

Навчальні завдання
до лабораторних занять зі Scilab
для студентів 1 курсу
спеціальності “комп'ютерна математика”

Андрій Степанович Олійник

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2017

1 Лабораторна робота 1

2 Лабораторна робота 2

3 Лабораторна робота 3

4 Лабораторна робота 4

5 Лабораторна робота 5

6 Лабораторна робота 6

7 Лабораторна робота 7

8 Лабораторна робота 8

9 Лабораторна робота 9

10 Лабораторна робота 10

11 Лабораторна робота 11

Лабораторна робота 1

Цілі курсу

- Навчитися на практиці працювати з конкретним інструментом комп'ютерної математики
- Отримати практичні вміння використовувати комп'ютерні програми для моделювання, аналізу та розв'язування задач
- Здобути практичні навички програмування

Підготовчі кроки

- 1 Створіть електронну поштову скриньку
- 2 Створіть обліковий запис на github.com
- 3 Заповніть форму goo.gl/ZhkMGQ

Початок роботи

- 1 Запуск Scilab
- 2 Інтерфейс
- 3 Інтерактивний режим
- 4 Скрипти

Домашнє завдання 1

- 1 Скачайте і встановіть Scilab зі scilab.org
- 2 Запустіть Scilab, викличте команду `help exp`
- 3 Обчисліть значення факторіалів перших 20 натуральних чисел, результати обчислень збережіть у файл
- 4 Визначте якийсь булевий вираз, обчисліть його значення при всіх можливих значеннях змінних і результати обчислень збережіть у файл
- 5 Створіть скрипт, за допомогою якого можна обчислювати значення функції $F(a, b, c)$ при заданих значеннях змінних a і b , а значення c вводиться користувачем

1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a+b)\sin(3c)$	2456	0.00078
2	$\frac{a+b}{a-b} \cdot \arcsin(c)$	0.02456	0.007823
3	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)^3 \ln(1+c)$	0.2456	0.20078
4	$\frac{c^3}{13}(a-b)^5 \cdot \cos(ac)$	0.02456	0.007823
5	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a^3+b)\sin^2(c)$	0.12456	0.0078
6	$\frac{a+b}{a-b} \operatorname{arctg}(c)$	0.02456	0.007823

7	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)^3 \ln(1+c^2)$	0.2456	0.20078
8	$\frac{c^2}{13}(a-b)^3 \cdot \cos(ac^2)$	0.02456	0.007823
9	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a+b)^2 \sin(c)$	0.12456	0.078
10	$\frac{c^3}{13}(a-b)^3 \cos(a^2c)$	0.02456	0.007823
11	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)^2 \ln(1+c)$	0.2456	0.20078
12	$\frac{a+b^2}{a-b} \arccos(c)$	0.02456	0.007823

13	$\frac{a^2 b}{\sqrt[3]{c}} (1+b) \sin(2c)$	2456	0.00078
14	$\frac{a+b}{a-b} \cdot \ln(1+ac)$	0.02456	0.007823
15	$\frac{ab}{\sqrt[3]{1+c}} \cdot (a+b) \cdot \sin(c)$	0.2456	0.20078
16	$\frac{c^3}{13} (a-b)^7 \cdot \cos(ac)$	0.02456	0.007823
17	$\frac{c^3}{\sqrt[3]{1+c}} \cdot (a+b) \cdot \sin(c)$	0.12456	0.0078
18	$\frac{a+b}{a-b} \operatorname{arctg}(ac)$	0.02456	0.007823

Лабораторна робота 2

Основи синтаксису

- 1 Коментарі
- 2 Імена змінних
- 3 Динамічна типізація
- 4 Вектори
- 5 Побудова графіків

Домашнє завдання 2

- 1 Задайте вектор, довжина якого визначається числом, введеним за запитом програми.
- 2 Створіть скрипт, за допомогою якого можна будувати графіки функцій $y = y(x)$ та $g = g(x)$, де $x \in [-2, 2]$.

