Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**В.М. Журавльов**

Методична розробка

спеціального курсу ***Матриці показників та їх сагайдаки***

для студентів механіко – математичного факультету

Київ

2020

В.М. Журавльов. Методична розробка спеціального курсу "Матриці показників та їх сагайдаки": Навчальний посібник для студентів механіко – математичного факультету. — КНУ 2020. – 65 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. А.П. Петравчук
д-р фіз.-мат. наук, доц. Є.В. Бондаренко

Наведено основні відомості про матриці показників черепичних порядків. Досліджуються сагайдаки матриць показників. Розглядається техніка опису матриць показників черепичних порядків за сагайдаком . Описано всі сагайдаки черепичних порядків без петель.

Для студентів механіко-математичного факультету.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету
(протокол № 11 від 15 квітня 2020 року)

# Зміст

# 1 Матриці показників та їх сагайдаки

Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$-матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$.

**Означення 1.1.** *Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ називається* **матрицею показників**, *якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, \ldots, n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Ці співвідношення називаються* **кільцевими нерівностями**. *Матриця показників $\mathcal{E}$ називається* **зведеною**, *якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Покладемо $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, і $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$.

З визначення $\gamma_{ij}$ при $i \neq j$ маємо

$$\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj}) = \min\left(\beta_{ii} + \beta_{ij}, \beta_{ij} + \beta_{jj}, \min_{k \neq i,j}(\beta_{ik} + \beta_{kj})\right) =$$

$$= \min\left(1 + \alpha_{ij}, \min_{k \neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj})\right) \geq \alpha_{ij} = \beta_{ij};$$

$$\gamma_{ii} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{ki}) = \min\left(\beta_{ii} + \beta_{ii}, \min_{k \neq i}(\beta_{ik} + \beta_{ki})\right) =$$

$$= \min\left(1 + 1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki})\right) \geq 1 = \beta_{ii}.$$

Отже, $\gamma_{ij} \geq \beta_{ij}$ для всіх $i, j$.

З іншого боку

$$\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj}) \leq \beta_{ii} + \beta_{ij} = 1 + \beta_{ij};$$

$$\gamma_{ii} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{ki}) \leq \beta_{ii} + \beta_{ii} = 2 = 1 + \beta_{ii}.$$

Таким чином, для всіх $i, j = 1, \ldots, n$ маємо подвійну нерівність

$$\beta_{ij} \leq \gamma_{ij} \leq 1 + \beta_{ij}.$$

Звідси

$$0 \leq \gamma_{ij} - \beta_{ij} \leq 1. \tag{1}$$

**Означення 1.2.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ з матрицею суміжності $[Q(\mathcal{E})] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ називається* **сагайдаком зведеної матриці показників $\mathcal{E}$**.

Нехай $[Q] = (q_{ij})$. Тоді при $i \neq j$ маємо

$$q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min\left(1 + \alpha_{ij}, \min_{k \neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj})\right) - \alpha_{ij} = \min\left(1, \min_{k \neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right);$$

$$q_{ii} = \gamma_{ii} - \beta_{ii} = \min\left(\beta_{ii} + \beta_{ii}, \min_{k \neq i}(\beta_{ik} + \beta_{ki})\right) - \beta_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right).$$

Як видно з (1) $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ є $(0, 1)$-матрицею.

Таким чином,

$$q_{ij} = \min\left(1, \min_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right); \tag{2}$$

$$q_{ii} = \min\left(1, \min_{k\neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right). \tag{3}$$

З (2) отримуємо, що в сагайдаку $Q$ є стрілка з точки $i$ в точку $j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$; в сагайдаку $Q$ немає стрілки з точки $i$ в точку $j$ тоді і тільки тоді, коли існує $k \neq i, j$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$.

З (3) отримуємо, що в сагайдаку $Q$ є петля в точці $i$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$; в сагайдаку $Q$ немає петлі в точці $i$ тоді і тільки тоді, коли існує $k \neq i$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = 1$.

**Означення 1.3.** *Дві матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ називаються* **еквівалентними***, якщо одна може бути отримана з іншої перетвореннями наступних двох типів:*

*(1) віднімання цілого числа від елементів $i$-ого рядка з одночасним додаванням до елементів $i$-ого стовпчика цього числа,*

*(2) одночасна перестановка двох рядків та стовпчиків з тими ж номерами.*

**Означення 1.4.** *Зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається* **горенштейновою***, якщо існує підстановка $\sigma$ множини $\{1, 2, \dots, n\}$ така, що*

$$\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} \qquad \text{для всіх } i, k.$$

Підстановка $\sigma$ позначається через $\sigma(\mathcal{E})$ і називається підстановкою Кириченка горенштейнової матриці показників.

**Твердження 1.5.** *Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ є матрицями показників і $\Theta$ отримується із $\mathcal{E}$ перетвореннями типу (1). Тоді $[Q(\mathcal{E})] = [Q(\Theta)]$. Якщо $\mathcal{E}$ є зведеною горенштейновою матрицею показників з підстановкою Кириченка $\sigma(\mathcal{E})$, то $\Theta$ є також зведеною горенштейновою матрицею показників з підстановкою Кириченка $\sigma(\Theta) = \sigma(\mathcal{E})$.*

*Доведення.* Припустимо, що $\Theta = (\theta_{ij})$ — зведена матриця показників, отримана з матриці показників $\mathcal{E}$ в результаті перетворення типу (1), тобто

$$\theta_{ij}) = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq l, j \neq l, \\ 0, & \text{якщо } i = l, j = l, \\ \alpha_{lj} - t, & \text{якщо } i = l, j \neq l, \\ \alpha_{il} + t, & \text{якщо } i \neq l, j = l, \end{cases}$$

де $t$ — ціле раціональне число. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ для деяких $i, j, k$, то і $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$. А оскільки перетворення зворотнє і оберене перетворення має такий же вигляд, то і з рівності $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$ слідує рівність $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Тому $\theta_{ij} + \theta_{jk} = \theta_{ik}$ у тому та лише в тому випадку, коли $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$.

Нехай тепер зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ є горенштейновою з підстановкою Кириченка $\sigma$, тобто $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх $i, j = 1, \dots, n$. Тоді $\theta_{ij} + \theta_{j\sigma(i)} = \theta_{i\sigma(i)}$. Це означає, що зведена матриця показників $\Theta = (\theta_{ij})$ також горенштейнова з тією ж підстановкою Кириченка $\sigma$. Більше того, рівності $\gamma_{ij} = \beta_{ij}$, $c_{ij} = b_{ij}$ або нерівності $\gamma_{ij} > \beta_{ij}$, $c_{ij} > b_{ij}$ виконуються одночасно для елементів матриць $(\beta_{ij}) = \mathcal{E}^{(1)}$, $(b_{ij}) = \Theta^{(1)}$, $(\gamma_{ij}) = \mathcal{E}^{(2)}$, $(c_{ij}) = \Theta^{(2)}$. Тому $\mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = \Theta^{(2)} - \Theta^{(1)}$, тобто $[Q(\mathcal{E})] = [Q(\Theta)]$.

Таким чином, при перетвореннях першого типу підстановка Кириченка та сагайдак горенштейнової матриці показників не змінюються. □

Нехай $\tau$ — підстановка, яка задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників $\mathcal{E}$ при перетвореннях другого типу, тобто $i$-ий рядок та стовпчик матриці $\mathcal{E}$ став $\tau(i)$-им, $P_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{i\tau(i)}$ — переставна матриця.

**Твердження 1.6.** *При перетвореннях другого типу матриця суміжності $[\tilde{Q}]$ сагайдака $Q(\Theta)$ змінюється за формулою: $[\tilde{Q}] = P_\tau^T[Q]P_\tau$, де $[Q] = [Q(\mathcal{E})]$. Якщо $\mathcal{E}$ є горенштейновою, то $\Theta$ також є горенштейновою та для нової підстановки Кириченка $\upsilon$ маємо: $\upsilon = \tau^{-1}\sigma\tau$, тобто $\sigma(\Theta) = \tau^{-1}\sigma(\mathcal{E})\tau$.*

*Доведення.* Нехай $\tau$ — підстановка, яка задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників $\mathcal{E}$ при перетвореннях другого типу. Тоді $\alpha_{ij} = \theta_{\tau(i)\tau(j)}$ і $\Theta = P_\tau^T\mathcal{E}(\Lambda)P_\tau$. Оскільки

$$\beta_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)}, \quad \gamma_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) = \min_l(b_{\tau(i)l} + b_{l\tau(j)}) = c_{\tau(i)\tau(j)},$$

то

$$q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij} = c_{\tau(i)\tau(j)} - b_{\tau(i)\tau(j)} = \tilde{q}_{\tau(i)\tau(j)},$$

де $[\tilde{Q}] = (\tilde{q}_{ij})$ — матриця суміжності сагайдака $\tilde{Q}$ матриці показників $\Theta$.

Нехай зведена матриця показників $\mathcal{E}$ є горенштейновою з підстановкою Кириченка $\sigma$. Тоді рівність $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ рівносильна рівності $\theta_{\tau(i)k} + \theta_{k\tau(\sigma(i))} = \theta_{\tau(i)\tau(\sigma(i))}$. Отже, підстановка Кириченка $\upsilon$ матриці показників $\Theta$ задовольняє умову $\upsilon(\tau(i)) = \tau(\sigma(i))$ для всіх $i$. Звідси, враховуючи множення підстановок, знаходимо $\tau\upsilon = \sigma\tau$, $\upsilon = \tau^{-1}\sigma\tau$.

Таким чином, при перетвореннях другого типу нові підстановка Кириченка $\upsilon$ та матриця суміжності $[\tilde{Q}]$ сагайдака $Q(\Theta)$ змінюються за формулами: $\upsilon = \tau^{-1}\sigma\tau$, $[\tilde{Q}] = P_\tau^{-1}[Q]P_\tau$. □

Відзначимо, що за твердженням 1.6 при перетвореннях другого типу не змінюється тип підстановки. Тому для опису горенштейнових матриць показників досить описати зведені горенштейнові матриці показників з різними типами підстановок Кириченка. Крім цього, для спрощення викладок можна вважати, що перший рядок матриці $\mathcal{E}$ нульовий. Цього завжди можна досягти перетвореннями першого типу. При цьому елементи матриці залишаться невід'ємними.

Дійсно, нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників та $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. Віднімемо від елементів $j$-го стовпчика число $\alpha_{1j}$, а до елементів $j$-го рядка додамо це число. Тоді отримаємо матрицю

$$(\theta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21}+\alpha_{12} & 0 & \alpha_{12}+\alpha_{23}-\alpha_{13} & \cdots & \alpha_{12}+\alpha_{2s}-\alpha_{1s} \\ \alpha_{31}+\alpha_{13} & \alpha_{13}+\alpha_{32}-\alpha_{12} & 0 & \cdots & \alpha_{13}+\alpha_{3s}-\alpha_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{s1}+\alpha_{1s} & \alpha_{1s}+\alpha_{s2}-\alpha_{12} & \alpha_{1s}+\alpha_{s3}-\alpha_{13} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки для елементів матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ виконуються кільцеві нерівності, то $\theta_{ij} = \alpha_{1i} + \alpha_{ij} - \alpha_{1j} \geq 0$ $i \geq 2$, $j \geq 2$. $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників, тому $\theta_{i1} = \alpha_{1i} + \alpha_{i1} > 0$. Отже, після таких перетворень отримали матрицю з невід'ємними елементами.

**Зауваження 1.7.** *Підстановка Кириченка не містить циклів довжини один.*

**Теорема 1.8.** *Сагайдак матриці показників є простим і сильно зв'язним.*

*Доведення.* $[Q]$ є $(0,1)$-матрицею, тому вона є матрицею суміжності простого сагайдака.

Покажемо, що $Q$ є сильно зв'язним сагайдаком. Припустимо протилежне. Тоді існують вершини $i$ та $j$ такі, що в $Q$ із вершини $i$ нема шляху у вершину $j$. Позначимо через $VQ(i) = V_1$ множину всіх вершин $k$ сагайдака $Q$ таких, що існує шлях з початком у вершині $i$ та кінцем у вершині $k$. Очевидно, що $V_2 = VQ \backslash VQ(i) \neq 0$ $(j \in V(Q) \backslash V(Q)(i))$. Тоді $VQ = V_1 \cup V_2$ та $V_1 \cap V_2 = 0$.

Ясно, що нема стрілок із $V_1$ у $V_2$. Можна вважати, що $V_1 = \{1,\dots,m\}$ та $V_2 = \{m+1,\dots,s\}$. Очевидно, одночасною перестановкою рядків і стовпчиків матриці показників $\mathcal{E}$ ми можемо зробити, щоб вершини множини $V_1$ мали номера $1,\dots,m$, а перетвореннями першого типу перший рядок матриці $\mathcal{E}$ нульовим, тобто $\alpha_{1p} = 0$ для всіх $p = 1,\dots,s$. Тоді $\alpha_{pq} \geq 0$ для всіх $p,q = 1,\dots,s$ та

$$[Q] = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right).$$

$$\mathcal{E} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E}_1 & * \\ \hline * & \mathcal{E}_2 \end{array}\right),$$

де $\mathcal{E}_1 \in M_m(\mathbb{Z})$, $\mathcal{E}_2 \in M_{s-m}(\mathbb{Z})$. З матрицею показників $\mathcal{E}_2$ ми пов'язуємо частково впорядковану множину $P_{\mathcal{E}_2} = \{m+1,\dots,s\}$ з відношенням порядку $i \leq j$ тоді і только тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$. Можна вважати, що $m+1 \in P_{\mathcal{E}_2}$ є мінімальним елементом цієї множини. Тоді $\alpha_{im+1} > 0$ для $i > m+1$. Позаяк $q_{1m+1} = 0$, то існує $k$ $(2 \leq k \leq m)$ таке, що $\alpha_{1m+1} = \alpha_{1k} + \alpha_{km+1}$. Переставляючи одночасно 2-ий та $k$-ий стовпчики і 2-ий та $k$-ий рядки матриці $\mathcal{E}$, ми отримуємо, що $\alpha_{2m+1} = 0$. Оскільки $q_{2m+1} = 0$, ми отримуємо $\alpha_{2m+1} = 0 = \alpha_{2k} + \alpha_{km+1}$ для $3 \leq k \leq m$, тобто можна вважати, що $\alpha_{23} = 0$ та $\alpha_{3m+1} = 0$. Елементи матриці $\mathcal{E}^{(1)}$ $\beta_{31} = \alpha_{31}$, $\beta_{32} = \alpha_{32}$, $\beta_{31} = 1$ не дорівнюють нулю. Далі, $q_{3m+1} = 0$ та $\alpha_{3m+1} = 0 = \alpha_{3k} + \alpha_{km+1}$ для $4 \leq k \leq m$. Отже, $\alpha_{4m+1} = 0$. Продовжуючи цей процес, ми маємо $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \ldots = \alpha_{m-1m} = 0$ і $\alpha_{im+1} = 0$ для $i = 1,\dots,m$. Таким чином, матриця $\mathcal{E}_1$ є верхньою трикутною, і всі елементи $\beta_{m1},\dots,\beta_{mm}$ є натуральними числами. Але тоді $q_{mm+1} = \min\limits_k(\beta_{mk} + \beta_{km+1}) - \alpha_{mm+1} = 1 - 0 = 0$. Отримали протиріччя. Теорема доведена. □

**Означення 1.9.** *Сильно зв'язний простий сагайдак називається* **допустимим**, *якщо він є сагайдаком зведеної матриці показників.*

**Теорема 1.10.** *Довільний сильно зв'язний простий сагайдак $Q$ з петлею в кожній вершині є допустимим.*

*Доведення.* Розглянемо матрицю $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, в якій $\alpha_{ii} = 0$ та $\alpha_{ij}$ $(i \neq j)$ дорівнює мінімальній довжині шляху із вершини $i$ у вершину $j$. (Шлях мінімальної довжини існує, бо $Q$ є сильно зв'язним сагайдаком. Можливо існує не один шлях мінімальної довжини.)

