КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А.С. Олійник

Навчальні завдання до практичних занять з Математичної логіки для студентів 3 курсу

2019

Практичне заняття 1. Тавтології та логічний наслідок

A1.1 Запишіть у вигляді формул задані висловлювання, вибравши буквенні позначення для простих висловлювань. Знайдіть логічні значення цих висловлювань.

а) Для того, щоб число x було непарним, досить, щоб x було простим.

б) Якщо в Англії росте бавовна, то або на Місяці є життя, або кожна диференційовна функція неперервна.

A1.2 Методом від супротивного перевірте, чи буде тавтологією формула

а) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_2 \to (x_1 \to x_3))$;

б) $((x_1 \vee x_2) \to x_3) \to ((x_1 \to x_3) \vee (x_2 \to x_3))$.

A1.3 Для яких n формула $F_n(x) = (\ldots((((x \to \neg x) \to x) \to \neg x) \to x) \to \ldots)$, що містить n знаків імплікації, є тавтологією?

A1.4 Перевірте, що для довільних формул A, B, C логіки висловлювань такі формули є тавтологіями:

а) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

б) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

A1.5 Нехай A, B, C — формули логіки висловлювань. Доведіть, що з того, що формули $\neg B \to \neg A$ і $\neg B \to A$ є тавтологіями, випливає, що й формула B також є тавтологією.

A1.6 Доведіть, що для довільних формул A, B, C логіки висловлювань мають місце такі співвідношення:

а)
$$A, A \to B \models B.$$

б)
$$A \models A \vee B, \qquad B \models A \vee B, \qquad A, B \models A \wedge B.$$

в)
$$A \models \neg\neg A, \qquad \neg\neg A \models A.$$

A1.7 Чи правильно стоїть знак логічного наслідку у співвідношенні

$$(x_1 \wedge x_2) \to x_3, (x_1 \vee x_2) \to \neg x_3 \models x_1 \wedge x_2 \wedge x_3?$$

А1.8 Одна частина жителів острова є лицарями, тобто завжди каже правду, а інша — шахраями, тобто завжди бреше.

а) На яке питання кожен житель острова дасть одну й ту ж відповідь?

б) Мандрівник зустрів жителів острова A і B. A сказав, що він шахрай, або B лицар. Ким є A і B?

в) Мандрівник зустрів трьох жителів острова: A,B і C. Він запитав у A, чи він лицар, але відповідь не розібрав. Тоді він запитав у B, що сказав A. B відповів, що A зізнався у шахрайстві. Тоді C повідомив, що B шахрай. Ким є B і C?

Д1.1 Запишіть у вигляді формул задані висловлювання, вибравши буквенні позначення для простих висловлювань. Знайдіть логічні значення цих висловлювань.

а) Необхідною умовою збіжності послідовності $\{s_n\}$ є її обмеженість.

б) Якщо містер Джонс щасливий, то місіс Джонс нещасна і якщо містер Джонс нещасний, то місіс Джонс щаслива.

Д1.2 Доведіть, що множина всіх формул логіки висловлювань є зліченною.

Д1.3 Методом від супротивного перевірити, чи буде тавтологією формула

а) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_3 \to x_4)) \to ((x_1 \wedge x_3) \to (x_2 \wedge x_4))$;

б) $(((x_1 \wedge x_2) \to x_3) \wedge ((x_1 \vee x_2) \to (\neg x_3))) \to (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

Д1.4 Для яких n формула

$$F_n(x) = (\ldots((x \leftrightarrow x) \leftrightarrow x) \leftrightarrow \ldots) \leftrightarrow x,$$

що містить n знаків "$\leftrightarrow$", є тавтологією?

Д1.5 Перевірте, що для довільних формул A, B, C логіки висловлювань такі формули є тавтологіями:

а) $((A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

б) $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$.

в) $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$.

Д1.6 Нехай A, B, C — формули логіки висловлювань. Доведіть, що з того, що формули $\neg A \to B$ і $\neg C \to \neg B$ є тавтологіями, випливає, що й формула $A \vee C$ також є тавтологією.

Д1.7 Доведіть, що для довільних формул A, B, C логіки висловлювань мають місце такі співвідношення:

а)
$$A \to B, \neg B \models \neg A.$$

б)
$$A \to B, B \to C \models A \to C.$$

в)
$$A \vee B, \neg A \models B, \qquad A \vee B, \neg B \models A, \qquad A \wedge B \models A, \qquad A \wedge B \models B.$$

г)
$$A \to B, B \to A \models A \leftrightarrow B.$$

Д1.8 Пересвідчитись, що для довільних формул F_1, F_2, F_3, F_4 логіки висловлювань справедливі твердження:

а) з $F_1 \models F_2$ і $F_2 \models F_3$ випливає $F_1 \models F_3$;

б) з $F_1, F_2 \models F_4$ і $F_1, F_3 \models F_4$ випливає $F_1, F_2 \vee F_3 \models F_4$;

в) якщо $F_1 \vee F_2$ — тавтологія, то $\neg F_1 \models F_2$ і $\neg F_2 \models F_1$;

г) якщо $F_1 \leftrightarrow F_2$ — тавтологія, то $F_1 \models F_2$ і $F_2 \models F_1$.

