КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

# ЗБІРНИК ТИПОВИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ : ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2019

Збірник типових задач з математичного аналізу : функції однієї змінної / Упорядн. О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. – Електронне видання. – 2019. – 59 с.

Укладачі: Нестеренко О.Н., кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Петрова Т.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Чайковський А.В., доктор фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти: Стасюк С.А., старший науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту математики НАНУ, кандидат фізико-математичних наук,
Шевченко Г.М., професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук.

Затверджено Вченою Радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №9 від 15 квітня 2019 р.).

Рекомендовано для студентів першого курсу спеціальності "математика".

# ЗМІСТ

## ПЕРЕДМОВА

Цей збірник призначений для студентів математичних спеціальностей КНУ імені Тараса Шевченка і містить приклади розв'язання основних типових задач з математичного аналізу по програмі I семестру I курсу механіко-математичного факультету.

При підборі задач та теоретичних відомостей використано такі збірники задач:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної. – К., 2005.

Частина задач складена упорядниками.

# РОЗДІЛ 1
# МНОЖИНИ ТА ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ

*Множина* – це первинне поняття, що не визначається, його синоніми – сукупність, сім'я, клас.

Стосовно кожного об'єкта $x$, що розглядається у задачі, можна сказати, чи належить він множині $A$, чи ні. Запис $x \in A$, $A \ni x$ означає, що $x$ належить множині $A$, або є її елементом.

Множину можна задати переліком її елементів: $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$, або визначити характеристичу властивість її елементів: $A = \{x \in B \mid P(x)\}$ – множина тих $x$ з множини $B$, для яких виконується властивість $P(x)$ (наприклад, $\{x \in \mathbf{N} \mid x > 5\}$ – множина всіх натуральних чисел, які більше п'яти).

Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* множиною і позначається символом $\varnothing$.

Множину, що містить скінченну кількість елементів, називають скінченною. Інакше множину називають нескінченною.

Для деяких числових множин використовуються спеціальні позначення: $\mathbf{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbf{Z}$ – цілих чисел, $\mathbf{Q}$ – раціональних чисел, $\mathbf{R}$ – дійсних чисел.

Для скорочення слів, що часто використовуються в математичних твердженнях, використовуються такі *логічні символи*:

1) $\Rightarrow$ – випливає ($P \Rightarrow Q$ читають "з $P$ випливає $Q$ або "якщо виконується твердження $P$, то виконується й $Q$");
2) $\Leftrightarrow$ – тоді й лише тоді ($P \Leftrightarrow Q$ читають "$P$ виконується тоді й лише тоді, коли виконується $Q$" або "з $P$ випливає $Q$ і з $Q$ випливає $P$");
3) $\exists$ – існує ($\exists\, x$ читають "існує $x$" або "існує хоча б один $x$");
4) $\exists\,!$ – існує єдине ($\exists\,!\,x$ читають "існує точно один $x$");
5) $\forall$ – для всіх ($\forall\, x$ читають "для всіх $x$" або "для кожного $x$" або "для будь-якого $x$");
6) $:=$ і $\stackrel{\text{def}}{=}$ – дорівнює за означенням ($x := y$ або $x \stackrel{\text{def}}{=} y$ читають "нехай $x$ за означенням дорівнює $y$" або "покладемо $x$ рівним $y$").

Перекреслені символи означають заперечення відповідного поняття, наприклад, $\notin$ – "не належить $\nexists$ – "не існує".

Символи $\exists$ і $\forall$ називаються *кванторами* існування і загальності відповідно.

При написанні фраз, що складаються з логічних символів, кома " використовується замість слів "такі, що а двокрапка ":" – замість слова "виконується". Наприклад, вислів

$$\forall\, x,\ 0 < |x| < 1,\ \exists\, y,\ |y| > 1\ :\ xy = 1$$

читається так: "для кожного $x$ такого, що $0 < |x| < 1$, існує $y$ такий, що $|y| > 1$, для якого виконується рівність $xy = 1$".

Заперечення логічного твердження $A$ позначають $\neg A$.

Наведемо деякі логічні правила:

1. Для того, щоб записати заперечення логічного виразу за допомогою кванторів, треба замість кванторів існування поставити квантори загальності і навпаки, а також останнє твердження замінити протилежним. Наприклад, твердження

$$\forall a \in \mathbf{R} \, \exists x \in \mathbf{R} \, : \; x \geq a$$

означає, що існують як завгодно великі дійсні числа. Запереченням до нього є твердження

$$\exists a \in \mathbf{R} \, \forall x \in \mathbf{R} \, : \; x < a.$$

Цей невірний вислів стверджує, що всі дійсні числа не перевищують деякого фіксованого числа $a$.

2. Твердження $A \implies B$ еквівалентне твердженню $\neg B \implies \neg A$. Наприклад, твкрдження $2x \notin \mathbf{N} \implies x \notin \mathbf{N}$ еквівалентне твердженню $x \in \mathbf{N} \implies 2x \in \mathbf{N}$. Цей приклад показує, що за допомогою наведеного правила можна переписати твердження, яке треба перевірити, у більш простій формі. Крім того, це логічне правило є базою для доведення від супротивного.

3. Запереченням до твердження "$A$ і $B$"є твердження "$\neg A$ або $\neg B$". Запереченням до твердження "$A$ або $B$"є твердження "$\neg A$ і $\neg B$". Наприклад, твердження "$x \in [-5, 5]$ або $x > 7$" і "$x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ і $x \leq 7$" є запереченнями одне одного.

Зауважимо, що ці логічні правила можна застосовувати і у повсякденному житті. Наприклад, запереченням до фрази "всі помідори або жовті або червоні"буде фраза "є помідори, що не є ні жовтими, ні червоними". Або: фраза "якщо йде дощ, я виходжу з дому з парасолькою"еквівалентна фразі "якщо я виходжу з дому без парасольки, то дощу немає".

Друге правило є обгрунтуванням методу доведення від супротивного. Згідно цього методу, якщо треба довести твердження $B$, можна припустити, що правильне твердження $\neg B$ і, користуючись цим припущенням, довести заперечення $\neg A$ до деякого твердження $A$, про яке відомо, що воно правильне. В цьому разі припущення виявляється хибним і твердження $B$ доведене.

**Принцип математичної індукції.** Кожна множина натуральних чисел, що містить число $n_0$ і разом з кожним своїм елементом $n$ містить наступне число $n+1$, містить усі натуральні числа, починаючи з $n_0$.

На цій аксіомі натуральних чисел грунтується метод доведення *за індукцією*. Цей метод складається з двох частин: доведення бази індукції – твердження при $n = n_0$, та доведення кроку індукції: вважаючи твердження істинним при всіх $n < N$ для деякого натурального $N > 1$, показати, що твердження правильне при $n = N$.

Якщо $\forall x \in A \ : \ x \in B$, то множина $A$ називається *підмножиною* множини $B$. Позначення: $A \subset B$ або $B \supset A$.

За означенням, для довільної множини $A$ має місце включення $\varnothing \subset A$.

Множини $A$ і $B$ називаються *рівними*, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Позначення: $A = B$.

*Об'єднанням* множин $A$ і $B$ називається множина, що складається з усіх елементів, які належать принаймні одній з множин $A, \ B$. Позначення: $A \cup B$. Тобто,

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}\,.$$

*Перетином* множин $A$ і $B$ називається множина, що складається з усіх елементів, які належать кожній з множин $A, B$. Позначення: $A \cap B$. Тобто,

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}\,.$$

*Різницею* множин $A$ і $B$ називається множина, що складається з усіх елементів, які належать множині $A$ і не належать множині $B$. Позначення: $A \setminus B$. Тобто,

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}\,.$$

Нехай $X$ – основна множина. *Доповненням* до множини $A$ називається множина, що складається з усіх елементів основної множини, які не належать множині $A$. Позначення: $\overline{A}$. Тобто,

$$\overline{A} := \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A.$$

**Правила де Моргана (правила двоїстості)**

Мають місце рівності

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

**Приклад 1.** Визначити множину $A$, якщо:

1) $A = \{x \mid \exists\, n \in \mathbf{N} : \ x = 2n\}\,;$
2) $\forall x \in A\ \exists\, n \in \mathbf{N} : \ x = 2n.$

$\lceil$ 1) Якщо $x \in A$, то $\exists\, n \in \mathbf{N} : \ x = 2n$. Це означає, що число $x$ – парне натуральне число. Навпаки, якщо $x$ – парне натуральне число, то його можна подати у вигляді $2n$, де $n \in \mathbf{N}$, тому $x \in A$. Отже $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ – множина всіх парних натуральних чисел.

2) Якщо $x \in A$, то $\exists\, n \in \mathbf{N} : \ x = 2n$, що означає, що число $x$ – парне натуральне число. Отже, множина $A$ містить лише парні натуральні числа. Навпаки, якщо множина $A$ містить лише парні натураль-

ні числа (не обов'язково всі), то умова виконується. Отже, будь-яка підмножина множини парних натуральних чисел задовольняє умови задачі, наприклад, одноточкова множина $A = \{2m\}$, де $m \in \mathbf{N}$, або множина $A = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$ натуральних степенів двійки. $\rfloor$

**Приклад 2.** Чи вірне висловлювання

$$\forall\, a \in \mathbf{R}\ \exists\, x \in \mathbf{R} :\ x^2 - 2ax + 1 = 0?$$

$\lceil$ Висловлювання $\exists\, x \in \mathbf{R} :\ x^2 - 2ax + 1 = 0$ можна переформулювати таким чином: квадратне рівняння (відносно $x$) $x^2 - 2ax + 1 = 0$ має хоча б один розв'язок. Відомо, що це еквівалентне невід'ємності його дискримінанта: $D = 4a^2 - 4 \geq 0$. Отже, вихідне висловлювання можна тепер замінити на еквівалентне $\forall\, a \in \mathbf{R}\ :\ D = 4a^2 - 4 \geq 0$. Але це висловлювання невірне, бо при $a = 0\ :\ D = -4 < 0$, тобто нерівність $D \geq 0$ виконується не для всіх $a \in \mathbf{R}$. Тому вихідне висловлювання теж невірне. $\rfloor$

**Приклад 3.** Записати за допомогою логічних знаків висловлювання: "у множині $A$ містяться всі натуральні числа, що діляться на 3, але не діляться на 5".

$\lceil$ Те, що число $x \in A$ ділиться на $3$, означає, що його можна подати у вигляді $x = 3n$, де $n \in \mathbf{N}$. Те, що число $x \in A$ не ділиться на $5$, означає, що його не можна подати у вигляді $x = 5m$, де $m \in \mathbf{N}$. Отже, шукана логічна фраза може бути такою: $\exists\, n \in \mathbf{N}\ :\ x = 3n,\ \forall\, m \in \mathbf{N}\ :\ x \neq 5m\ \Rightarrow\ x \in A$.

