f(x) = \|x - x_0\|$. Довести, що задача (4.3) має розв'язок.

Розв'язання. Нехай

$$d = \inf_{x \in M} \|x - x_0\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| \geq 0.$$

Тоді $f(x) = \|x - x_0\|$ - неперервна, опукла, $\|x_n - x_0\| \leq d + 1$, отже вихідна задача еквівалентна задачі

$$\begin{cases} \|x - x_0\| \to inf \\ x \in M \cap \overline{O_{d+1}(x_0)}, \end{cases}$$

яка в силу теореми Вейєрштраса в банаховому просторі має точку глобального мінімуму.

Задача апроксимації в нормованому просторі:

$$\begin{cases} \|x - x_0\| \to inf \\ x \in M, \end{cases} \tag{4.4}$$

де $M \subset X$, $x_0 \notin M$.

Означення 4.2. Якщо $\bar{x} \in M$ - точка глобального мінімуму задачі (4.4), то $\bar{x}$ називається розв'язком задачі апроксимації (4.4), або елементом найкращого наближення (е.н.н.) для x_0 на множині M і позначається $proj_M x_0$.

В загальних нормованих просторах справедлива наступна

Теорема 4.3 (про апроксимацію в нормованому просторі).

Нехай X - нормований простір, M - скінченновимірний підпростір. Тоді задача апроксимації (4.4) має розв'язок.

Приклад. В просторі $C([0, 1])$ знайти елемент найкращого наближення для функції $x_0(t) = t$ в множині поліномів нульового ступеня.

Розв'язання. Множина поліномів нульового ступеня $M = \{x(t) \equiv x \mid x \in R\}$ є одновимірним підпростором в $C([0, 1])$, отже задача апроксимації має розв'язок. Для його знаходження обчислимо для кожного $x \in M$ норму $\|x_0 - x\|$.

$$\forall\, x \in R\ \|x_0 - x\| = \max_{t \in [0,1]} |t - x| = \begin{cases} 1 - x,\ x < \frac{1}{2} \\ x,\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Її мінімум досягається при $x = \frac{1}{2}$. Отже, $proj_M x_0 = \frac{1}{2}$.

В просторах зі скалярним добуком розв'язок задачі апроксимації можна також знайти за допомогою варіаційної нерівності.

Теорема 4.4 (про апроксимацію в гільбертовому просторі).

Нехай X -гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, M - замкнена опукла множина. Тоді задача апроксимації (4.4) має єдиний розв'язок $z = proj_M x_0$, який характеризується варіаційною нерівністю:

$$\forall\, x \in M\ (x_0 - z, z - x) \geq 0. \tag{4.5}$$

Приклад. В просторі $L^2(0,1)$ знайти елемент найкращого наближення для функції $x_0(t) = t$ в множині поліномів нульового ступеня.

Розв'язання. Оскільки множина поліномів нульового ступеня $M = \{x(t) \equiv x \mid x \in R\}$ є замкненою і опуклою в $L^2(0,1)$, то задача апроксимації має розв'язок $z = proj_M x_0$. Для його знаходження скористаємось варіаційною нерівністю (4.5):

$$\forall\, x \in R\ \int_0^1 (t-z)(z-x)dt = (z-x)(z-\frac{1}{2}) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ z = \frac{1}{2}$$

Отже, і в цьому випадку $proj_M x_0 = \frac{1}{2}$.

Вправи до заняття 4

1. Дослідити на напівнеперервність функціїї в R:

a) $f(x) = [x]$ ($[\cdot]$ - ціла частина);

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in Q \\ 1, \ x \in R \backslash Q \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$.

2. Дослідити функціонал f на напівнеперервність знизу в нормованому просторі X за умови, що $\{f_i\}_{i\geq 1}$ - н.н.зн. у випадку скінченої і нескінченої множини індексів:

a) $f(x) = \sum\limits_{i\geq 1} \alpha_i f_i$, $\{\alpha_i\} \subset [0, +\infty)$;

b) $f(x) = \sup\limits_{i\geq 1} f_i(x)$, $f(x) = \inf\limits_{i\geq 1} f_i(x)$;

c) $f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)$, $\{f_i(x)\}_{i\geq 1}$ - монотонна для кожного $x \in X$.

3. Нехай $f : R \mapsto R$ - невід'ємна, н.н.зн. функція. Показати, що функціонал

$F : L^2(0,1) \mapsto R \cup \{+\infty\}$

$$F(x) = \int\limits_0^1 f(x(t))dt$$

є н.н.зн. в $L^2(0,1)$.

Вказівка: скористатись лемою Фату.

4. Показати, що в попередній задачі умова невід'ємності f є істотною.

Вказівка: розглянути $f(x) = x^3$.

5. За допомогою теореми Вейєрштрасса показати, що множина

$$M = \{x \in C([0,1]) \mid \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq 1, \ x(0) = 0, \ x(1) = 1\}$$

не є компактною в $C([0,1])$.

Вказівка: розглянути функціонал $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$.

6. Довести, що задача апроксимації (4.4) в просторі R^n має розв'язок для будь-якої замкненої множини M. Показати, що у нескінченновимірному просторі це не так.

Вказівка: розглянути в l_2 злічену замкнену множину M.

7. Нехай X - гільбертів простір, M - замкнений, опуклий конус в X. Довести, що $z = proj_M x_0$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall\ x \in M \quad \begin{cases} (x_0 - z, x) \leq 0 \\ (x_0 - z, z) = 0 \end{cases}$$

8. Нехай X - гільбертів простір, M - підпростір в X. Довести, що $z = proj_M x_0$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall\ x \in M \ \ (x_0 - z, x) = 0$$

Показати, що відображення $x \mapsto proj_M x$ є лінійним, неперервним оператором.

9. Нехай $X = R^n$, $M = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid \alpha_i \le x_i \le \beta_i,\ i = 1, ..., n\}$.

Довести, що для $x \notin M$

$$proj_M x = \begin{cases} \alpha_i,\ x_i \le \alpha_i, \\ \beta_i,\ x_i \ge \beta_i \end{cases}$$

10. Нехай $X = l_2$, $M = \{x = (x_1, x_2, ...) \mid x_i \ge 0,\ i \ge 1\}$.

Довести, що для $x \notin M$

$$proj_M x = \begin{cases} 0,\ x_i \le 0, \\ x_i,\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

11. Нехай X - гільбертів простір, $M = \{x \in X \mid (a, x) = b\}$, $a \in X \backslash \{0\}$, $b \in R$.

Довести, що для $x \notin M$

$$proj_M x = x + \frac{(b - (a, x))a}{\|a\|^2}$$

12. Нехай X - гільбертів простір, $M = \{x \in X \mid \|x - a\| \le r\}$, $a \in X$, $r > 0$.

Довести, що для $x \notin M$

$$proj_M x = a + \frac{r(x - a)}{\|x - a\|}$$

13. В просторі $L^2(0, 1)$ знайти елемент найкращого наближення для функції $x_0(t) = e^t$ в множині поліномів 1-го ступеня.

14. В просторі $L^2(0, 1)$ знайти елемент найкращого наближення для функції $x_0(t) = t^2$ в множині поліномів 1-го ступеня з одиничною нормою.

15. В просторі $L^2(0, 1)$ знайти елемент найкращого наближення для функції $x_0(t) = t^3$ в множині $M = \{x \in L^2(0, 1) \mid \int\limits_0^1 x(t)dt = 0\}$.

16. В просторі l_2 знайти елемент найкращого наближення для $x_0 = (1, 0, 0, ...)$ в множині $M = \{x = (x_1, x_2, ...) \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

5. Задачі опуклої оптимізації

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - нормований простір.

Означення 5.1. Множина $A \subset X$ називається опуклою, якщо

$$\forall\ x, y \in A,\ \forall\ \alpha \in [0,1]\ \ \alpha x + (1-\alpha)y \in A.$$

Означення 5.2. Функція $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ називається опуклою, якщо її надграфік

$$epi f = \{(x, \alpha) \mid \alpha \geq f(x)\}$$

- опукла множина в $X \times R$.

Надалі будемо вважати, що $f \not\equiv +\infty$

Теорема 5.1. (властивості опуклих функцій)

Наступні твердження еквівалентні:

1) функція $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ опукла;

2) для будь-яких $x, y \in X$, для всіх $\alpha \in [0,1]$ виконується нерівність

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

3) для будь-яких $x, y \in X$ функція $t \mapsto f(x + ty)$ є опуклою.

Означення 5.3. Функція $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ називається строго опуклою, якщо для будь-яких $x \neq y$, для всіх $\alpha \in (0,1)$ виконується нерівність

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Зауваження f - строго опукла, якщо для будь-яких $x, y \in X$, $y \neq 0$ функція

$$t \mapsto f(x + ty)$$

є строго опуклою.

Теорема 5.2. Нехай $f \in C^2(R^n)$. Тоді f опукла (строго опукла), якщо

$$\forall\ x \in R^n\ \ f''(x) \geq 0\ (f''(x) > 0)$$

Приклад. Нехай $f : X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ - опукла. Довести, що множина

$$M = \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$$

є опуклою.