1	$y = \sin(x)e^{-2x},$ $g = \begin{cases} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}}, x \leq 0, \\ 2x + \frac{\sin^2(x)}{2+x}, x > 0 \end{cases}$	
2	$y = \frac{1+x^2}{1+2x^2},$ $g = \begin{cases} 3\sin(x) - \cos^2(x), x \leq 0, \\ 3\sqrt{1+x^2}, x > 0 \end{cases}$	4
3	$y = \frac{2 + \sin^2(x)}{1+x^2},$ $g = \begin{cases} \frac{3x^2}{1+x^2}, x \leq 0, \\ \sqrt{1 + \frac{2x}{1+x^2}}, x > 0 \end{cases}$	$y = \frac{2 + \cos(x)}{1 + e^{2x}},$ $g = \begin{cases} \frac{3 + \sin^2(2x)}{1 + \cos^2(x)}, x \leq 0, \\ 2\sqrt{1+2x}, x > 0 \end{cases}$
		5
		$y = \sqrt[4]{1 + e^{3x}},$ $g = \begin{cases} \frac{3 + \sin(x)}{1+x^2}, x \leq 0, \\ 2x^2 \cos^2(x), x > 0 \end{cases}$

$$6 \quad y = \frac{2+3x}{1+x+x^2},$$

$$g = \begin{cases} \sqrt{1+2x^2 - \sin^2(x)}, x \leq 0, \\ \frac{2+x}{\sqrt[3]{2+e^{-0.1x}}}, x > 0 \end{cases}$$

$$7 \quad y = \frac{1+x}{1+\sqrt{2+x+x^2}},$$

$$g = \begin{cases} \frac{1+x}{1+\cos^2(x)}, x > 0, \\ \sqrt{1+x^2}, x \leq 0 \end{cases}$$

$$8 \quad y = \frac{1+xe^{-x}}{2+\sqrt{x^2+\sin^2(x)}},$$

$$g = \begin{cases} \frac{1+3x}{2+\sqrt[3]{1+x}}, x > 0, \\ \sqrt{1+|x|}, x \leq 0 \end{cases}$$

$$9 \quad y = \frac{1+x}{1+\sqrt{2+x+x^2}},$$

$$g = \begin{cases} \frac{1+x}{1+\cos^2(x)}, x > 0, \\ \sqrt{1+x^2}, x \leq 0 \end{cases}$$

$$10 \quad y = \frac{1+xe^{-x}}{2+x^2} \sin^2(x),$$

$$g = \begin{cases} \frac{1+x}{2+\cos^3(x)}, x > 0, \\ \frac{\sqrt{1+|x|}}{2+|x|}, x \leq 0 \end{cases}$$

$$11 \quad y = \sqrt[4]{1 + e^{3x}},$$

$$g = \begin{cases} \frac{3 + \sin(x)}{1 + x^2}, x \leq 0, \\ 2x^2 \cos^2(x), x > 0 \end{cases}$$

$$12 \quad y = \frac{2 + 3x}{1 + x + x^2},$$

$$g = \begin{cases} \sqrt{1 + 2x^2 - \sin^2(x)}, x \leq 0, \\ \frac{2 + x}{\sqrt[3]{2 + e^{-0.1x}}}, x > 0 \end{cases}$$

$$13 \quad y = \sin(x)e^{-2x},$$

$$g = \begin{cases} \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^4}}, x \leq 0, \\ 2x + \frac{\sin^2(x)}{2 + x}, x > 0 \end{cases}$$

$$14 \quad y = \frac{1 + x^2}{1 + 2x^2},$$

$$g = \begin{cases} 3\sin(x) - \cos^2(x), x \leq 0, \\ 3\sqrt{1 + x^2}, x > 0 \end{cases}$$

$$15 \quad y = \frac{2 + \sin^2(x)}{1 + x^2},$$

$$g = \begin{cases} \frac{3x^2}{1 + x^2}, x \leq 0, \\ \sqrt{1 + \frac{2x}{1 + x^2}}, x > 0 \end{cases}$$

Лабораторна робота 3

Робота з матрицями

- 1 Задання матриць
- 2 Доступ до елементів
- 3 Зміна матриць
- 4 Дії над матрицями
- 5 Системи лінійних рівнянь

Домашнє завдання 3

- 1 Задайте дві матриці A , B розміру 3×3 , обчисліть суму $A + B$ і добутки AB , BA . Виконайте елементарні перетворення над рядками і стовпчиками матриці A .
- 2 Створіть скрипт, за допомогою якого можна знайти розв'язок системи лінійних рівнянь

$$2x + y + 3z = 10$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + 3y + 2z = 13,$$

перевірити правильність знайденого розв'язку, та перевірити, чи буде розв'язком введений за запитом вектор.