Покажемо, що $\mathcal{E}$ є зведеною матрицею показників. Оскільки мінімальна довжина шляху із вершини $i$ у вершину $k$ менша або дорівнює мінімуму довжин шляхів із $i$ в $k$, які проходять через вершину $j$, то $\alpha_{ik} \leq \alpha_{ij} + \alpha_{jk}$. За означенням $\alpha_{ij} \geq 1$ при $i \neq j$, а отже, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$.

Покажемо, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Оскільки $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 2$ при $j \neq i$, то існує петля в кожній вершині сагайдака $Q(\mathcal{E})$. Припустимо, що існує стрілка із $i$ в $j$. Тоді $\alpha_{ij} = 1$. Позаяк $\alpha_{tk} \geq 1$ при $t \neq k$, то не існує $k \neq i,j$ такого що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = 1 = \alpha_{ij}$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i,j$ і тоді

$$\gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min(1, \min_{k \neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})) = 1,$$

тобто існує стрілка із $i$ в $j$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$.

Нехай у сагайдаку $Q$ нема стрілки із $i$ в $j$. Тоді шлях мінімальної довжини із $i$ в $j$ проходить через деяку вершину $t \neq i,j$. Нехай

$$\sigma_1 \ldots \sigma_u \sigma_{u+1} \ldots \sigma_v \colon i \to j$$

— шлях мінімальної довжини із $i$ в $j$, де

$$\sigma_1 \ldots \sigma_u \colon i \to t, \qquad \sigma_{u+1} \ldots \sigma_v \colon t \to j$$

та $\alpha_{ij} \geq 2$. Тоді $\sigma_1 \ldots \sigma_u$ і $\sigma_{u+1} \ldots \sigma_v$ є шляхами мінімальної довжини із $i$ в $t$ та з $t$ в $j$ відповідно. Отже, $\alpha_{it} + \alpha_{tj} = \alpha_{ij}$. Тому

$$\gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = 0,$$

тобто не існує також стрілки в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$. □

**Зауваження 1.11.** *Легко бачити, що сагайдак $Q$ з матрицею суміжності*

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*не є допустимим.*

## 2 Горенштейнові матриці показників

**Зауваження 2.1.** *Зведений черепичний порядок $\Lambda$ є горенштейновим тоді і тільки тоді, коли його зведена матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ є горенштейновою.*

Нехай $\mathcal{E}$ — зведена горенштейнова матриця показників з підстановкою Кириченка $\sigma$.

**Лема 2.2.** *Якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ для деяких $i, j, k$, то*

$$\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}.$$

*Доведення.* Якщо $i = k$, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$, але $\mathcal{E}$ є зведеною, тому ми маємо протиріччя. Отже, $i \neq k$. Для $i = j$ або $j = k$ наше твердження є тривіальним. Тому можна вважати, що всі $i, j, k$ попарно не рівні між собою. Припустимо, що

$$\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} > \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}.$$

Додамо суму $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(j)}$ до обох частин нерівності. Тоді $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} > \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} + \alpha_{k\sigma(j)}$. Оскільки $\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} = \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{k\sigma(k)}$, то будемо мати $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} > \alpha_{k\sigma(j)}$. Додамо рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{j\sigma(i)}$ до обох частин утвореної нерівності. Ми отримаємо $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} > \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{j\sigma(i)}$. Отримали суперечність, тому що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$, і $\alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)}$. Лема доведена. □

**Лема 2.3.** *Для $i, j = 1, \ldots, s$ має місце наступна рівність:*

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

*Доведення.* Додамо такі рівності:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)},$$
$$\alpha_{ji} + \alpha_{i\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)}.$$

Отримаємо

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{i\sigma(j)} = \alpha_{i\sigma(j)} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)},$$

тобто

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

Лема доведена. □

**Наслідок 2.4.** *Якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ для деяких $i, j, k$, то $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$ для довільного натурального $m$.*

*Для $i, j = 1, \ldots, s$ $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(i)}$ для довільного натурального $m$.*

**Наслідок 2.5.** *Якщо для довільного $j \neq i$, $j \neq k$ $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} > \alpha_{ik}$ для деяких $i, k\, (i \neq k)$, то* $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} > \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$.

*Доведення.* Припустимо, що $\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)\sigma^m(k)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)}$. Нехай $\sigma^n$ є тотожньою. За наслідком 2.4 ми маємо

$$\alpha_{\sigma^{n-m}(\sigma^m(i))\sigma^{n-m}(\sigma^m(j))} + \alpha_{\sigma^{n-m}(\sigma^m(j))\sigma^{n-m}(\sigma^m(k))} = \alpha_{\sigma^{n-m}(\sigma^m(i))\sigma^{n-m}(\sigma^m(k))}.$$

Отже, $\alpha_{\sigma^n(i)\sigma^n(j)} + \alpha_{\sigma^n(j)\sigma^n(k)} = \alpha_{\sigma^n(i)\sigma^n(k)}$, тобто $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Наслідок доведено. □

Нехай $\mathcal{E}$ — зведена горенштейнова матриця показників з підстановкою Кириченка $\sigma$, $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $(i, j = 1, \ldots, s)$;
$\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$ і $[Q(\mathcal{E})] = (q_{ij})$, $\quad q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij}$.

**Лема 2.6.** *Для довільних $i, k = 1, \ldots, s$ і для кожного натурального числа $m$ має місце рівність* $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} = q_{ik}$.

*Доведення.* Нехай $q_{ij} = 0$ для $i \neq j$. Тоді $\gamma_{ij} = \min\limits_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) = \beta_{ij}$. Якщо $k = i$ або $k = j$, то $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ ($\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, s$). Отже, існує $k$ таке що $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$, де $i, j, k$ попарно нерівні. В цьому випадку $\beta_{ik} = \alpha_{ik}, \beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$. За наслідком 2.4 ми маємо

$$\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} = \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}.$$

Але тоді $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ і $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = 0$.

Якщо $q_{ij} = 1$ для $i \neq j$, то $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ для всіх $k$. Нам треба довести що

$$\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \beta_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} > \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$$

для $k = 1, \ldots, s$. Це очевидно для $i = k$ чи $j = k$. Отже, ми можемо вважати, що $i, j, k$ попарно нерівні між собою. Нерівність $\beta_{ik} + \beta_{kj} > \beta_{ij}$ тоді перетворюється у нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$. За наслідком 2.5 ми маємо

$$\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \alpha_{\sigma^m(k)\sigma^m(j)} > \alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$$

і $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} > \beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$. Тому $q_{ij} = q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)}$ для $i \neq j$.

Нехай $q_{ii} = 0$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 1$ для деякого $k \neq i$. За наслідком 2.4

$$\alpha_{\sigma^m(i)\sigma^m(k)} + \alpha_{\sigma^m(k)\sigma^m(i)} = 1.$$

Таким чином, $\gamma_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 1$, і $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 0$.

Якщо $q_{ii} = 1$, то $\gamma_{ii} = 2$. Оскільки $\beta_{ii} + \beta_{ii} = 1 + 1 = 2$ для $i = 1, \ldots, s$, то $\beta_{ij} + \beta_{ji} \geq 2$ для $i \neq j$. Але $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ і за наслідком 2.5 ми маємо нерівність $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} + \beta_{\sigma^m(j)\sigma^m(i)} = \beta_{ij} + \beta_{ji} \geq 2$. Тому $\beta_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} \geq 2$ та $q_{\sigma^m(i)\sigma^m(i)} = 1$. Лема доведена. □

**Означення 2.7.** *Зведена горенштейнова матриця показників $\mathcal{E}$ називається* **циклічною**, *якщо $\sigma(\mathcal{E})$ є циклом.*

Відзначимо, що сагайдак $Q(\mathcal{E})$ зведеної циклічної горенштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ з підстановкою Кириченка $\sigma$ такою, що $| < \sigma > | = n$ не завжди містить простий цикл довжини $n$.

Як приклад розглянемо зведену циклічну горенштейнову матрицю показників $\mathcal{E}$ з підстановкою Кириченка $\sigma$, де

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $[Q(\mathcal{E})]$.

$$\mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$[Q(\mathcal{E})] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ має 5 простих циклів, які проходять через вершину 1:

$$\left\{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{5}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \right\},$$

$$\left\{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{5}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{4}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \right\},$$

$$\left\{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{6}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{4}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \right\},$$

$$\left\{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{6}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{5}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \right\},$$

$$\left\{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{4}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \right\}.$$

Але простого циклу довжини 6 сагайдак $Q(\mathcal{E})$ не має.

**Твердження 2.8.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ зведеної циклічної горенштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ з підстановкою Кириченка $\sigma$ такою, що $| < \sigma > | = p$ — просте число, містить простий цикл довжини $p$.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{E}$ — зведена циклічна горенштейнова матриця показників з підстановкою Кириченка $\sigma$. Можна вважати, що

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

З кожної вершини сагайдака $Q(\mathcal{E})$ виходить хоча б одна стрілка. Припустимо, що в $Q(\mathcal{E})$ є стрілка, яка веде з вершини 1 у вершину $a$, тобто $q_{1a} = 1$. Оскільки

$$\sigma^{(a-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a & a+1 & \cdots & a-1 \end{pmatrix},$$

то $a = \sigma^{(a-1)}(1)$. Тоді за лемою 2.6 маємо

$$q_{\sigma^{(a-1)}(1)\sigma^{(a-1)}(a)} = q_{\sigma^{(a-1)}(1)\sigma^{2(a-1)}(1)} = 1.$$

Отже, з вершини $a$ виходить стрілка у вершину $\sigma^{2(a-1)}(1)$. Аналогічно

$$q_{\sigma^{2(a-1)}(1)\sigma^{3(a-1)}(1)} = 1, \ldots, q_{\sigma^{k(a-1)}(1)\sigma^{(k+1)(a-1)}(1)} = 1,$$

де $k$ — довільне натуральне число.

Підстановка $\sigma^{(a-1)}$ утворює циклічну групу $< \sigma^{(a-1)} >$ порядку $b = n\,/(a-1,\, n)$. Тому $\sigma^{b(a-1)}(1) = 1$ і сагайдак $Q(\mathcal{E})$ має простий цикл

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 1 & & \sigma^{(a-1)}(1) & & \sigma^{2(a-1)}(1) & & & & \sigma^{(b-1)(a-1)}(1) & & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \right\}.$$

Якщо $n = p$ — просте число, то $b = p$ і сагайдак $Q(\mathcal{E})$ має простий цикл довжини $p$. Твердження доведено. $\square$

Припустимо, що підстановка Кириченка $\sigma$ розкладається в добуток двох підстановок $\sigma_1$ і $\sigma_2$, які діють на множинах, що не перетинаються. Будемо вважати, що $\sigma_1$ діє на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $\sigma_2$ — на множині $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Нехай $E = e_{11} + \cdots + e_{m+n,m+n}$ — розклад одиничної матриці $E$ в суму взаємно ортогональних матричних одиниць. Позначимо $e = e_{11} + \cdots + e_{nn}$, $f = E - e$, $Q = Q(\mathcal{E})$ — сагайдак матриці показників $\mathcal{E}$, $Q_1 = Q(e\mathcal{E}e)$ — сагайдак матриці показників $e\mathcal{E}e$, $Q_2 = Q(f\mathcal{E}f)$ — сагайдак матриці показників $f\mathcal{E}f$. Зрозуміло, що $e\mathcal{E}e$ та $f\mathcal{E}f$ — теж горенштейнові матриці показників з підстановками Кириченка $\sigma_1$ та $\sigma_2$ відповідно. В загальному випадку можна стверджувати, що
a) якщо існує стрілка з вершини $i$ у вершину $j$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$, то існує стрілка з вершини $i$ у вершину $j$ в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$;
b) якщо в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$ немає стрілки з вершини $i$ у вершину $j$, то немає стрілки з вершини $i$ у вершину $j$ і в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$.

**Лема 2.9.** *Нехай $\sigma_1 = (1\ 2\ \ldots\ n)$ та $\sigma_2 = (n{+}1\ n{+}2\ \ldots\ n{+}m)$ — цикли, що не перетинаються, і довжини яких $| < \sigma_1 > | = n$ та $| < \sigma_2 > | = m$ взаємно прості. Тоді матриця суміжності $[Q(\mathcal{E})]$ сагайдака $Q(\mathcal{E})$ горенштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ з підстановкою $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ має вигляд*

$$[Q] = \begin{pmatrix} [Q_1] & U_{n\times m} \\ U_{m\times n} & [Q_2] \end{pmatrix},$$

*де* $U_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ — *$m \times n$-матриця.*

*Доведення.* Порядки підстановок $\sigma_1$ та $\sigma_2$ взаємно прості, тому порядок підстановки $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ дорівнює $mn$. За лемою 2.6 $q_{1n+1} = q_{\sigma^t(1)\sigma^t(n+1)} = q_{\sigma_1^t(1)\sigma_2^t(n+1)}$ для будь-якого натурального $t$. Якщо $t$ змінюється від 1 до $nm$, то $\sigma_1^t(1)$ $m$ разів пробігає від 1 до $n$, $\sigma_2^t(n+1)$ $n$ разів пробігає від $n+1$ до $n+m$, але серед пар $(\sigma^t(1), \sigma^t(n+1))$ немає однакових. Тому $q_{ij} = q_{1n+1}$ при $i \le n$, $j > n$. Аналогічно $q_{ij} = q_{n+11}$ при $i > n$, $j \le n$. Оскільки сагайдак $Q(\mathcal{E})$ зведеної горенштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ є сильно зв'язним, то $q_{ij} = 1$ при $i \le n$, $j > n$ та при $i > n$, $j \le n$.

Припустимо, що існує стрілка з вершини $i$ $(i \le n)$ у вершину $l$ $(l \le n)$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$. Тоді $\beta_{ij} + \beta_{jl} > \beta_{il}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n+m$. Зокрема, ця нерівність виконується лише для $j = 1, 2, \ldots, n$. Тому існує стрілка з вершини $i$ у вершину $l$ в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$.