Д1.9 Нехай $F_1, \ldots, F_n, G, H$ — формули логіки висловлювань. Доведіть, що коли $\{F_1, \ldots, F_n, G\} \models H$, то $\{F_1 \ldots, F_n, \neg H\} \models \neg G$.

Д1.10 Одна частина жителів острова є лицарями, тобто завжди каже правду, а інша — шахраями, тобто завжди бреше.

а) Мандрівник зустрів жителів острова А і В. А сказав, що вони обадва шахраї. Ким є А і В?

б) Мандрівник зустрів трьох жителів острова: А,В і С. Він запитав у А, скільки лицарів серед них, але відповідь не розібрав. Тоді він запитав у В, що сказав А. В відповів, що А нарахував одного лицаря. Тоді С повідомив, що В шахрай. Ким є В і С?

в) Мандрівник хоче вияснити, яка з двох доріг веде до річки, задавши рівно одне питання місцевому жителю. Чи зможе він це зробити?

Практичне заняття 2. Логічні міркування та відношення рівносильності

А2.1 Перевірте, чи є логічно правильними наведені міркування.

а) Якщо Джонс п'є багато віскі, то у Джонса червоний ніс. У Джонса червоний ніс. Отже, Джонс п'є багато віскі.

б) Якщо капіталовкладення залишаться сталими, то зростуть урядові витрати або виникне безробіття. Якщо урядові витрати не зростуть, то податки будуть знижені. Якщо податки будуть знижені і капіталовкладення залишаться сталими, то безробіття не виникне. Отже, урядові витрати зростуть.

А2.2 Перевірте, чи буде суперечливим набір формул:

а) $x_1 \leftrightarrow \neg x_2, \neg x_1 \to \neg x_3, x_1 \vee x_3, x_3 \to x_2$;

б) $(\neg x_1 \leftrightarrow x_2) \vee x_3, (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$.

А2.3 Перевірте, чи буде сумісною задана множина висловлювань.

Якщо курс цінних паперів росте або процентна ставка знижується, то або падає курс акцій, або податки не підвищуються. Курс акцій знижується тоді й тільки тоді, коли росте курс цінних паперів і податки підвищуються. Якщо процентна ставка знижується, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не росте. Або податки підвищуються, або курс акцій падає і знижується процентна ставка.

А2.4 Нехай $F_1, F_2, \dots, F_n$ — формули логіки висловлювань. Доведіть, що коли формула

$$F_1 \to (F_2 \to \dots \to (F_{n-1} \to F_n) \dots)$$

є тотожно хибною, то набір формул $F_1, F_2, \dots, F_n$ є суперечливим. Чи має місце обернене твердження?

А2.5 Перетворивши задану формулу, знайдіть рівносильну їй формулу, що містить найменшу можливу кількість символів логічних дій:

а)
$$(x_1 \to x_2) \to ((x_1 \vee x_3) \to (x_2 \vee x_3));$$

б)
$$(\neg(x_1 \vee x_2) \to (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)) \vee \neg(x_1 \wedge x_3).$$

А2.6 Використовуючи рівносильні перетворення, пересвідчитись, що тавтологіями є формули а) $((\neg x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \vee x_3)) \to (x_1 \to x_3))$;

б) $(((x_1 \wedge x_2) \to x_3) \wedge ((\neg x_1 \vee \neg x_2) \to x_3)) \to (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

А2.7 Чи має місце рівносильність, якою визначається дистрибутивність:

а) дії $\oplus$ відносно дії $\wedge$;

б) дії $\leftrightarrow$ відносно дії $\vee$?

А2.8 Чи має місце рівносильність, якою визначається асоціативність дії $\oplus$?

А2.9 Нехай A, B, C — довільні формули логіки висловлювань. Доведіть, що має місце рівносильність

$$((A \wedge B) \to C) \equiv \neg A \vee (B \to C).$$

А2.10 Побудуйте просту формулу, що рівносильна запереченню формули

$$((x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee (\neg x_4 \wedge x_1))) \vee (x_5 \wedge \neg x_1).$$

Д2.1 Перевірте, чи є логічно правильними наведені міркування.