Інший розв'язок можна отримати, згадавши, що кожне натуральне число можна подати у вигляді $15k - r$, де $k \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{Z}$, $0 \leq r \leq 14$. Тоді легко помітити, що числа, які задовольняють умови задачі, отримаємо при $r \in \{3, 6, 9, 12\}$. Отже, інша можлива відповідь: $\forall\, k \in \mathbf{N}\ \forall\, r \in \{3, 6, 9, 12\}\ :\ 15k - r \in A$. $\rfloor$

**Приклад 4.** Визначити множини $A \cup B$ , $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x \leq 0\right\}$.

$\lceil$ Розв'язуючи квадратні нерівності, отримаємо $A = (-3, 1),\ B = [0, 2]$.

Розташуємо кінці проміжків $-3, 0, 1, 2$ на координатній осі і розглянемо їх, а також утворені інтервали. Точка $-3$ та інтервали $(-\infty, -3), (2, +\infty)$ не міститься у жодній з множин, точка $0$ та інтервал $(0, 1)$ містяться в обох множинах, інтервал $(-3, 0)$ міститься лише у множині $A$, точки $1, 2$ та інтервал $(1, 2)$ – лише у множині $B$. Тому за означенням дій над множинами отримаємо: $A \cup B = (-3, 2]$, $A \cap B = [0, 1), A \setminus B = (-3, 0), B \setminus A = [1, 2], \overline{A} = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$. $\rfloor$

**Приклад 5.** Для довільних множин $A, B, C$ довести рівність

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$\lceil$ Нехай $x \in (A \cup B) \setminus C$. Тоді $x \in A \cup B$ і $x \notin C$. Отже, $x \in A$ або $x \in B$; і $x \notin C$. Можливі випадки: 1) Якщо $x \in A$, то $x \in A \setminus C$. 2) Якщо $x \in B$, то $x \in B \setminus C$. В обох випадках $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Отже, ми довели, що $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Нехай $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Тоді $x \in (A \setminus C)$ або $x \in (B \setminus C)$. Отже, $x \in A$ і $x \notin C$; або $x \in B$ і $x \notin C$. В кожному з цих випадків $x \notin C$ і $x \in A \cup B$. Тому, $x \in (A \cup B) \setminus C$. Отже, ми довели, що $(A \cup B) \setminus C \supset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

З двох протилежних включень випливає шукана рівність. $\rfloor$

**Приклад 6.** Довести для натуральних $n$ твердження $n^2 - n - 3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$ : а) безпосередньо розв'язавши нерівність; б) записавши еквівалентне твердження з використанням заперечень.

$\lceil$ а) Квадратне рівняння $n^2 - n - 3 = 0$ має корені $n_1 = (1 - \sqrt{13})/2; n_2 = (1 + \sqrt{13})/2$. Тому нерівність має розв'язок $n \in (-\infty, n_1] \cup [n_2, +\infty)$. Оскільки $\sqrt{13} \in (3, 4)$, то $n_1 \in (-3/2, -1),\ n_2 \in (2, 5/2)$. Враховуючи натуральність $n$, отримаємо $n \geq 3$.

б) Еквівалентне твердження: $n < 3 \Rightarrow n^2 - n - 3 < 0$. Натуральних чисел, менших трьох є лише два. Перевіряємо нерівність для них: $1^2 - 1 - 3 = -3 < 0,\ 2^2 - 2 - 3 = -1 < 0$. Отже, твердження правильне. $\rfloor$

**Приклад 7.** Відомо, що множина $A$ скінченна, а множина $A \cup B$ нескінченна. Довести методом від супротивного, що множина $B$ нескінченна.

$\lceil$ Припустимо від супротивного, що множина $B$ скінченна. Тоді $A \cup B$ є об'єднанням двох скінченних множин і тому є скінченною. Суперечність. Отже, наше припущення хибне і множина $B$ нескінченна. $\rfloor$

**Приклад 8.** Довести, що $\forall n \in \mathbf{N}\ :\ 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\lceil$ При $n = 1$ маємо правильну рівність $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (база індукції). Нехай рівність правильна при $n = k$. Доведемо її при $n = k + 1$ (крок індукції). Маємо $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Отже, за принципом математичної індукції, рівність вірна при всіх натуральних $n$. $\rfloor$

**Приклад 9.** Довести, що при $n \geq 1$ число $6^{n-1} + 7^{2n+1}$ ділиться на 43.

$\lceil$ При $n = 1$ маємо число $1 + 7^3 = 344 = 8 \cdot 43$ (база індукції). Нехай твердження правильне для $n = k$. Доведемо його для $n = k + 1$ (крок індукції). Маємо $6^k + 7^{2k+3} = 49(6^{k-1} + 7^{2k+1}) - 43 \cdot 6^{k-1}$. Кожний доданок цієї суми ділиться на 43, отже й сума теж. Тому за принципом математичної індукції твердження вірне при всіх натуральних $n$. $\rfloor$

# РОЗДІЛ 2
# ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай $X, Y$ – деякі непорожні множини. *Функцією* (або *відображенням*) $f$ з множини $X$ у множину $Y$ будемо називати правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один елемент $y \in Y$.

Позначення: $f : X \to Y; \quad X \ni x \overset{f}{\mapsto} y \in Y; \quad y = f(x),\ x \in X.$

Якщо $x \in X$, то елемент $y = f(x)$ називається *образом* елемента $x$ при відображенні $f$. Множина $X$ називається *множиною визначення* відображення $f$ і позначається символом $D(f)$. Множина

$$R(f) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in X\ :\ f(x) = y\} = \{f(x) |\ x \in X\}$$

називається *множиною значень* відображення $f$.

Відображення $f_1 : X_1 \to Y_1$ і $f_2 : X_2 \to Y_2$ *рівні* тоді й лише тоді, коли: $X_1 = X_2 = X$ і $\forall\, x \in X :\ f_1(x) = f_2(x)$. Позначення: $f_1 = f_2$.

Нехай $f : X \to Y$ і $U \subset X$. Визначимо відображення $g : U \to Y$, поклавши $g(x) = f(x),\ x \in U$. Тоді $g$ називається *звуженням* відображення $f$ на $U$, а відображення $f$ – *продовженням* відображення $g$ на $X$.

Нехай $f : X \to Y$ і $A \subset X,\ B \subset Y$. *Образом* множини $A$ при відображенні $f$ називається множина $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$. *Прообразом* множини $B$ при відображенні $f$ називається множина $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Зауважимо, що $f(A) \subset Y,\ f^{-1}(B) \subset X$.

*Графіком* відображення $f : X \to Y$ називається множина $G(f) := := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y = f(x)\}$, яка є підмножиною $X \times Y$.

Нехай $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$. Відображення $h : X \to Z$, що визначається формулою $h(x) := g(f(x)),\ x \in X$, називається *складним відображенням* або *суперпозицією* відображень $f$ і $g$.

Позначення: $h = g(f)$ або $h = g \circ f$.

Відображення $f : X \to Y$ називається *сюр'єкцією*, якщо $f(X) = Y$. Відображення $f : X \to Y$ називається *ін'єкцією*, якщо $\forall\, \{x_1, x_2\} \subset X$, $x_1 \neq x_2\ :\ f(x_1) \neq f(x_2)$. Відображення $f : X \to Y$ називається *бієкцією*, якщо $f$ одночасно є ін'єкцією і сюр'єкцією. В останньому випадку кажуть, що $f$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між множинами $X$ і $Y$.

Нехай $f : X \to Y$ – бієкція. Тоді $\forall\, y \in Y\ \exists!\, x \in X\ :\ f(x) = y$. Покладемо $f^{-1}(y) = x,\ y \in Y$. Відображення $f^{-1} : Y \to X$ називається *оберненим* до відображення $f$.

**Приклад 1.** Чи є відображення ін'єкцією? сюр'єкцією? бієкцією?

а) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^3$;

б) $f : [-1, 0] \to [-1, 1],\ f(x) = x^3$;

в) $f : [-1, 1] \to [0, 1],\ f(x) = x^4$.

$\lceil$ а) Тут $X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}$. Перевіримо ін'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x_1) = f(x_2)$, тобто $x_1^3 = x_2^3$ відносно $x_1 \in \mathbf{R}$ при $x_2 \in \mathbf{R}$. Отримаємо $x_1 = x_2$. Отже, це ін'єкція.

Перевіримо сюр'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x) = y$, тобто $x^3 = y$ відносно $x \in \mathbf{R}$ при $y \in \mathbf{R}$. Отримаємо $x = \sqrt[3]{y}$. Оскільки рівняння вдалося розв'язати при всіх $y \in \mathbf{R}$, отже, це сюр'єкція.

Також це бієкція (ін'єкція і сюр'єкція).

б) Тут $X = [-1, 0], Y = [-1, 1]$. Перевіримо ін'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x_1) = f(x_2)$, тобто $x_1^3 = x_2^3$ відносно $x_1 \in [-1, 0]$, де $x_2 \in [-1, 0]$. Отримаємо $x_1 = x_2$. Отже, це ін'єкція.

Перевіримо сюр'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x) = y$, тобто $x^3 = y$ відносно $x \in [-1, 0]$ при $y \in [-1, 1]$. Проте при додатних $y$ це рівняння не має недодатних розв'язків. Отже, це не сюр'єкція.

Також це не бієкція (бо не сюр'єкція).

в) Тут $X = [-1, 1], Y = [0, 1]$. Перевіримо ін'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x_1) = f(x_2)$, тобто $x_1^4 = x_2^4$ відносно $x_1 \in [-1, 1]$, де $x_2 \in [-1, 1]$. Отримаємо $x_1 = \pm x_2$. Оскільки $x_1 = x_2$ не є єдиним розв'язком, це не ін'єкція.

Перевіримо сюр'єктивність. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x) = y$, тобто $x^4 = y$ відносно $x \in [-1, 1]$ при $y \in [0, 1]$. Отримаємо $x = \pm\sqrt[4]{y}$. Оскільки рівняння вдалося розв'язати при всіх $y \in [0, 1]$, отже, це сюр'єкція.

Також це не бієкція (бо не ін'єкція).

$\rfloor$

**Приклад 2.** Для функції $f(x) = x^2 - 2x,\quad x \in \mathbf{R}$, визначити такі множини:

$$f(\{0\}),\ f(\{0, 2\}),\ f([3, 4]), f((0, 2)), f^{-1}(\{0\}),$$
$$f^{-1}(\{-4, -3\}),\ f^{-1}((-5, 3]),\ f^{-1}((-\infty, 3]).$$

$\lceil$ Графіком цієї функції є парабола з гілками вгору. Точки перетину з віссю $Ox$ є $x = 0; 2$, вершина параболи – точка $x = 1, y = -1$. Тому $f(x) \geq -1,\ x \in \mathbf{R}$.

Образи скінченних множин можна отримати, просто підставляючи відповідні аргументи в функцію. Тому $f(\{0\}) = f(\{0, 2\}) = \{0\}$. На відрізку $[3, 4]$ парабола зростає, тому $f([3, 4]) = [f(3), f(4)] = [3, 8]$. На інтервалі

$(0,2)$ найменше значення функції є $f(1) = -1$. Також ця функція монотонна на кожному з інтервалів $(-1,0),(0,1)$, і на кожному з них набуває всіх значень з інтервалу $(-1,0)$. Тому $f((0,2)) = [-1,0)$.