Лабораторна робота 4

Домашні завдання на GitHub

- 1 Відкрийте на GitHub сторінку з репозиторієм, у якому будуть домашні завдання зі scilab
- 2 Виберіть вкладку settings
- 3 В меню зліва натисніть Collaborators
- 4 Наберіть aoliynyk і натисніть Add collaborator
- 5 Отримайте підтвердження
- 6 Після цього можна створювати pull request і додавати reviewer
- 7 Для виконання кожного домашнього завдання створюйте нову гілку
- 8 Після підтвердження зарахування домашнього завдання можна виконувати merge гілки, тобто переносити її вміст у головну гілку, а саму гілку видаляти

Умовні оператори

- 1 Оператор `if`
- 2 Оператор `select`

Цикли

- 1 Цикл `for`
- 2 Цикл `while`

Деякі вбудовані функції

- 1 format
- 2 size
- 3 primes
- 4 timer
- 5 rand
- 6 perms

Домашнє завдання 4

Створіть скрипт, який

- 1 знаходить всі прості числа від 1 до 10^6 ;
- 2 визначає, скільки серед них простих чисел близнюків;
- 3 обчислює значення функції $\pi(n)$, яка рахує кількість простих чисел від 1 до n , для всіх n від 2 до 10^6 ;
- 4 будує графіки функцій $\pi(n)$ та $\frac{n}{\ln n}$;
- 5 генерує випадкові 10^7 цілих чисел з 10 цифрами кожне і обчислює, який відсоток серед них є простими числами;
- 6 генерує 10^7 цілих чисел з 10 цифрами, кожне з яких не діляться на жодне з чисел 2, 3, 5, 7 та 11, і обчислює, який відсоток серед них є простими числами;
- 7 знаходить контрприклад для твердження, що $2^p + 1 = 3q$ для непарних простих чисел p і q ;
- 8 знаходить перші 10 послідовних цифр в десятковому розкладі чисел π та e , які складають просте число;
- 9 виводить час виконання кожної з вищенаведених операцій.

Лабораторна робота 5

Створення функцій у Scilab

- 1 Оголошення функцій.
- 2 Використання функцій.
- 3 Управління значеннями функцій.
- 4 Оператори `pause` та `return`.
- 5 Бібліотеки функцій.
- 6 Оператори `genlib` та `lib`.

Домашнє завдання 5

- 1 Складене число n називається псевдопростим числом Ферма за базу a , якщо $n \mid a^{n-1} - 1$.
 - 1 Створіть функцію, яка приймає на вхід числа n і a , і повертає *true*, якщо n є псевдопростим числом Ферма за базу a , і *false* інакше (тест Ферма).
 - 2 Скільки існує псевдопростих чисел Ферма за базу 2 менших за n для $n = 10^2, 10^3, 10^6$?
 - 3 Згенеруйте випадкові 10^7 цілих чисел. Обчисліть, скільки серед них простих, а скільки одночасно проходять тест Ферма за трьома випадковими базами.
- 2 Створіть функцію, яка приймає на вхід число n , генерує $n + 1$ випадкове число і знаходить серед них пару чисел, різниця яких ділиться на n .
- 3 Створіть функцію, яка приймає на вхід числа n та b і перевіряє, чи є n паліндромом за базу b . Знайдіть кількість чисел $\leq 10^6$, які є паліндромами одночасно за базу 2 та 3.

- 4 Створіть функцію, яка для заданих чисел $a > b$ рахує кількість кроків для обчислення $\gcd(a, b)$ в алгоритмі Евкліда. Для кожного $n = 1 \dots 20$ знайдіть найменшу пару чисел $a > b > 0$, для яких алгоритм Евкліда вимагає n кроків. Що це за числа?
- 5 Створіть скрипт, який приймає на вхід числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$ і повертає 0, якщо рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків в цілих числах, а інакше знаходить деякий розв'язок.
- 6 Створіть скрипт, який для заданих двох цілочисельних точок $A = (x_1, y_1)$ та $B = (x_2, y_2)$ на площині (тобто $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$), повертає всі цілочисельні точки на відрізку AB , виводить ці точки та відрізок AB на графіку. Знайдіть формулу для кількості цілочисельних точок на відрізку AB .