Розв'язання. $\forall\ x, y \in M,\ \forall\ \alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \leq 0,$$

тобто $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$, отже M - опукла.

Приклад. Дослідити на опуклість функцію $f(x, y, z) = 2x^2 + 2x + 4y - 3z$.

Розв'язання. Оскільки $f \in C^2(R^3)$, дослідимо матрицю 2-их похідних:

$$\forall\ u = (x, y, z)^T \in R^3\ f''(u) = \begin{pmatrix} 4\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $(f''(u), u) = 4x^2 \geq 0$, то f - опукла.

Приклад. Для заданих $K \in L^2(0,1)$, $\gamma > 0$ дослідити на опуклість функціонал f : $L^2(0,1) \mapsto R$

$$f(x) = \left(1 + \int\limits_0^1 K(s)x(s)ds\right)^2 + \gamma \int\limits_0^1 x^2(s)ds$$

Розв'язання. Для фіксованих $x, y \in L^2(0,1)$ розглянемо функцію

$$\varphi(t) = f(x + ty) = \left(1 + \int\limits_0^1 K(s)(x(s) + ty(s))ds\right)^2 + \gamma \int\limits_0^1 (x(s) + ty(s))^2 ds$$

Тоді $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, де $a = \left(\int\limits_0^1 K(s)y(s)ds\right)^2 + \gamma \int\limits_0^1 y^2(s)ds$, b, c - числа, що залежать від x, y. Оскільки $a > 0$ при ненульовому $y \in L^2(0,1)$, то φ - строго опукла, отже f - строго опуклий функціонал.

Означення 5.4. Задача мінімізації

$$\begin{cases} f(x) \to inf \\ x \in A \end{cases} \tag{5.1}$$

називається опуклою, якщо f - опукла функція, A - опукла множина.

Теорема 5.3. (про характер екстремуму в опуклих задачах)

1) В опуклій задачі (5.1) будь-який локальний мінімум є глобальним.

2) Якщо в опуклій задачі (5.1) функція f - строго опукла, то існує не більше однієї точки мінімуму.

Важливим частковим випадком опуклої задачі є наступна задача з обмеженнями-нерівностями

$$\begin{cases} f_0(x) \to inf \\ f_1(x) \leq 0, ..., f_m(x) \leq 0, \\ x \in A, \end{cases} \tag{5.2}$$

де $f_0, f_1, ..., f_m$ - опуклі функції, $A \subseteq X$ - опукла множина.

Наступна теорема в термінах функції Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

дає необхідні і достатні умови мінімуму в задачі (5.2).

Теорема 5.4 (Куна - Такера).

1) Якщо $\bar{x}$ - розв'язок задачі (5.2), то існують множники Лагранжа $\lambda_0, ..., \lambda_m$, не всі одночасно рівні нулю, такі, що

а) $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, ..., m$;

б) $\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, ..., m$;

в) $\inf\limits_{x \in A} L(x, \lambda) = L(\bar{x}, \lambda)$.

2) Якщо $\lambda_0 \neq 0$, то умови а)-в) є достатніми умовами того, що допустимий $\bar{x}$ - розв'язок задачі (5.2).

3) Для того, щоб $\lambda_0 \neq 0$, досить виконання умови Слейтера: існує $x \in A$ таке, що $f_i(x) < 0$, $i = 1, ..., m$.

Зауваження Умова в) пункту 1) теореми у випадку $A = X$ означає, що $\bar{x}$ - критична точка функції Лагранжа.

Приклад. Розв'язати

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 4y - 3z \to inf \\ 8x - 3y + 3z \leq 40, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Функції $f_0 = 2x^2 + 2x + 4y - 3z$, $f_1 = 8x - 3y + 3z - 40$, $f_2 = -y$ є опуклими, отже застосовна теорема Куна-Такера, причому оскільки $f_1(1, 1, 1) < 0$, $f_2(1, 1, 1) < 0$, то виконана умова Слейтера, отже умови теореми Куна-Такера є достатніми.

Функція Лагранжа:

$$L = \lambda_0(2x^2 + 2x + 4y - 3z) + \lambda_1(8x - 3y + 3z - 40) + \lambda_2(-y)$$

Система для визначення розв'язку:

$$\begin{cases} \lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(8x - 3y + 3z - 40) = 0,\ \lambda_2 y = 0 \\ L_x = L_y = L_z = 0 \end{cases}$$

При $\lambda_0 = 0$ одержуємо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, отже $\lambda_0 = 1$. Тоді єдиним розв'язком вказаної системи є $x = -\frac{5}{2}$, $y = 0$, $z = 20$ (при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Оскільки ця точка є допустимою в задачі, то за теоремою Куна-Такера $(-\frac{5}{2}, 0, 20)$ - шуканий розв'язок.

Схема Лагранжа для неопуклих гладких задач в R^n з обмеженнями типу рівностей і нерівностей.

Розглядається задача

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{cases} f_0(x) \to inf \\ f_1(x) \leq 0, ..., f_m(x) \leq 0, \\ g_1(x) = 0, ..., g_p(x) = 0 \end{cases}$$

Тут $m < n$, $X = R^n$, множина допустимих елементів $C = \{x \in X \mid f_1(x) \leq 0, ..., f_m(x) \leq 0, g_1(x) = 0, ..., g_p(x) = 0\}$.

Функція Лагранжа:

$$L(x, \lambda, \beta) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j g_j(x)$$

Теорема 5.5

Якщо допустима $\bar{x}$ - точка локального мінімуму задачі (5.3), а функції $f_0, ..., f_m, g_1, ..., g_p$ - неперервно диференційовні в деякому околі точці $\bar{x}$, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0, ..., \lambda_m, \beta_1, ..., \beta_p$ такі, що

а) $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, ..., m$;

б) $\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, ..., m$;

в) $\frac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{x}) = ... = \frac{\partial L}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0$

Вправи до заняття 5

В усіх задачах, якщо не стверджується інше, X - нормований простір.

1. Дослідити на опуклість множини:

a) $\{z = tx + (1-t)y \mid t \in R\}$, де $x, y \in X$;

b) $\{f \in X^* \mid f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in A\}$, де X^* - спряжений простір, $A \subset X$;

c) $\alpha A + \beta B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$, де $\alpha, \beta \in R$, $A, B \subset X$ - опуклі;

d) $L(A)$, $L^{-1}(A)$, де $L : X \mapsto X$ - лінійний оператор, $A \subset X$ - опукла.

2. Дослідити на опуклість функції:

a) $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$;

b) $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$;

c) $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$,

де $\alpha, \beta \in R$, f_1, f_2 - опуклі функції;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in A \\ +\infty, \ x \notin A \end{cases}$;

e) $f(x) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$,

де $A \subset X$ - опукла;

f) $f(x) = \|x\|$;

g) $f(x) = (Lx, x) + (a, x) + b$, де X - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, $L : X \mapsto X$ - лінійний, неперервний, самоспряжений, невід'ємний оператор, $a \in X$, $b \in R$;

k) $f(x) = x^2(0) - x(1)$;

l) $f(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt$,

де $X = C^1([0, 1])$.

3. Розв'язати

a) $\begin{cases} x + y - 1 \to \inf \\ x - 2y \leq 0 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 16y \to \inf \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y^2 \to \inf \\ x^2 + y \leq -\frac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y \to \inf \\ x^2 + y \leq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z \to \sup \\ x - z \leq 5 \\ y + z \leq 1 \\ z \leq 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3z^2 \to \inf \\ x + y + z \leq -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x^2 + y + 2z^2 \to \inf \\ x^2 + y^2 + z \leq 3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 + y^2 - y + z^2 \to \inf \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x + y - 2z + 4 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

4. Розв'язати

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 \to \inf \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \to \inf \\ xy \leq -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z \to \inf \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z \to \inf \\ x^2 + y^2 + z = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

6. Диференційовність в нормованих просторах

Нехай X, Y - нормовані простори, $F : X \mapsto Y$, $x_0 \in X$.

Означення 6.1. Відображення F має в точці x_0 похідну за напрямком $h \in X$, якщо існує

$$\lim_{t \to 0+} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} := F'(x_0, h) \in Y \tag{6.1}$$

Приклад. Для відображення $F : R^2 \mapsto R$, $F(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sin x_2$ в точці $x_0 = (0, 0)$ знайти похідну за напрямками $h = (0, 1)$ і $h = (1, 0)$.

Розв'язання.

Для $h = (0, 1)$: $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow F'(x_0, h) = 1$.

Для $h = (1, 0)$: $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{F(th_1, th_2)}{t} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sqrt{t}}{t} = \infty \Rightarrow F'(x_0, h)$ не існує.

Означення 6.2 . Якщо границя (6.1) існує для всіх $h \in X$, то кажуть, що F у точці x_0 має першу варіацію, а відображення

$$X \ni h \mapsto F'(x_0, h) \in Y \tag{6.2}$$

називають першою варіацією.