Для знаходження прообразів скінченних множин, треба для кожного елемента $y$ такої множини розв'язати рівняння $f(x) = y$. Зокрема, рівняння $x^2 - 2x = 0$ має корені $0; 2$. Тому $f^{-1}(\{0\}) = \{0; 2\}$. Рівняння $x^2-2x = -3, x^2-2x = -4$ не мають розв'язків, тому $f^{-1}(\{-4,-3\}) = \varnothing$. Взагалі, якщо $y < -1$, то рівняння $x^2 - 2x = y$ не має розв'язків. При $y = -1$ єдиний розв'язок $x = 1$. При $y \in (-1,3]$ – по два розв'язки (з проміжків $[-1,1),(1,3]$). Тому $f^{-1}((-5,3]) = f^{-1}((-\infty,3]) = [-1,3]$. $\rfloor$

**Приклад 3.** Які з наведених функцій $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ є парними? непарними? періодичними?

а) $f(x) = x^4 + x^2$;

б) $f(x) = \sin 2x + \cos x$;

в) $f(x) = x \cos x$.

$\lceil$ а) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x),\ x \in \mathbf{R}$. Функція є парною і не є непарною (єдина функція, що парна і непарна одночасно – тотожно нульова). Також ця функція не є періодичною, бо кожне значення набуває лише 1 чи 2 рази.

а) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x),\ x \in \mathbf{R}$. Функція є парною і не є непарною (єдина функція, що парна і непарна одночасно – тотожно нульова). Також ця функція є періодичною з періодом $2\pi$,, бо $f(x + 2\pi) = \sin(2x + 4\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin 2x + \cos x,\ x \in \mathbf{R}$.

в) $f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x \cos x = -f(x),\ x \in \mathbf{R}$. Функція є непарною і не є парною. Також ця функція не є періодичною, бо кожне значення набуває лише 1 чи 2 рази.

$\rfloor$

# РОЗДІЛ 3
# ДІЙСНІ ЧИСЛА

*Невід'ємним дійсним числом* називається нескінченний десятковий дріб $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, де $\alpha_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\alpha_n$, $n \geq 1$ – цифри від $0$ до $9$. Невід'ємне число називається *додатним*, якщо $\exists\, n \geq 0 \;:\; \alpha_n > 0$. *Від'ємним* дійсним числом є додатне число зі знаком "$-$" перед ним.

*Раціональними* числами називаються дійсні числа, для яких десятковий дріб є результатом нескінченного ділення в стовпчик деякого цілого числа $m$ на деяке натуральне число $n$, тому $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \right\}$. *Ірраціональними* числами називаються всі дійсні числа, крім раціональних.

Надалі розглядаються дійсні числа, десятковий запис яких не містить цифру $9$ у періоді. Множина всіх дійсних чисел позначається символом $\mathbf{R}$.

Невід'ємні дійсні числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ і $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$ називаються *рівними* у випадку $\alpha_n = \beta_n,\ n \geq 0$. За означенням $a < b$, якщо $\exists\, n \geq 0 \;:\; \alpha_k = \beta_k,\ 0 \leq k < n$ і $\alpha_n < \beta_n$. За означенням $a \leq b$, якщо $a < b$ або $a = b$. На від'ємні числа ці поняття переносяться за тими ж правилам, що і для раціональних чисел.

Нехай $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ Позначимо $a'_n := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ і $a''_n := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1),\ n \geq 0$ (якщо $\alpha_n = 9$, то одиниця переноситься у старші розряди). Ці величини називають $n$-м десятковим наближенням числа $a$ з недостачею і з надлишком відповідно.

Нехай $A \subset \mathbf{R},\ A \neq \varnothing$.

Елемент $b \in A$ називається *найбільшим елементом* множини $A$, якщо $\forall\, a \in A \;:\; a \leq b$. Елемент $b \in A$ називається *найменшим елементом* множини $A$, якщо $\forall\, a \in A \;:\; a \geq b$.

Множина $A$ називається *обмеженою зверху*, якщо $\exists\, c \in \mathbf{R}\ \forall\, x \in A \;:\; x \leq c$. Число $c$ у такому випадку називається *верхньою межею* множини $A$. Множина $A$ називається *обмеженою знизу*, якщо $\exists\, d \in \mathbf{R}\ \forall\, x \in A \;:\; x \geq d$. Число $d$ у цьому випадку називається *нижньою межею* множини $A$.

Число $c^* \in \mathbf{R}$ називається *точною верхньою межею* множини $A$, якщо

1) $c^*$ – верхня межа множини $A$;
2) для кожної верхньої межі $d$ множини $A \;:\; c^* \leq d$.

Число $c_* \in \mathbf{R}$ називається *точною нижньою межею* множини $A$, якщо

1) $c_*$ – нижня межа множини $A$;
2) для кожної нижньої межі $d$ множини $A \;:\; c_* \geq d$.

Позначення: $c^* = \sup A = \sup\limits_{x\in A} x; \qquad c_* = \inf A = \inf\limits_{x\in A} x.$

**Теорема (про характеризацію точних меж).** Число $c^* = \sup A$ тоді й тільки тоді, коли виконані умови

1) $\forall\, x \in A \,:\, x \le c^*$;
2) $\forall\, d < c^* \,\exists\, x \in A \,:\, x > d$.

Число $c_* = \inf A$ тоді й тільки тоді, коли виконані умови

1) $\forall\, x \in A \,:\, x \ge c_*$;
2) $\forall\, d > c_* \,\exists\, x \in A \,:\, x < d$.

Для необмеженої зверху множини $A$ за означенням покладемо $\sup A :=$ $:= +\infty$, для необмеженої знизу множини – $\inf A := -\infty$.

Множини $A$ і $B$ *рівнопотужні* (*мають однакову потужність*), якщо існує біекція $f : A \to B$. Позначення: $A \sim B$.

Множина, рівнопотужна множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ при деякому $n \in \mathbf{N}$, називається *скінченною*. Для скінченної множини $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ кількість її елементів $n$ позначається символом $|A|$.

Множини, які не є скінченними, називаються *нескінченними*.

Множина $A$ називається *зліченною*, якщо $A \sim \mathbf{N}$. У цьому випадку кажуть, що елементи множини $A$ можна *занумерувати*, вказавши біекцію з $A$ в $\mathbf{N}$. Множина, що є скінченною або зліченною, називається *не більш, ніж зліченною*.

Множина, рівнопотужна відрізку $[0, 1]$, називається множиною потужності *континуум*.

Множини потужності континуум є незліченними.

**Приклад 1.** Довести обмеженість і визначити точні межі множини
1) $A = \left\{ a_n = \dfrac{1-n}{2n+3} \mid n \ge 1 \right\}$; 2) $A = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{N},\ 3 < 2p < q \right\}$.

⌈ 1) Маємо $a_1 = 0,\ a_n < 0,\ n \ge 1$. Це означає, що $a_1 = \max A =$ $= \sup A$ і множина $A$ обмежена зверху. Крім того, $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n+3)} >$ $-\frac{1}{2},\ n \ge 1$. Це означає, що множина $A$ обмежена знизу. Перевіримо, що $-\frac{1}{2}$ – точна нижня межа. Для цього за критерієм досить переконатися, що $\forall\, d > -\frac{1}{2} \,\exists\, n \in \mathbf{N} \,:\ a_n < d$. Остання нерівність еквівалентна такій: $\frac{5}{2(2n+3)} < d + \frac{1}{2}$. Розв'язуємо цю нерівність відносно $n :\ n > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2d+1} - 3\right)$. Цю нерівність задовольняє, наприклад, натуральне число $n = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2d+1}\right] +$ $1$. Отже, $\inf A = -\frac{1}{2}$.

2) З нерівностей $3 < 2p < q$ випливає, що $\frac{p}{q} < \frac{1}{2}$, а оскільки $p, q \in \mathbf{N}$, то $p \geq 2$ і $\frac{p}{q} > 0$. Отже, $0$ – нижня межа множини $A$, $\frac{1}{2}$ – її верхня межа. Звідси випливає, що множина $A$ обмежена. Доведемо, що вказані межі є точними.

Припустимо, що $\exists\, c < \frac{1}{2}\ \forall x \in A\ :\ x \leq c$. Але у проміжку $(c, \frac{1}{2})$ обов'язково є раціональне число $\frac{p}{q}$, причому $p \neq 1$. Воно належить множині $A$, що протирічить припущенню. Отже, $\sup A = \frac{1}{2}$.

Припустимо, що $\exists\, c > 0\ \forall x \in A\ :\ x \geq c$. Але у проміжку $(0, c)$ обов'язково є раціональне число $\frac{p}{q}$. Його можна подати у вигляді $\frac{2p}{2q}$, тоді чисельник не менший за $2$ і це число належить множині $A$, що протирічить припущенню. Отже, $\inf A = 0$. ⌋

**Приклад 2.** Довести, що $\sqrt[3]{4}$ – ірраціональне число.

⌈ Припустимо протилежне, тобто: $\sqrt[3]{4} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$, причому $p$ і $q$ взаємно прості. Тоді маємо $\frac{p^3}{q^3} = 4$ і $p^3 = 4q^3$. Звідси випливає, що число $p$ ділиться на $2$, тобто $p = 2a$, $a \in \mathbf{N}$. Тоді $8a^3 = 4q^3$, звідки $q^3 = 2a^3$. Звідси випливає, що число $q$ також ділиться на $2$, що суперечить взаємній простоті $p$ і $q$. Тому наше припущення є хибним. ⌋

**Приклад 3.** Нехай $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q},\ r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\alpha + \beta$;   2) $\alpha + r$;   3) $\sqrt{r}$;?

⌈ 1) Може бути як ірраціональним (наприклад, $\alpha = \beta = \sqrt{2},\ \alpha + \beta = 2\sqrt{2}$) так і раціональним (наприклад, $\alpha = \sqrt{2},\ \beta = -\sqrt{2},\ \alpha + \beta = 0$).

2) Не може бути раціональним. Дійсно, якщо припустити від супротивного, що число $\alpha + r$ раціональне, то число $\alpha = (\alpha + r) - r$ раціональне, як різниця раціональних. Суперечність. Отже, число $\alpha + r$ ірраціональне.

3) Може бути як ірраціональним (наприклад, $r = 2,\ \sqrt{r} = \sqrt{2}$) так і раціональним (наприклад, $r = 0,\ \sqrt{r} = 0$).

⌋

## РОЗДІЛ 4

## ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ОСНОВНІ ПРИЙОМИ ОБЧИСЛЕННЯ

Послідовністю називається відображення $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Позначення: $\{a_n : n \geq 1\}$.

Число $p \in \mathbb{R}$ називається границею послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N : |a_n - p| < \varepsilon.$$

При цьому кажуть, що послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ збігається до числа $p$ і використовують позначення $p := \underset{n\to\infty}{lim} a_n$ або $a_n \to p, n \to \infty$.