Лабораторна робота 6

Вектори і прямі

- 1 Візуалізація точок.
- 2 Візуалізація дій над векторами.
- 3 Скалярний добуток векторів на площині і в просторі.
- 4 Кут між векторами.
- 5 Умова перпендикулярності векторів.

Векторний добуток векторів

Векторний добуток векторів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — це вектор

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника

Площа трикутника ABC у просторі, вершини якого мають координати $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ обчислюється за формулою

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Рівняння прямої l на площині

- Загальне

$$Ax + By + C = 0.$$

- Параметричне

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases},$$

де точка $M_0 = (x_0, y_0)$ лежить на прямій l , а вектор $\mathbf{u} = (l, m)$ паралельний прямій l .

Домашнє завдання 6

- 1 Створіть функцію, яка обчислює: векторний добуток двох векторів; площу трикутника у просторі, заданого координатами його вершин.
- 2 Створіть функцію, яка: знаходить мішаний добуток трьох векторів; визначає, чи компланарні три вектори; перевіряє, чи лежать чотири точки в одній площині.
- 3 Створіть функцію, яка: перетворює загальне рівняння прямої на площині в параметричне; перетворює параметричне рівняння прямої на площині в загальне.

Лабораторна робота 7

Бібліотеки функцій

- 1 Команда `SCIHOME` для визначення стартової директорії
- 2 Команда `genlib` для створення бібліотеки
- 3 Команда `lib` для завантаження бібліотеки
- 4 Файл `scilab.ini` для автоматичного завантаження бібліотек при старті

Модулярна арифметика

- 1 Команда `getdate`
- 2 Команда `modulo`
- 3 Команда `dec2bin` та інші команди для конвертації

Домашнє завдання 7

- 1 Напишіть функцію, яка приймає на вхід дату у форматі `dd.mm.year` та повертає день тижня, який відповідає цій даті. Наприклад, для `19.10.2017` ця функція повертає *Четвер*.
- 2 Напишіть власну функцію, яка приймає на вхід натуральне число n і повертає його двійкове зображення.
- 3 Напишіть функцію, яка приймає на вхід два натуральних числа a і b та повертає кількість бітів, які потрібно змінити в двійковому зображенні числа a , щоб утворилося число b .
- 4 Обчисліть $10^8! \pmod{5463458053}$.
- 5 (Modular Exponentiation) Напишіть дві функції, які приймають на вхід натуральні числа a , e і n та повертають $a^e \pmod{n}$ двома різними способами. А саме: перша функція послідовно обчислює степені a за модулем n , друга — послідовно обчислює a^{2^i} за модулем n та використовує двійковий розклад числа e (repeated squaring). Порівняйте швидкість роботи цих двох функцій на великих числах a , e , n .

Домашнє завдання 7

- 6 Напишіть функцію, яка приймає на вхід числа a , b , n і перевіряє, чи рівняння $ax \equiv b \pmod{n}$ має розв'язки, і якщо так, то повертає всі розв'язки за модулем n , а якщо ні, то повертає "Рівняння не має розв'язків".
- 7 (Check Digit) Напишіть функцію, яка приймає на вхід 10-значне число і перевіряє, чи представляє воно номер деякої книжки відповідно до стандарту ISBN-10.
- 8 Напишіть функцію, яка приймає на вхід двійкове число і дописує до нього біт парності (parity bit).
- 9 (Pseudorandom Generator) Напишіть власний генератор псевдовипадкових чисел на основі лінійного конгруентного методу. Протестуйте його, згенерувавши 1000 чисел від 0 до 9 і порівнявши статистику появи цих чисел.