Приклад. Знайти 1-у варіацію для відображення $F : R \mapsto R$, $F(x) = |x|$ в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. $\forall\ h \in R$ $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{t|h|}{t} = |h| \Rightarrow F$ у точці $x_0 = 0$ має першу варіацію $F'(x_0, h) = |h|$.

Означення 6.3. Якщо існує $\Lambda_{x_0} \in L(X, Y)$ такий, що

$$\forall\ h \in X \quad F'(x_0, h) = \Lambda_{x_0}[h], \tag{6.3}$$

то відображення F називається диференційовним за Гато в точці x_0 . При цьому $\Lambda_{x_0} := F'_\Gamma(x_0)$ - похідна Гато, $F'(x_0, h) = \Lambda_{x_0}[h] = F'_\Gamma(x_0)[h]$ - диференціал Гато.

Приклад. Дослідити відображення $F : R \mapsto R$, $F(x) = \sin x$ на диференційовність за Гато в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. $\forall\ h \in R$ $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sin th}{t} = h \Rightarrow F$ у точці $x_0 = 0$ має похідну Гато $F'_\Gamma(x_0) = 1$.

Означення 6.4. Відображення F називається диференційовним за Фреше в точці x_0 , якщо існує $\Lambda_{x_0} \in L(X, Y)$ такий, що

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \Lambda_{x_0}[h] + \alpha(x_0, h),\ \ h \to 0, \tag{6.4}$$

де $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|\alpha(x_0,h)\|}{\|h\|} = 0$.

При цьому $\Lambda_{x_0} := F'(x_0)$ - похідна Фреше, $dF(x_0, h) := \Lambda_{x_0}[h] = F'(x_0)[h]$ - диференціал Фреше.

Зауваження Для $F: R \mapsto R$ диференційовність за Гато і диференційовність за Фреше - це звичайна диференційовність. Отже, для $F: R \mapsto R$ диференційовність за Фреше і за Гато - це одна і та сама властивість. Проте вже для відображень $F: R^2 \mapsto R$ це не так.

Приклад. Дослідити на диференційовність за Фреше:

$$F: C([0,1]) \mapsto R,\ F(x) = x^2(0).$$

Розв'язання.

$$F(x+h) - F(x) = (x(0) + h(0))^2 - x^2(0) = 2x(0)h(0) + h^2(0)$$

Покладемо $\Lambda_x : C([0,1]) \mapsto R$

$$\forall\ h \in C([0,1])\ \ \Lambda_x[h] = 2x(0)h(0)$$

Тоді Λ_x - лінійний, неперервний функціонал, $|h^2(0)| \le \left(\max\limits_{t\in[0,1]} |h(t)|\right)^2 = \|h\|^2$, отже для $\alpha(x,h) = h^2(0)$ справедливий розклад (6.4). Таким чином, F диференційовне за Фреше в будь-якій точці $x \in C([0,1])$ і відповідний диференціал задається формулою

$$dF(x,h) = 2x(0)h(0)$$

Означення 6.5. Відображення F називається строго диференційовним у точці x_0, якщо існує $\Lambda_{x_0} \in L(X,Y)$ такий, що для всіх $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x_1, x_2 \in O_\delta(x_0)$ виконується

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda_{x_0}[x_1 - x_2]\| \le \varepsilon \|x_1 - x_2\| \tag{6.5}$$

При цьому $\Lambda_{x_0} := F'(x_0)$ - строга похідна, $dF(x_0,h) := \Lambda_{x_0}[h] = F'(x_0)[h]$ - строгий диференціал.

Зауваження Якщо $F: R^n \mapsto R$ - неперервно диференційовна в околі точки x_0, то F - строго диференційовна в цій точці і відповідний диференціал задається формулою

$$dF(x_0,h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_i} h_i$$

Приклад. Дослідити на строгу диференційовність:

$$F: C([0,1]) \mapsto R,\ F(x) = x^2(0).$$

Розв'язання. Оскільки ми вже знаємо, що $2x(0)h(0)$ - диференціал Фреше, то для фіксованого $\varepsilon > 0$ потрібно в околі точки x перевірити нерівність (6.5):

$$|x_1^2(0) - x_2^2(0) - 2x(0)(x_1(0) - x_2(0))| \le |x_1(0) - x_2(0)||x_1(0) - x_2(0) - 2x(0) < \varepsilon\|x_1 - x_2\|$$

при $\|x_1 - x\| < \delta$, $\|x_2 - x\| < \delta$, $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином, F строго диференційовне в будь-якій точці $x \in C([0,1])$ і відповідний диференціал задається формулою

$$dF(x,h) = 2x(0)h(0)$$

Теорема 6.1. (про взаємозв'язок між похідними)

Між означеннями 6.1-6.5 і неперервністю F мають місце наступні імплікації:

1) Озн. 6.5 $\Rightarrow$ Озн. 6.4 $\Rightarrow$ Озн. 6.3 $\Rightarrow$ Озн. 6.2 $\Rightarrow$ Озн. 6.1;

2) Озн. 6.4 $\Rightarrow$ неперервність F в точці x_0;

3) Озн. 6.5 $\Rightarrow$ неперервність F в околі точки x_0.

Ще один спосіб дослідження на строгу диференційовність - це використання теореми про суперпозицію.

Теорема 6.2 (про суперпозицію)

Нехай X, Y, Z - нормовані простори,

$$F_1 : X \mapsto Y,\ F_1(x_0) = y_0,\ F_2 : Y \mapsto Z$$

Якщо F_1 - строго диференційовне в точці x_0, F_2 - строго диференційовне в точці y_0, то відображення суперпозиції

$$F = F_2(F_1) : X \mapsto Z$$

строго диференційовне в точці x_0 і для відповідного диференціалу справедлива формула

$$dF(x_0, h) = F_2'(y_0)[F_1'(x_0)[h]] \tag{6.6}$$

Приклад. Дослідити на строгу диференційовність:

$$F : C([0,1]) \mapsto R,\ F(x) = x^2(0).$$

Розв'язання. Відображення F може бути представлене у вигляді $F_2(F_1)$, де

$$F_1 : C([0,1]) \mapsto R,\ F_1(x) = x(0),\ F_2 : R \mapsto R,\ F_2(y) = y^2$$

Обидва ці відображення є строго диференційовними в будь-якій точці, причому

$$F_1'(x)[h] = h(0),\ F_2'(y)[p] = 2yp$$

Таким чином, за теоремою про суперпозицію F строго диференційовне в будь-якій точці $x \in C([0,1])$ і відповідний диференціал задається формулою (6.6)

$$dF(x, h) = 2F_1(x) \cdot F_1'(x)[h] = 2x(0)h(0)$$

Наступна теорема дає необхідні умови локального екстремуму диференційовних функціоналів в нормованих просторах.

Теорема 6.3 (необхідна умова екстремуму диференційовних функціоналів) Нехай X - нормований простір, $F : X \mapsto R$, точка $x_0 \in X$ - точка локального екстремуму F. Тоді якщо відображення F диференційовне за Гато (Фреше, строго) в точці x_0, то відповідна похідна дорівнює нулю, тобто

$$\forall\ h \in X\ F'(x_0)[h] = 0 \tag{6.7}$$

Вправи до заняття 6

1. Знайти для $F : R^2 \mapsto R$ в точці $x_0 = (0,0)$ 1-у варіацію та дослідити на диференційовність за Гато:

a) $F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + e^{|x_1|}$;

b) $F(x_1, x_2) = |x_1| \cos x_2$;

c) $F(x_1, x_2) = |x_1|^3 + x_1 x_2$;

d) $F(x_1, x_2) = \sin \sqrt{x_1 x_2}$;

e) $F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_1 = x_2^2,\ x_2 > 0 \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}$.

2. Дослідити на диференційовність $F : l_2 \mapsto R$:

a) $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$;

b) $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^4$;

c) $F(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i} \right)^2$;

d) $F(x) = \sin \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$.

3) Дослідити на диференційовність $F : C([0,1]) \mapsto R$:

a) $F(x) = |x(0)|$;

b) $F(x) = x(0)x(1)$;

c) $F(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$;

d) $F(x) = \left(\int\limits_0^1 x(t)dt \right)^2$;

e) $F(x) = e^{x(0)}$;

f) $F(x) = \cos x^2(1)$.

4. Нехай X - гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$ та скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $a \in X$, $A \in L(X,X)$. Дослідити на диференційовність $F : X \mapsto R$:

a) $F(x) = (Ax, x) + (a, x)$;

b) $F(x) = \|x\|^2$;

c) $F(x) = \|Ax - a\|^2$;

d) $F(x) = \|x\|$.

5. Дослідити на диференційовність $F : C^1([0,1]) \mapsto R$:

a) $F(x) = \varphi(x(0), x(1))$, де $\varphi \in C^1(R^2)$;

b) $F(x) = \int\limits_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$, де $L \in C^1(R^3)$.

6. Знайти мінімум функціонала $F : L^2(0,1) \mapsto R$

$F(x) = \left(\int\limits_0^1 \sin 2tx(t)dt \right)^2 + \int\limits_0^1 x^2(t)dt$

7. Нехай X - гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$ та скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $a \in X$, $b \in R$.