а) Якщо йде дощ, то або ми нікуди не підемо, або ми підемо в кіно. Якщо ми підемо в кіно, то в кіно є квитки. Квитків в кіно нема. Отже, якщо піде дощ, то ми нікуди не підемо.

б) Студентка К або перевтомилася, або є хворою. Якщо К перевтомлюється, то вона стає роздратованою. Але К не родратована. Отже, вона хвора.

Д2.2 Перевірте, чи буде суперечливим набір формул:

а) $(x_1 \vee x_2) \to x_3, \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$;

б) $(x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow x_3, (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$.

Д2.3 Перевірте, чи буде сумісною задана множина висловлювань.

Якщо Джонс не зустрічав цієї ночі Сміта, то або Сміт був вбивцею, або Джонс бреше. Якщо Сміт не був вбивцею, то Джонс не зустрічав Сміта цієї ночі і вбивство відбулося після опівночі. Якщо вбивство відбулося після опівночі, то або Сміт був вбивцею, або Джонс бреше. Отже, Сміт був вбивцею.

Д2.4 Пересвідчитись, що для довільних формул F_1, F_2, F_3, F_4 логіки висловлювань справедливі твердження:

а) з $F_1, F_2 \models F_3$ випливає $F_1 \models F_2 \to F_3$;

б) з $F_1 \models F_2$ випливає $\neg F_2 \models \neg F_1$;

в) якщо $F_1 \vee \neg F_2$ — тавтологія, то $F_2 \models F_1$.

Д2.5 Перетворивши задану формулу, знайдіть рівносильну їй формулу, що містить найменшу можливу кількість символів логічних дій:

а) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_1 \to x_3)) \vee \neg x_3$;

б) $((x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \to x_1)) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$;

в) $\neg(x_1 \to x_3) \vee \neg(x_2 \to x_3) \vee x_3$;

г) $\neg(x_3 \to x_2) \vee \neg(x_1 \to x_2) \vee x_2$.

Д2.6 Використовуючи рівносильні перетворення, пересвідчитись, що тавтологіями є формули

а) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_3 \to x_4) \wedge (x_5 \to x_6)) \to ((x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) \to (x_2 \wedge x_4 \wedge x_6))$;

б) $(x_1 \to x_2) \to ((x_1 \wedge x_3) \to (x_2 \wedge x_3))$

Д2.7 Чи має місце рівносильність, якою визначається дистрибутивність:

а) дії $\to$ відносно дії $\vee$;

б) дії $\oplus$ відносно дії $\to$?

Д2.8 Чи має місце рівносильність, якою визначається асоціативність дії $\to$?

Д2.9 Нехай A, B, C — довільні формули логіки висловлювань. Доведіть, що мають місце рівносильності:

а) $A \to (B \vee C) \equiv (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$;

б) $A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C)$.

Д2.10 Система логічних зв'язок називається незалежною, якщо жодну зв'язку цієї системи не можна виразити через інші. Чи є незалежною система логічних зв'язок $\{\oplus, \leftrightarrow, \to\}$?

Д2.11 Для формули F, у якій нема логічних зв'язок, окрім $\vee, \wedge$, символом F^d позначимо формулу, утворену з F заміною всіх знаків $\vee$ на $\wedge$, а $\wedge$ на $\vee$. Доведіть, що коли формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ є тавтологією, то й формула $F_1^d \leftrightarrow F_2^d$ буде тавтологією.

Д2.12 Побудуйте просту формулу, що рівносильна запереченню формули

$$((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4)) \vee (\neg x_1 \vee x_2).$$

Д2.13 Побудуйте ДНФ, яка рівносильна заданій формулі і містить найменшу можливу кількість символів змінних:

а) $((x_1 \wedge x_2) \to x_3) \leftrightarrow x_1$;

б) $(x_1 \oplus x_2) \leftrightarrow x_3$;

в) $(x_1 \wedge \neg x_2) \leftrightarrow (x_1 \vee x_3)$.

Практичне заняття 3. Предикати і квантори

A3.1 Двомісний предикат над множиною $\mathbb{R}$ задано умовою

$$Q(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |x-y| \leq 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad |x-y| > 2. \end{cases}$$

Зобразіть геометрично область істинності цього предиката.

A3.2 Предикати $P_1(x_1,x_2), P_2(x_1,x_2), P_3(x_1)$ задано на множині $M = \{a,b,c\}$ таблицями значень

$P_1(x_1,x_2)$

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
a	0	1	1
b	1	1	0
c	0	1	0

, $P_2(x_1,x_2)$

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
a	0	1	0
b	1	1	0
c	1	1	1

,

x_1	$P_3(x_1)$
a	1
b	0
c	1

.