Лабораторна робота 8

Полярна система координат

- 1 Команда `polarplot`
- 2 Побудова графіків у полярній системі координат
 - 1 Коло $\rho = a$
 - 2 Спіраль Архімеда $\rho = a + b\varphi$
 - 3 Полярна троянда $\rho = a \cos(k\varphi + \gamma)$
 - 4 Кардіоида $\rho = a(1 - \cos \varphi)$
- 3 Команда `plot3d`

Домашнє завдання 8

- 1 Побудувати графік лемніскати Бернуллі $\rho^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$.
- 2 Написати функцію, яка здійснює конвертацію координат точки
 - 1 з прямокутної декартової системи координат у полярну,
 - 2 з полярної системи координат у прямокутну декартову,
 - 3 з прямокутної декартової системи координат у циліндричну,
 - 4 з циліндричної системи координат у прямокутну декартову,
 - 5 з прямокутної декартової системи координат у сферичну,
 - 6 зі сферичної системи координат у прямокутну декартову.
- 3 Написати функцію, яка для двох заданих прямих на площині
 - 1 зображує ці прямі на одному графіку,
 - 2 знаходить координати точки перетину прямих або виводить повідомлення про паралельність прямих,
 - 3 знаходить кут між прямими.
- 4 Написати функцію, яка знаходить відстань від заданої точки до заданої прямої на площині.
- 5 Візуалізувати дві задані площини на одному графіку.

Лабораторна робота 9

Комплексні числа

- 1 Задання комплексних чисел в Scilab, константа `%i` і команда `complex`
- 2 Команди `real` та `image`
- 3 Команда `imult`
- 4 Спряження комплексних чисел, команда `conj`
- 5 Команда `isreal`
- 6 Команди округлення `round`, `floor`, `ceil`

Домашнє завдання 9

- 1 Візьміть два комплексних числа — одне з модулем трохи менше 1 і одне з модулем трохи більше 1, наприклад, $z_1 = 0.9 + 0.4i$ та $z_2 = 0.9 + 0.5i$. Зобразіть на площині множину точок z^n при $n = 1 \dots 100$ для кожного з цих чисел. На якій кривій знаходяться точки z^n ?
- 2 Створіть функцію, яка для заданого натурального n будує корені з 1 степеня n і виділяє серед них первісні корені.
- 3 Зобразіть на комплексній площині область від -5 до 5 та горизонтальні і вертикальні прямі з інтервалом 0.1 червоним та зеленим кольором відповідно. Далі зобразіть образи цих прямих при відображенні $f(z)$:
 - а $f(z) = \frac{1}{z}$;
 - б $f(z) = z^2$;
 - в $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$.

Домашнє завдання 9

- 4 Нехай $xstep$, $ystep$, deg і n — деякі параметри, які будуть визначені нижче. Будемо перебирати комплексні числа, дійсна та уявна частини яких знаходяться в межах від -10 до 10 та змінюється з кроком $xstep$ та $ystep$ відповідно. Зобразіть на комплексній площині ті комплексні числа, для яких $round(|x + yi|^{deg})$ ділиться на n .

$xstep$	$ystep$	deg	n
0.1	0.1	2	2
0.2	0.2	3	2
0.2	0.2	2	3
0.1	0.1	3	5
0.15	0.2	2	3

Лабораторна робота 10

Площини та прямі в просторі

- команда `det`
- команда `rank`

Площини та прямі в просторі

- Рівняння площини, яка проходить через задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Для площини, заданої загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, її нормальне рівняння має вигляд:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Для обчислення використовуються нормуючий множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

в якого знак вибирається протилежним знаку D .

Площини та прямі в просторі

- Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої нормальним рівнянням

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

рівна

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

Площини та прямі в просторі

- Кут θ між площинами, заданими загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

та

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

рівний куту між векторами нормалей

$$(A_1, B_1, C_1), \quad (A_2, B_2, C_2)$$

до цих площин, тобто

$$\cos \theta = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Площини та прямі в просторі

- Дві площини, задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

та

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 :$$

- 1 паралельні тоді й лише тоді, коли їх вектори нормалей колінеарні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

- 2 перетинаються тоді й лише тоді, коли їх вектори нормалей не колінеарні.