Розв'язати:

$$\begin{cases} \|x - x_0\| \to \inf \\ (x,a) \le b \end{cases}$$

7. Найпростіша задача варіаційного числення

Необхідні функціональні простори:

$KC([t_0, t_1])$ - кусково-неперервні функції на $[t_0, t_1]$, тобто неперервні на $[t_0, t_1]$ функції крім, можливо, скінченної множини точок розриву першого роду, в яких функції неперервні зправа;

$C([t_0, t_1])$ - неперервні на $[t_0, t_1]$ функції;

$KC^1([t_0, t_1])$ - кусково-диференційовні функції на $[t_0, t_1]$, тобто неперервні на $[t_0, t_1]$ функції, похідні яких є кусково-неперервними;

$C^1([t_0, t_1])$ - неперервно диференційовні на $[t_0, t_1]$ функції.

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_1 = \max\{\|x\|_0, \| \cdot x\|_0\}$$

$(C([t_0, t_1]), \| \cdot \|_0)$ - банахів простір,

$(KC^1([t_0, t_1]), \| \cdot \|_0)$ - нормований простір (але не банахів),

$(C^1([t_0, t_1]), \| \cdot \|_1)$ - банахів простір.

Найпростіша задача варіаційного числення або задача Лагранжа

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{7.1}$$

Функції $x(t)$, що задовольняють умови $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$, будемо називати допустимими елементами задачі (7.1).

Означення 7.1 Допустимий елемент $\bar{x} \in KC^1([t_0, t_1])$ доставляє сильний локальний мінімум (максимум) в задачі (7.1), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого елемента $x \in KC^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\bar{x} - x\|_0 < \delta$, виконується

$$J(x) \geq J(\bar{x}) \quad (J(x) \leq J(\bar{x}))$$

Означення 7.2 Допустимий елемент $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ доставляє слабкий локальний мінімум (максимум) в задачі (7.1), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого елемента $x \in C^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\bar{x} - x\|_1 < \delta$, виконується

$$J(x) \geq J(\bar{x}) \quad (J(x) \leq J(\bar{x}))$$

Зауваження. Якщо $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ доставляє сильний локальний мінімум, то $\bar{x}$ доставляє слабкий локальний мінімум.

Надалі будемо використовувати позначення $\bar{L}(t) = L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$.

Теорема 7.1 (необхідні умови слабкого екстремуму в задачі Лагранжа).

Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ - слабкий локальний екстремум в задачі (7.1), $L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді

1) $\bar{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$;

2) $\bar{x}$ задовольняє *рівняння Ейлера*:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t) = L_x(t) \tag{7.2}$$

Зауваження. Розв'язки рівняння Ейлера називаються *екстремалями.* Екстремалі, що задовольняють умови $x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$, називаються допустимими екстремалями в задачі Лагранжа.

Приклад.

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + 2x(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Тут $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + 2x$, $L_x = 2$, $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$. Очевидно, що функції є неперервними в будь-якій відкритій множині, отже, виконані умови теореми 7.1.

Рівняння Ейлера: $2\ddot{x} = 2$;

Загальний розв'язок рівняння Ейлера (екстремалі): $x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$.

Серед усіх розв'язків рівняння Ейлера вибираємо ті, що є допустимими елементами даної задачі, а саме, ті розв'язки, для яких виконуються $x(0) = 0, \quad x(1) = 1$. Із цих обмежень шукаємо константи C_1, C_2 і маємо $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$. Отже, дістаємо допустиму екстремаль $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t)$.

Залишилось перевірити, чи дійсно знайдена екстремаль є розв'язком задачі. Для цього розглядаємо вираз $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in C^1([0, 1]), h(0) = h(1) = 0$. Легко бачити, що

$$J(\bar{x} + h) - J(\bar{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2(t)dt \geq 0,$$

отже допустима екстремаль $\bar{x}$ доставляє слабкий глобальний мінімум в даній задачі.

Теорема 7.2 (про заокруглення кутів).

Нехай $L \in C([t_0, t_1] \times R \times R)$,

$$V_0 := \{x \in KC^1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\}$$

$$V_1 := \{x \in C^1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\}$$

Тоді

$$\inf_{x \in V_0} J(x) = \inf_{x \in V_1} J(x), \ \sup_{x \in V_0} J(x) = \sup_{x \in V_1} J(x),$$

причому ця рівність зберігається і в сильному δ-околі фіксованої функції $\bar{x}$.

Завдяки цій теоремі ми в попередньому прикладі можемо говорити, що $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум.

Зауваження Рівняння Ейлера - це диференціальне рівняння 2-го порядку, яке не завжди можна легко проінтегрувати. Проте в багатьох ситуаціях його можна звести до рівняння 1-го порядку. А саме:

1) якщо $L = L(t, \dot{x})$, то $L_{\dot{x}}$ - це 1-ий інтеграл рівняння Ейлера;

2) якщо $L = L(x, \dot{x})$, то $\dot{x}L_{\dot{x}} - L$ - це 1-ий інтеграл рівняння Ейлера.

Застосуємо цей підхід до розв'язання задачі про брахістохрону із заняття 1

Приклад.

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \to inf \\ x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Розв'язання. $L = L(x, \dot{x}) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}$, $L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Отже, використовуючи перший інтеграл $\dot{x}L_{\dot{x}} - L$, маємо рівняння 1-го порядку

$$\frac{\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = C_1,$$

або, після очевидних перетворень,

$$x(1+\dot{x}^2) = \frac{1}{C_1^2}.$$

Використовуючи метод введення параметра, одержуємо циклоїду

$$\begin{cases} x = r(1 - \cos p) \\ t = r(p - \sin p) \end{cases},$$

де $r = r(t_1, x_1)$ - додатнє число, $p \in [0, 2\pi]$ - параметр.

Вправи до заняття 7

Розв'язати

1) $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2(t) - x(t) + 4x(t)\cos t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} (\dot{x}^2(t) + 4x^2(t))dt \to extr \\ x(0) = e^2, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} (\dot{x}^2(t) + x^2(t))e^{2t}dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2(t) + x^2(t) - 4x(t)\sin t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} \dot{x}^3(t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} (\dot{x}^3(t) - \dot{x}^2(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int\limits_0^{1} x^2(t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = a, \end{cases}$ де $a \in R$ - параметр.

8) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

Знайти допустимі екстремалі

10) $\begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{t}dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1 + \dot{x}^2}dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$

8. Задача Больца

Розглядається задача

$$J(x)=\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt+l(x(t_0),x(t_1))\to extr \tag{8.1}$$

Означення 8.1 Елемент $\bar{x}\in KC^1([t_0,t_1])$ доставляє сильний локальний мінімум (максимум) в задачі (8.1), якщо існує таке $\delta>0$, що для довільного елемента $x\in KC^1([t_0,t_1])$, для якого $\|\bar{x}-x\|_0<\delta$, виконується

$$J(x)\geq J(\bar{x})\ \ (J(x)\leq J(\bar{x}))$$

Означення 8.2 Елемент $\bar{x}\in C^1([t_0,t_1])$ доставляє слабкий локальний мінімум (максимум) в задачі (8.1), якщо існує таке $\delta>0$, що для довільного елемента $x\in C^1([t_0,t_1])$, для якого $\|\bar{x}-x\|_1<\delta$, виконується

$$J(x)\geq J(\bar{x})\ \ (J(x)\leq J(\bar{x}))$$

Надалі будемо використовувати позначення $\bar{l}=l(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$.

Теорема 8.1 (необхідні умови слабкого екстремуму в задачі Больца).

Нехай $\bar{x}\in C^1([t_0,t_1])$ - слабкий локальний екстремум в задачі (8.1), $L,L_x,L_{\dot{x}}\in C(U)$, $l\in C^1(V)$, де $U\subset R^3, V\subset R^2$ - відкриті множини, причому $(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\in U$ для всіх $t\in[t_0,t_1]$, $(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\in V$.

Тоді

1) $\bar{L}_{\dot{x}}\in C^1([t_0,t_1])$;

2) $\bar{x}$ задовольняє рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t)=L_x(t)$;

3) $\bar{x}$ задовольняє *умови трансверсальності*:

$$L_{\dot{x}}(t_0)=l_{x(t_0)},\quad L_{\dot{x}}(t_1)=-l_{x(t_1)} \tag{8.2}$$

Зауваження. Екстремалі, що задовольняють умови трансверсальності, називаються допустимими екстремалями в задачі Больца.

Приклад.

$$J(x)=\int\limits_0^1(\dot{x}^2(t)-x(t))dt+\frac{x^2(1)}{2}\to extr$$

Розв'язання. У цій задачі $L(t,x,\dot{x})=\dot{x}^2-x$, $L_x=-1$, $L_{\dot{x}}=2\dot{x}$, $l(x(0),x(1))=\frac{x^2(1)}{2}$. Очевидно, що $L,L_x,L_{\dot{x}}$ неперервні в будь-якій відкритій області $U\subset R^3$ і l неперервно диференційовна в будь-якій відкритій області $V\subset R^2$.