Побудуйте таблицю значень предиката

$$\exists x_2(\forall x_1 P_1(x_1,x_2) \to P_2(x_1,x_2)) \leftrightarrow P_3(x_1).$$

A3.3 Нехай предикати $P(x),\ Q(x),\ R(x)$ над множиною $M = \{a,b,c,d\}$ задано таблицями значень

x	a	b	c	d
$P(x)$	1	1	0	1
$Q(x)$	0	1	0	0
$R(x)$	1	1	1	1

. Побудуйте таблиці значень предикатів:

а) $\forall x_2(P(x_2) \to Q(x_1)) \wedge \exists x_2 R(x_2)$;

б) $\exists x_1(\forall x_1(P(x_1) \to Q(x_1)) \leftrightarrow R(x_1))$.

A3.4 Запишіть у вигляді формул логіки предикатів речення:

а) Не всі птахи вміють літати, а деякі з них вміють бігати.

б) Кожний, в кому є упертість, може вивчити математичну логіку, але при цьому не кожен здатен її зрозуміти.

A3.5 Нехай на множині людей задано предикати: $F(x_1,x_2) =$"x_1 батько x_2", $M(x_1,x_2)$="x_1 мати x_2", $S(x_1,x_2) =$"x_1 син x_2", $D(x_1,x_2) =$"x_1 дочка x_2". Виразіть через них предикати:

а) "x_1 брат x_2";

б) "x_1 тітка x_2";

в) “x_1 бабуся x_2 з боку матері”;

г) “x_1 і x_2 — двоюрідні сестри”;

д) “x_1 — двоюрідний дід x_2”.

А3.6 На множині $\mathbb{N}_0$ всіх натуральних чисел з нулем вибрано такі атомарні предикати:

$$S(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 + x_2 = x_3 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}, D(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 x_2 = x_3 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}.$$

Виразіть через них такі предикати над множиною $\mathbb{N}_0$:

а) $x_1 \geq x_2$;

б) $x_1 = 0$;

в) $x_1 = 1$;

г) $x_1 < x_2$.

А3.7 Запишіть твердження у вигляді формули, що містить лише предикатні символи S, D з попередньої задачі:

а) дія додавання натуральних чисел комутативна;

б) дія множення натуральних чисел асоціативна;

в) добуток двох парних чисел є парним числом.

Д3.1 Двомісний предикат над множиною $\mathbb{R}$ задано умовою

$$Q(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } \ x^2 + y^2 - 2x > 0. \end{cases}$$

Зобразіть геометрично область істинності цього предиката.

Д3.2 Предикати $P_1(x_1, x_2), P_2(x_1, x_2), P_3(x_1)$ задано на множині $M = \{a, b, c\}$ таблицями значень

$P_1(x_1, x_2)$

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	1	1

, $P_2(x_1, x_2)$

$x_1 \setminus x_2$	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	0	1

,

x_1	$P_3(x_1)$
a	1
b	0
c	1

.

Побудуйте таблицю значень предиката

$$\exists x_1 P_2(x_1, x_2) \leftrightarrow (\forall x_2 P_1(x_1, x_2) \to P_3(x_1)).$$

Д3.3 Нехай предикати $P(x),\ Q(x),\ R(x)$ над множиною $M = \{a, b, c, d\}$ задано таблицями значень

x	a	b	c	d
$P(x)$	1	1	0	1
$Q(x)$	0	0	0	0
$R(x)$	1	1	0	1

. Побудуйте таблицю значень предиката

$$\exists x_2 \forall x_3 (\forall x_1 P(x_1) \to (R(x_2) \wedge Q(x_3))).$$

Д3.4 Запишіть у вигляді формул логіки предикатів речення:

а) Ви можете обманювати декого весь час, ви можете обманювати всіх деякий час, але ви не можете обманювати всіх і весь час.

б) Кожна мураха — комаха, та не кожна комаха — мураха.

Д3.5 Нехай на множині людей задано предикати: $F(x_1, x_2) =$“x_1 батько x_2”, $M(x_1, x_2)=$“x_1 мати x_2”, $S(x_1, x_2) =$“x_1 син x_2”, $D(x_1, x_2) =$“x_1 дочка x_2”. Виразіть через них предикати:

а) “x_1 і x_2 — внуки x_3”;

б) “x_1 — племінниця x_2 і x_3”;

в) “x_1 — прадід x_2 з боку матері”;

г) “x_1 син батька x_2”;

д) “x_1, x_2 і x_3 — сестри”.

Д3.6 На множині $\mathbb{N}_0$ всіх натуральних чисел з нулем вибрано такі атомарні предикати:

$$S(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 + x_2 = x_3 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}, D(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 x_2 = x_3 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}.$$

Виразіть через них такі предикати над множиною $\mathbb{N}_0$:

а) x_1 є дільником x_2;

б) x_1 — просте число;

в) $x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod} 3)$;

г) x_1 — найбільший спільний дільник x_2 та x_3.