Площини та прямі в просторі

- Взаємне розташування трьох площин, заданих загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

визначається матрицею

$$X = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Площини та прямі в просторі

- 1 Площини паралельні одна одній тоді й лише тоді, коли $\text{rank}X = 1$.
- 2 Дві площини перетинаються, а третя паралельна одній з них тоді й лише тоді, коли $\text{rank}X = 2$ і деякі два рядки матриці X пропорційні.
- 3 Кожні дві площини перетинаються, але не мають спільної точки тоді й лише тоді, коли $\text{rank}X = 2$ і жодні два рядки матриці X не пропорційні.
- 4 Всі площини перетинаються в одній точці тоді й лише тоді, коли $\text{rank}X = 3$.

Площини та прямі в просторі

- Канонічне рівняння прямої в просторі

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

де точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на прямій, а вектор $v = (l, m, n)$ є напрямним.

- Рівняння прямої в просторі, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Площини та прямі в просторі

- Кут θ між прямою, заданою канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

і площиною, заданою загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

визначається рівністю

$$\sin \theta = \pm \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Площини та прямі в просторі

- Для знаходження відстані d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої L , заданої канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

потрібно виконати такі дії:

Площини та прямі в просторі

- 1 Записати рівняння

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

площини π , яка проходить через точку M_1 перпендикулярно напрямному вектору (l, m, n) заданої прямої L ;

- 2 записати параметричне рівняння заданої прямої L

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt ; \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

- 3 знайти координати точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої L та площини π , підставивши в рівняння площини π значення з параметричного рівняння і визначивши значення параметра t_2 , яке відповідає координатам точки M_2 ;
- 4 обчислити відстань d як відстань між точками M_1 і M_2 .

Домашнє завдання 10

- 1 Напишіть функцію, яка перевіряє, чи належать чотири задані точки простору одній площині. Візуалізуйте отриманий результат.
- 2 Напишіть функцію, яка обчислює відстань від точки до площини, заданої загальним рівнянням. Візуалізуйте вхідні дані.
- 3 Напишіть функцію, яка обчислює кут між двома площинами. Візуалізуйте вхідні дані.
- 4 Напишіть функцію, яка визначає, як розташовані одна відносно одної дві задані площини, задані загальними рівняннями.
- 5 Напишіть функцію, яка визначає, як розташовані одна відносно одної три задані площини, задані загальними рівняннями.

Домашнє завдання 10

- 6 Візуалізуйте пряму в просторі, яка проходить через дві задані точки.
- 7 Напишіть функцію, яка знаходить кут між площиною, заданою загальним рівнянням, і прямою в просторі, заданою канонічним рівнянням. Візуалізуйте вхідні дані.
- 8 Напишіть функцію, яка знаходить відстань від точки до прямої в просторі, заданої канонічним рівнянням. Візуалізуйте вхідні дані.

Лабораторна робота 11

Множина Мандельброта

Для комплексного числа $c \in \mathbb{C}$ розглянемо послідовність

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Множина Мандельброта складається з тих комплексних чисел c , для яких послідовність $(z_n)_{n \geq 0}$ є обмеженою.

Домашнє завдання 11

- 1 Нехай $MaxIter$ і Res — деякі параметри, які будуть визначені нижче. Для побудови множини Мандельброта розміру $Res \times Res$ пікселів розглядають комплексні числа c , дійсна частина яких змінюється з відповідним кроком у межах від -2.125 до 0.875 , а уявна — від -1.5 до 1.5 . Для кожного такого c обчислюємо z_n для $n = 1, 2, \dots, MaxIter$. Якщо знаходимо число з модулем > 2 , то c не належить множині Мандельброта. Інакше вважаємо, що c належить множині Мандельброта, і малюємо відповідну точку на площині.

$MaxIter$	Res
50	300
50	600
100	600

Домашнє завдання 11

- 2 Можна додати кольори наступним чином. Для кожного c визначаємо найменше таке $n < MaxIter$, що $|z_n| > 2$, а якщо такого не знайшли, то $n = MaxIter$. Задаємо колір RGB точки c за правилом:

$$((25n \bmod 256)/256, (5n \bmod 256)/256, (255 - 25n \bmod 256)/256).$$

- 3 Побудуйте частину множини Мандельброта, змінивши межі в пункті 1:

$$-0.77 \leq \operatorname{Re} c \leq -0.75 \quad \text{і} \quad -0.09 \leq \operatorname{Im} c \leq -0.07.$$