Рівняння Ейлера: $\ddot{x} = -\frac{1}{2}$. Загальний розв'язок цього рівняння: $x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Серед усіх розв'язків рівняння Ейлера шукаємо ті, що задовольняють умови трансверсальності:

$$L_{\dot{x}}(0) = 2\dot{x}(0) = l_{x(0)} = 0, \quad L_{\dot{x}}(1) = 2\dot{x}(1) = -l_{x(1)} = -x(1)$$

Із цих рівностей маємо

$$2C_1 = 0, \quad -1 + 2C_1 = \frac{1}{4} - C_1 - C_2,$$

тобто $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{5}{4}$. Отже, єдина допустима екстремаль $\bar{x}(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}$.

Для перевірки того, чи є $\bar{x}$ розв'язком задачі, складемо різницю $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in C^1([0, 1])$. Легко бачити, що

$$J(\bar{x} + h) - J(\bar{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2(t)dt + \frac{h^2(1)}{2} \geq 0,$$

отже допустима екстремаль $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум в даній задачі.

Вправи до заняття 8

Розв'язати

1) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) - x(t))dt + x^2(1) - x(0) \to extr$

2) $\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$

3) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt - 2sh(1)x(1) \to extr$

4) $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2(t)dt - 2x(1) + x^2(2) \to extr$

5) $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2(t) - x(t))dt - 2x^2(0) - x^2(\pi) \to extr$

6) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) - 2x(t))dt \to extr$

7) $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2(t) + x^2(t) - 4x(t)\sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$

Знайти допустимі екстремалі

8) $\int\limits_0^{\ln 2} (\dot{x}^2(t) + 2x^2(t))dt + (x(0) - 9)x(\ln 2) \to extr$

9) $\int\limits_0^3 4\dot{x}^2(t)x^2(t)dt + x^4(0) - 8x(3) \to extr$

10) $\int\limits_0^1 e^{x(t)}\dot{x}^2(t)dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to extr$

9. Ізопериметрична задача

Розглядається задача

$$(9.1)\qquad \begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \\ J_i(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \alpha_i, \ i = 1, ..., m \end{cases}$$

Функції $x(t)$, що задовольняють умови $x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \ J_i(x) = \alpha_i, \ i = 1, ..., m$ будемо називати допустимими елементами задачі (9.1).

Означення 9.1 Допустимий елемент $\bar{x} \in KC^1([t_0, t_1])$ доставляє сильний локальний мінімум (максимум) в задачі (9.1), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого елемента $x \in KC^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\bar{x} - x\|_0 < \delta$, виконується

$$J(x) \geq J(\bar{x}) \quad (J(x) \leq J(\bar{x}))$$

Означення 9.2 Допустимий елемент $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ доставляє слабкий локальний мінімум (максимум) в задачі (9.1), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого елемента $x \in C^1([t_0, t_1])$, для якого $\|\bar{x} - x\|_1 < \delta$, виконується

$$J(x) \geq J(\bar{x}) \quad (J(x) \leq J(\bar{x}))$$

Функція Лагранжа задачі (9.1):

$$L(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$$

Теорема 9.1 (необхідні умови слабкого екстремуму в ізопериметричній задачі.

Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ - слабкий локальний екстремум в задачі (9.1), для всіх $i = 0, ..., m$ $f_i, (f_i)_x, (f_i)_{\dot{x}} \in C(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0, ..., \lambda_m$ такі, що

1) $\bar{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$;

2) $\bar{x}$ задовольняє рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t) = L_x(t)$.

Зауваження. Екстремалі, що задовольняють умови $x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \ J_i(x) = \alpha_i$, $i = 1, ..., m$, називаються допустимими екстремалями в ізопериметричній задачі.

Приклад.

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \\ \int\limits_0^1 x(t)dt = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Тут функція Лагранжа $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$, $L_x = \lambda_1$, $L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$. Очевидно, що функції $L, L_x, L_{\dot{x}}$ є неперервними в будь-якій відкритій множині, отже, виконані умови теореми 9.1. Рівняння Ейлера має вигляд $2\lambda_0 \ddot{x} = \lambda_1$. При $\lambda_0 = 0$ одержуємо $\lambda_1 = 0$, що протирічить теоремі 9.1. Отже, покладемо $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тоді загальний розв'язок рівняння Ейлера: $x(t) = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2$.

Серед усіх розв'язків рівняння Ейлера вибираємо ті, що є допустимими елементами даної задачі:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 0 \\ x(1) = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\lambda_1}{2} + C_1 = 1 \\ \int\limits_0^1 x(t)dt = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\lambda_1}{3} + C_1 = 2 \end{cases}$$

Звідси $\lambda_1 = -6$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$. Отже, дістаємо єдину допустиму екстремаль $\bar{x}(t) = -3t^2 + 4t$.

Залишилось перевірити, чи дійсно знайдена екстремаль є розв'язком задачі. Для цього розглядаємо вираз $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in C^1([0,1]), h(0) = h(1) = 0$, $\int\limits_0^1 h(t)dt = 0$. Легко бачити, що

$$J(\bar{x} + h) - J(\bar{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2(t)dt \geq 0,$$

отже допустима екстремаль $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум в даній задачі.

Вправи до заняття 9

Розв'язати

$$1)\begin{cases}\int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)dt \to extr\\ x(0)=-4,\quad x(1)=4\\ \int\limits_0^1 tx(t)dt=0\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}\int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt \to extr\\ x(0)=-4,\quad x(\pi)=\pi\\ \int\limits_0^\pi \dot{x}^2(t)dt=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\int\limits_0^\pi \dot{x}^2(t)dt \to extr\\ x(0)=2,\quad x(\pi)=0\\ \int\limits_0^\pi x(t)\cos t dt=\frac{\pi}{2}\\ \int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt=\pi+2\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t)+x^2(t))dt \to extr\\ x(0)=0,\quad x(1)=e\\ \int\limits_0^1 x(t)e^t dt=\frac{e^2+1}{4}\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2(t)-x^2(t))dt \to extr\\ x(0)=0,\quad x(\frac{\pi}{2})=0\\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin t dt=1\end{cases}$$

10. Задачі зі старшими похідними і векторні задачі

Задача Лагранжа зі старшими похідними - це задача вигляду

$$(10.1)\qquad \begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t))dt \to extr \\ x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

Функції $x(t)$, що задовольняють умови $x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0, ..., n-1$, будемо називати допустимими елементами задачі (10.1). Тоді відносно норми $\|\cdot\|_n$ простору n разів неперервно диференційовних функцій $C^{(n)}([t_0, t_1]$ аналогічно до задачі Лагранжа (7.1) означаються сильний і слабкий локальний мінімуми задачі (10.1).

Теорема 10.1 (необхідні умови слабкого екстремуму в задачі зі старшими похідними).

Нехай $\bar{x} \in C^{(n)}([t_0, t_1])$ - слабкий локальний екстремум в задачі (10.1), $L, L_{x^{(k)}} \in C(U)$, $k = 0, ..., n$, де $U \subset R^{n+2}$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), ..., \bar{x}^{(n)}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$. Тоді $\bar{x}$ задовольняє *рівняння Ейлера-Пуассона*:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} L_{x^{(k)}}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), ..., \bar{x}^{(n)}(t)) = 0$$

Приклад

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{0}^{1} (\ddot{x}^2(t) - 24tx(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{5}, \ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Це задача Лагранжа зі старшими похідними. Тут $L(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = \ddot{x}^2 - 24tx$, $L_x = -24t$, $L_{\dot{x}} = 0$, $L_{\ddot{x}} = 2\ddot{x}$. Очевидно, що ці функції є неперервними в будь-якій відкритій множині, отже, виконані умови теореми 10.1.

Рівняння Ейлера-Пуассона: $x^{(4)}(t) = 12t$.

Його загальний розв'язок: $x(t) = \frac{t^5}{10} + C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$.

З умов $x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{5}, \ \dot{x}(1) = 1$ маємо $C_1 = \frac{3}{10}$, $C_2 = -\frac{1}{5}$, $C_3 = C_4 = 0$. Отже, дістаємо допустиму екстремаль $\bar{x}(t) = \frac{1}{10}(t^5 + 3t^3 - 2t^2)$.

Залишилось перевірити, чи дійсно знайдена екстремаль є розв'язком задачі. Для цього розглядаємо вираз $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in C^2([0, 1]), h(0) = \dot{h}(0) = h(1) = \dot{h}(1) = 0$. Легко бачити, що

$$J(\bar{x} + h) - J(\bar{x}) = \int_0^1 \ddot{h}^2(t)dt \geq 0,$$

отже допустима екстремаль $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум в даній задачі.

Векторна задача Лагранжа - це задача вигляду

(10.2)
$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt \to extr \\ x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \ i = 1, ..., n \end{cases}$$

Вектор-функції $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, що задовольняють умови $x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \ i = 1, ..., n$, будемо називати допустимими елементами задачі (10.2). Відносно норм просторів вектор-функцій аналогічно до задачі Лагранжа означається сильний і слабкий локальний мінімуми задачі (10.2).