Д3.7 Запишіть твердження у вигляді формули, що містить лише предикатні символи S, D з попередньої задачі:

а) кожне парне число є сумою трьох простих чисел;

б) якщо сума двох доданків і один з цих доданків діляться на 3, то й інший доданок ділиться на 3;

в) множина піфагорових трійок чисел нескінченна;

г) множина простих чисел–близнюків скінченна.

Практичне заняття 4. Інтерпретації, логічний наслідок та рівносильність

A4.1 Скількома способами можна проінтерпретувати формулу

$$\exists x_2 \forall x_1 (\exists x_1 P_1(x_1, x_2, c_1) \to (P_2(x_1, x_2) \to P_3(x_1, c_2))) \vee \neg P_4(x_4)$$

над n–елементною множиною?

A4.2 Нехай предикатні символи P_1, P_2 у формулі $F = \exists x_3 (P_1(x_1, x_3) \wedge P_2(x_3, x_2))$ інтерпретуються над множиною всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ так:

$$P_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_2 = \operatorname{tg} x_1 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}, P_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_2 = x_1^3 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}.$$

Який предикат над $\mathbb{R}$ виражає формула F у такій інтерпретації?

A4.3 Чи правильно стоїть знак логічного наслідку у співвідношеннях:

а) $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \models \exists x P_1(x) \to \exists x P_2(x)$;

б) $\forall x_1 (P_1(x_1, x_2) \vee P_2(x_1, x_2)) \models \forall x_1 P_1(x_1, x_2) \vee \forall x_1 P_2(x_1, x_2)$?

A4.4 На основі поняття логічного наслідку для логіки предикатів встановіть, чи є логічними такі міркування:

а) Кожен студент є азартним гравцем. Окремі студенти не поважають деяких людей, які є азартними гравцями. Отже, деякі студенти не поважають певних студентів.

б) Всі риби, крім акул, добре ставляться до людей. Риба, яку впіймав студент К, поставилась до нього вороже. Отже, ця риба акула.

A4.5 Чи будуть виконливими формули:

а) $(\exists x_1 \neg P_2(x_1, x_2) \to P_1(x_1)) \leftrightarrow \forall x_2 P_2(x_1, x_2)$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 (P_1(x_1, x_2) \to \forall x_3 P_2(x_1, x_2, x_3))$?

A4.6 Чи будуть загальнозначимими формули:

а) $P(x_1) \to \exists x_2 P(x_2)$;

б) $\forall x_1 (P_1(x_1) \to P_2(x_2)) \leftrightarrow (\exists x_1 P_1(x_1) \to P_2(x_2))$?

A4.7 Зведіть до пренексної нормальної форми такі формули:

а) $(\forall x_1 \exists x_2 P_1(x_1, x_2, x_3) \to \exists x_3 P_2(x_2, x_3)) \to \forall x_1 P_3(x_1)$;

б) $(\forall x_1 P_1(x_1) \to \exists x_2(P_1(x_1) \land P_2(x_1, x_2))) \to \exists x_3 P_3(x_3)$.

Д4.1 Скількома способами можна проінтерпретувати формулу над n–елементною множиною:

а) $\exists x_2(\forall x_1(P_1(x_1, x_2, c_1) \to P_2(x_1, c_2, c_1))) \land P_3(x_1, c_3)$;

б) $\forall x_2 \exists x_3(P_1(x_1, x_2, x_3) \to \exists x_1 P_2(x_1, x_2)) \to (P_1(x_1, c_1, x_3) \lor P_2(x_1))$?

Д4.2 Скільки існує різних інтерпретацій формули над множиною $\{1, 2, \ldots, n\}$, при яких вона перетворюється в істинне висловлювання:

а) $\forall x_1 \forall x_2(P(x_1, x_2) \lor P(x_2, x_1))$

б) $\forall x_1 P(x_1, x_1) \land \forall x_2(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$?

Д4.3 Нехай предикатні символи P_1, P_2 у формулі $F = \exists x_3(P_1(x_1, x_3) \land P_2(x_3, x_2))$ інтерпретуються над множиною всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ так:

$$P_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x_1| + |x_2| \le 1 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}, P_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 + x_2 = 1 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}.$$

Який предикат над $\mathbb{R}$ виражає формула F у такій інтерпретації?

Д4.4 Чи правильно стоїть знак логічного наслідку у співвідношеннях:

а) $P_1(x) \to P_2 \models \exists x_1 P_1(x_1) \to P_2$;

б) $P(c, x_2) \models \exists x_1 P(x_1, x_2)$;

в) $\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \models \forall x P_1(x) \to \forall x P_2(x)$?