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ розбігається до $+\infty$, якщо

$$\forall C \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N : a_n > C.$$

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ розбігається до $-\infty$, якщо

$$\forall C \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N : a_n < C.$$

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ розбігається до $\infty$, якщо

$$\forall C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N : |a_n| > C.$$

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ називається обмеженою, якщо

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C.$$

Властивості збіжних послідовностей

1) Збіжна послідовність обмежена.

2) Якщо $a_n \to a, n \to +\infty$, і $b > a$, то $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n < b$.

3) Нехай $a_n \to a, n \to +\infty, b_n \to b, n \to \infty$, і $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$. Тоді $a \leq b$.

**Теорема** (про три послідовності)**.** *Нехай*

$$1) a_n \to a, n \to \infty; \qquad c_n \to a, n \to \infty,$$

$$2) \forall n \geq 1 : a_n \leq b_n \leq c_n.$$

*Тоді* $b_n \to a, n \to \infty$.

**Теорема** (про арифметичні дії). *Нехай* $a_n \to a, n \to \infty; b_n \to b, n \to \infty.$ *Тоді* $\forall c \in \mathbb{R} : ca_n \to ca, \quad a_n + b_n \to a + b, \quad a_n b_n \to ab, n \to \infty.$ *Якщо додатково* $b \neq 0,$ *то* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, n \to \infty.$

**Теорема** (Теорема Штольца). *Нехай послідовності* $\{x_n : n \geq 1\}$ *і* $\{y_n : n \geq 1\}$ *задовольняють умовам:*
*1)* $\forall n \geq 1 : y_n < y_{n+1};$
*2)* $y_n \to +\infty, n \to \infty;$
*3) існує* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$

*Тоді* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$

**Зауваження.** *Помітимо, що послідовності, які ми частіше за все використовуємо, можна записати в порядку швидкості зростання, при* $n \to \infty$ *:*
*1)* $n^n$*;*
*2)* $n!;$
*3)* $a^n, \quad a > 1;$
*4)* $n^\alpha, \quad \alpha > 0;$
*5)* $\log_a n, \quad a > 1;$
*6) Обмежені послідовності.*

Тоді границя частки двох таких послідовностей, де в знаменнику стоїть послідовність, що зростає швидше, дорівнює нулю.
Розглянемо основні методи обчислення границь послідовностей. При цьому ми будемо використовувати такі стандартні границі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0; \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1; \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0; \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad |a| < 1. \tag{4.4}$$

**Приклад 1.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n + \lg n + 2^n}{n^2 + \lg n - 2^n}.$$

Згідно з зауваженням, спочатку знадемо доданок, який серед усіх доданків у чисельнику і знаменнику найшвидше зростає. Очевидно, що це доданок $2^n$. Далі, почленно ділимо на цей доданок і використовуємо стандартні границі та теорему про арифметичні дії.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\lg n+2^n}{n^2+\lg n-2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{2^n}+\frac{\lg n}{2^n}+1}{\frac{n^2}{2^n}+\frac{\lg n}{2^n}-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{0+0+1}{0+0-1}=-1.$$

**Приклад 2.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n+\cos n}{3^{n+1}+\sin n^2}.$$

Як і в прикладі 4, знаходимо доданок, який серед усіх доданків у чисельнику та знаменнику найшвидше зростає. Очевидно, що це доданок $3^{n+1}$. Почленно ділимо на цей доданок чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n+\cos n}{3^{n+1}+\sin n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{3^{n+1}}+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\frac{\cos n}{3^{n+1}}}{1+\frac{\sin n^2}{3^{n+1}}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{3^{n+1}}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{\cos n}{3^{n+1}}}{1+\frac{\sin n^2}{3^{n+1}}}=\frac{0+0+0}{1+0}=0.$$

Помітимо, що ми використовуємо стандартну границю $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ і той факт, що послідовності $\cos n$ і $\sin n^2$ обмежені. Метод розглянутий в прикладах 4 і 4 можна умовно назвати ділення на "старшого". Далі розглянемо метод множення на "спряжений вираз".

**Приклад 3.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$$

Домножимо та поділимо вираз на суму коренів (спряжений вираз):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right)\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1}\right)\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+n+1)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1}}.$$

Далі, як в попередніх прикладах, будемо ділити на "старшого тобто на $n$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}.$$

**Приклад 4.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right).$$

Оскільки в дужках ми бачимо різницю кубічних коренів, то домножимо й поділимо вираз на вираз

$$\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2},$$

щоб отримати формулу різниці кубів

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\frac{(n+1)^2-\left(n^2+1\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2}\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\frac{2n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2}\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$

$$=2\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\frac{n^{4/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}.$$

Далі поділимо почленно чисельник та знаменник на $n^{4/3}$

$$2\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\frac{n^{4/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}=$$

$$=2\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2})\right)^2}}=$$

$$=2\frac{1}{\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{(1+0)(1+0)}+\sqrt[3]{(1+0)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Часто при обчисленні границі використовується теорема про три послідовності.

**Приклад 5.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+n+1}.$$

Помітимо, що $\forall n \geq 1$ :

$$\sqrt[n]{n^3} \leq \sqrt[n]{n^3+n+1} \leq \sqrt[n]{3n^3} = \sqrt[n]{n^3}.$$

Оскільки $\sqrt[n]{n^3} \to 1, n \to +\infty$ і $\sqrt[n]{3} \to 1, n \to +\infty$, то за теоремою про три послідовності $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+n+1} = 1$. Зауважимо, що для оцінки у більшу сторону, ми кожний доданок замінили на доданок, який найшвидше зростає, а для оцінки у меншу сторону залишили тільки цей доданок.

**Приклад 6.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

Також будемо користуватися теоремою про три послідовності. Очевидно, що

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

і

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Тоді за теоремою про три послідовності

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

**Приклад 7.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log_{n^2} 2}.$$

Помітимо, що $\log_{n^2} 2 = \frac{1}{\log_2 n^2}$ і виконується нерівність

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\log_2 n^2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\log_2 n^2}} < 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, то за теоремою про три послідовності $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log_{n^2} 2} = 1$. Розглянемо приклади на застосування теореми Штольца.

**Приклад 8.** Обчислити

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n\cdot(n+1)}{n^3}.$$

Зауважимо, що застосувати теорему про арифметичні дії безпосередньо не можна, бо кількість доданків у чисельнику є змінною. Застосуємо теорему Штольца. Оскільки для послідовностей $x_n = 1\cdot 2 + ... + n\cdot(n+1)$ і $y_n = n^3$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2+3n+1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3},$$

то і

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{3}.$$

**Приклад 9.** Нехай $k \in \mathbb{N}$. Довести, що

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Застосуємо теорему Штольца для послідовностей $x_n = 1^k + 2^k + ... + n^k$ і $y_n = n^{k+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}.$$

Оскільки $(n+1)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i n^i$ і $(n+1)^k = \sum\limits_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i n^i$, то маємо, що

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i n^i - n^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{k} C_{k+1}^i n^i}.$$

Далі поділимо чисельник та знаменник на "старшого тобто на $n^k$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{k+1} C_k^i n^i} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i \frac{1}{n^{k-i}}}{\sum\limits_{i=0}^{k+1} C_k^i \frac{1}{n^{k-i}}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^k}+C_k^1\frac{1}{n^{k-1}}+...+C_k^k}{\frac{1}{n^k}+C_{k+1}^1\frac{1}{n^{k-1}}+...+C_{k+1}^k} = \frac{0+0+...+C_k^k}{0+0+...+C_{k+1}^k} =$$

$$= \frac{C_k^k}{C_{k+1}^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Тоді за теоремою Штольца

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k+1}.$$

**Приклад 10.** За означенням границі послідовності довести рівності:

$$1)\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{1}{2};$$

$$2)\lim_{n\to+\infty}0,999^n = 0;$$

$$3)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!} = 0.$$

1) Розглянемо $\left|\frac{2n+3}{4n+5}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2(4n+5)}\right| = \frac{1}{2(4n+5)}$. Нехай $\forall\varepsilon>0$ фіксоване. Тоді нерівність $\left|\frac{2n+3}{4n+5}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ виконується при тих $n\in\mathbb{N}$, при яких

$\frac{1}{2(4n+5)} < \varepsilon$. остання нерівність рівнозначна $1 < 2\varepsilon(4n+5) \Leftrightarrow 4n+5 > \frac{1}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\frac{1}{2\varepsilon}-5}{4}$. За аксіомою Архімеда $\exists n_0 = \left[\frac{\frac{1}{2\varepsilon}-5}{4}\right] + 1 : \forall n \geq n_0$ $n > \frac{\frac{1}{2\varepsilon}-5}{4}$. таким чином, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ виконується $\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.
2) Розглянемо $\forall \varepsilon > 0$ і $|0,999^n - 0| < \varepsilon$

$$|0,999^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0,999^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{0,999} \varepsilon.$$

Остання нерівність буде виконуватись при $\forall n \geq n_0$, де $n_0 = [\log_{0,999} \varepsilon] + 1$.
3) Нехай $\forall \varepsilon > 0$ фіксоване. Маємо $\left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$. Тоді нерівність $\frac{1}{n!} < \varepsilon$. обов'язково виконується при тих $n \in \mathbb{N}$, при яких $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Остання нерівність виконується при $\forall n \geq n_0$, де $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

## РОЗДІЛ 5
## ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ. ЧИСЛО $e$

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ називається
1) *зростаючою*, якщо $\forall n \geq 1 : a_n < a_{n+1}$;
2) *неспадною*, якщо $\forall n \geq 1 : a_n \leq a_{n+1}$;
3) *спадною*, якщо $\forall n \geq 1 : a_n > a_{n+1}$;
4) *незростаючою*, якщо $\forall n \geq 1 : a_n \geq a_{n+1}$;
У кожному з випадків 1) – 4) послідовніть $\{a_n : n \geq 1\}$ називається монотонною.

**Теорема.** *Монотонна обмежена послідовність збіжна*

**Приклад 1.** За допомогою теореми про існування границі монотонної послідовності довести збіжність послідовності:

$$1) x_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$2) x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

1) Помітимо, що $x_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$. Тоді очевидно, що $0 \leq x_n < 2$, тобто послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ обмежена. Також, $x_n < x_{n+1}$, де $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$, що позначає, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ строго зростає. Таким чином, за теоремою Вейєрштрасса $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

2) Розглянемо

$$\ln x_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Маємо, що $\forall n \geq 1 \; : \; \ln x_n < 1 \Leftrightarrow 0 < x_n < e$, тобто послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ обмежена. Оскільки $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) =$

$x_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n, \forall n \geq 1$, то послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ строго зростає. Таким чином, за теоремою Вейєрштрасса $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.
Зауважимо, що в останньому прикладі ми не знаходили границю послідовності, а тільки доводили, що вона існує.

# РОЗДІЛ 6
# ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ

Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\{n(k) : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$, у якій $1 \leq n(1) < n(2) < ... < n(k) < n(k+1) < ...$ Оскільки $\forall k \geq 1 : n(k) \geq k$, то $n(k) \to +\infty, k \to \infty$.

Послідовність $\{a_{n(k)} : n \geq 1\}$ називається підпослідовністю вихідної послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$.