Навпаки, нехай існує стрілка з вершини $i$ у вершину $l$ в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$ $i, l \le n$. Тоді $\beta_{ij} + \beta_{jl} > \beta_{il}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$. Зрозуміло, що $l \neq \sigma(i)$, бо $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$.

Припустимо, що в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ немає стрілки з вершини $i$ у вершину $l$. Тоді існує $t > n$ таке, що $\beta_{it} + \beta_{tl} = \beta_{il}$. Очевидно, $t \neq i, l$.

Розглянемо випадок $i \neq l$. Тоді $\alpha_{it} + \alpha_{tl} = \alpha_{il}$. Додамо до обох частин рівності $\alpha_{l\sigma(i)}$. Отримаємо $\alpha_{it} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{il} + \alpha_{l\sigma(i)}$ або $\alpha_{it} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$. Знову додамо до обох частин рівності $\alpha_{t\sigma(i)}$. Будемо мати $\alpha_{it} + \alpha_{t\sigma(i)} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{t\sigma(i)}$ $\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{t\sigma(i)}$ або $\alpha_{tl} + \alpha_{l\sigma(i)} = \alpha_{t\sigma(i)}$. Звідси випливає, що $q_{t\sigma(i)} = 0$. Позаяк $\sigma(i) \le n$ а $t > n$, то отримали протиріччя $(q_{t\sigma(i)} = 1)$.

Отже, при $i \neq l$ стрілка з вершини $i$ у вершину $l$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ існує тоді і тільки тоді, коли існує стрілка з вершини $i$ у вершину $l$ в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$.

Розглянемо випадок $i = l$. Припустимо, що в сагайдаку $Q(e\mathcal{E}e)$ є петля в точці $i$, а в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ її немає. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$, $k \le n$ та існує $t > n$ таке, що $\alpha_{it} + \alpha_{ti} = 1$.

Оскільки $q_{kt} = 1$ для всіх $k \le n$, $t \ge n$, то $\alpha_{kl} + \alpha_{lt} > 1$ для всіх $l$. Тому

$$1 + \alpha_{ki} = \alpha_{ki} + \alpha_{it} + \alpha_{ti} > \alpha_{kt} + \alpha_{ti} \ge \alpha_{ki}.$$

Звідси $\alpha_{kt} + \alpha_{ti} = \alpha_{ki}$. Це означає, що $q_{ki} = 0$, тобто для довільного $k \neq i$, $k \le n$ не має стрілки з точки $k$ у точку $i$. Останнє суперечить тому, що сагайдак $Q(e\mathcal{E}e)$ матриці показників $\mathcal{E}$ є сильно зв'язним. Отже, $[Q(e\mathcal{E}e)] = e[Q(\mathcal{E})]e$. Аналогічно $[Q(f\mathcal{E}f)] = f[Q(\mathcal{E})]f$. Лема доведена. □

**Означення 2.10.** *Дійсна $s \times s$ — матриця $P = (p_{ij})$ називається двічі стохастичною якщо $\sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{s} p_{ij} = 1$ для довільних $i, j = 1, \ldots, s$.*

**Теорема 2.11.** *Нехай $\mathcal{E}$ — зведена циклічна горенштейнова матриця показників. Тоді $[Q(\mathcal{E})] = \lambda P$, де $\lambda$ — натуральне число і матриця $P$ двічі стохастична.*

*Доведення.* Нехай $\sigma$ є циклічна підстановка. Тоді цілі

$$q_{ik}, q_{\sigma(i)\sigma(k)}, \ldots, q_{\sigma^{s-1}(i)\sigma^{s-1}(k)}$$

лежать в різних рядках та стовпчиках матриці $[Q(\mathcal{E})]$.

Нехай $C_i = \sum\limits_{j=1}^{s} q_{ij}$ і $D_j = \sum\limits_{i=1}^{s} q_{ij}$. Тоді

$$C_i = \sum_{j=1}^{s} q_{ij} = \sum_{j=1}^{s} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = C_{\sigma^m(i)}$$

і

$$D_j = \sum_{i=1}^{s} q_{ij} = \sum_{i=1}^{s} q_{\sigma^m(i)\sigma^m(j)} = D_{\sigma^m(j)}$$

для будь-якого $m$, тобто $C_i = C$ and $D_j = D$ для $i, j = 1, \ldots, s$. Очевидно, $\sum\limits_{i}^{s} C_i = \sum\limits_{i,j=1}^{s} q_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{s} D_j$. Тому $sC = sD$, тобто $C = D = \lambda$ та $[Q(\mathcal{E})] = \lambda(\frac{1}{\lambda}[Q(\mathcal{E})])$. Покладемо $P = \frac{1}{\lambda}[Q(\mathcal{E})]$. Тоді $P$ — двічі стохастична. Теорема доведена. □

Наводимо приклад негоренштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ такої що $[Q(\mathcal{E})] = \lambda P$, де $P$ є стохастичною матрицею, але не двічі стохастичною.

Матриця

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

є матрицею показників.

$$\mathcal{E}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[Q(\mathcal{E})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$[Q(\mathcal{E})] = 3P$, де $P$ є стохастичною матрицею, але не двічі стохастичною.

Позначимо через $S_n$ симетричну групу, визначену на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Наступна теорема доведена Біркгофом.

**Теорема 2.12** (Біркгоф)**.** *Кожна двічі стохастична матриця $P$ подається у вигляді*

$$P = \sum_{\sigma \in S_n} \tau_\sigma P_\sigma, \qquad \sum_{\sigma \in S_n} \tau_\sigma = 1, \qquad \tau_\sigma \geq 0,$$

*де $P_\sigma$ — переставна матриця. Навпаки,*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \tau_\sigma P_\sigma$$

*є двчі стохастичною, якщо*

$$\tau_\sigma \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\sigma \in S_n} \tau_\sigma = 1.$$

**Теорема 2.13.** *Матриця суміжності сагайдака циклічної зведеної горенштейнової матриці показників $\mathcal{E}$ з циклічною підстановкою $\sigma = \sigma(\mathcal{E})$ є сумою деяких степенів переставної матриці $P_\sigma$.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{E}$ — циклічна горенштейнова зведена матриця показників з підстановкою $\sigma$. За теоремою 2.11 матриця суміжності $[Q(\mathcal{E})]$ сагайдака $Q(\mathcal{E})$ кратна двічі стохастичній матриці. За теоремою 2.12 кожна невід'ємна двічі стохастична матриця є лінійною комбінацією переставних матриць з невід'ємними коефіцієнтами:

$$P = \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau P_\tau, \qquad \alpha_\tau \geq 0.$$

Тому $[Q(\mathcal{E})]$ є лінійною комбінацією переставних матриць.

За лемою 2.6

$$q_{ij} = q_{\sigma(i)\sigma(j)} = \cdots = q_{\sigma^{n-1}(i)\sigma^{n-1}(j)},$$

де $\sigma$ — циклічна перестановка. Тому при $j = \sigma^k(i), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$ маємо

$$q_{i\sigma^k(i)} = q_{\sigma(i)\sigma^{k+1}(i)} = \cdots = q_{\sigma^{n-1}(i)\sigma^{n+k-1}(i)}.$$

Всі числа $i,\ \sigma(i),\ \ldots,\ \sigma^{n-1}(i)$ різні; числа $\sigma^k(i),\ \sigma^{k+1}(i),\ \ldots,\ \sigma^{n+k-1}(i)$ також різні. Тому попередній ланцюг рівностей можна записати у вигляді:

$$q_{1\sigma^k(1)} = q_{2\sigma^k(2)} = \cdots = q_{n\sigma^k(n)}.$$

Тоді

$$[Q] = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} e_{ij} = \sum_{i,k=1}^{n} q_{i\sigma^k(i)} e_{i\sigma^k(i)} = \sum_{k=1}^{n} q_{1\sigma^k(1)} P_{\sigma^k}.$$

Приймаючи до уваги, що

$$P_{\tau^m} = P_\tau^m$$

для довільної переставної матриці $P_\tau$, отримуємо

$$[Q] = \sum_{k=1}^{n} q_{1\sigma^k(1)} P_\sigma^k,$$

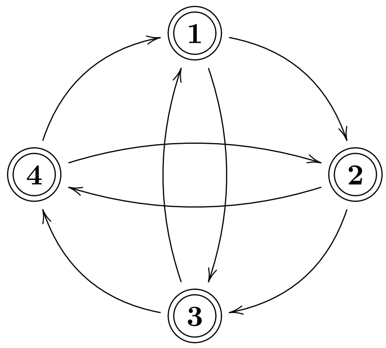
де $q_{1\sigma^k(1)}$ дорівнює 0 або 1. Теорема доведена. □

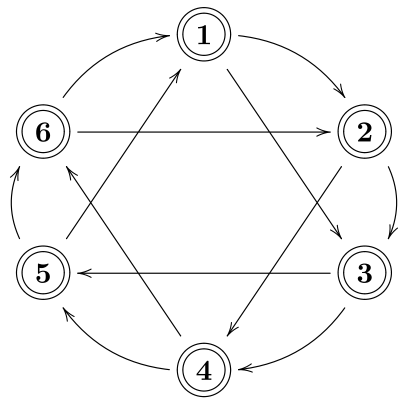
**Приклад 2.14.** *Нехай $\mathcal{E}_{2m} \in M_{2m}(\mathbb{Z})$ — зведена матриця показників наступного вигляду:*

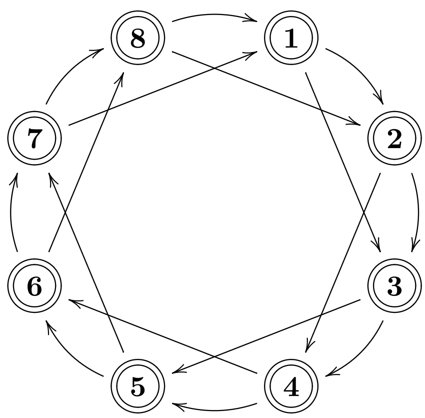
$$\mathcal{E}_{2m} = \begin{pmatrix} A & C & C & \ldots & C & C \\ B & A & C & \ldots & C & C \\ B & B & A & \ldots & C & C \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B & B & B & \ldots & A & C \\ B & B & B & \ldots & B & A \end{pmatrix},$$

*де $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Легко бачити, що $\mathcal{E}_{2m}$ є циклічною зведеною горенштейновою матрицею показників та $[Q(\mathcal{E}_{2m})] = P_{\sigma^{n-2}} + P_{\sigma^{n-1}}$, де $n = 2m$.*

*Наводимо нижче сагайдаки $Q(\mathcal{E}_{2m})$ для $m = 1, 2, 3, 4$.*




Нехай $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

**Означення 2.15.** *Матрицю* $A = (a_{ij})$ *будемо називати* $(0,1,2)$**-матрицею**, *якщо* $a_{ij} \in \{0,1,2\}$.

**Теорема 2.16.** *Для будь-якої перестановки* $\sigma$ *множини* $\{1,\ldots,n\}$ *без нерухомих елементів існує горенштейнова* $(0,1,2)$*-матриця.*

*Доведення.* Нехай $\sigma\colon i \to \sigma(i)$ — перестановка множини $\{1,\ldots,n\}$ без нерухомих елементів і $\mathcal{E}_\sigma = (\alpha_{ij})$ — наступна $(0,1,2)$-матриця:

- $\alpha_{ii} = 0$ та $\alpha_{i\sigma(i)} = 2$ для $i = 1,\ldots,n$;
- $\alpha_{ij} = 1$ для $i \neq j$ і $i \neq \sigma(i)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Очевидно, що $\mathcal{E}_\sigma$ є горенштейновою матрицею з підстановкою $\sigma$. $\square$

## 3 Зведені $(0,1)$-матриці показників та скінченні частково впорядковані множини

**Означення 3.1.** *Під "a накриває" b у частково впорядкованій множині P розуміють, що не існує $x \in P$ такого, що $a > x > b$.*

**Означення 3.2.** *Нехай $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина з відношенням порядку $\leq$.* **Діаграмою** *частково впорядкованої множини P є сагайдак $Q(P)$ з множиною вершин $VQ(P) = \{1, \ldots, n\}$ і множиною стрілок $AQ(P)$ такою, що в $AQ(P)$ існує стрілка $\sigma : i \to j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_j$ накриває $\alpha_i$.*

Іншими словами в діаграмі $Q(P)$ існує стрілка $\sigma : k \to l$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_k < \alpha_l$ та не існує елемента $\alpha_j$, такого, що $\alpha_k \leq \alpha_j \leq \alpha_l$, де $\alpha_j \neq \alpha_k$, $\alpha_j \neq \alpha_l$.

**Означення 3.3.** *Сагайдак без орієнтованих циклів називається* **ациклічним сагайдаком**.

**Означення 3.4.** *Стрілка $\sigma : i \to j$ ациклічного сагайдака Q називається* **зайвою**, *якщо існує шлях із вершини i у вершину j довжини більшої, ніж 1.*

**Теорема 3.5.** *Нехай Q — ациклічний простий сагайдак без зайвих стрілок. Тоді Q є діаграмою деякої скінченної частково впорядкованої множини P. Навпаки, діаграма $Q(P)$ скінченної частково впорядкованої множини P є ациклічним простим сагайдаком без зайвих стрілок.*

**Означення 3.6.** *Індексом $\operatorname{inx} P$ скінченної частково впорядкованої множини P називається максимальне дійсне власне значення матриці суміжності $[Q(\mathcal{E}_P)]$ сагайдака $Q(\mathcal{E}_P)$.*

Нехай $P$ — довільна частково впорядкована множина. Нагадаємо, що підмножина множини $P$ називається **ланцюгом**, якщо довільні два її елементи порівнюються. Підмножина множини $P$ називається **антиланцюгом**, якщо довільні два її елементи не порівнюються.

Ми будемо позначати ланцюг з $n$ елементів через $CH_n$ та антиланцюг з $n$ елементів через $ACH_n$.

**Означення 3.7.** *Максимальна кількість $w(P)$ елементів в антиланцюгу множини P називається шириною множини P.*

Зведена $(0,1)$-матриця показників $\mathcal{E}$ задає частковий порядок на множині

$$P_{\mathcal{E}} = \{1, \ldots, n\}$$

за правилом: $i \leq j$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$. Дійсно, $(P_\Lambda, \leq)$ є частково впорядкованою множиною, оскільки $\alpha_{ii} = 0$ має наслідком $i \leq i$ (рефлексивність). Далі, $\alpha_{ij} = 0$ та $\alpha_{ji} = 0$ разом не можуть дорівнювати нулю для зведеного черепичного порядку, тоді $(i \leq j \bigwedge j \leq i) \Rightarrow i = j$ (антисиметричність). Якщо $\alpha_{ij} = 0$, $\alpha_{jk} = 0$, тоді з кільцевих нерівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ випливає, що й $\alpha_{ik} = 0$, тобто $(i \leq j \bigwedge j \leq k) \Rightarrow i \leq k$ (транзитивність).