Д4.5 На основі поняття логічного наслідку для логіки предикатів встановіть, чи є логічними такі міркування:

а) Пір'я може бути тільки у птахів. Жоден звір не є птахом. Отже, звірі не мають пір'я.

б) Ніхто не може розшифрувати прислане повідомлення, не знаючи шифру, яким воно було зашифроване. Криптоаналітик Б його не розшифрував. Отже, він не знає шифру, яким повідомлення було зашифроване.

Д4.6 Чи будуть виконливими формули:

а) $\exists x_1 \exists x_2(P(x_1) \land \neg P(x_2))$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \leftrightarrow \exists x_2 \forall x_1 P(x_1, x_2)$;

в) $\exists x_1(P_1(x_1, x_2) \leftrightarrow P_2(x_2)) \to P_1(x_2, x_2)$?

Д4.7 Чи будуть загальнозначимими формули:

а) $(P_1(x_1) \lor \forall x_2 P_2(x_2)) \to \forall x_2(P_1(x_1) \lor P_2(x_2))$;

б) $\forall x_1(P_1(x_1) \to \neg P_2(x_1)) \to \neg(\forall x_1 P_1(x_1) \wedge \exists x_1 P_2(x_1))$?

Д4.8 Зведіть до пренексної нормальної форми такі формули:

а) $\exists x_1 P_1(x_1, x_2) \leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 P_2(x_1, x_2)$;

б) $(\neg\forall x_1 \exists x_2 P_1(x_1, x_2) \wedge \forall x_2 P_2(x_3, x_2)) \to P_1(x_1, x_1)$.

Д4.9 Нехай формула $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ безкванторна. Доведіть, що формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

є загальнозначимою тоді й лише тоді, коли вона істинна на довільній чотириелементній множині.

Практичне заняття 5. Формальний вивід в численні вислювлювань

А5.1 Користуючись теоремою про дедукцію, покажіть, що для довільних формул A, B, C мають місце співвідношення

1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;
2) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

А5.2 Доведіть, що для довільних формул A, B теоремами числення висловлювань будуть такі формули:

1) $A \to \neg\neg A$;
2) $\neg A \to (A \to B)$;
3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
4) $A \to (A \vee B)$;
5) $A \to (B \vee A)$;
6) $(A \vee B) \to (B \vee A)$;
7) $(A \wedge B) \to A$;
8) $(A \wedge B) \to B$.

А5.3 Побудувавши вивід, покажіть, що для довільних формул A, B, C мають місце співвідношення

1) $\vdash (\neg A \to A) \to A$;
2) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Д5.1 Доведіть, що для довільних формул A, B теоремами числення висловлювань будуть такі формули:

1) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
2) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$;
3) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$;
4) $((A \to B) \to A) \to A$;
5) $A \to (B \to (A \wedge B))$.

Д5.2 Побудувавши вивід, покажіть, що для довільних формул A, B, C мають місце співвідношення

1) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$;
2) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;
3) $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

Практичне заняття 6. Теорії першого порядку

А6.1 Для кожного входження кожної змінної в дану формулу з'ясуйте, вільним чи пов'язаним воно є:

а) $\forall x_1(P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_2 P_3^2(x_1,x_2))$;

б) $\forall x_1 \forall x_3(P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to P_3^2(x_1,x_2)) \to \forall x_2 A_4^2(x_2,x_4)$;

в) $\forall x_4(\forall x_3(P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_1 P_3^2(x_1,x_2)) \to \forall x_2 P_4^2(x_2,x_4))$.

А6.2 Чи буде терм $f_2^3(x_1,x_2,x_3)$ вільним для змінної x_2 у формулі:

а) $\forall x_1 P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_2 P_3^2(x_1,x_2)$;

б) $\forall x_1 P_3^2(x_1,x_2)$;

в) $\forall x_4 P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_5 P_3^2(x_1,x_4)$?

А6.3 Вкажіть власні аксіоми теорії нестрогого часткового порядку.

А6.4 Вкажіть власні аксіоми теорії полів.

А6.5 Покажіть, що в схемі аксіом (А4) не можна позбавитися додаткових умов на входження змінних.

А6.6 Доведіть, що в численні предикатів мають місце співвідношення

а) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 A \to \forall x_2 \forall x_1 A$;

б) $\vdash \forall x_1(A \to B) \to (\forall x_1 A \to \forall x_1 B)$;

в) $\vdash \forall x_1(A \to B) \to (\exists x_1 A \to \exists x_1 B)$.

А6.7 Доведіть *правило індивідуалізації* для числення предикатів: якщо терм t вільний для змінної x у формулі $A(x)$, то $\forall x A(x) \vdash A(t)$.