Число $a \in \mathbb{R}$ або символ $a = +\infty$ чи $a = -\infty$ називається частковою границею послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$, якщо $a$ є границею деякої підпослідовності $\{a_{n(k)} : n \geq 1\}$.

Нехай $A-$ множина часткових границь послідовності $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$.

*Нижньою границею* послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ називається величина:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} -\infty, & \{a_n : n \geq 1\} \quad \text{не обмежена знизу} \\ \inf A, & \{a_n : n \geq 1\} \quad \text{обмежена знизу і} \quad A \neq \{+\infty\} \\ +\infty, & A = \{+\infty\} \end{cases}$$

*Верхньою границею* послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ називається величина:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} +\infty, & \{a_n : n \geq 1\} \quad \text{не обмежена зверху} \\ \sup A, & \{a_n : n \geq 1\} \quad \text{обмежена зверху і} \quad A \neq \{-\infty\} \\ -\infty, & A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

**Приклад 1.** Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$:

$$1) x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right); \qquad 2) x_n = 1 + n \cdot \sin\frac{\pi n}{2}.$$

1) Маємо $x_{2n} = 2 + \frac{3}{2n} \to 2, n \to +\infty, \quad x_{2n-1} = -2 - \frac{3}{2n-1} \to -2, n \to +\infty, n \leq 1$. Таким чином, послідовністьрозбито на дві збіжні підпослідовності. Так як, $\{2n : n \geq 1\} \cap \{2n-1 : n \geq 1\} = \varnothing$ і $\{2n : n \geq 1\} \cup \{2n-1 : n \geq 1\} = \mathbb{N}$, то множина часткових границь послідовності $A = \{-2; 2\}$. Звідси випливає, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A = \max A = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A = \min A = -2$.

2) Маємо $x_{2n} = 1 \to 1, n \to +\infty$,

$x_{4n+1} = 1 + 4n + 1 \to 2 + 4n \to +\infty, n \to +\infty,$
$x_{4n-1} = -4n + 2 \to -\infty, n \to +\infty.$
Таким чином, послідовність розбито на три збіжні підпослідовності. Так як $\{2n : n \geq 1\} \cap \{4n+1 : n \geq 1\} \cap \{4n-1 : n \geq 1\} = \varnothing$ і $\{2n : n \geq 1\} \cup \{4n+1 : n \geq 1\} \cup \{4n-1 : n \geq 1\} = \mathbb{N}$, то множина часткових границь послідовності $A = \{-\infty; 1; +\infty\}$. Звідси випливає, що $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

## РОЗДІЛ 7
## ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. КРИТЕРІЙ КОШІ

Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall m \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

**Критерій Коші** Послідовність дійсних чисел збіжна до дійсного числа тоді й лише тоді, коли вона фундаментальна.

**Приклад 1.** Довести збіжність послідовності:

$$\left\{a_n = \frac{\sin\frac{1}{1}}{1} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} + ... + \frac{\sin\frac{1}{n}}{n} \ : \ n \geq 1\right\}.$$

Оскільки при $n > m$

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{\sin\frac{1}{m+1}}{m+1} + \frac{\sin\frac{1}{m+2}}{m+2} + ... + \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}\right| \leq$$
$$\leq \frac{\left|\sin\frac{1}{m+1}\right|}{m+1} + \frac{\left|\sin\frac{1}{m+2}\right|}{m+2} + ... + \frac{\left|\sin\frac{1}{n}\right|}{n} \leq$$
$$\leq \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + ... + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \text{при } m > \frac{1}{\varepsilon},$$

то послідовність $\{a_n : n \geq 0\}$ фундаментальна і з критерію Коші випливає потрібна збіжність.

## РОЗДІЛ 8

## ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. ОСНОВНІ ПРИЙОМИ ОБЧИСЛЕННЯ

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}, x_0-$гранична точка множини $A$ і $f : A \to \mathbb{R}$. За Коші, число $p \in \mathbb{R}$ називається границею функції $f$ у точці $x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in (A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Значення $+\infty$ називається гранцею функції $f$ у точці $x_0$, якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \delta(C) > 0 \quad \forall x \in (A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : f(x) > C.$$

Нехай $x_0 = +\infty-$ гранична точка множини $A$. Число $p \in \mathbb{R}$ називається границею функції $f$ при $x \to +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A, x > C : |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Значення $+\infty$ називається границею функції $f$ при $x \to +\infty$, якщо

$$\forall D \in \mathbb{R} \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A, x > C : f(x) > D.$$

Аналогічно визначаються й інші подібні границі.

Означення, еквівалентне наведеним вище, можна дати в термінах послідовностей (означення Гейне). Нехай $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \ni x_0-$ гранична точка множини $A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}$. Значення $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ називається границею функції $f$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset A$, яка задовольняє умови
$1) \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0; \qquad 2) x_n \to x_0, n \to \infty,$
виконується співвідношення

$$f(x_n) \to p, n \to \infty.$$

Позначення: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x); \quad f(x) \to p, x \to x_0.$

Нехай $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ такі, що $\forall \gamma : (x_0 - \gamma, x_0 \cap A \neq \varnothing$. Число $p \in \mathbb{R}$ називається *границею зліва* функції $f$ у точці $x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A : |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Позначення: $p = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x); \quad f(x) \to p, x \to x_0-.$

Нехай $A \subset \mathbb{R}$і$x_0 \in \mathbb{R}$ такі, що $\forall \gamma : (x_0, x_0 + \gamma) \cap A \neq \varnothing$. Число $p \in \mathbb{R}$ називається *границею справа* функції $f$ у точці $x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A : |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Позначення: $p = \lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x); \quad f(x) \to p, x \to x_{0+}$.
Мають місце такі визначні границі:
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
$\lim\limits_{+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e;$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R};$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha, \alpha > 0.$

Розглянемо основні методи обчислення границь функції. Спочатку розглянемо випадок, коли $x \to \pm\infty$. В цьому випадку можна застосовувати методи, які ми застосовували для обчислення границі послідовності, а саме, ділення на "старшого"і домноження на спряжений вираз.

**Приклад 1.** Обчислити

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Поділимо чисельник та знаменник на $\sqrt{x}$. Тоді :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$$

**Приклад 2.** Обчислити

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Далі розглянемо випадки, коли $x\to x_0\in\mathbb{R}$.

**Приклад 3.** Обчислити

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

Оскільки знаменник дробу збігається до нуля, то теорема про арифметичні дії безпосередньо не може бути застосована. Домножимо і поділимо дріб на вирази, спряжені до чисельника та знаменника

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2}{(\sqrt{1+2x}+3)(x-4)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{9}+3}=\frac{4}{3}.$$

**Приклад 4.** Обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$$

Так як чисельник та знаменник дробу збігаються до нуля, то маємо невизначенність $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}.$$

Бачимо, що невизначенність $\frac{0}{0}$ залишилась. Тоді продовжуємо розкладати на множники:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=$$

$$= \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

В наступних прикладах розглянемо використання визначених границь для обчислення границі функції.

**Приклад 5.** Обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу на $x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} - \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5\frac{\sin 5x}{5x} - 3\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{5\cdot 1 - 3\cdot 1}{1} = 2.$$

Зауважимо, що у початковій умові ми маємо невизначенність $\frac{0}{0}$ і тому використовуємо визначну границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**Приклад 6.** Обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$$

Помітимо, що знову початкова умова має невизначенність $\frac{0}{0}$. Тому, спочатку домножимо на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{e^{x^2} - 1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x} + 1} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{e^{x^2} - 1}.$$

Далі, поділимо чисельник та знаменник дробу на $x^2$:

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{e^{x^2} - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Зауважимо, що ми використовували визначні границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

**Приклад 7.** Обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln e^x\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x}\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)} == \lim_{x\to 0}\frac{x+\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{2x+\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x} = 0$ і $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{e^{2x}} = 0$, то можна скористатись визначеною границею $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{2x+\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}}{2x+\frac{x^4}{e^{2x}}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}}{2+\frac{x^3}{e^{2x}}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}} = \frac{1+0\cdot 1}{2+0\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 8.** Обчислити

$$\lim_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

Зауважимо, що в умові задачі ми маємо невизначенність $0\cdot\infty$. Зробимо заміну $1-x=t$. Тоді $t\to 0:$

$$\lim_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{t\to 0}t\operatorname{tg}\frac{\pi(1-t)}{2} = \lim_{t\to 0}t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right) = \lim_{t\to 0}t\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t\cdot\cos\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}}.$$

Так як $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi t}{2}} = 1$, то ми маємо, що

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t\cdot\cos\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

**Приклад 9.** Обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}.$$

Оскільки в умові задачі ми бачимо невизначеність $\frac{0}{0}$, то спочатку перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt[3]{1+\frac{3x}{8}-x^2}-1\right)}{x(1+x)} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{3x}{8}-x^2\right)^{1/3}-1}{x(1+x)}.$$

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x}{8}-x^2\right) = 0$ і будемо використовувати визначну границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$ :

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{3x}{8}-x^2\right)^{1/3}-1}{x(1+x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(1+\left(\frac{3x}{8}-x^2\right)\right)^{1/3}-1\right)\left(\frac{3x}{8}-x^2\right)}{x(1+x)\left(\frac{3x}{8}-x^2\right)} =$$

$$2\cdot\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{8}-x^2}{x(1+x)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{8}-x}{1+x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{8}-0}{1+0} = \frac{1}{4}.$$

**Приклад 10.** Обчислити

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{3x-1}.$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{3x-1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{3x-1} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2(3x-1)}{2x+3}} = \\
= \lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{2(3x-1)}{2x+3}\cdot\frac{2x+3}{2}\ln\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)\right) = e^3.
\end{aligned}
$$

## РОЗДІЛ 9

## НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Нехай $A \subset \mathbb{R}, x_0-$ гранична точка множини $A$, причому $x_0 \in A$. Нехай $f : A \to \mathbb{R}$. Функція $f$ називається *неперервною* у точці $x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функція $f$ неперервна на множині $A$, якщо вона неперервна у кожній точці множини $A$. Позначення: $f \in C(A)$.

Функція $f$ називається *неперервною зліва* у точці $x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Функція $f$ називається *неперервною справа* у точці $x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

**Приклад 1.** Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \frac{(x^2-3)\cdot 2^x + \operatorname{arctg} x \cdot \cos x}{(x^2+3)\sin^3 x}.$$

Функції $x \mapsto x^2 - 3, x \mapsto 2^x, x \mapsto \operatorname{arctg} x, x \mapsto \cos x, x \mapsto x^2 + 3, x \mapsto \sin x$ неперервні на $\mathbb{R}$. За теоремою про арифметичні дії функції $x \mapsto (x^2-3)\cdot 2^x + \operatorname{arctg} x \cdot \cos x$ і $x \mapsto (x^2+3)\sin^3 x$ також неперервні на $\mathbb{R}$. Тому функція f неперервна в усіх точках $\mathbb{R}$ за винятком тих, у яких знаменник дорівнює нулю. Отже, $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\})$.

**Приклад 2.** Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 5, & x = 1. \end{cases}$$

При $x \neq 1$ функцію можна переписати у вигляді $f(x) = x + 1$. Тому $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1\})$. Крім того, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2 \neq f(1)$. Таким чином, $x = 1$ є точкою усувного розриву.