Навпаки, з кожною скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{1, \ldots, n\}$ ми зв'язуємо зведену $(0,1)$-матрицю показників $\mathcal{E}_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином: $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Легко бачити, що $\mathcal{E}_P$ є дійсно зведеною матрицею показників.

Позначимо через $P_{\max}$ множину всіх максимальних елементів множини $P$, через $P_{\min}$ — множину всіх мінімальних елементів множини $P$, і через $P_{\max} \times P_{\min}$ — їх декартів добуток.

**Означення 3.8.** *Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок $\sigma_{ij}$ для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ називається сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною P.*

**Теорема 3.9.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E}_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.*

*Доведення.* Припустимо, що в $Q(P)$ існує стрілка з вершини $s$ у вершину $t$. Це означає, що $\alpha_{st} = 0$ та не має такого індексу $k\,(k \neq s,t)$, що $\alpha_{sk} = 0$ та $\alpha_{kt} = 0$. Елементи $\beta_{ss}$ та $\beta_{tt}$ матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$ дорівнюють 1. Тоді $\gamma_{sk} = \min\limits_{1\leq k\leq n}(\beta_{sk} + \beta_{kt}) = 1$, де $\gamma_{sk} \in \mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$. З цього випливає, що $\gamma_{st} - \beta_{st} = 1 - \alpha_{st} = 1 - 0 = 1$. Таким чином, в сагайдаку $Q(\mathcal{E}_P)$ є стрілка, що з'єднує вершину $s$ з вершиною $t$.

Припустимо, що $p \in P_{max}$, тобто $\alpha_{pk} = 1$ для $k \neq p$. Тоді всі елементи $p$-го рядка матриці $\mathcal{E}^{(1)}$ є одиницями : $(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pn}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$.

Аналогічно, якщо $q \in P_{min}$, тоді $q$-ий рядок $(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T$ матриці $\mathcal{E}^{(1)}$ є $(1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T$. Отже, $\gamma_{pq} = 2$, $\beta_{pq} = 1$ та в $Q(\mathcal{E}_P)$ є стрілка з вершини $p$ в вершину $q$.

Таким чином доведено, що $\tilde{Q}(P)$ є підсагайдаком сагайдака $Q(\mathcal{E}_P)$.

Доведемо обернене включення. Припустимо, що $\gamma_{pq} = 2$. Тоді зрозуміло, що

$$(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pq}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$$

та

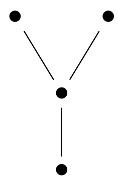
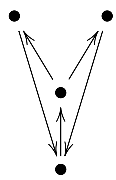
$$(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T.$$

Тоді $p \in P_{max}$, $q \in P_{min}$ та в $\tilde{Q}(P)$ існує стрілка між $p$ та $q$.

Припустимо, що $\gamma_{pq} = 1$ та $\beta_{pq} = 0$. Отже $p \neq q$. Тоді $\beta_{pq} = \alpha_{pq} = 0$ та $p < q$. Оскільки $\gamma_{pq} = \min\limits_{1\leq k\leq n}(\beta_{pk} + \beta_{kp})$, то $\beta_{pk} + \beta_{kq} \geq 1$ для $k = 1, \ldots, n$. Звідки при $k \neq p, q$ маємо $\alpha_{pk} + \alpha_{kp} \geq 1$. З цього випливає, що немає такого номера $k$, $k \neq p, q$, що $\alpha_{pk} = \alpha_{kq} = 0$. Тобто в $\tilde{Q}(P)$ існує стрілка з $p$ в $q$. Таким чином, $Q(\mathcal{E}_P) \subseteq \tilde{Q}(P)$. Теорема доведена. □

Очевидно, що $\tilde{Q}(P)$ є сильно зв'язним просто влаштованим сагайдаком.

**Приклад 3.10.** *Якщо*

$S =$  , *то* $\tilde{Q}(S) =$  .

Легко перевірити, що сагайдак $Q(\mathcal{E}_{CH_n})$, асоційований з ланцюгом $CH_n$, є простим циклом на $n$ вершинах, сагайдак $Q(\mathcal{E}_{ACH_n})$, асоційований з антиланцюгом $ACH_n$, є повним простим сагайдаком на $n$ вершинах.

Зокрема, якщо $P = P_{min} = P_{max}$, то отримуємо повний простий сагайдак, що має по одній петлі в кожній вершині. Матриця показників такого $(0,1)$-порядку $\Lambda_n$ має нулі тільки на головній діагоналі.

**Теорема 3.11.** *Для кожного натурального $m$ ($1 \leq m \leq n$, $m \neq n-1$) існує допустимий сагайдак на $n$ вершинах і рівно з $m$ петлями.*

*Доведення.* Нехай $P = ACH_m \cup CH_{n-m}$ $(m \neq n-1)$. Очевидно, що $Q(\mathcal{E}_P)$ є допустимым сагайдаком на $n$ вершинах і рівно з $m$ петлями. □

**Зауваження 3.12.** *Легко бачити, що не існує допустимий сагайдак з $n-1$ петлею.*

**Означення 3.13.** **Індексом** $(\operatorname{inx}\mathcal{E})$ зведеної матриці показників $\mathcal{E}$ називається максимальне дійсне власне значення матриці суміжності $[Q(\mathcal{E})]$ сагайдака $Q(\mathcal{E})$.

З тверджень 1.5 та 1.6 слідує, що індекси еквівалентних зведених матриць показників співпадають.

**Теорема 3.14.** *Існує матриця показників $M_k \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $\operatorname{inx} M_k = k$ для довільного $1 \leq k \leq n$.*

*Доведення.* Ми показали, що $\operatorname{inx} H_n = 1$ та $\operatorname{inx} \mathcal{E}_{ACH_n} = n$. Нехай $\tau$ — циклічна підстановка:

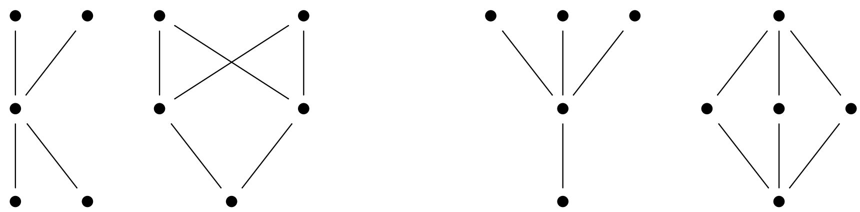
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Тоді сагайдак $Q_k$ $(k \geq 2)$ з матрицею суміжності: $E + P_\tau + \ldots + P_{\tau^{k-1}}$ є допустимим за теоремою 1.10. Отже, існує матриця показників $M_k$ і $\operatorname{inx} M_k = k$. □

# 4 $Q$-еквівалентні частково впорядковані множини

**Означення 4.1.** *Скінченні частково впорядковані множини $S$ і $T$ називаються $Q$ - еквівалентними, якщо еквівалентними є зведені $(0,1)$ - матриці показників $\mathcal{E}_S$ і $\mathcal{E}_T$.*

**Приклад 4.2.** *Нижче наведено дві пари $Q$ - еквівалентних частково впорядкованих множин.*
*(a)* *(b)*



Частково впорядковані множини зі зв'язними діаграмами будемо називати зв'язними.

**Теорема 4.3.** *Дві скінченні зв'язні частково впорядковані множини $P_1$ та $P_2$ $Q$ - еквівалентні тоді та тільки тоді, коли або ці множини ізоморфні, або існує розбиття цих множин $P_1 = P_1' \cup P_1''$ та $P_2 = P_2' \cup P_2''$ таке, що кожний елемент з $P_1''$ не перевищує довільного елемента з $P_1'$, кожен елемент з $P_2'$ не перевищує довільного елемента з $P_2''$, та $P_1' \simeq P_2'$, $P_1'' \simeq P_2''$.*

*Доведення.* Нехай $P_1$ та $P_2$ — скінченні зв'язні частково впорядковані множини, які є $Q$ – еквівалентними, тобто $\widetilde{Q}(P_1) \simeq \widetilde{Q}(P_2)$. Перенумеруємо елементи множини $P_2$ (перенумерація вершин сагайдака є ізоморфізмом сагайдаків) так, щоб $\widetilde{Q}(P_1) = \widetilde{Q}(P_2)$. Нехай $P_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $P_2 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ і $[\widetilde{Q}(P_1)] = [\widetilde{Q}(P_2)] = (q_{ij})$.

Якщо $q_{ij} = 0$, то елемент $\alpha_j$ не накриває елемент $\alpha_i$ і, або $\alpha_i$ не є максимальним, або $\alpha_j$ не є мінімальним; елемент $\gamma_j$ не накриває елемент $\gamma_i$ та, або $\gamma_i$ не є максимальним, або $\gamma_j$ не є мінімальним.

Якщо $q_{ij} = 1$, то, або $\alpha_j$ накриває $\alpha_i$, або $\alpha_i$ є максимальним, а $\alpha_j$ є мінімальним елементами; або $\gamma_j$ накриває $\gamma_i$, або $\gamma_i$ є максимальним, а $\gamma_j$ є мінімальним елементами.

Припустимо, що частково впорядковані множини $P_1$ та $P_2$ не є ізоморфними. Тоді $Q(P_1) \neq Q(P_2)$ та існують $i$ та $j$ такі, що $\alpha_j$ накриває $\alpha_i$, але $\gamma_i$ є максимальним а $\gamma_j$ є мінімальним елементами (або навпаки).

Нехай $\alpha_j = \alpha_{j_1}$ накриває елементи $\alpha_i = \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$. Тоді $\gamma_j = \gamma_{j_1}$ є мінімальним елементом, а $\gamma_i = \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}$ є максимальними, причому більше максимальних елементів у $P_2$ немає ($P_{2\max}$), $P_{2\max} = \{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}\}$.

Якщо $P_{2\min} = \{\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_r}\}$, то $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_r}$ накривають кожен з елементів $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$.

Нехай $P_{1\max} = \{\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m}\}$, $P_{1\min} = \{\alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_t}\}$. Тоді, якщо $\alpha_p = \alpha_{p_v} \in P_{1\max}$ і $\alpha_l = \alpha_{l_u} \in P_{1\min}$, то $\gamma_{l_u}$ накриває $\gamma_{p_v}$.

Позначимо $P_1' = \{\alpha_q \in P_1 \mid \alpha_q > \alpha_{i_1}\}$, $P_1'' = P_1 \setminus P_1'$; $P_2'' = \{\gamma_q \in P_2 \mid \gamma_q > \gamma_{p_1}\}$, $P_2' = P_2 \setminus P_2''$.

Оскільки $\tilde{Q}(P_1) = Q(P_1'')\cup Q(P_1')\cup(\cup(\alpha_i,\alpha_j))\cup(\cup(\alpha_p,\alpha_l))$, $\tilde{Q}(P_2) = Q(P_2'')\cup Q(P_2')\cup(\cup(\gamma_i,\gamma_j))\cup(\cup(\gamma_p,\gamma_l))$ та $\tilde{Q}(P_1) = \tilde{Q}(P_2)$, то $Q(P_1') = Q(P_2')$ та $Q(P_1'') = Q(P_2'')$. Дійсно, оскільки в множинах $P_1'$, $P_2'$, $P_1''$, $P_2''$ немає одночасно елементів з $P_{1\max}$ і $P_{1\min}$; з $P_{2\max}$, $P_{2\min}$, то з рівності $q_{ij} = 1$ при, наприклад, $\alpha_i, \alpha_j \in P_1'$ випливає, що $\alpha_j$ накриває $\alpha_i$ та $\gamma_j$ накриває $\gamma_i$, де $\gamma_i, \gamma_j \in P_2''$.

Навпаки, нехай зв'язні частково впорядковані множини $P_1$ та $P_2$ або ізоморфні, або існують розбиття цих множин $P_1 = P_1'\cup P_1''$ та $P_2 = P_2'\cup P_2''$ на підмножини і такі, що кожний елемент з $P_1''$ не перевищує довільного елемента з $P_1'$, кожен елемент з $P_2'$ не перевищує довільного елемента з $P_2''$, та $P_1' \simeq P_2'$, $P_1'' \simeq P_2''$. Якщо $P_1 \simeq P_2$, то, очевидно, $\mathcal{E}_{P_1} \sim \mathcal{E}_{P_2}$ (перенумерація елементів частково впорядкованої множини $P_2$ відповідає другому типу еквівалентних перетворень матриці $\mathcal{E}_{P_2}$). Якщо частково впорядкованої множини $P_1$ і $P_2$ не ізоморфні та існують вказані розбиття, то

$$\mathcal{E}(P_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(P_1') & U \\ 0 & \mathcal{E}(P_1'') \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}(P_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(P_2'') & U \\ 0 & \mathcal{E}(P_2') \end{pmatrix}.$$

де $U$ — матриця, всі елементи якої дорівнюють 1, $\mathcal{E}(P_1') = \mathcal{E}(P_2')$, $\mathcal{E}(P_1') = \mathcal{E}(P_2')$ (тому $P_1' \simeq P_2'$, $P_1'' \simeq P_2''$).

Матриці показників $\mathcal{E}(P_1)$ та $\mathcal{E}(P_2)$ еквівалентні. Дійсно, спочатку перетвореннями другого типу з матриці показників $\mathcal{E}(P_2)$ ми отримуємо матрицю

$$\mathcal{E}(\overline{P}_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\overline{P}_2') & U \\ 0 & \mathcal{E}(\overline{P}_2'') \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}(\overline{P}_2'') = \mathcal{E}(P_1'')$, $\mathcal{E}(\overline{P}_2') = \mathcal{E}(P_1')$. Тоді еквівалентними перетвореннями першого типу з матриці $\mathcal{E}(\overline{P}_2)$ ми отримуємо матрицю $\mathcal{E}(P_1)$. Таким чином, частково впорядковані множини $P_1$ та $P_2$ є $Q$ - еквівалентними. Теорему доведено. $\square$

**Наслідок 4.4.** *Нехай $P$, $S$ — зв'язні скінченні частково впорядковані множини та сагайдаки $\tilde{Q}(P)$, $\tilde{Q}(S)$ ізоморфні. Тоді множини $P$ та $S$ є $Q$-еквівалентними.*

**Теорема 4.5.** *Дві незв'язні скінченні частково впорядковані множини $P$ та $S$ є $Q$ - еквівалентними тоді та тільки тоді, коли ізоморфні діаграми $Q(P)$ та $Q(S)$.*

*Доведення.* Нехай $P = \{\alpha_i\}$ та $S = \{\gamma_j\}$ — дві скінченні незв'язні $Q$-еквівалентні частково впорядковані множини, $P = P_1 \cup P_2$, $S = S_1 \cup S_2$, $Q(P) = Q(P_1) \cup Q(P_2)$, $Q(S) = Q(S_1) \cup Q(S_2)$ і між точками $Q(P_1)$ та $Q(P_2)$ а також між точками $Q(S_1)$ та $Q(S_2)$ немає стрілок. Оскільки частково впорядковані множини $P$ і $S$ є $Q$-еквівалентними, то за твердженнями 1.5, 1.6 сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ ізоморфні. При необхідності можна перенумеровати елементи множини $S$ і вважати, що $\tilde{Q}(P) = \tilde{Q}(S)$, тобто в сагайдаку $\tilde{Q}(P)$ є стрілка з вершини $\alpha_i$ у вершину $\alpha_j$ тоді і тільки тоді, коли є стрілка з вершини $\gamma_i$ у вершину $\gamma_j$ в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$.