А6.8 Нехай змінна x не вільна у формулі A. Доведіть співвідношення

а) $\vdash A \to \forall x A$;

б) $\vdash \exists x A \to A$.

Д6.1 Для кожного входження кожної змінної в дану формулу з'ясуйте, вільним чи пов'язаним воно є:

а) $\forall x_2(P_2^3(x_1,x_2,x_2) \to \forall x_3 P_3^2(x_3,x_2))$;

б) $\forall x_1 \forall x_3(P_2^3(x_2,x_3,x_1) \to P_3^2(x_3,x_1)) \to \forall x_4 A_4^2(x_1,x_4)$;

в) $\forall x_3(\forall x_1(P_2^3(x_1,x_2,x_3) \to \forall x_2 P_3^2(x_1,x_2)) \to \forall x_3 P_4^2(x_3,x_1))$.

Д6.2 Чи буде терм $f_2^3(x_1, x_2, c_3)$ вільним для змінної x_1 у формулі:

а) $\forall x_1 P_2^3(x_1, x_2, x_3) \to \forall x_2 P_3^2(x_1, x_2)$;

б) $\forall x_2 \forall x_3 P_3^2(x_3, x_2)$;

в) $\forall x_1 \forall x_4 P_2^3(x_1, x_2, x_3) \to \forall x_1 \forall x_5 P_3^2(x_1, x_4)$?

Д6.3 Вкажіть власні аксіоми теорії лінійного порядку з найменшим елементом.

Д6.4 Вкажіть власні аксіоми теорії комутативних моноїдів.

Д6.5 Покажіть, що в схемі аксіом (A5) не можна позбавитися додаткових умов на входження змінних.

Д6.6 Доведіть, шо коли теорія першого порядку має модель на множині M, то вона має модель на довільній множині N такій, що $N \supseteq M$.

Д6.7 Наведіть приклад несуперечливої теорії, яка не має моделей на множинах, що містять менше ніж m елементів, де m — задане натуральне число.

Д6.8 Наведіть приклад несуперечливої теорії, яка не має скінченних моделей.

Д6.9 Доведіть, що в численні предикатів мають місце співвідношення

а) $\vdash \forall x_1(A \wedge B) \to (\forall x_1 A \wedge \forall x_1 B)$;

б) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n A \to A$.

Д6.10 Доведіть *правило кон'юнкції* для числення предикатів: $A, B \vdash A \wedge B$.

Д6.11 Доведіть *правило існування* для числення предикатів: якщо терм t вільний для змінної x у формулі $A(x)$, то $\vdash A(t) \to \exists x A(x)$.

Д6.12 Покажіть, що в теоремі дедукції для числення предикатів не можна позбавитися додаткових умов.

Практичне заняття 7. Машини Тьюрінга і примітивно рекурсивні функції

A7.1 З'ясуйте, яку процедуру виконує машина Тьюрінга з такою програмою команд (на не вказаних аргументах машина відразу зупиняється):

а) $\varphi(0,q_1) = (0,R,q_2)$, $\varphi(1,q_1) = (1,S,q_0)$, $\varphi(1,q_2) = (1,R,q_2)$, $\varphi(0,q_2) = (1,L,q_3)$, $\varphi(1,q_3) = (1,L,q_3)$, $\varphi(0,q_3) = (0,S,q_0)$;

б) $\varphi(0,q_1) = (0,R,q_2)$, $\varphi(1,q_2) = (1,R,q_2)$, $\varphi(0,q_2) = (0,L,q_3)$, $\varphi(1,q_3) = (0,L,q_3)$, $\varphi(0,q_3) = (0,S,q_0)$.

A7.2 Побудуйте машину Тьюрінга, яка для довільних $x, x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$ переводить:

а) конфігурацію $\leftarrow \underset{\boxed{q_1}}{0}\, 0 \overbrace{1\ldots1}^{x+1} 0 \rightarrow$ у конфігурацію

$$\leftarrow \underset{\boxed{q_0}}{0} \overbrace{1\ldots1}^{x+1} 00 \rightarrow;$$

б) конфігурацію $\leftarrow \underset{\boxed{q_1}}{0} \overbrace{1\ldots1}^{x+1} 0 \rightarrow$ у конфігурацію $\leftarrow \underset{\boxed{q_0}}{0} \overbrace{0\ldots0}^{x+1} 0 \rightarrow$.

A7.3 Побудувати машину Тьюрінга, яка обчислює функцію

а) $f(x) = x+1$;

б) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

A7.4 Нехай функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ $(n \geq 2)$ примітивно рекурсивна. Доведіть, що примітивно рекурсивними будуть також функції:

а) $g_1(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$;

б) $g_2(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = f(x_1,\ldots,x_n)$;

в) $g_3(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$.