Теорема 10.2 (необхідні умови слабкого екстремуму в векторній задачі Лагранжа).

Нехай $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ - слабкий локальний екстремум в задачі (10.2), $L, L_{x_i}, L_{\dot{x}_i} \in C(U)$, $i = 1, ..., n$, де $U \subset R^{2n+1}$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді $\bar{x}$ задовольняє систему рівнянь Ейлера:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}(t) = L_{x_i}(t), \ i = 1, ..., n$$

Векторна задача Больца - це задача вигляду

(10.3)
$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt+ \\ +l(x_1(t_0), ..., x_n(t_0), x_1(t_1), ..., x_n(t_1)) \to extr \end{cases}$$

Відносно норм просторів вектор-функцій аналогічно до задачі Больца означається сильний і слабкий локальний мінімуми задачі (10.3).

Теорема 10.3 (необхідні умови слабкого екстремуму в векторній задачі Больца).

Нехай $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ - слабкий локальний екстремум в задачі (10.3), $L, L_{x_i}, L_{\dot{x}_i} \in C(U)$, $l_{x_i(t_0)}, l_{x_i(t_1)} \in C(V)$, $i = 1, ..., n$, де $U \subset R^{2n+1}$, $V \subset R^{2n}$ - відкриті множини, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді $\bar{x}$ задовольняє

1) систему рівнянь Ейлера: $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}(t) = L_{x_i}(t), \ i = 1, ..., n$;

2) систему умов трансверсальності:

$$L_{\dot{x}_i}(t_0) = l_{x_i(t_0)}, \ L_{\dot{x}_i}(t_1) = -l_{x_i(t_1)}, \ i = 1, ..., n$$

Приклад

$$\begin{cases} J(x, y) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + 2x(t) + 4y(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \ y(0) = 0, \ x(1) = 1, \ y(1) = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Це векторна задача Лагранжа.Тут $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2x + 4y$, $L_x = 2$, $L_y = 4$, $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$, $L_{\dot{y}} = 2\dot{y}$. Записуємо систему рівнянь Ейлера:

$$\ddot{x} = 1, \ \ddot{y} = 2$$

. Загальний розв'язок цієї системи

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \ y(t) = t^2 + C_3 t + C_4$$

. Серед усіх розв'язків вибираємо ті, що є допустимими для даної задачі. Тоді з обмежень задачі маємо $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Таким чином, дістаємо єдину допустиму екстремаль

$$\bar{x}(t) = \frac{t^2 + t}{2}, \ \bar{y}(t) = t^2.$$

Перевіримо, чи доставляє вона розв'язок задачі. Розглядаємо вираз

$$J(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) - J(\bar{x}, \bar{y}),$$

в якому $h_1, h_2 \in C^1([0, 1])$, $h_1(0) = h_1(1) = h_2(0) = h_2(1) = 0$. Неважко впевнитись, що

$$J(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) - J(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^1 (\dot{h}_1^2(t) + \dot{h}_2^2(t))dt \geq 0$$

Отже, екстремаль $\bar{x}$, $\bar{y}$ доставляє глобальний мінімум задачі.

Вправи до заняття 10

Розв'язати

1) $\begin{cases} \int\limits_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2(t)dt \to extr \\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\quad x(1)=e,\ \dot{x}(1)=2e \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\ddot{x}^2(t)+\dot{x}^2(t)-2x(t))dt \to extr \\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0,\quad x(1)=-\frac{1}{2},\ \dot{x}(1)=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (e^{-t}\ddot{x}(t)+x^2(t))dt \to extr \\ x(0)=a,\ \dot{x}(0)=b,\quad x(1)=c,\ \dot{x}(1)=d, \end{cases}$ де $a,b,c,d \in R$ - параметри

4) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+2x(t)y(t))dt \to extr \\ x(0)=0,\ y(0)=0,\ x(\frac{\pi}{2})=1,\ y(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} (-2\dot{x}^2(t)-\dot{y}^2(t)+x^2(t)+2x(t)y(t))dt \to extr \\ x(0)=0,\ y(0)=0,\ x(\pi)=0,\ y(\pi)=0 \end{cases}$

6) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t)+x(t)+y^2(t))dt + x^2(0) \to extr$

7) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+x(t)y(t))dt \to extr$

8) $\int\limits_0^1 (x^2(t)+y^2(t)+2\dot{x}(t)\dot{y}(t))dt \to extr$

11. Умови Лежандра, Якобі, Вейєрштраса

Розглянемо задачу Лагранжа

$$(11.1)\qquad \begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Теорема 11.1 (необхідні умови слабкого локального мінімуму 2-го порядку).

Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ - слабкий локальний мінімум в задачі (11.1), $L \in C^2(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді $\bar{x}$ задовольняє:

1) рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_x(t)$;

2) умову Лежандра: $\forall\ t \in [t_0, t_1]\ \ \bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$;

3) умову Якобі: на (t_0, t_1) не існує спряженої до точки t_0, тобто не існує точки $t^* \in (t_0, t_1)$ такої що існує $h \not\equiv 0$ - розв'язок рівняння Якобі

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{L}_{x\dot{x}}(t)h(t) + \bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)\right) = \bar{L}_{xx}(t)h(t) + \bar{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t),$$

для якого $h(t_0) = h(t^*) = 0$, $\bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t^*)\dot{h}(t^*) \neq 0$.

Теорема 11.2 (достатні умови слабкого локального мінімуму).

Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ допустима в задачі (11.1), $L \in C^2(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$ і виконані умови:

1) рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_x(t)$;

2) посилена умова Лежандра: $\forall\ t \in [t_0, t_1]\ \ \bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$;

3) посилена умова Якобі: на $(t_0, t_1]$ не існує спряженої до точки t_0.

Тоді $\bar{x}$ доставляє слабкий локальний мінімум в задачі (11.1).

Означення 11.1 Функція

$$E(t, x, u, v) := L(t, x, v) - L(t, x, u) - (v - u)L_{\dot{x}}(t, x, u)$$

зазивається функцією Вейєрштраса задачі (11.1).

Теорема 11.3 (необхідні умови сильного локального мінімуму). Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ - сильний локальний мінімум в задачі (11.1), $L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді $\bar{x}$ задовольняє умови Вейєрштраса:

$$\forall\ t \in [t_0, t_1]\ \forall\ \xi \in R \quad E(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \dot{\bar{x}}(t) + \xi) \geq 0$$

Теорема 11.4 (достатні умови сильного локального мінімуму). Нехай $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ - допустима в задачі (11.1), $L \in C^2(U)$, де $U \subset R^3$ - відкрита множина, причому $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$, і виконані умови:

1) рівняння Ейлера: $\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_x(t)$;

2) посилена умова Лежандра: $\forall\ t \in [t_0, t_1]\ \ \bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$;

3) посилена умова Якобі: на $(t_0, t_1]$ не існує спряженої до точки t_0.

4) посилена умова Вейєрштраса:

$$\forall\ (t, x, u), (t, x, v) \in U \quad E(t, x, u, v) \geq 0.$$

Тоді $\bar{x}$ доставляє сильний локальний мінімум в задачі (11.1).

Зауваження. Аналогічні теореми справедливі і для задач на максимум із заміною знаків на протилежні в умовах Лежандра і Вейєрштрасса.

Приклад.

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) - x(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. Тут $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x$, $L_x = -1$, $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$, $L_{xx} = L_{x\dot{x}} = 0$, $L_{\dot{x}\dot{x}} = 2$. Очевидно, що ці функції є неперервними в будь-якій відкритій множині. Складаємо рівняння Ейлера: $2\ddot{x} = -1$. Загальний розв'язок цього рівняння - $x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Серед усіх розв'язків рівняння Ейлера шукаємо допустимі функції. Маємо єдину допустиму екстремаль $\bar{x}(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{3t}{4}$. Виконується посилена умова Лежандра: $L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$. Складаємо рівняння Якобі: $\frac{d}{dt}(2\dot{h}) = 0$. Загальний розв'язок рівняння Якобі - $h(t) = C_1 t + C_2$. Далі перевіряємо, чи існує точка t^* , спряжена до точки $t_0 = 0$. Із умов $h(0) = h(t^*) = 0$ маємо $h(t) \equiv 0$, отже, спряженої точки не існує на $(0, 1]$. Таким чином, посилена умова Якобі виконується. Тоді $\bar{x}$ доставляє слабкий локальний мінімум даної задачі. Перевіримо, чи доставляє сильний локальний мінімум. Для цього перевіряємо посилену умову Вейєрштрасса: $E(t, x, u, v) = (v - u)^2 \geq 0$, отже, $\bar{x}$ доставляє сильний локальний мінімум цієї задачі.