Нехай $P_{1\max} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$, $P_{1\min} = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}\}$, $P_{2\max} = \{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_t}\}$, $P_{2\min} = \{\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_r}\}$, $S_{1\max} = \{\gamma_{p_1}, \dots, \gamma_{p_x}\}$, $S_{1\min} = \{\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_y}\}$, $S_{2\max} = \{\gamma_{c_1}, \dots, \gamma_{c_u}\}$, $S_{2\min} = \{\gamma_{b_1}, \dots, \gamma_{b_v}\}$.

З кожної точки із $P_{\max}$ в кожну точку із $P_{\min}$ веде стрілка в сагайдаку $\tilde{Q}(P)$. Тому з кожної точки $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}, \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_t}$ в кожну точку $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_s}, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_r}$ веде стрілка в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$.

Припустимо, що жодна з точок $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}, \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_t}$ не належить $S_{\max}$. Тоді всі точки $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_s}, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_r}$ не належать $S_{\min}$. Ці точки з'єднані між собою стрілками і тому належать одній зв'язній компоненті, наприклад $S_1$ Аналогічно точки $\alpha_{p_1}, \dots, \alpha_{p_k}, \alpha_{c_1}, \dots, \alpha_{c_u}, \alpha_{q_1}, \dots, \alpha_{q_y}, \alpha_{b_1}, \dots, \alpha_{b_v}$ теж належать одній зв'язній компоненті, наприклад $P_1$

Очевидно для довільного елемента $\alpha_{q_f}$ існує елемент $\alpha_{i_g} \in P_{1\max}$ такий що $\alpha_{q_f} < \alpha_{i_g}$ та $\alpha_{q_f} \not< \alpha_{k_h}$ для довільного $\alpha_{k_h} \in P_{2\max}$. Позаяк є шлях із $\alpha_{q_f}$ в $\alpha_{i_g}$ в діаграмі $Q(P_1)$, то є шлях із $\gamma_{q_f}$ в $\gamma_{i_g}$ в діаграмі $Q(S_1)$. Тому $\gamma_{q_f} < \gamma_{i_g}$. Зазначимо, що $\gamma_{q_f} \not< \gamma_{k_h}$, бо інакше отримаємо в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$ шлях із $\gamma_{q_f}$ в $\gamma_{k_h}$, який не проходить через жодну з $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}$, а в сагайдаку $\tilde{Q}(P)$ шляху із $\alpha_{q_f}$ в $\alpha_{k_h}$, який не проходить через одну з $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$ немає. Отже, для довільного

$\gamma_{q_f} \in S_{1\,\min}$ та для довільного $\gamma_{k_h}$ завжди $\gamma_{q_f} \not< \gamma_{k_h}$. Але $\gamma_{k_h} \notin S_{1\,\min}$ і множина $S_{1\,\min}$ вичерпується елементами $\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_y}$. Прийшли до протиріччя.

Таким чином, хоча б один з елементів $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}, \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_t}$ належить $S_{\max}$. Нехай $\gamma_{i_1} \in S_{\max}$. Із $\gamma_{i_1}$ є стрілки в $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_s}, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_r}$, тому $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_s}, \gamma_{l_1}, \dots, \gamma_{l_r} \in S_{\min}$. Тоді $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_m}, \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_t} \in S_{\max}$.

Ми отримали, що при ізоморфізмі сагайдаків $\varphi\colon \tilde{Q}(P) \to \tilde{Q}(S)$ справедливі включення $\varphi(P_{\max}) \subseteq S_{\max}$, $\varphi(P_{\min}) \subseteq S_{\min}$. Таким же чином маємо і обернені включення $\varphi^{-1}(S_{\max}) \subseteq P_{\max}$, $\varphi^{-1}(S_{\min}) \subseteq P_{\min}$. Тому $\varphi(P_{\max}) = S_{\max}$, $\varphi(P_{\min}) = S_{\min}$.

Оскільки $\tilde{Q}(P) = \tilde{Q}(S)$ та $\varphi(P_{\max}) = S_{\max}$, $\varphi(P_{\min}) = S_{\min}$, то вилучаючи із $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ стрілки, які ведуть від максимальних елементів до мінімальних, отримаємо $Q(P) = Q(S)$.

Навпаки, якщо $Q(P) \simeq Q(S)$, то матриці показників $\mathcal{E}(P)$ і $\mathcal{E}(S)$ еквівалентні, тобто частково впорядковані множини $P$ та $S$ є $Q$-еквівалентними.

□

**Теорема 4.6.** *Зв'язна скінченна частково впорядкована множина не може бути $Q$ - еквівалентною незв'язній скінченній частково впорядкованій множині.*

*Доведення.* Нехай $P$ — незв'язна частково впорядкована множина, $S$ — зв'язна частково впорядкована множина, причому $P = P_1 \cup P_2$, $Q(P) = Q(P_1) \cup Q(P_2)$ і крім того, між $Q(P_1)$ та $Q(P_2)$ немає стрілок. Припустимо, що множини $P$ і $S$ $Q$ - еквівалентні. Тоді за твердженнями 1.5, 1.6 сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ ізоморфні. Нехай $\varphi\colon \tilde{Q}(P) \mapsto \tilde{Q}(S)$ — ізоморфізм сагайдаків, $P_{1\,\max} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$, $P_{1\,\min} = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}\}$, $P_{2\,\max} = \{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_t}\}$, $P_{2\,\min} = \{\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_r}\}$. З кожної вершини $\alpha_{i_v}$ множини $P_{1\,\max}$ і з кожної вершини $\alpha_{k_u}$ множини $P_{2\,\max}$ сагайдака $\tilde{Q}(P)$ йдуть стрілки до кожної вершини $\alpha_{j_p}$ множини $P_{1\,\min}$ і до кожної вершини $\alpha_{l_q}$ множини $P_{2\,\min}$. Тоді з кожної вершини $\varphi(\alpha_{i_v})$ множини $\varphi(P_{1\,\max})$ і з кожної вершини $\varphi(\alpha_{k_u})$ множини $\varphi(P_{2\,\max})$ сагайдака $\tilde{Q}(S)$ йдуть стрілки до кожної вершини $\varphi(\alpha_{j_p})$ множини $\varphi(P_{1\,\min})$ і до кожної вершини $\varphi(\alpha_{l_q})$ множини $\varphi(P_{2\,\min})$.

Нехай $\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_x} \in S_{\max} \cap \varphi(P_2)$, $\gamma_{p_1}, \dots, \gamma_{p_y} \in S_{\min} \cap \varphi(P_2)$, $\gamma_{v_1}, \dots, \gamma_{v_z} \in S_{\max} \cap \varphi(P_1)$, $\gamma_{u_1}, \dots, \gamma_{u_w} \in S_{\min} \cap \varphi(P_1)$. В $\tilde{Q}(P)$ стрілки від елементів частково впорядкованої множини $P_1$ до елементів частково впорядкованої множини $P_2$ є лише від максимальних елементів частково впорядкованої множини $P_1$ до мінімальних елементів частково впорядкованої множини $P_2$. Тоді стрілки від елементів $\varphi(P_1)$ до елементів $\varphi(P_2)$ є лише від елементів з $\varphi(P_{1\,\max})$ до елементів з $\varphi(P_{2\,\min})$. А в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$ є стрілки від елементів $\varphi(P_1) \cap S_{\max}$ до елементів $\varphi(P_2) \cap S_{\min}$. Тому $\varphi(P_{1\,\max}) = \varphi(P_1) \cap S_{\max}$ та $\varphi(P_{2\,\min}) = \varphi(P_2) \cap S_{\min}$. Аналогічно $\varphi(P_{2\,\max}) = \varphi(P_2) \cap S_{\max}$ та $\varphi(P_{1\,\min}) = \varphi(P_1) \cap S_{\min}$. Але тоді в діаграмі $Q(S)$ між елементами частково впорядкованих множин $\varphi(P_1)$ та $\varphi(P_2)$ немає стрілок, що суперечить зв'язності діаграми $Q(S)$. Отже, зв'язна частково впорядкована множина $S$ і незв'язна частково впорядкована множина $P$ не є $Q$-еквівалентними. Теорема доведена. □

**Наслідок 4.7.** *Нехай $P$ — зв'язна скінченна частково впорядкована множина, $S$ — незв'язна скінченна частково впорядкована множина. Тоді сагайдаки $\tilde{Q}(P)$ та $\tilde{Q}(S)$ не ізоморфні.*

Нехай $\mathcal{E}_S$ та $\mathcal{E}_T$ — зведені $(0,1)$-матриці показників, що відповідають частково впорядкованим множинам $S$ і $T$ відповідно.

З теорем 4.3, 4.5, 4.6 та наслідків 4.4, 4.7 випливає наступна теорема.

**Теорема 4.8.** *Наступні умови для зведених $(0,1)$-матриць показників $\mathcal{E}_S$ та $\mathcal{E}_T$ рівносильні:*

*(a) $Q(\mathcal{E}_S)$ та $Q(\mathcal{E}_T)$ ізоморфні;*

*(b) $\mathcal{E}_S$ та $\mathcal{E}_T$ еквівалентні.*

*(c) скінченні частково впорядковані множини $S$ та $T$ $Q$ - еквівалентні.*

## 5 Допустимі сагайдаки на трьох точках

Нехай $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix}$ — зведена матриця показників. Тоді виконуються нерівності $\alpha, \gamma > 0$, $\beta + \delta > 0, \quad \beta + \gamma > \alpha, \quad \alpha \geq \beta, \quad \delta + \alpha \geq \gamma, \quad \gamma \geq \delta.$

Обчислимо матрицю суміжності $[Q]$ сагайдака матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$. Маємо

$$\mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & \delta & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} (2,\ \alpha,\ \gamma) & (1,\ \delta) & (1,\ \beta) \\ (\alpha+1,\ \beta+\gamma) & (2,\ \alpha,\ \beta+\delta) & (\beta+1,\ \alpha) \\ (\gamma+1,\ \delta+\alpha) & (\delta+1,\ \gamma) & (2,\ \gamma,\ \beta+\delta) \end{pmatrix}.$$

$$[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} (2,\ \alpha,\ \gamma) - 1 & (1,\ \delta) & (1,\ \beta) \\ (1,\ \beta+\gamma-\alpha) & (2,\ \alpha,\ \beta+\delta) - 1 & (1,\ \alpha-\beta) \\ (1,\ \delta+\alpha-\gamma) & (1,\ \gamma-\delta) & (2,\ \gamma,\ \beta+\delta) - 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Допустимий сагайдак $Q$ сильно зв'язний. Тому допустимий сагайдак $Q$ на трьох точках містить цикл довжини три

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

або два цикли довжини два

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Розглянемо випадки

(1) Сагайдак $Q$ на трьох точках містить цикл довжини три

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Можемо вважати, що це цикл $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$

Можливі підвипадки

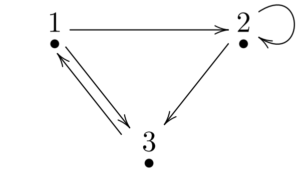
(a) В сагайдаку $Q$ немає стрілок $\overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$, $\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$, $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$, тобто $q_{12} = q_{23} = q_{31} = 1$, $q_{21} = q_{32} = q_{13} = 0$.
Тоді з (4) випливає, що $\delta > 0,\ \alpha > \beta,\ \delta + \alpha > \gamma,\ \alpha = \beta + \gamma, \quad \gamma = \delta, \quad \beta = 0$, а отже, $\alpha = \gamma = \delta > 0, \quad \beta = 0$.
При $\alpha = 1$ маємо сагайдак

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

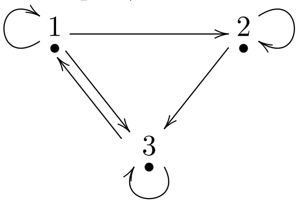
а при $\alpha > 1$ маємо сагайдак

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] \arrow[loop left] & & \bullet \arrow[dl] \arrow[loop right] \\ & \bullet \arrow[ul] \arrow[loop below] & \end{tikzcd}$$

(b) В сагайдаку $Q$ є лише одна стрілка з $\overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$, $\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$, $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$ Нехай це стрілка з точки 1 у точку 3. Тоді $q_{12} = q_{23} = q_{31} = 1$, $q_{21} = 0 = q_{32}$, $q_{31} = 1$. З (4) отримуємо $\delta > 0,\ \alpha > \beta,\ \delta + \alpha > \gamma,\ \alpha = \beta + \gamma, \quad \gamma = \delta, \quad \beta > 0.$
$[Q] = \begin{pmatrix} (2,\ \gamma) - 1 & 1 & 1 \\ 0 & (2,\ \beta+\delta) - 1 & 1 \\ 1 & 0 & (2,\ \gamma) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,\ \gamma) - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (2,\ \gamma) - 1 \end{pmatrix}$. При $\gamma = 1$ маємо сагайдак



а при $\gamma > 1$ маємо сагайдак

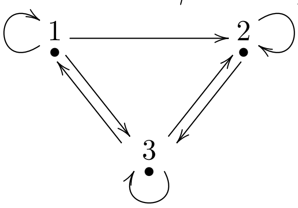


(c) В сагайдаку $Q$ є дві стрілки з $\overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$, $\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$, $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$. Нехай це стрілки з 3 в 2 та з 1 в 3. Тоді $q_{21} = 0$, $q_{32} = q_{13} = 1$. З (4) отримуємо

$\delta > 0,\ \alpha > \beta,\ \delta + \alpha > \gamma,\ \alpha = \beta + \gamma,\quad \gamma > \delta,\quad \beta > 0.$

$[Q] = \begin{pmatrix} (2,\ \gamma) - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (2,\ \gamma) - 1 \end{pmatrix}.$

Оскільки $\gamma > \delta > 0$, то $\gamma > 1$ і маємо сагайдак

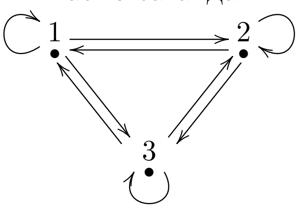


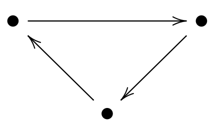
(d) В сагайдаку $Q$ є три стрілки $\overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$, $\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$, $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$. Тоді $q_{21} = q_{32} = q_{13} = 1$ і з (4) отримуємо

$\delta > 0,\ \alpha > \beta,\ \delta + \alpha > \gamma,\ \beta + \gamma > \alpha,\quad \gamma > \delta,\quad \beta > 0$. Звідси $\alpha > \beta > 0$, $\gamma > \delta > 0$. Тому

$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Маємо сагайдак



(2) Сагайдак $Q$ не містить циклу довжини три  а містить два цикла довжини два $\bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \bullet$