A7.5 Нехай $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(n \geq 2)$ — примітивно рекурсивна функція. Тоді кожна з функцій

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},i)$$

та

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},i)$$

також є примітивно рекурсивною. Доведіть це.

А7.6 Довести, що такі функції є примітивно рекурсивними:

а) $f_1(x) = n$, (n — фіксоване натуральне число); $f_2(x) = x!$; $f_3(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$; $f_4(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.

б) $g_1(x) = sg(x)$, де $sg(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ 0, & \text{в іншому разі} \end{cases}$; $g_2(x) = \overline{sg}(x)$, де $\overline{sg}(x) = 1 - sg(x)$; $g_3(x) = x \dot{-} 1$; $g_4(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$; $g_5(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$.

в) $h(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$, $[x_1/0] = x_1$.

г) $\tau(x)$ — кількість натуральних дільників числа x, $\tau(0) = 0$.

Д7.1 З'ясуйте, яку процедуру виконує машина Тьюрінга з такою програмою команд (на не вказаних аргументах машина відразу зупиняється):

а) $\varphi(0, q_1) = (0, R, q_2)$, $\varphi(1, q_2) = (1, R, q_2)$, $\varphi(0, q_2) = (1, S, q_3)$, $\varphi(1, q_3) = (1, L, q_3)$, $\varphi(0, q_3) = (0, S, q_0)$;

б) $\varphi(0, q_1) = (0, R, q_2)$, $\varphi(0, q_2) = (1, S, q_0)$, $\varphi(1, q_1) = (1, R, q_1)$, $\varphi(1, q_2) = (1, R, q_2)$.

Д7.2 Побудуйте машину Тьюрінга, яка для довільних $x, x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$ переводить:

а) конфігурацію $\leftarrow \underset{\boxed{q_1}}{0}\overbrace{1\dots1}^{x+1}0 \rightarrow$ у конфігурацію $\leftarrow 0\overbrace{1\dots1}^{x+1}\underset{\boxed{q_0}}{0} \rightarrow$;

б) конфігурацію $\leftarrow 0\overbrace{1\dots1}^{x_1+1}\underset{\boxed{q_1}}{0}\overbrace{1\dots1}^{x_2+1}0 \rightarrow$ у конфігурацію

$$\leftarrow 0\overbrace{1\dots1}^{x_2+1}\underset{\boxed{q_0}}{0}\overbrace{1\dots1}^{x_1+1}0 \rightarrow .$$

Д7.3 Наведіть приклад машини Тьюрінга, для якої множина конфігурацій, починаючи працювати з яких машина працює, не зупиняючись, і множина конфігурацій, починаючи працювати з яких, вона зупиниться, є нескінченними.

Д7.4 Побудувати машину Тьюрінга із зовнішнім алфавітом $A = \{0, 1, 2\}$, яка на стрічці знаходить послідовність символів 1122 і зупиняється біля лівого символа цієї послідовності, якщо така послідовність на стрічці існує. Якщо ж такої послідовності нема, то машина працює, не зупиняючись.

Д7.5 Побудуйте машину Тьюрінга, яка обчислює функцію

а) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$;

б) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$;

в) $f(x_1, x_2) = [x/2]$.

Д7.6 Нехай функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ примітивно рекурсивна. Доведіть, що примітивно рекурсивними будуть також функції:

а) $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, x_1)$;

б) $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Д7.7 Довести, що такі функції є примітивно рекурсивними:

а) $\pi(x)$ — кількість простих чисел, що не перевищують числа x.

б) $p(x)$ — просте число, що має порядковий номер x у послідовності всіх простих чисел, впорядкованих за зростанням.

в) $f(x) = [\sqrt{x}]$.

Д7.8 Доведіть, що коли у примітивно рекурсивної функції змінити значення на скінченній множині точок, то нова функція буде примітивно рекурсивною.

Д7.9 Доведіть, що з функцій o та I_n^m за допомогою суперпозиції та схеми примітивної рекурсії не можна одержати функції: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x \dot{-} 1$, $h(x) = 2x$.

Д7.10 Чи правильні для довільних натуральних x_1, x_2, x_3 рівності:

а) $(x_1 + x_2) \dot{-} x_3 = x_1 + (x_2 \dot{-} x_3)$;

б) $sg(x_1)x_1 \dot{-} (x_2 + 2) = (x_1 \dot{-} x_2) \dot{-} 2sg(x_1)$;

в) $sg(x_1)x_1 \dot{-} (x_2 + 2) = (x_1 \dot{-} sg(x_1)x_2) \dot{-} 2$?