**Приклад 3.** Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

На $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція є неперервною за теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(x)$,то функція неперервна зліва в точці $x = 0$. Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

**Приклад 4.** Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

На $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ функція є неперервною. Крім того, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow$ в точці $x = 1$ функція також є неперервною.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = -1$і $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 1$. Таким чином, $x = -1$ є точкою розриву першого роду.

**Приклад 5.** Функцію довизначити в точці 0 так, щоб одержати неперервну у цій точці функцію: $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}$.

Розглянемо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[5]{1+2x} - 1\right) 2x}{2x \cdot \sin x} =$$

$$2 \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/5} - 1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Покладемо $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}, & x \neq 0, \\ \frac{2}{5}, & x = 0. \end{cases}$

Тоді за означенням неперервності функції, функція $\widetilde{f}(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}$.

## РОЗДІЛ 10
## ПОХІДНА

Нехай $A \subset \mathbf{R}$ і точка $x_0 \in A$ такі, що для деякого $\delta > 0 :\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$. Розглянемо функцію $f : A \to \mathbf{R}$.

*Похідною* функції $f$ у точці $x_0$ називається скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

якщо така границя існує.

Позначається похідна одним із символів

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0).$$

Таким чином, $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Якщо для кожного $x \in A$ існує $f'(x)$, то функція $A \ni x \mapsto f'(x)$ називається *похідною функції $f$ на множині $A$*. Операція обчислення похідної називається *диференціюванням*.

Нехай для деякого $\delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0) \subset A, \quad f : A \to \mathbf{R}$. Скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

якщо вона існує, називається *похідною зліва* функції $f$ у точці $x_0$ і позначається символом

$$f'_{-}(x_0) := \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Нехай для деякого $\delta > 0 : (x_0, x_0 + \delta) \subset A, \quad f : A \to \mathbf{R}$. Скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

якщо вона існує, називається *похідною справа* функції $f$ у точці $x_0$ і позначається символом

$$f'_{+}(x_0) := \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

### Правила обчислення похідних

1) **Теорема про арифметичні дії.** Нехай функції $f : A \to \mathbf{R}$ і $g : A \to \mathbf{R}$ мають похідну в точці $x_0 \in A$. Тоді:

   а) $\forall\, c \in \mathbf{R}$ функція $cf$ має похідну в точці $x_0$ і
   $$(cf)'(x_0) = cf'(x_0);$$
   б) функція $f + g$ має похідну в точці $x_0$ і
   $$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$
   в) функція $f \cdot g$ має похідну в точці $x_0$ і
   $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$
   г) при додатковому припущенні $g(x_0) \neq 0$ функція $\dfrac{f}{g}$ має похідну в точці $x_0$ і
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2) **Диференціювання складної функції (ланцюгове правило).** Нехай функція $f : A \to \mathbf{R}$, $f(A) \subset B$, $g : B \to \mathbf{R}$. Припустимо, що функція $f$ має похідну в точці $x_0 \in A$, функція $g$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складна функція $h = g(f) : A \to \mathbf{R}$ має похідну в точці $x_0$ і
$$h'(x_0) = (g(f))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

3) **Диференціювання оберненої функції.** Нехай функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, задовольняє умови

   а) $f \in C((a, b))$;
   б) $f$ строго монотонна на $(a, b)$;
   в) у точці $x_0 \in (a, b)$ функція $f$ має похідну $f'(x_0) \neq 0$.

   Тоді на $(c, d) = f((a, b))$ існує обернена функція $g = f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$, яка має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$ і
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

4) **Диференціювання функції, заданої параметрично.** Нехай функції $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}$, $\psi : (a, b) \to \mathbf{R}$ мають неперервну похідну на $(a, b)$. Якщо в точці $t_0 \in (a, b)$ похідна $\varphi'(t_0) \neq 0$, то система рівнянь
$$\begin{cases} x = & \varphi(t) \\ y = & \psi(t), \end{cases} \quad t \in (a, b),$$

у деякому околі точки $t_0$ визначає функцію $y = y(x)$, яка у точці $x_0 = \varphi(t_0)$ має похідну

$$y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

5) **Таблиця похідних**

а) $f(x) = c,\ x \in \mathbf{R}.\quad f'(x) = c' = 0,\ x \in \mathbf{R}.$
б) $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}:\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0;$
$\forall\, n \in \mathbf{N}:\ (x^n)' = nx^{n-1},\ x \in \mathbf{R}.$
в) $\forall\, a > 0:\ (a^x)' = a^x \ln a,\ x \in \mathbf{R};$
$(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbf{R}.$
г) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbf{R}.$
д) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z};$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$
е) $\forall\, a > 0,\ a \neq 1:\ (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x > 0;$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0.$
ж) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1);$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1);$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbf{R};$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbf{R}.$

Нехай $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Пряма, що проходить через точку $P_0 = (x_0, f(x_0))$ і точку $P(x) = (x, f(x)), x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, називається *січною*. Положення січної однозначно визначається точкою $P_0$ і кутом її нахилу $\alpha(x) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, додатний напрямок відліку якого вибирається від додатного напрямку осі абсцис проти руху годинникової стрілки.

Тангенс цього кута дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\alpha(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Якщо $x$ наближати до $x_0$, то для неперервної функції $f$ точка $P(x)$ буде наближатися до точки $P_0$ по графіку. При цьому може статися, що січна наближається до деякого граничного положення, точніше $\alpha(x) \to \alpha_0,\ x \to x_0$. У такому випадку пряма, що проходить через точку $P_0$ і утворює кут

$\alpha_0$ з додатним напрямком осі абсцис, називається *дотичною* до графіка функції $f$ у точці $P_0$. Дотична у точці $P_0$ може не існувати. Дотична до графіка функції $f$ з кутом нахилу $\alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ існує тоді й лише тоді, коли існує $f'(x_0)$, при цьому

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

Графік функції $f$ має у точці $P_0$ *вертикальну* дотичну $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2},\ \alpha_0 = -\frac{\pi}{2}\right)$ тоді й лише тоді, коли

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to +\infty \quad (-\infty),\ x \to x_0.$$

У цьому випадку іноді говорять про *нескінченну похідну* функції і записують

$$f'(x_0) = +\infty \quad (-\infty).$$

**Приклад 1.** Виходячи з означення, знайти похідну функції $f(x) = \sqrt[5]{x}$ у точці $x_0 = 1$.

⌈ Користуючись визначною границею, знаходимо

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1 + (x-1))^{\frac{1}{5}} - 1}{x - 1} = \frac{1}{5}.$$

⌋

**Приклад 2.** Довести, що функція $f(x) = |\sin x|,\ x \in \mathbf{R}$, не має похідної у точці $x_0 = 0$.

⌈ Оскільки

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

то границя $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ не існує. ⌋

**Приклад 3.** Знайти похідну функції $y = \arcsin \frac{1}{x},\ |x| > 1$.

⌈ За правилом диференціювання складної функції

$$y' = \arcsin' \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}},\ |x| > 1.$$

$\rfloor$

**Приклад 4.** Знайти похідну функції $f(x) = x^x,\ x > 0$.
$\lceil$ Функцію $f$ можна записати у вигляді $f(x) = e^{x \ln x},\ x > 0$. За правилом диференціювання складної функції

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x(\ln x + 1),\ x > 0.$$

$\rfloor$

**Приклад 5.** Отримати формулу для суми

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1},\ x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

$\lceil$ При $x = 1$ за формулою для суми арифметичної прогресії

$$P_n(1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbf{N}.$$

При $x \neq 1$ розглянемо функцію

$$f_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1},\ n \in \mathbf{N}.$$

Зауважимо тепер, що

$$P_n(x) = f_n'(x) = \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},\ x \neq 1,\ n \in \mathbf{N}.$$

$\rfloor$

**Приклад 6.** Знайти похідну функції, заданої параметрично рівняннями $x = a\cos t, y = a\sin t,\ t \in (0, \pi)$.

$\lceil$ За формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ отримуємо $y'_x = -\operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi)$. $\rfloor$

**Приклад 7.** Знайти $y'_x$, якщо $r = a\varphi$ (*спіраль Архімеда*) в полярних координатах.
$\lceil$ Використовуючи зв'язок між полярними координатами і прямокутними декартовими, маємо

$$x = r\cos\varphi = a\varphi\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi = a\varphi\sin\varphi.$$

За формулою $y'_x = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi}$ знаходимо

$$y'_x = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

$\rfloor$

**Приклад 8.** Показати, що рівняння $y^3 + 3y = x$ визначає єдину функцію $y = y(x),\ x \in \mathbf{R}$, і знайти її похідну.

$\lceil$ Функція $x(y) = y^3 + 3y,\ y \in \mathbf{R}$, строго зростає на $\mathbf{R}$ і має похідну $x'(y) = = 3(y^2+1) > 0,\ y \in \mathbf{R}$. Тому існує обернена функція і за теоремою про похідну оберненої функції $y'(x) = \dfrac{1}{3(y^2+1)}$. $\rfloor$

**Приклад 9.** Знайти похідну $y'(x)$ функції $y(x)$, заданої неявно рівнянням $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

$\lceil$ Нехай $y(x),\ x \in (a,b)$, – такий розв'язок рівняння, що має похідну. Тоді рівняння можна розглядати як тотожність

$$\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x} = \ln\sqrt{x^2 + (y(x))^2},\ x \neq 0.$$

Продиференціюємо цю тотожність

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Звідси

$$y' = \frac{x+y}{x-y},\ x \neq y,\ x \neq 0.$$

$\rfloor$

**Приклад 10.** Знайти дотичну до функції $f(x) = 3x^3 - x + 1$ в точці $x = 2$.

$\lceil$ Знаходимо похідну $f'(x) = 9x^2 - 1$. Зокрема, $f'(2) = 35, f(2) = 23$. Тому дотична має рівняння $y = 35(x-2) + 23$, тобто $y = 35x - 47$. $\rfloor$

**Приклад 11.** Знайти абсциси точок графіка функції $f(x) = x^3$, дотичні в яких нахилені до осі абсцис під кутом $45^\circ$.

$\lceil$ Тангенс кута нахилу рірний $tg\pi/4 = 1$, тому похідна заданої функції в шуканих точках також рівна $1$. Оскільки $f'(x) = 3x^2$, маємо рівняння $3x^2 = 1$. Звідси $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\rfloor$

**Приклад 12.** Знайти кут, під яким перетинаються графіки функцій $f(x) = x^2 - 1$ і $g(x) = 2 - 3x^2$, тобто кут між дотичними до цих графіків в точці перетину.

$\lceil$ Прирівняємо ці функції, щоб знайти точки перетину: $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 2 - 3x^2$, звідки $x = \pm 1$. Похідні, що рівні тангенсам кутів нахилу $f'(x) = 2x = \operatorname{tg}\phi$, $g'(x) = -6x = \operatorname{tg}\psi$. Кут між графіками рівний $\alpha = \phi - \psi$, його тангенс з використанням тригонометричних формул $\operatorname{tg}(\phi - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\phi \cdot \operatorname{tg}\psi} = \frac{8x}{1 - 12x^2}$. В точці 1 маємо $\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{8}{11}$, $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{8}{11}$, в точці -1 відповідно $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{8}{11}$. $\rfloor$

## РОЗДІЛ 11
## ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, для деякого $\delta > 0: \; (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$.