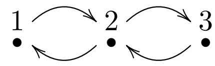
Можна вважати, що це $\overset{1}{\bullet} \rightleftarrows \overset{2}{\bullet} \rightleftarrows \overset{3}{\bullet}$

Тоді немає стрілок $\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{1}{\bullet}$, $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$ і $q_{21} = q_{23} = q_{21} = q_{32} = 1$, $q_{31} = q_{13} = 0$. З (4) отримуємо

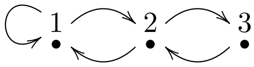
$\delta > 0,\ \alpha > \beta,\ \delta + \alpha = \gamma,\ \beta + \gamma > \alpha, \quad \gamma > \delta, \quad \beta = 0.$

$$[Q] = \begin{pmatrix} (2,\ \alpha) - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (2,\ \alpha,\ \delta) - 1 & 1 \\ 0 & 1 & (2,\ \delta) - 1 \end{pmatrix}.$$

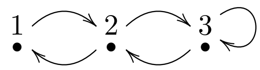
При $\alpha = \delta = 1$ маємо сагайдак



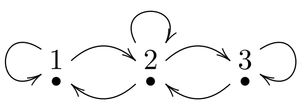
при $\alpha > 1$, $\delta = 1$ маємо сагайдак



при $\alpha = 1$, $\delta > 1$ маємо сагайдак

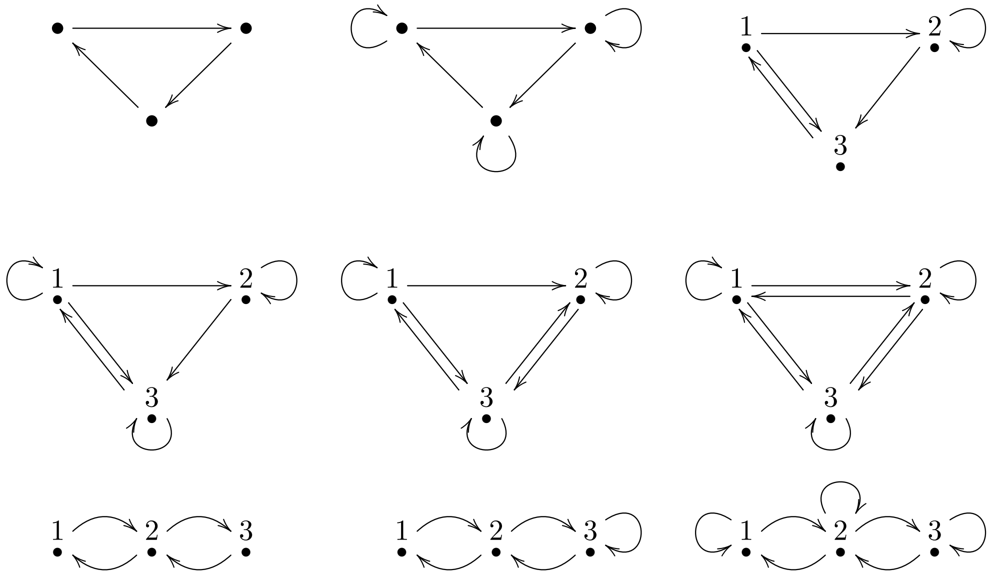


при $\alpha > 1$, $\delta > 1$ маємо сагайдак



Зазначимо, що сагайдаки, отримані в (2) при $\alpha = 1$, $\delta > 1$ та при $\alpha > 1$, $\delta > 1$, ізоморфні.

Таким чином, з точністю до ізоморфізму існує 9 допустимих сагайдаків на трьох точках. А саме



## 6 Допустимі сагайдаки

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ — зведена матриця показників, $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E$ та $Q = Q(\mathcal{E})$ — сагайдак матриці показників $\mathcal{E}$ з матрицею суміжності $[Q] = (q_{ij})$, де

$$q_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij}.$$

Позначимо

$$G = \{\beta_{ij} \mid q_{ij} = 1\}.$$

**Теорема 6.1.** *Множина $G$ є мінімальною системою твірних елементів матриці $\mathcal{E}^{(1)}$.*

*Доведення.* Покажемо, що кожний елемент $\beta_{ij}$ такий що $q_{ij} = 0$, $i \neq j$ є сумою елементів з $G$. Нехай $q_{ij} = 0$. Тоді існує $k \neq i, j$ таке, що $\beta_{ij} = \beta_{ik} + \beta_{kj}$. Якщо $q_{ik} = 0$, то існує $l \neq i, k$ таке, що $\beta_{ik} = \beta_{il} + \beta_{lk}$. При $q_{kj} = 0$ існує $r \neq k, j$ таке, що $\beta_{kj} = \beta_{kr} + \beta_{rj}$. Якщо серед елементів $\beta_{il}, \beta_{lk}, \beta_{kr}, \beta_{rj}$ є такі, що не належать множині $G$, то продовжуючи розклади в суми, отримаємо

$$\beta_{ij} = \beta_{ii_1} + \beta_{i_1i_2} + \cdots + \beta_{i_{s-1}i_s} + \beta_{i_sj}.$$

Покажемо, що серед чисел $i, i_1, \ldots i_s, j$ немає однакових. Припустимо протилежне, що $i_p = i_t$ для деяких $p, t$. Можемо вважати, що $i_p < i_t$. Тоді

$$\beta_{ij} = \beta_{ii_1} + \beta_{i_1i_2} + \cdots + \beta_{i_{p-1}i_p} + \beta_{i_pi_{p+1}} + \beta_{i_{p+1}i_{p+2}} + \cdots + \beta_{i_ti_{t+1}} + \beta_{i_{t+1}i_{t+2}} + \cdots + \beta_{i_{s-1}j}.$$

Запишемо цю суму інакше

$$\beta_{ij} = \left(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1i_2} + \cdots + \beta_{i_{p-1}i_p} + \beta_{i_ti_{t+1}} + \beta_{i_{t+1}i_{t+2}} + \cdots + \beta_{i_{s-1}j}\right) + \left(\beta_{i_pi_{p+1}} + \beta_{i_{p+1}i_{p+2}} + \cdots + \beta_{i_{t-1}i_t}\right).$$

За кільцевими нерівностями

$$\beta_{ii_1} + \beta_{i_1i_2} + \cdots + \beta_{i_{p-1}i_p} + \beta_{i_ti_{t+1}} + \beta_{i_{t+1}i_{t+2}} + \cdots + \beta_{i_{s-1}j} \geq \beta_{ij}$$

Оскільки матриця показників зведена, то

$$\beta_{i_pi_{p+1}} + \beta_{i_{p+1}i_{p+2}} + \cdots + \beta_{i_{t-1}i_t} > 0$$

Отримали суперечність

$$\left(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1i_2} + \cdots + \beta_{i_{p-1}i_p} + \beta_{i_ti_{t+1}} + \beta_{i_{t+1}i_{t+2}} + \cdots + \beta_{i_{s-1}j}\right) + \left(\beta_{i_pi_{p+1}} + \beta_{i_{p+1}i_{p+2}} + \cdots + \beta_{i_{t-1}i_t}\right) > \beta_{ij}.$$

Отже, серед чисел $i, i_1, \ldots i_s, j$ немає однакових. Тому в розкладі $\beta_{ij}$ в суму не більше $n$ доданків. Якщо хоча б один з доданків такий, що $q_{i_mi_{m+1}} = 0$, то кількість доданків можна збільшити. Звідси отримуємо, що довільне $\beta_{ij}$ таке, що $q_{ij} = 0$ розкладається в суму послідовних $\beta_{i_mi_{m+1}}$ таких, що $q_{i_mi_{m+1}} = 1$ тобто $\beta_{i_mi_{m+1}} \in G$. Причому сума містить не більше, ніж $n$ доданків.

□

**Означення 6.2.** *Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається* зваженим*, якщо визначена функція $w\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функція $w$ називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.*

*Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.*

**Теорема 6.3.** *Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє наступним умовам:*

- *вага стрілки з точки $i$ у точку $j$ менша за вагу шляху з точки $i$ у точку $j$ довжини $l \geq 2$,*
- *вага петлі в точці $i$ менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку $i$, довжини $l \geq 2$,*

- *вага будь-якого циклу завжди більша або дорівнює* $1$,
- *вага довільної петлі дорівнює* $1$,
- *через кожну точку без петлі проходить цикл довжини* $l \geq 2$, *вага якого дорівнює* $1$.

*Доведення.* Нехай сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим. Тоді існує зведений черепичний порядок $\Lambda$ такий, що $Q(\Lambda) = Q$.

Кожній стрілці $\sigma_{ij}$ сагайдака $Q$, що веде із точки $i$ в точку $j$, відповідає твірний елемент $\beta_{ij}$ матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Нехай $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$. Сукупність всіх елементів $G = \{\beta_{ij}\}$ (по всіх стрілках сагайдака $Q$) — це мінімальна система твірних матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Довільний елемент $\beta_{ij}$ подається у вигляді $\beta_{ij} = \min(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \cdots + \beta_{i_k j})$ (тут мінімум береться по всіх шляхам $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k j}$ із точки $i$ в точку $j$).

Оскільки $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ при $i \neq j$, $\beta_{ii} = 1$, то маємо рівності

$$\alpha_{ij} = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k j}) \text{ при } i \neq j. \tag{5}$$

$$1 = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k i}). \tag{6}$$

Визначимо вагову функцію $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ за правилом $w(\sigma_{ij}) = \beta_{ij}$, тобто

$$w(\sigma_{ij}) = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Покажемо, що визначена так вагова функція $w$ задовольняє умовам (1) – (5) теореми.

Припустимо, що вага стрілки $\sigma_{ij}$ більша або дорівнює вазі деякого шляху $P(i,j) = \sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k j}$ з точки $i$ у точку $j$ довжини $l \geq 2$:

$$\alpha_{ij} \geq \alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k j}.$$

Тоді твірний елемент $\beta_{ij}$ лінійно виражається через інші твірні елементи

$$\beta_{ii_1}, \beta_{i_1 i_2}, \ldots, \beta_{i_k j}.$$

Це суперечить тому, що $\{\beta_{ij}\}$ — мінімальна система твірних елементів матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Отже, умови (1) та (2) виконуються.

Порядок $\Lambda$ зведений, тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ при $j \neq i$. Звідси для будь-якого циклу $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k i}$, враховуючи, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k$, маємо

$$\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k i} \geq \alpha_{ii_k} + \alpha_{i_k i} \geq 1.$$

Отже, умова (3) виконується.

Оскільки для петлі $w(\sigma_{ii}) = \beta_{ii} = 1$, то умова (4) також виконується.

Елементи матриці суміжності $[Q] = (q_{ij})$ сагайдака черепичного порядку $\Lambda$ обчислюються за формулами

$$q_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij})$$

та

$$q_{ii} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{ki} - 1).$$

Якщо вершина $i$ не має петлі, то $q_{ii} = 0$ та існує $k \neq i$ таке, що $\beta_{ik} + \beta_{ki} = 1$. Звідси $\beta_{ik} = 0$, $\beta_{ki} = 1$ або $\beta_{ik} = 1$, $\beta_{ki} = 0$.

Якщо $\beta_{ik} = 0$, $\beta_{ki} = 1$, то існує шлях з точки $i$ в точку $k$ ваги 0 та існує шлях з точки $k$ в точку $i$ ваги 1. Тому існує цикл, що проходить через точки $i$ та $k$ ваги 1. Аналогічно, якщо $\beta_{ik} = 1$ та $\beta_{ki} = 0$, то також існує такий цикл.

Отже, умова (5) виконується.

Навпаки, нехай $Q$ сильно зв'язний сагайдак з ваговою функцією $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє умови (1) – (5).

Покажемо, що цей сагайдак є допустимим, тобто існує зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Покладемо $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i$ та при $i \neq j$ $\alpha_{ij} = \min\limits_{P(i,j)} w(P(i,j))$ (мінімум береться по всім шляхам $P(i,j)$ з точки $i$ у точку $j$).

Сагайдак $Q$ сильно зв'язний, тому для будь-якого $k \neq i,j$ існує шлях $P(i,k)$ з точки $i$ у точку $k$ та існує шлях $P(k,j)$ з точки $k$ у точки $j$. Зокрема, якщо $P(i,k)$ — шлях з точки $i$ у точку $k$ мінімальної ваги, $P(k,j)$ — шлях з точки $k$ у точку $j$ мінімальної ваги, то $w(P(i,k) = \alpha_{ik}$, $w(P(k,j) = \alpha_{kj}$. Тому існує шлях з точки $i$ у точку $j$ ваги $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}$. Для шляху $P(i,j)$ мінімальної ваги отримаємо $w(P(i,j)) = \alpha_{ij}$ та $\alpha_{ij} \leq \alpha_{ik} + \alpha_{kj}$.

Якщо $k = i$ або $k = j$, то ця нерівність є очевидною.

Якщо припустити, що $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$ для деяких $i, j$ $i \neq j$, то за визначенням $\alpha_{ij}$ існують шляхи $P(i,j)$ та $P(j,i)$ нульової ваги. Об'єднання цих шляхів є циклом нульової ваги, що суперечить умові (3). Отже, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх $i, j$ $i \neq j$.

Таким чином, $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників.

Покажемо тепер, що сагайдак цієї матриці показників співпадає з сагайдаком $Q$.

Нехай $[Q(\mathcal{E})] = (\bar{q}_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$.

Якщо $\bar{q}_{ij} = 0$ $i \neq j$, то існує $k \neq i,j$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$. Це означає, що існує шлях $P(i,j)$ з точки $i$ у точку $j$ мінімальної ваги, який проходить через точку $k$. Причому шлях $P(i,j)$ є об'єднанням шляхів $P(i,k)$ та $P(k,j)$, які теж є шляхами з $i$ в $k$ та з $k$ в $j$ мінімальної ваги. $k$ Тоді в сагайдаку $Q$ немає стрілки з точки $i$ у точку $j$, бо інакше вага стрілки дорівнювала б вазі шляху $P(i,j)$ довжини $l \geq 2$, що суперечить умові (1). Отже, $q_{ij} = 0$.

Якщо $\bar{q}_{ii} = 0$, то існує $k \neq i$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 1$. Це означає, що існують шляхи $P(i,k)$ та $P(k,i)$ такі, що $w(P(i,k)) + w(P(k,i)) = 1$. Об'єднання цих шляхів є циклом ваги 1. Точка $i$ в сагайдаку $Q$ не має петлі, бо за умовою (4) вага петлі дорівнює 1 і отримуємо протиріччя умові (2): вага петлі дорівнює вазі циклу. Отже, $q_{ii} = 0$.

Нехай $\bar{q}_{ij} = 1$ $i \neq j$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i,j$. Це означає за визначенням $\alpha_{ij}$, що не існує вершини $k$ $k \neq i,j$ такої, що шлях мінімальної ваги з точки $i$ у точку $j$ проходить через точку $k$. Тобто шлях мінімальної ваги з точки $i$ у точку $j$ має довжину меншу, ніж 2. Тому цей шлях — стрілка і $q_{ij} = 1$.