Вправи до заняття 11

Розв'язати, застосовуючи необхідні та достатні умови екстремуму

1) $\begin{cases} \int\limits_1^e (t\dot{x}^2(t) + 2x(t))dt \to extr \\ x(1) = 1, \quad x(e) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + 2x(t))e^t dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t) - 2x(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{3}{2}} (\dot{x}^3(t) + 2x(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3}{2}) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \int\limits_0^1 \dot{x}^3(t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = a, \end{cases}$ де $a \in R$ - параметр

7) $\begin{cases} \int\limits_0^a (\dot{x}^2(t) - x^2(t) + 4x(t)e^t)dt \to extr \\ x(0) = 1, \quad x(a) = 0, \end{cases}$ де $a \in (0, 2\pi)$ - параметр

8) $\begin{cases} \int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)x^2(t)dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)e^{x(t)}dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \ln 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \int\limits_0^1 \sin(\dot{x}(t))dt \to extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

12. Задача оптимального керування на множині функцій з вільним кінцем

Будемо використовувати позначення $KC([t_0,t_1],R^n)$, $C([t_0,t_1],R^n)$, $KC^1([t_0,t_1],R^n)$ і $C^1([t_0,t_1],R^n)$ для класів n-мірних вектор-функцій, кожна компонента яких належить відповідному простору скалярнозначних функцій.

Відносно невідомих функцій $x \in KC^1([t_0,t_1],R^n)$ (фазова змінна) і $u \in KC([t_0,t_1],R^m)$ (керування) розглядається задача

(12.1) $$J(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt + \psi(x(t_1)) \to inf$$

(12.2) $$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\\ &x(t_0) = x_0,\\ &u(t) \in U,\ \forall\ t \in [t_0,t_1], \end{aligned}$$

де $U \subset R^m$ - задана множина, A - $n \times n$ матриця, неперервна на $[t_0,t_1]$, B - $m \times n$ матриця, неперервна на $[t_0,t_1]$.

Пару $\{x,u\}$, що задовольняють умови (12.2), будемо називати допустимим процесом задачі (12.1),(12.2).

Означення 12.1 Допустимий процес $\{\bar{x},\bar{u}\} \in KC^1([t_0,t_1],R^n) \times KC([t_0,t_1],R^m)$ називають оптимальним в задачі (12.1),(12.2), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого процесу $\{x,u\} \in KC^1([t_0,t_1],R^n) \times KC([t_0,t_1],R^m)$, для якого $\forall\ t \in [t_0,t_1]$ $\|\bar{x}(t) - x(t)\|_{R^n} < \delta$, виконується

$$J(x,u) \geq J(\bar{x},\bar{u})$$

Зауваження. Компоненту $\bar{u}$ оптимального процесу $\{\bar{x},\bar{u}\}$ називають оптимальним керуванням в задачі (12.1),(12.2).

Теорема 12.1 (принцип максимуму Понтрягіна).

Нехай $\{\bar{x},\bar{u}\}$ - оптимальний процес в задачі (12.1),(12.2), $f, f_x \in C(V \times U)$, $\psi \in C^1(W)$, де $V \subset R^{n+1}$, $W \subset R^n$ - відкриті множини, причому $(t,\bar{x}(t)) \in V$ для всіх $t \in [t_0,t_1]$, $\bar{x}(t_1) \in W$.

Тоді розв'язок $p(t)$ задачі Коші

$$\begin{gathered} \tfrac{dp(t)}{dt} = -A^T p(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \\ p(t_1) = -\psi'(\bar{x}(t)) \end{gathered}$$

задовольняє *принцип максимуму*:

$$\max_{u \in U} \left((p(t),B(t)u)_{R^n} - f(t,\bar{x}(t),u)\right) =$$

$$= (p(t),B(t)\bar{u}(t))_{R^n} - f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$$

Приклад.

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2(t)dt + x(1) \to inf \\ x(0) = 1 \\ |\dot{x}(t)| \le 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось принципом максимуму. Для цього перепишемо цю задачу, як задачу оптимального керування, ввівши додаткову змінну $u = \dot{x}$. Тоді задача має вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 u^2(t)dt + x(1) \to inf \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = 1 \\ |u(t)| \le 1 \end{cases}$$

і до неї застосовна теорема 12.1. Тут $n = m = 1$, $f(t, x, u) = u^2$, $\psi(x) = x$, $A = 0, B = 1$, $U = [-1, 1]$. Тоді відносно невідомих функцій $p(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ маємо систему співвідношень:

$$\dot{p}(t) = 0, \quad p(1) = -1$$

$$\max_{u \in [-1,1]} (p(t)u - u^2) = p(t)\bar{u}(t) - \bar{u}^2(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{u}(t), \quad \bar{x}(0) = 1$$

Принцип максимуму дає вигляд $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{p(t)}{2}, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} \in [-1, 1] \\ -1, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} < -1 \\ 1, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} > 1 \end{cases}$$

Оскільки розв'язком задачі Коші є $p(t) = -1$, то керування не має точок переключення і визначається рівністю $\bar{u}(t) = -\frac{1}{2}$. Тоді $\bar{x}(t) = -\frac{1}{2}t + 1$.

Залишилось перевірити, чи дійсно $\bar{x}$ визначає розв'язок вихідної задачі. Для цього розглядаємо вираз $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in C^1([0, 1])$, така, що $\begin{cases} \bar{x}(0) + h(0) = 1 \\ |\dot{\bar{x}}(t) + \dot{h}(t)| \le 1 \end{cases}$, тобто $h(0) = 0$ і $\dot{h}(t) \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Легко бачити, що для таких h

$$J(\bar{x} + h) - J(\bar{x}) = \int_0^1 \dot{h}^2(t)dt \ge 0,$$

отже $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум в даній задачі.

Вправи до заняття 12

1) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt \to inf \\ x(0) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + u^2(t))dt \to inf \\ \dot{x}(t) = x(t) - 2u(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin t dt \to inf \\ x(0) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \int\limits_0^1 x(t)e^t dt \to inf \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(0) = 1 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \int\limits_0^2 (\dot{x}^2(t) + 2x(t))dt - x(2) \to inf \\ x(0) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int\limits_0^4 (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(0) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{7\pi}{2}} x(t) \sin t dt \to inf \\ x(0) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \int\limits_0^1 \ddot{x}^2(t)dt + x(1) - \frac{5}{2}\dot{x}(1) \to inf \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \int\limits_0^a (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(0) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$, де $a > 0$ - параметр.

13. Загальна задача оптимального керування в формі Понтрягіна

Розглядається загальна постановка задачі оптимального керування в формі Понтрягіна з фіксованим часом:

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \psi_0(x(t_0),x(t_1)) \to inf \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ &\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt + \psi_i(x(t_0),x(t_1)) = 0, \ i = 1,...,k \\ &u(t) \in U, \ \forall \ t \in [t_0,t_1], \end{aligned} \tag{13.2}$$

де $U \subset R^m$ - задана множина, A - $n \times n$ матриця, неперервна на $[t_0,t_1]$, B - $m \times n$ матриця, неперервна на $[t_0,t_1]$.

Пару $\{x,u\}$, що задовольняють умови (13.2), будемо називати допустимим процесом задачі (13.1),(13.2).

Означення 13.1 Допустимий процес $\{\bar{x},\bar{u}\} \in KC^1([t_0,t_1],R^n) \times KC([t_0,t_1],R^m)$ називають оптимальним в задачі (13.1),(13.2), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого процесу $\{x,u\} \in KC^1([t_0,t_1],R^n) \times KC([t_0,t_1],R^m)$, для якого $\forall \ t \in [t_0,t_1]$ $\|\bar{x}(t) - x(t)\|_{R^n} < \delta$, виконується

$$J(x,u) \geq J(\bar{x},\bar{u})$$

Функції Лагранжа задачі (13.1),(13.2):

$$L(t,x,u) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i(t,x,u), \ l(x(t_0),x(t_1)) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \psi_i(x(t_0),x(t_1))$$

Теорема 13.1

Нехай $\{\bar{x},\bar{u}\}$ - оптимальний процес в задачі (13.1),(13.2), $f_i, (f_i)_x \in C(V \times U)$, $\psi_i \in C^1(W)$, $i = 0,...k$, де $V \subset R^{n+1}$, $W \subset R^n$ - відкриті множини, причому $(t,\bar{x}(t)) \in V$ для всіх $t \in [t_0,t_1]$, $\bar{x}(t_1) \in W$.

Тоді існують одночасно не рівні нулю $\lambda_0,...,\lambda_k$, $p(t)$ такі, що

1) $\frac{dp(t)}{dt} = -A^T p(t) + L_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$;

2) $p(t_0) = l_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$, $p(t_1) = -l_{x(t_1)}(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$;

3) має місце принцип максимуму:

$$\max_{u \in U}((p(t),B(t)u)_{R^n} - L(t,\bar{x}(t),u)) =$$

$$= (p(t),B(t)\bar{u}(t))_{R^n} - L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$$

Приклад.