Функція $f : A \to \mathbf{R}$ називається *диференційовною* в точці $x_0$, якщо для деякого дійсного числа $L$

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \; x \to x_0,$$

при цьому лінійна функція

$$y = L \cdot (x - x_0), \; x \in \mathbf{R},$$

називається *диференціалом* функції $f$ у точці $x_0$.

Позначення: $x - x_0 =: dx, \; L \cdot (x - x_0) = Ldx =: df(x_0)$.

Диференціал функції $f$ у точці $x_0$ є головна частина (лінійна відносно $x - x_0$) приросту функції $f(x) - f(x_0)$ відносно шкали порівняння $\{(x - x_0)^\alpha : \; \alpha > 0\}, \; x \to x_0$.

Функція $f$ диференційовна в точці $x_0$ тоді й тільки тоді, коли в точці $x_0$ існує похідна $f'(x_0)$. При цьому $L = f'(x_0)$. Таким чином,

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

**Теорема 1 (розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$).** Припустимо, що функції $f : (a, b) \to \mathbf{R}, \; g : (a, b) \to \mathbf{R}$ задовольняють умови

1) $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = 0, \; \lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0;$
2) $\forall\, x \in (a, b)\, \exists\, f'(x), \; \exists\, g'(x);$
3) $\forall\, x \in (a, b) : \; g'(x) \neq 0;$
4) існує $\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$

Тоді існує $\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L.$

Теорема 1 має місце для $b = +\infty$, а її аналог із правосторонньою границею має місце для $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

**Теорема 2 (розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).** Припустимо, що функції $f : (a, b) \to \mathbf{R}, \; g : (a, b) \to \mathbf{R}$ задовольняють умови

1) $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = \infty;$ 2) $\forall\, x \in (a, b)\, \exists\, f'(x), \; \exists\, g'(x);$

3) $\forall\, x \in (a,b):\ g'(x) \neq 0$;

4) існує $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Тоді існує $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Теорема 2 має місце для $b = +\infty$, а її аналог із правосторонньою границею має місце для $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

**Приклад 1.** Знайти диференціал функції $f(x) = xe^x$.

⌈ Згідно з означенням диференціала, $df(x) = f'(x)\,dx$. Тому

$$d(xe^x) = (1+x)e^x\,dx.$$

⌋

**Приклад 2.** Замінюючи приріст функції диференціалом, знайти наближене значення $\sqrt[3]{1,02}$.

⌈ Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Похідна цієї функції в точці $x = 1$ дорівнює $y'(1) = \frac{1}{3}$. Оскільки $\Delta x = 0,02$, то

$$\sqrt[3]{1+\Delta x} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\Delta x = 1 + \frac{0,02}{3} = 1,0066\ldots$$

⌋

**Приклад 3.** Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

⌈ Маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Застосовуємо теорему 1, поки зберігається ця невизначеність і границя не рахуватиметься іншими методами (це можливо, якщо кінцева границя існує):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Остання рівність отримана за допомогою табличної границі. ⌋

**Приклад 4.** Знайти границю

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

⌈ Оскільки

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x},$$

маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Двічі застосувавши теорему 1, одержуємо, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

⌋

**Приклад 5.** Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}x^{-4}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

⌈ Якщо функцію записати у вигляді дробу: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$, то застосування правила Лопіталя призведе до ускладнення границі. Запишемо по-іншому: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{-4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$. Двічі застосуємо правило Лопіталя, спростивши результат першого застосування:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{-4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^{-5}}{-2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^{-3}}{-2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

⌋

## РОЗДІЛ 12
## ПОХІДНІ СТАРШИХ ПОРЯДКІВ

Припустимо, що для функції $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ для всіх $x \in (a,b)$ існує $f'(x)$. Тоді можна визначити функцію $g : (a,b) \to \mathbf{R}$ формулою

$$g(x) = f'(x),\ x \in (a,b).$$

Якщо в точці $x_0 \in (a,b)$ існує похідна $g'(x_0)$ функції $g$, то ця похідна називається *похідною другого порядку* функції $f$ у точці $x_0$ і позначається одним із символів

$$f''(x_0), \qquad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Похідна порядку $n \geq 2$ функції $f$ визначається індуктивно як похідна похідної порядку $n-1$, якщо вона існує. Позначення:

$$f^{(n)}, \qquad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Таким чином,

$$f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x_0).$$

**Таблиця основних границь**

1) Нехай $a > 0$. Тоді $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \forall\, x \in \mathbf{R}:\ (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$. Зокрема, $(e^x)^{(n)} = e^x$.
2) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \forall\, x \in \mathbf{R}:\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$,
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$
3) $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ \forall\, x > 0:\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,
$\forall\, \alpha \in \mathbf{N}\ \forall\, n > \alpha\ \forall\, x \in \mathbf{R}:\ (x^\alpha)^{(n)} = 0.$
4) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \forall\, x > 0:\ (\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Також справджується частинний випадок формули диференціювання складної функції:

$$(f(kx+b))^{(n)} = f^{(n)}(kx+b) \cdot k^n,\ n \in \mathbf{N},$$

та деякі формули для арифметичних дій:

$$(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x),$$

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$$

якщо похідні в правій частині існують. Простих формул для старших похідних відношення та складної функції у загальному випадку немає. Правило диференціювання добутку виглядає так:

**Формула Лейбніца.** Нехай $f,\ g \in C^{(n)}((a,b))$ для деякого $n \in \mathbf{N}$. Тоді $f \cdot g \in C^{(n)}((a,b))$ і

$$\forall\, x \in (a,b):\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),\ \text{ де } f^{(0)} := f,\ g^{(0)} := g.$$

Позначимо через $C^{(n)}(A)$ множину всіх функцій, що мають похідну порядку $n \in \mathbf{N}$ на множині $A$, причому ця похідна є неперервною функцією. $C^{(0)}(A) := C(A),\ C^{(\infty)}(A) := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^{(n)}(A).$

**Приклад 1.** Нехай $f(x) = \sin(3x+1) - x^{10} + 4^{5x+1}$. Знайти $f^{(50)}(x)$.
⌈ Використовуючи табличні похідні та частинний випадок складної функції, отримаємо:

$$f^{(50)}(x) = 3^{50}\sin((3x+1) + (50\pi)/2) + 4^{5x+1}\ln^{50} 4 \cdot 5^{50}.$$

Тут враховано, що одинадцята і наступні похідні від $x^{10}$ нульові. Використовуючи формули зведення, спростимо вираз:

$$f^{(50)}(x) = -3^{50}\sin(3x+1) + 4^{5x+1}\ln^{50} 4 \cdot 5^{50}.$$

⌋

**Приклад 2.** Знайти $y^{(n)},\ n \geq 1$, якщо $y = x^2 e^{3x}$.
⌈ Скористаємося формулою Лейбніца

$$\begin{aligned}
(x^2 e^{3x})^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{3x})^{(n-k)} = \\
&= x^2 (e^{3x})^{(n)} + 2nx(e^{3x})^{(n-1)} + n(n-1)(e^{3x})^{(n-2)} = \\
&= 3^n x^2 e^{3x} + 2nx3^{n-1}e^{3x} + n(n-1)3^{n-2}e^{3x} = \\
&= 3^{n-2}e^{3x}(9x^2 + 6nx + n(n-1)),\ x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

$\rfloor$

**Приклад 3.** Нехай функція $f$ має похідні до третього порядку включно. Знайти $y''$ і $y'''$, якщо $y = f(x^2)$.

$\lceil$ Обчислюємо послідовно похідні

$y' = 2xf'(x^2);$

$y'' = (2xf'(x^2))' = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2);$

$y''' = 2(f'(x^2)+2x^2f''(x^2))' = 4xf''(x^2)+8xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2) =$
$= 4x(3f''(x^2) + 2x^2f'''(x^2)).$ $\rfloor$

## РОЗДІЛ 13
## ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

Поняття похідної є ефективним інструментом дослідження поведінки функції.

### Монотонність функції

Нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Припустимо, що функція $f$ має похідну на $(a, b)$.

**Критерій монотонності.** $f$ монотонно не спадає (не зростає) на $(a, b)$ $\iff$ $\forall\, x \in (a, b) : \; f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$.

**Критерій строгої монотонності.** $f$ строго зростає (спадає) на $(a, b)$ $\iff$

1) $\forall\, x \in (a, b) : \; f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$;
2) $\forall\, (\alpha, \beta) \subset (a, b) \,\exists\, x \in (\alpha, \beta) : \; f'(x) \neq 0$.

### Локальні екстремуми

Нехай $A \subset \mathbf{R}, \; A \neq \varnothing, \; f : A \to \mathbf{R}$.

**Означення 1.** Точка $x_0 \in A$ називається точкою *локального максимуму* (*локального мінімуму*) функції $f$, якщо

1) $\exists\, \delta > 0 : \; (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$;
2) $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \; f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$.

За умови 1) точка $x_0$ називається точкою *строгого локального максимуму* (*строгого локального мінімуму*) функції $f$, якщо

$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : \; f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$.

Точки локальних мінімумів і максимумів називаються точками локальних *екстремумів*.

**Теорема (необхідні умови локального екстремуму).** Нехай точка $x_0 \in A$ є точкою локального екстремуму. Якщо у точці $x_0$ функція $f$ має похідну, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, у яких похідна дорівнює нулю, називаються *критичними* або *стаціонарними* точками функції.

Говорять, що функція $f$ *зберігає знак ліворуч* від точки $x_0$, якщо

$\exists\, \delta > 0 \,\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset A : \; f(x) > 0$, або

$\exists\, \delta > 0 \,\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset A : \; f(x) < 0$.

Аналогічно визначається зміст твердження "функція $f$ *зберігає знак праворуч* від точки $x_0$".

**Теорема 1 (достатні умови локального екстремуму).** Нехай функція $f : A \to \mathbf{R}$ задовольняє одну з умов

1) $\exists\,\delta > 0\,\forall\,x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ існує $f'(x)$, причому $f'(x_0) = 0$ і похідна $f'$ зберігає знак ліворуч і праворуч від точки $x_0$;
2) $f \in C(A)$ і $\exists\,\delta > 0 :\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ і $\forall\,x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ існує $f'(x)$, причому похідна $f'$ зберігає знак ліворуч і праворуч від точки $x_0$.

Якщо знаки похідної у лівому і правому півоколах точки $x_0$ різні, то ця точка є точкою строгого локального екстремуму (якщо зліва знак мінус, справа плюс – строгий локальний мінімум, якщо навпаки – строгий локальний максимум), якщо однакові – то точка $x_0$ не є точкою локального екстремуму.