Нехай $\bar{q}_{ii} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 1$ для всіх $k \neq i$. Це означає, що будь-який цикл довжини $l \geq 2$, який проходить через точку $i$ та не є петлею, має вагу більшу, ніж 1. Якщо припустити, що сагайдак $Q$ не має петлі в точці $i$, то за умовою (5) повинен існувати цикл, що проходить через точку $i$ та має вагу 1. Отримаємо протиріччя. Тому $q_{ii} = 1$. Таким чином, $Q(\mathcal{E}) = Q$. Теорема доведена. □

**Зауваження 6.4.** *Згідно умов (4) та (5) теореми через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги* 1.

# 7 Частково впорядковані множини із жорстким асоційованим сагайдаком

**Означення 7.1.** *Допустимий сагайдак $Q$ називається* **жорстким** *якщо $Q = Q(\mathcal{E})$ для єдиної з точністю до еквівалентності зведеної матриці показників $\mathcal{E}$.*

Нехай $P$ — скінченна частково впорядкована множина, $\widetilde{Q}(P)$ — асоційований сагайдак. В теоремах 7.2, 7.5 і 7.8 наводяться достатні умови для множини $P$, щоб сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не був жорстким. Ці теореми доводяться за однією схемою, яка в кожному випадку включає доведення двох допоміжних лем. В доведеннях цих теорем ми використовуємо єдині позначення.

**Теорема 7.2.** *Нехай $P$ — скінченна зв'язна часткова впорядкована множина, що задовольняє наступним умовам:*

- *для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке, що $\alpha_i$ і $\alpha_j$ не порівнюються;*
- *існують $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ такі, що $\alpha_u \nleq \alpha_v$.*

*Тоді сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким.*

*Доведення.* Позначимо через $X$ множину всіх $\alpha_k \in P_{\max}$ таких, що $\alpha_u \nleq \alpha_k$, а через $Y$ — множину всіх $\alpha_l \in P_{\min}$ таких, що $\alpha_l \nleq \alpha_k$ для всіх $\alpha_k \in X$. Множини $X$ і $Y$ не є порожніми: $\alpha_v \in X$, $\alpha_u \in Y$.

Визначимо дві підмножини частково впорядкованої множини $P$:

$$P'' = \{\alpha_t \in P \mid \alpha_l \leq \alpha_t \text{ для деякого } \alpha_l \in Y\}, \quad P' = P \setminus P''.$$

Тоді $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, причому $P'_{\max} \neq \emptyset$, $P''_{\max} \neq \emptyset$, $P'_{\min} \neq \emptyset$, $P''_{\min} \neq \emptyset$.

Розглянемо цілочисельну матрицю $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$, де $\alpha > 1$ і

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \leq \alpha_j; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P' \text{ або } \alpha_j \in P''; \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P'', \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

Відмітимо, что для будь-яких $\alpha_i \in P''$ і $\alpha_j \in P'$ завжди $\alpha_i \nleq \alpha_j$.

Для доведення теореми нам знадобляться наступні дві леми.

**Лема 7.3.** $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ *—зведена матриця показників.*

*Доведення.* Із властивостей рефлексивності $\alpha_i \leq \alpha_i$ випливає $\alpha_{ii} = 0$.

Покажемо, що виконуються нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_{ik} = 0$. Нерівності очевидні.
- $\alpha_{ik} = 1$. Нерівності не виконуються при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$. Але тоді $\alpha_i \leq \alpha_j$, $\alpha_j \leq \alpha_k$ і за транзитивністю отримуємо $\alpha_i \leq \alpha_k$, що суперечить рівності $\alpha_{ik} = 1$.
- $\alpha_{ik} = \alpha$. Тоді $\alpha_i \nleq \alpha_k$ і $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Якщо $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ і $\alpha_{ij} = \alpha$. Якщо ж $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_j \in P''$, $\alpha_k \in P'$ и $\alpha_{jk} = \alpha$. Тому для будь-якого $\alpha_j \in P$ маємо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$.

Із властивості антисиметричності випливає, що $\alpha_{ij}$ і $\alpha_{ji}$ при $i \neq j$ не рівні одночасно нулю. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

**Лема 7.4.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ співпадає із сагайдаком $\widetilde{Q}(P)$.*

*Доведення.* Нагадаємо, що $q_{ij} = \min\limits_{k} (\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min\left(1, \min\limits_{k \neq i,j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right)$ при $i \neq j$ і $q_{ii} = \min\limits_{k} (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \min\left(1, \min\limits_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right)$.

Нехай в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то є $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$: $\alpha_i < \alpha_j$, але не існує $\alpha_k$ такого, що $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Відповідно, $\alpha_{ij} = 0$, але $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ одночасно не рівні нулю при $k \neq i, j$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і тоді $q_{ij} = 1$, тобто в сагайдаку $Q(\mathcal{E}(\alpha))$ із точки $i$ в точку $j$ веде стрілка.

Таким чином, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Нехай $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$. Тоді в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Елемент $\alpha_i$ — максимальний, тому $\alpha_i \nleq \alpha_k$ для всіх $k \neq i$ і $\alpha_{ik} > 0$ при $k \neq i$. Аналогічно елемент $\alpha_j$ — мінімальний, тому $\alpha_{kj} > 0$ при $k \neq j$.

Можливі випадки:

- $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P''$;
- $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P'$;
- $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$;
- $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$.

В перших трьох випадках $\alpha_{ij} = 1$. Оскільки $\alpha_{ik} \geq 1$ при $k \neq i$ і $\alpha_{kj} \geq 1$ при $k \neq j$, то $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ при $k \neq i, j$. Тому $q_{ij} = 1$.

В останньому випадку $\alpha_{ij} = \alpha$. Якщо $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 1$, а $\alpha_{kj} = \alpha$. Якщо ж $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha$, а $\alpha_{kj} = 1$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ при $k \neq i, j$ і $q_{ij} = 1$.

Таким чином, якщо в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Покажемо теперь, що якщо в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$, то в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Нехай в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$, то є $q_{ij} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ для всіх $k \neq i, j$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_{ij} = 0$. Тоді $\alpha_i < \alpha_j$. Із нерівностей $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 0$ при $k \neq i, j$ випливає, що $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ не рівні одночасно нулю. Тому не існує $\alpha_k$ такого, що $\alpha_{ik} = 0$ і $\alpha_{kj} = 0$. Це означає, що $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$. І тоді в сагайдаку $Q(P)$, а відповідно і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$, є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

- $\alpha_{ij} = 1$. Тоді $\alpha_i \not\leq \alpha_j$ і $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$. (В діаграмі $Q(P)$ стрілки із $\alpha_i$ в $\alpha_j$ очевидно немає). Покажемо, що в цьому випадку $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq i, j$.

  Припустимо, що елементи $\alpha_i$ і $\alpha_j$ належать одній підмножині, для прикладу, $P'$. Тоді для будь-якого $k \neq i, j$ і такого що $\alpha_k \in P'$ із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$. Це означає, що $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P'_{\min} \subset P_{\min}$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

  У випадку, коли елементи $\alpha_i$ і $\alpha_j$ належать одній підмножині $P''$, доведення аналогічне.

  Припустимо, що $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$ (при $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ $\alpha_{ij} = \alpha$). Тоді із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ для всіх $k \neq i, j$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$. Звідси $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P''_{\min} \subset P_{\min}$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

- $\alpha_{ij} = \alpha$. Тоді із нерівностей $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$ і одне із чисел $\alpha_{ik}$ або $\alpha_{kj}$ рівне $\alpha$. Із $\alpha_{ik} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ отримуємо, що $\alpha_i$ — максимальний елемент частково впорядкованої множини $P$. Аналогично із $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ отримуємо, що $\alpha_j$ — мінімальний елемент ч.в.м. $P$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

Таким чином, ми показали, що стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є тоді і тільки тоді, коли в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

Покажемо тепер, що сагайдак $Q(\mathcal{E})$ не має петель, тобто

$$q_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right) = 0.$$

Нехай $\alpha_i \in P'$, але $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тоді існує $\alpha_k \in P'_{\max}$ такий що $\alpha_i \leq \alpha_k$. Відповідно $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Якщо $\alpha_i \in P'_{\max}$, то існує $\alpha_k \in P'$ такий, що $\alpha_k \leq \alpha_i$. Тому будемо мати $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доведення для випадку $\alpha_i \in P''$ цілком аналогічне. Таким чином, $q_{ii} = 0$ і $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. $\square$

Для сагайдака $\widetilde{Q}(P)$ ми отримали сім'ю матриць показників $\mathcal{E}(\alpha)$ таких що $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. Оскільки матриці $\mathcal{E}(\alpha)$ і $\mathcal{E}(\beta)$ не є еквівалентними при $\alpha \neq \beta$, то сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким. $\square$

**Теорема 7.5.** *Нехай $P$ — скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:*

- *для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що $\alpha_i$ і $\alpha_j$ не порівнянні;*
- *для будь-яких $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ має місце нерівність $\alpha_u \leq \alpha_v$;*
- *існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}$, $P''_{\max}$, $P'_{\min}$, $P''_{\min} \neq \emptyset$;*

*Тоді сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким.*

*Доведення.* Для кожної точки $\alpha_k \in P'$ ($\alpha_k \in P''$) в діаграмі $Q(P)$ існує шлях із $P'_{\min}$ ($P''_{\min}$) в $P'_{\max}$ ($P''_{\max}$), що проходить тільки через точки $P'$ ($P''$) і точку $\alpha_k \in P'$ ($\alpha_k \in P''$).

Розглянемо цілочисельну матрицю $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$, де $\alpha > 1$ і

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \leq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P' \text{ або } \alpha_j \in P''; \\ \alpha - 1, & \text{якщо } \alpha_i \leq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P'', \alpha_j \in P'; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \not\leq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P' \text{ або } \alpha_j \in P''; \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha_i \not\leq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P'', \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

**Лема 7.6.** *$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ — зведена матриця показників.*

*Доведення.* Очевидно $\alpha_{ii} = 0$ (це рівносильно рефлексивності $\alpha_i \leq \alpha_i$).

Покажемо, що виконуються нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_{ik} = 0$. Нерівності очевидні.
- $\alpha_{ik} = 1$. Нерівності не виконуються при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$. Але тоді $\alpha_i \leq \alpha_j$, $\alpha_j \leq \alpha_k$ і за транзитивністю отримуємо $\alpha_i \leq \alpha_k$, що суперечить рівності $\alpha_{ik} = 1$.
- $\alpha_{ik} = \alpha - 1$. Тоді $\alpha_i \leq \alpha_k$ і $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Якщо $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_{jk} = \alpha - 1$ або $\alpha_{jk} = \alpha$. Тому нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються. Якщо $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ або $\alpha_{ij} = \alpha$. Тому нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються.
- $\alpha_{ik} = \alpha$. Тоді $\alpha_i \not\leq \alpha_k$ і $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$.

  Нехай $\alpha_j \in P'$. Тоді $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ або $\alpha_{ij} = \alpha$. Якщо $\alpha_{ij} = \alpha$, то нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються. Якщо $\alpha_{ij} = \alpha - 1$, то $\alpha_i \leq \alpha_j$. Оскільки $\alpha_i \not\leq \alpha_k$, то і $\alpha_j \not\leq \alpha_k$ (інакше за транзитивністю отримаємо $\alpha_i \leq \alpha_j$). Тоді $\alpha_{jk} \geq 1$ і нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються.

  Нехай $\alpha_j \in P''$. Тоді $\alpha_{jk} = \alpha - 1$ або $\alpha_{jk} = \alpha$. Якщо $\alpha_{jk} = \alpha$, то нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються. Якщо $\alpha_{jk} = \alpha - 1$, то $\alpha_j \leq \alpha_k$. Так як $\alpha_i \not\leq \alpha_k$, то і $\alpha_i \not\leq \alpha_j$ (інакше за транзитивністю отримаємо $\alpha_i \leq \alpha_j$). Тоді $\alpha_{ij} \geq 1$ і нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ виконуються.

Оскільки із $\alpha_i \leq \alpha_j$ і $\alpha_j \leq \alpha_i$ випливає $\alpha_i = \alpha_j$, тобто $i = j$, то при $i \neq j$ $\alpha_{ij}$ та $\alpha_{ji}$ не рівні нулю одночасно. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

**Лема 7.7.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ співпадає із сагайдаком $\widetilde{Q}(P)$.*

*Доведення.* Нехай в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$ ($i \neq j$). Це значить, що $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$, тобто $\alpha_i < \alpha_j$, але не існує $\alpha_k$ такого, що $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$. Тоді $\alpha_{ij} = 0$. Оскільки $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$, то для всіх $k \neq i, j$ не виконується подвійна нерівність $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Отже, $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ не можуть одночасно бути нулю. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і тоді $q_{ij} = 1$. В сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

- $\alpha_i \in P''$ і $\alpha_j \in P'$. Тоді $\alpha_{ij} = \alpha - 1$.

  Нехай $\alpha_k \in P''$. Тоді $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ або $\alpha_{kj} = \alpha$. При $\alpha_{kj} = \alpha$ маємо $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$. При $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ маємо $\alpha_k \leq \alpha_j$. Так як $\alpha_i \not\leq \alpha_j$ і $\alpha_k \leq \alpha_j$, то $\alpha_i \not\leq \alpha_k$ (інакше отримали б $\alpha_i \leq \alpha_k \leq \alpha_j$, що протирічить тому, що $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$). Тому $\alpha_{ik} \geq 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$.

  Нехай $\alpha_k \in P'$. Тоді $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ або $\alpha_{ik} = \alpha$. При $\alpha_{ik} = \alpha$ маємо $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$. При $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ маємо $\alpha_i \leq \alpha_k$. Так як $\alpha_i \leq \alpha_j$ і $\alpha_i \leq \alpha_k$, то $\alpha_k \not\leq \alpha_j$ (інакше отримали б $\alpha_i \leq \alpha_k \leq \alpha_j$, що протирічить тому, що $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$). Тому $\alpha_{kj} \geq 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$.

Отже, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Нехай $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$ і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Так як $\alpha_i \in P_{\max}$, то $\alpha_{ik} > 0$ для всіх $k \neq i$. Аналогічно із $\alpha_j \in P_{\min}$ випливає, що $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq j$. Знову розглянемо випадки:

- $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$. Тоді $\alpha_{ij} = 1$ і нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ виконуються для всіх $k \neq i, j$. Отже, $q_{ij} = 1$.

- $\alpha_i \in P''$ і $\alpha_j \in P'$. Тоді $\alpha_{ij} = \alpha$.

  Нехай $\alpha_k \in P''$. Так як $\alpha_i \in P''_{\max}$, то $\alpha_i \not\leq \alpha_k$ для всіх $k \neq i$ і тоді $\alpha_{ik} = 1$. Оскільки $\alpha_j \in P_{\min}$, то $\alpha_k \not\leq \alpha_j$ для всіх $k \neq j$. Тому $\alpha_{kj} = \alpha$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ виконуються для всіх $k \neq i, j$.