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_0^4 (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(4) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \le 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо цю задачу, як задачу оптимального керування, ввівши додаткову змінну $u = \dot{x}$.

$$\begin{cases} \int\limits_0^4 (u^2(t) + x(t))dt \to inf \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ x(4) = 0 \\ |u(t)| \le 1 \end{cases}$$

Застосуємо теорему 13.1. Тут $L = \lambda_0(u^2 + x)$, $l = \lambda_1 x(4)$. Тоді відносно невідомих $p(t)$, λ_0, λ_1, $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ маємо систему співвідношень:

$$\dot{p}(t) = \lambda_0, \ \ p(0) = 0, \ p(4) = -\lambda_1$$

$$\max_{u \in [-1,1]} (p(t)u - \lambda_0 u^2) = p(t)\bar{u}(t) - \lambda_0 \bar{u}^2(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{u}(t), \ \ \bar{x}(4) = 0$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$, $p(t) \equiv 0$ і маємо протиріччя з теоремою 13.1. Отже, $\lambda_0 = 1$ і принцип максимуму дає вигляд $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{p(t)}{2}, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} \in [-1, 1] \\ -1, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} < -1 \\ 1, \text{ якщо } \frac{p(t)}{2} > 1 \end{cases}$$

При цьому $p(t) = t$, $\lambda_1 = -4$. Тоді

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, \text{ якщо } t \in [0, 2] \\ 1, \text{ якщо } t \in (2, 4] \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + C_1, \text{ якщо } t \in [0, 2] \\ t + C_2, \text{ якщо } t \in (2, 4] \end{cases}$$

$\bar{x}(4) = 0 \Rightarrow C_2 = -4$. З умови неперервності $\bar{x}$ в точці $t = 2$ маємо $C_1 = -3$. Отже,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} - 3, \text{ якщо } t \in [0, 2] \\ t - 4, \text{ якщо } t \in (2, 4] \end{cases}$$

Залишилось перевірити, чи дійсно $\bar{x}$ визначає розв'язок вихідної задачі. Для цього розглядаємо вираз $J(\bar{x} + h) - J(\bar{x})$, де $h \in KC^1([0, 1])$, така, що $\begin{cases} \bar{x}(4) + h(4) = 1 \\ |\dot{\bar{x}}(t) + \dot{h}(t)| \le 1 \end{cases}$, тобто $h(4) = 0$ і

$$|\frac{t}{2} + \dot{h}(t)| \le 1 \text{ при } t \in [0, 2], \ \ |1 + \dot{h}(t)| \le 1 \text{ при } t \in (2, 4].$$

Легко бачити, що для таких h

$$J(\bar{x}+h)-J(\bar{x})=\int\limits_0^4 \dot{h}^2(t)dt+\int\limits_2^4 h(t)dt \geq 0,$$

отже $\bar{x}$ доставляє глобальний мінімум в даній задачі.

Вправи до заняття 13

1) $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(1) = 2 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \int\limits_0^6 (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to inf \\ x(0) = 0,\ x(6) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt \to inf \\ x(-\pi) = x(\pi) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} x(t)\sin t dt \to inf \\ x(0) + x(\pi) = 0 \\ |\dot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(2) \to inf \\ x(0) = 0,\ \int\limits_0^2 \dot{x}^2(t)dt = 2 \\ |\dot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \int\limits_0^1 x(t)dt \to inf \\ x(0) = \dot{x}(1) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \int\limits_0^2 x(t)dt \to inf \\ x(0) + x(2) = 0,\ \dot{x}(2) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \int\limits_0^2 x(t)dt \to inf \\ x(0) = x(2) = \dot{x}(2) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \int\limits_0^4 x(t)dt \to inf \\ x(0) + x(4) = 0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \leq 2 \end{cases}$

$$10)\quad \begin{cases} \int\limits_0^1 \ddot{x}^2(t)dt \to inf \\ x(0) = 11,\ x(1) = \dot{x}(1) = 0 \\ \ddot{x}(t) \le 24 \end{cases}$$

14. Задача оптимальної швидкодії

Відносно невідомих $x \in KC^1([t_0,t_1],R^n)$, $u \in KC([t_0,t_1],R^m)$ і $T \in [t_0,+\infty)$ розглядається задача

$$T \to inf \tag{14.1}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)),\\ &x(t_0) = x_0,\ x(T)) = x_1,\\ &u(t) \in U,\ \forall\ t \in [t_0,T], \end{aligned} \tag{14.2}$$

де $U \subset R^m$ - задана опукла множина, A - $n \times n$ матриця, B - $m \times n$ матриця.

Трійку $\{x,u,T\}$, що задовольняють умови (14.2), будемо називати допустимим процесом задачі (14.1),(14.2).

Означення 14.1 Допустимий процес $\{\bar{x},\bar{u},\bar{T}\}$ називають оптимальним в задачі (14.1),(14.2), якщо існує таке $\delta > 0$, що для довільного допустимого процесу $\{x,u,T\}$, для якого $\forall\ t \in [t_0,T] \cap [t_0,\bar{T}]$ $\|\bar{x}(t) - x(t)\|_{R^n} < \delta$, виконується

$$T \geq \bar{T}$$

Теорема 14.1

Нехай $\{\bar{x},\bar{u},\bar{T}\}$ - оптимальний процес в задачі (14.1),(14.2).

Тоді існує ненульова функція $p(t)$ така, що

1) $\frac{dp(t)}{dt} = -A^T p(t)$;

2) має місце принцип максимуму:

$$\max_{u \in U}(p(t),Bu)_{R^n} = (p(t),B\bar{u}(t))_{R^n}$$

Якщо ж множина допустимих процесів задачі (14.1),(14.2) непорожня, то умови 1),2) є достатніми умовами того, що допустимий процес $\{\bar{x},\bar{u},\bar{T}\}$ є оптимальним в задачі (14.1),(14.2).

Приклад.

$$\begin{cases} T \to inf\\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0\\ x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0\\ |\ddot{x}(t)| \leq 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо цю задачу, як задачу оптимального керування, ввівши додаткові змінні $y = \dot{x},\ u = \dot{y}$.

$$\begin{cases} T \to inf \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \\ x(T) = 0, y(T) = 0 \\ u(t) \in [-1, 1] \end{cases}$$

Застосуємо теорему 14.1. Тут $A = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді відносно невідомих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{u}(t)$ маємо систему співвідношень:

$$\dot{p}_1(t) = 0,\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t)$$

$$\max_{u \in [-1,1]} (p_2(t)u) = p_2(t)\bar{u}(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{y}(t)$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = \bar{u}(t)$$

$$x(0) = 1,\ y(0) = 0\ x(T) = 0,\ y(T) = 0$$

Принцип максимуму дає вигляд $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ p_2(t) > 0 \\ -1,\ \text{якщо}\ p_2(t) < 0 \end{cases}$$

Оскільки $p_2(t) = C_1 t + C_2$ може змінювати знак не більше одного разу, то з вигляду керування маємо, що фазова точка $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, рухаючись лише вздовж траєкторій систем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 1 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -1 \end{cases}$$

повинна потрапити з точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в точку $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ не більше як за одне переключення. Легко бачити, що такий шлях існує і визначається керуванням

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1,\ \text{якщо}\ t \in [0, \tau) \\ 1,\ \text{якщо}\ t \in [\tau, T] \end{cases},$$

де $\tau > 0$ - момент переключення.

Аналізуючи розв'язки задач Коші

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -1 \\ x(0) = 1 \ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 1 \\ x(T) = 0 \ y(T) = 0 \end{cases}$$

одержуємо, що $\tau = 1$. Тоді оптимальний процес визначається наступним чином:

$$\bar{T} = 2,$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } t \in [0, 1) \\ 1, \text{ якщо } t \in [1, 2] \end{cases},$$

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + 1, \text{ якщо } t \in [0, 1) \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2, \text{ якщо } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Вправи до заняття 14

1) $$\begin{cases} T \to inf \\ x(-1) = -1,\ \dot{x}(-1) = 1 \\ x(T) = -1, \dot{x}(T) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \le 2 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} T \to inf \\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(T) = 3, \dot{x}(T) = 0 \\ |\ddot{x}(t)| \le 1 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} T \to inf \\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(T) = -1, \dot{x}(T) = 0 \\ -1 \le \ddot{x}(t) \le 3 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} T \to inf \\ x(0) = 3,\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(T) = -5, \dot{x}(T) = 0 \\ -3 \le \ddot{x}(t) \le 1 \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Моклячук, М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі / М. П. Моклячук. - К.:Либідь, 1994. - 328 с.

2. Перестюк, М. О. Екстремальні задачі: навч. посіб. /М. О. Перестюк, О. М. Станжицький, О. В. Капустян. - К.: ВПЦ Київський ун-т, 2004. - 50 с.

3. Перестюк, М. О. Задачі оптимального керування: навч. посіб. /М. О. Перестюк, О. М. Станжицький, О. В. Капустян. - К.: ТВіМС, 2004. - 55 с.

4. Перестюк, М. О. Варіаційне числення та методи оптимізації: навч. посіб. /М. О. Перестюк, О. М. Станжицький, О. В. Капустян, Ю.В. Ловейкін. - К.: ВПЦ Київський ун-т, 2010. - 145 с.