**Теорема 2 (достатні умови локального екстремуму).** Нехай функція $f : A \to \mathbf{R},\ m \in \mathbf{N},\ m \geq 2,\ x_0 \in A$. Припустимо, що виконані умови

1) $\exists\,\delta > 0\,\forall\,x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A\,\exists\,f^{(m-1)}(x)$;
2) $\exists\,f^{(m)}(x_0)$;
3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,\ f^{(m)}(x_0) \neq 0.$

Тоді якщо $m = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, то точка $x_0$ є точкою строгого локального максимуму при $f^{(m)}(x_0) < 0$ і точкою строгого локального мінімуму при $f^{(m)}(x_0) > 0$. Якщо $m = 2k + 1,\ k \in \mathbf{N}$, то точка $x_0$ не є точкою локального екстремуму.

**Опуклість**

Нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty,\ f : (a, b) \to \mathbf{R}$.

**Означення 2.** Функція $f$ називається *опуклою вниз* (*строго опуклою вниз*) на $(a, b)$, якщо

$$\forall\,x_1, x_2 \in (a, b)\,\forall\,\alpha \in [0, 1] :\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

$$(\forall\,x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 \neq x_2,\ \forall\,\alpha \in (0, 1) : \\ f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)).$$

Функція $f$ називається *опуклою вгору* (*строго опуклою вгору*) на $(a, b)$, якщо функція $(-f)$ опукла вниз (строго опукла вниз).

**Критерій опуклості в термінах першої похідної.** Припустимо, що для всіх $x \in (a, b)$ існує похідна $f'(x)$. Функція $f$ опукла вниз (строго опукла вниз) на $(a, b) \iff f'$ монотонно не спадає (строго зростає) на $(a, b)$.

**Критерій опуклості в термінах другої похідної.** Припустимо, що для всіх $x \in (a, b)$ існує похідна другого порядку $f''(x)$.

Функція $f$ опукла вниз на $(a,b) \iff \forall\, x \in (a,b):\ f''(x) \geq 0.$
Функція $f$ строго опукла вниз на $(a,b) \iff$

$$\iff \quad \begin{array}{l} 1)\ \forall\, x \in (a,b):\ f''(x) \geq 0; \\ 2)\ \forall\, (\alpha,\beta) \subset (a,b)\, \exists\, x \in (\alpha,\beta):\ f''(x) \neq 0. \end{array}$$

## Точки перегину

Нехай $A \subset \mathbf{R},\ x_0 \in A.$

**Означення 3.** Точка $x_0$ називається *точкою перегину* графіка функції $f : A \to \mathbf{R}$, якщо $f$ неперервна у точці $x_0$ та існує $\delta > 0$ таке, що $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ і на кожному з інтервалів $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ функція $f$ опукла, причому напрямки опуклості різні.

**Теорема (необхідні умови точки перегину).** Нехай $x_0$ – точка перегину графіка функції $f$, у деякому околі якої існує перша похідна функції. Якщо існує $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

**Теорема (достатні умови точки перегину).** Нехай $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ задовольняють умови

1) $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A\ \exists\, f''(x)$;
2) $f''(x_0) = 0$;
3) $f''$ зберігає знак ліворуч і праворуч від точки $x_0$.

Якщо знаки другої похідної $f''$ у лівому і правому півоколах точки $x_0$ різні, то ця точка є точкою перегину, якщо однакові – то точка $x_0$ не є точкою перегину.

## Асимптоти

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $a$ – гранична точка множини $A$, $a \in \mathbf{R} \cup$ $\cup \{-\infty, +\infty\}$.

**Означення 4.** Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $f$, якщо виконується принаймні одне із співвідношень

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty\ (-\infty, \infty), \quad \lim_{x \to a+} f(x) = +\infty\ (-\infty, \infty).$$

Нехай $+\infty\ (-\infty)$ є граничною точкою множини $A$.

**Означення 5.** Пряма $y = kx + l$ називається *асимптотою* графіка функції $f$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty\ (-\infty)} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Для того, щоб пряма $y = kx + l,\ x \in \mathbf{R}$, була асимптотою графіка функції $f$ при $x \to +\infty\ (-\infty)$, необхідно й достатньо виконання рівностей

$$\lim_{x \to +\infty\ (-\infty)} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to +\infty\ (-\infty)} (f(x) - kx) = l.$$

**Побудова графіка функції**

Дослідження функції зручно проводити за таким планом.

1) Знайти множину визначення функції. З'ясувати її неперервність.
2) Дослідити парність, непарність, періодичність функції.
3) Знайти координати точок перетину графіка з координатними осями; встановити знак функції.
4) Дослідити існування асимптот.
5) Знайти проміжки монотонності, локальні екстремуми функції.
6) Дослідити опуклість функції, точки перегину.
7) Відзначити інші можливі особливості графіка.
8) Побудувати графік.

**Приклад 1.** Довести, що функція $f(x) = x + \operatorname{arcctg} x$ строго зростає на $\mathbf{R}$.

⌈ Оскільки

$$f'(x) = (x + \operatorname{arcctg} x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0,\ x \in \mathbf{R},$$

причому знак рівності має місце лише при $x = 0$, то за критерієм строгої монотонності функція $f$ строго зростає на $\mathbf{R}$. ⌋

**Приклад 2.** Нехай $\alpha$ – додатне дійсне число. Довести, що для всіх додатних $x$ має місце нерівність

$$x^{\alpha} \geq 1 + \alpha \ln x.$$

⌈ Для фіксованого $\alpha > 0$ розглянемо функцію $f(x) = x^{\alpha} - 1 - \alpha \ln x,\ x > 0$. Вона має похідну

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}(x^{\alpha} - 1),\ x > 0,$$

яка від'ємна на $(0, 1)$ і додатна на $(1, +\infty)$. За критерієм монотонності функція $f$ строго спадає на $(0, 1)$ і строго зростає на $(1, +\infty)$. Оскільки $f$

неперервна у точці $x = 1$, то у цій точці вона приймає найменше значення. Тому
$$\forall\, x > 0:\ \ f(x) \geq f(1) = 0.$$
$\rfloor$

**Приклад 3.** Знайти проміжки монотонності і точки локального екстремуму функції $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

$\lceil$ Функція $y$ має похідну
$$y'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2},\ x > 0.$$
Результати дослідження знака похідної і відповідної монотонності функції запишемо у таблицю.

| $x$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $> 0$ | $0$ | $< 0$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ |

$y(1) = \dfrac{1}{2}$ є локальним максимумом і найбільшим значенням функції $y$. $\rfloor$

**Приклад 4.** Дослідити опуклість і знайти точки перегину функції
$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
$\lceil$ Функція $y$ має другу похідну
$$y''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x-1)(x+1).$$
Результати дослідження її знака і відповідної опуклості функції запишемо у таблицю.

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $> 0$ | $0$ | $< 0$ | $0$ | $> 0$ |
| $y$ | $\smile$ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $\frown$ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $\smile$ |

При переході через точки $x = \pm 1$ функція змінює напрямок опуклості і є неперервною у цих точках, тому $x = \pm 1$ – точки перегину. $\rfloor$

**Приклад 5.** Виконати повне дослідження функції $y = \ln(x^2 - 1)$.

$\lceil$ Множина визначення функції є множина розв'язків нерівності $x^2 - 1 > 0$, тобто $D(y) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Функція парна, оскільки множина визначення симетрична відносно точки $x = 0$ і $\forall\, x \in D(y):\ y(x) = y(-x)$.

Графік функції симетричний відносно осі ординат. Нулі функції є розв'язки рівняння $x^2 - 1 = 1 \iff x = \pm\sqrt{2}$. Функція неперервна на множині визначення, тому вона додатна на $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ і від'ємна на $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Оскільки $\lim\limits_{x \to -1-} y(x) = \lim\limits_{x \to 1+} y(x) = -\infty$, то прямі $x = -1$ та $x = 1$ є вертикальними асимптотами графіка функції. Оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 0$ та $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y(x) - 0 \cdot x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty$, то асимптот графіка функції при $x \to \pm\infty$ не існує. Дослідимо монотонність функції з допомогою похідної. $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$, $x \in D(y)$. Тому $y'(x) < 0$, $x \in (-\infty, -1)$, $y'(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$. Звідси випливає, що функція строго спадає на $(-\infty, -1)$ і строго зростає на $(1, +\infty)$.
Для встановлення характеру опуклості дослідимо знак другої похідної. $y''(x) = -\dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0$, $x \in D(y)$. Тому функція строго опукла вгору на кожному з проміжків $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. ⌋

**Приклад 6.** Виконати повне дослідження функції $y = \dfrac{3x + |x^2 - 4|}{|x - 2|}$.

⌈ Множина визначення функції $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Розкривши модулі, функцію можна записати у вигляді

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2 - x}, & x \le -2, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}, & -2 < x < 2, \\ \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 2}, & x > 2. \end{cases}$$

Нулі функції визначаються з рівняння $y(x) = 0 \iff 3x + |x^2 - 4| = 0$, $x \in D(y) \iff x \in \{-4, -1\}$. Функція неперервна на множині визначення, тому вона додатна на проміжках $(-\infty, -4)$, $(-1, 2)$, $(2, +\infty)$ і від'ємна на $(-4, -1)$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2-} y(x) = \lim\limits_{x \to 2-} \frac{x^2-3x-4}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+} y(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \frac{x^2+3x-4}{x-2} = +\infty$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Оскільки

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{(2 - x)x} = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y(x)-(-1)x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2-x}+x\right)=-5,$$

то пряма $y=-x-5$ є асимптотою графіка функції при $x\to-\infty$. Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4}{(x-2)x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x-2}-x\right)=5,$$

то пряма $y=x+5$ є асимптотою графіка функції при $x\to+\infty$. Дослідимо монотонність і локальні екстремуми функції за допомогою похідної

$$y'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+4x+2}{(2-x)^2}, & x<-2,\\ \dfrac{x^2-4x+10}{(x-2)^2}, & -2<x<2,\\ \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}, & x>2.\end{cases}$$

У точці $x=-2$ похідна не існує, оскільки $y'_{-}(-2)=-\frac{5}{8}\neq\frac{11}{8}=y'_{+}(-2)$. Результати аналізу зручно подати у таблиці.

| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,2)$ | $(2,2+\sqrt{6})$ | $2+\sqrt{6}$ | $(2+\sqrt{6},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $<0$ | | $>0$ | $<0$ | $0$ | $>0$ |
| $y$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2}$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $7+2\sqrt{6}$ | $\nearrow$ |

У точках $x=-2$ та $x=2+\sqrt{6}$ функція має локальні мінімуми, оскільки при переході через ці точки нерерервності відповідним чином змінюється характер її монотонності. Опуклість і точки перегину графіка дослідимо за допомогою похідної другого порядку.

$$y''(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{(2-x)^3}, & x<-2,\\ \dfrac{12}{(2-x)^3}, & -2<x<2,\\ \dfrac{12}{(x-2)^3}, & x>2.\end{cases}$$

Оскільки $y''(x)>0,\ x\in D(y)$, функція строго опукла вниз на кожному з проміжків $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$. Враховуючи неперервність функції у точці $x=-2$ і характер її монотонності ліворуч і праворуч від цієї точки, можна зробити висновок про строгу опуклість функції на проміжку $(-\infty, 2)$. $\rfloor$