  Нехай $\alpha_k \in P'$. Так як $\alpha_i \in P''_{\max}$ і $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_i \not\leq \alpha_k$ для всіх $k \neq i$ і $\alpha_{ik} = \alpha$. Оскільки $\alpha_j \in P'_{\min}$ і $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_k \not\leq \alpha_j$ для всіх $k \neq j$ і тому $\alpha_{kj} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ виконуються для всіх $k \neq i, j$. Отже, $q_{ij} = 1$.

Ми показали, що для будь-якого $k \neq i, j$ маємо $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ і тому $q_{ij} = 1$.

Таким чином, якщо в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$ $(i \neq j)$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Покажемо тепер, що якщо в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$, то в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка из $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Пусть в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$, тобто $q_{ij} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ для всіх $k \neq i, j$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$. Тоді $\alpha_{ij} = 0$ при $\alpha_i \leq \alpha_j$ і $\alpha_{ij} = 1$ при $\alpha_i \not\leq \alpha_j$. Якщо $\alpha_{ij} = 0$ і $\alpha_i \leq \alpha_j$, то не існує $k$, відмінного від $i, j$ і такого, що $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$. Тому не існує $k \neq i, j$ такого що $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$, тобто $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$. Це значить, що в діаграмі $Q(P)$, а отже і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$, є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

  Якщо $\alpha_{ij} = 1$, то $\alpha_i \not\leq \alpha_j$. Із $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$ випливає, що $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ не перевищує 1 для довільного $k$. Оскільки $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = 1$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 1$ для всіх $k \neq i, j$. Це значить, що $\alpha_i \in P'_{\max}$ і $\alpha_j \in P''_{\min}$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

- $\alpha_i \in P''$ і $\alpha_j \in P'$. Тоді $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ при $\alpha_i \leq \alpha_j$ і $\alpha_{ij} = \alpha$ при $\alpha_i \not\leq \alpha_j$.

  - Нехай $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ і $\alpha_i \leq \alpha_j$.
    - Якщо $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 0$ при $\alpha_i \leq \alpha_k$ і $\alpha_{ik} = 1$ при $\alpha_i \not\leq \alpha_k$, $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ при $\alpha_k \leq \alpha_j$ і $\alpha_{kj} = \alpha$ при $\alpha_k \not\leq \alpha_j$. Так як $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha - 1$, то випадок, коли $\alpha_{ik} = 0$ і $\alpha_{kj} = \alpha - 1$, неможливий. Тому не існує $k \neq i, j$ такого що $\alpha_i < \alpha_k$ і $\alpha_k < \alpha_j$. Це значить, що елемент $\alpha_j$ покриває елемент $\alpha_i$. Отже, в діаграмі $Q(P)$ і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.
    - Якщо $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ при $\alpha_i \leq \alpha_k$ і $\alpha_{ik} = \alpha$ при $\alpha_i \not\leq \alpha_k$, $\alpha_{kj} = 0$ при $\alpha_k \leq \alpha_j$ і $\alpha_{kj} = 1$ при $\alpha_k \not\leq \alpha_j$. Так як $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha - 1$, то випадок, коли $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ і $\alpha_{kj} = 0$, неможливий. Тому не існує $k \neq i, j$ такого що $\alpha_i < \alpha_k$ і $\alpha_k < \alpha_j$. Це значить, що елемент $\alpha_j$ покриває елемент $\alpha_i$. Отже, в діаграмі $Q(P)$ і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

– Нехай $\alpha_{ij} = \alpha$. Тоді $\alpha_i \nleq \alpha_j$. Так як $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ не перевищують $\alpha$, то із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq i, j$. Враховуючи, що $\alpha_{ij} = \alpha > 0$, маємо: $\alpha_{ik} > 0$ для всіх $k \neq i$ і $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq j$. Це значить, що не існує $k \neq i$ такого, що $\alpha_i \leq \alpha_k$ і не існує $k \neq j$ такого, що $\alpha_k \leq \alpha_j$. Тому $\alpha_i \in P_{\max}$ і $\alpha_j \in P_{\min}$ і тоді в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ із $\alpha_i$ в $\alpha_j$ веде стрілка.

Таким чином, ми показали, що стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є тоді і тільки тоді, коли в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

Покажемо тепер, що сагайдак $Q(\mathcal{E})$ не має петель, тобто

$$q_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right) = 0.$$

Нехай $\alpha_i \in P'$, але $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тоді існує $\alpha_k \in P'_{\max}$ такий, що $\alpha_i \leq \alpha_k$. Отже $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Якщо $\alpha_i \in P'_{\max}$, то існує $\alpha_k \in P'$ таке, що $\alpha_k \leq \alpha_i$. Тому будемо мати $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доведення для випадку $\alpha_i \in P''$ цілком аналогічне. Таким чином, $q_{ii} = 0$ і $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. □

Для сагайдака $\widetilde{Q}(P)$ ми отримаємо сім'ю матриць показників $\mathcal{E}(\alpha)$ таких, що $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. Оскільки матриці $\mathcal{E}(\alpha)$ і $\mathcal{E}(\beta)$ не є еквівалентними при $\alpha \neq \beta$, то сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким. □

**Теорема 7.8.** *Нехай $P$ — скінченна незв'язна частково впорядкована множина. Тоді сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким.*

*Доведення.* Нехай $P = P' \cup P''$ і будь-які два елементи із підмножин $P'$ і $P''$ не порівняні.

Тоді $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, $P'_{\max} \neq \emptyset$, $P''_{\max} \neq \emptyset$, $P'_{\min} \neq \emptyset$, $P''_{\min} \neq \emptyset$.

Розглянемо цілочисельну матрицю $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$, де $\alpha > 1$ і

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \leq \alpha_j; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P' \text{ або } \alpha_j \in P''; \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P'', \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

**Лема 7.9.** *$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ — зведена матриця показників.*

*Доведення.* Із властивості рефлексивності $\alpha_i \leq \alpha_i$ випливає $\alpha_{ii} = 0$.

Покажемо, що виконуються нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_{ik} = 0$. Нерівності очевидні.
- $\alpha_{ik} = 1$. Нерівності не виконуються при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$. Але тоді $\alpha_i \leq \alpha_j$, $\alpha_j \leq \alpha_k$ и за транзитивністю отримуємо $\alpha_i \leq \alpha_k$, що суперечить рівності $\alpha_{ik} = 1$.
- $\alpha_{ik} = \alpha$. Тоді $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Якщо $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_{jk} = \alpha$. Якщо $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_{ij} = \alpha$. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$.

Із властивості антисиметричності випливає, що $\alpha_{ij}$ и $\alpha_{ji}$ при $i \neq j$ не рівні одночасно нулю. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

**Лема 7.10.** *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ співпадає з сагайдаком $\widetilde{Q}(P)$.*

*Доведення.* Нехай в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, тобто $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$: $\alpha_i < \alpha_j$, але не існує $\alpha_k$ такого, що $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Отже, $\alpha_{ij} = 0$, але $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ одночасно не рівні нулю при $k \neq i, j$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і тоді $q_{ij} = 1$, тобто в сагайдаку $Q(\mathcal{E}(\alpha))$ із точки $i$ в точку $j$ веде стрілка.

Таким чином, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Нехай $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$. Тоді в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Елемент $\alpha_i$ — максимальний, тому $\alpha_i \nleq \alpha_k$ для всіх $k \neq i$ і $\alpha_{ik} > 0$ при $k \neq i$. Аналогічно елемент $\alpha_j$ — мінімальний, тому $\alpha_{kj} > 0$ при $k \neq j$.

Можливі випадки:

- $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P''$;
- $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P'$;
- $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$;
- $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$.

В перших трьох випадках $\alpha_{ij} = 1$. Так як $\alpha_{ik} \geq 1$ при $k \neq i$ і $\alpha_{kj} \geq 1$ при $k \neq j$, то $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}-\alpha_{ij} \geq 1$ при $k \neq i, j$. Тому $q_{ij} = 1$.

В останньому випадку $\alpha_{ij} = \alpha$. Якщо $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 1$, а $\alpha_{kj} = \alpha$. Якщо ж $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha$, а $\alpha_{kj} = 1$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ при $k \neq i, j$ і $q_{ij} = 1$.

Таким чином, якщо в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$, то в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$.

Покажемо тепер, що якщо в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$, то в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. Нехай в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є стрілка із точки $i$ в точку $j$, тобто $q_{ij} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$. Розглянемо випадки:

- $\alpha_{ij} = 0$. Тоді $\alpha_i < \alpha_j$. Із нерівностей $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 0$ при $k \neq i, j$ следует, что $\alpha_{ik}$ і $\alpha_{kj}$ не рівні одночасно нулю. Тому не існує $\alpha_k$ такого, що $\alpha_{ik} = 0$ і $\alpha_{kj} = 0$. Це значить, що $\alpha_j$ покриває $\alpha_i$. І тоді в сагайдаку $Q(P)$, а отже і в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$, є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

- $\alpha_{ij} = 1$. Тоді $\alpha_i \nleq \alpha_j$ і $\alpha_i \in P'$ або $\alpha_j \in P''$. (В діаграмі $Q(P)$ стрілки із $\alpha_i$ в $\alpha_j$ очевидно немає). Покажемо, що в цьому випадку $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq i, j$.

  Припустимо, що елементи $\alpha_i$ и $\alpha_j$ належать одній підмножині, для прикладу, $P'$. Тоді для будь-якого $k \neq i, j$ і такого що $\alpha_k \in P'$ із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$. Це значить, що $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P'_{\min} \subset P_{\min}$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$. У випадку, коли елементи $\alpha_i$ і $\alpha_j$ належать одній підмножині $P''$ доведення аналогічне.

  Припустимо, що $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$ (при $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ $\alpha_{ij} = \alpha$). Тоді $\alpha_{ik} \leq 1$, $\alpha_{kj} \leq 1$ і із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geq 1$ для всіх $k \neq i, j$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$. Звідси $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P''_{\min} \subset P_{\min}$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

- $\alpha_{ij} = \alpha$. Тоді із нерівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ випливає, що $\alpha_{ik} > 0$ і $\alpha_{kj} > 0$ і одне із чисел $\alpha_{ik}$ або $\alpha_{kj}$ рівне $\alpha$. Із $\alpha_{ik} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ отримуємо, що $\alpha_i$ — максимальний елемент частково впорядкованої множини $P$. Аналогічно із $\alpha_{kj} > 0$ для всіх $k \neq i, j$ і $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ отримуємо, що $\alpha_j$ — мінімальний Елемент ч.в.м. $P$. Тому в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

Таким чином, ми показали, що стрілка із точки $i$ в точку $j$ $(i \neq j)$ в сагайдаку $Q(\mathcal{E})$ є тоді і тільки тоді, коли в сагайдаку $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка із $\alpha_i$ в $\alpha_j$.

Покажемо тепер, що сагайдак $Q(\mathcal{E})$ не має петель, тобто

$$q_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right) = 0.$$

Нехай $\alpha_i \in P'$, але $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тоді існує $\alpha_k \in P'_{\max}$ такий що $\alpha_i \leq \alpha_k$. Отже $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Якщо $\alpha_i \in P'_{\max}$, то існує $\alpha_k \in P'$ такий, що $\alpha_k \leq \alpha_i$. Тому будемо мати $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доведення для випадку $\alpha_i \in P''$ цілком аналогічне. Таким чином, $q_{ii} = 0$ і $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. □

Для сагайдака $\widetilde{Q}(P)$ ми отримали сім'ю матриць показників $\mathcal{E}(\alpha)$ таких що $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \widetilde{Q}(P)$. Оскільки матриці $\mathcal{E}(\alpha)$ і $\mathcal{E}(\beta)$ не є еквівалентними при $\alpha \neq \beta$, то сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким. $\square$

**Теорема 7.11.** *Нехай $P$ — скінченна частково впорядкована множина з єдиним мінімальним елементом. Тоді сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ є жорстким.*

*Доведення.* Позначимо $Q = \widetilde{Q}(P)$. Нехай $P_{\min} = \{\alpha_1\}$ і нехай матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Перетвореннями еквівалентності першого типу можна зробити першу строку матриці $\mathcal{E}$ нульовою: $\alpha_{1j} = 0$ для всіх $j$. Сагайдак при цьому не зміниться.

Кожній стрілці $\sigma_{ij}$ сагайдака $Q$, що веде із точки $i$ в точку $j$, відповідає твірний радикала $R$ черепичного порядку $\Lambda$ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}$. Нехай $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$. Тоді твірний радикала, що відповідає стрілці $\sigma_{ij}$, має вид $\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}$, де $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Сукупність всіх елементів $\{\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}\}$ (по всіх стрілках сагайдака $Q$) — це мінімальна система твірних радикала $R$. Всякий елемент $r \in R_{ij} = e_{ii} R e_{jj}$ представимо у вигляді $r = \sum (\pi^{\beta_{ii_1}} a_{ii_1} e_{ii_1})(\pi^{\beta_{i_1 i_2}} a_{i_1 i_2} e_{i_1 i_2}) \cdots (\pi^{\beta_{i_k j}} a_{i_k j} e_{i_k j})$, де сума береться по всіх шляхах $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \cdots \sigma_{i_k j}$ із точки $i$ в точку $j$. Тому $r = \sum \pi^{\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \cdots + \beta_{i_k j}} a_{ij} e_{ij}$, де $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Звідси $\beta_{ij} = \min(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \cdots + \beta_{i_k j})$ (тут мінімум береться по всіх шляхах $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \cdots \sigma_{i_k j}$ із точки $i$ в точку $j$). Сагайдак $Q$ не має петель, тому $\beta_{i_l i_{l+1}} = \alpha_{i_l i_{l+1}}$ і $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ при $i \neq j$, $\beta_{ii} = 1$. Маємо рівності

$$\alpha_{ij} = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k j}) \text{ при } i \neq j. \tag{7}$$

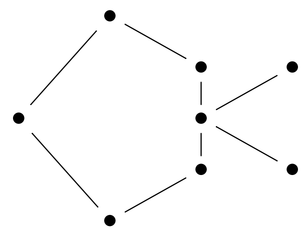
$$1 = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k i}). \tag{8}$$

Нехай $\alpha_m \in P_{\max}$. Із рівностей $\alpha_{1m} = \min(\alpha_{1i_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k m})$, де мінімум береться по всіх шляхах $\sigma_{1i_1}\sigma_{i_1 i_2} \cdots \sigma_{i_k m}$ із точки 1 в точку $m$, і $\alpha_{1j} = 0$ для всіх $j$, випливає, що всім стрілкам $\sigma_{ij}$ діаграми $Q(P)$ відповідають $\alpha_{ij} = 0$. Тоді із рівностей $1 = \min(\alpha_{1i_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k m}\alpha_{m1})$ отримуємо $\alpha_{m1} = 1$ для всіх $m$ таких, що $\alpha_m \in P_{\max}$. Оскільки мінімум в (7) досягається для шляху $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \cdots \sigma_{i_k j}$, що не має циклів, то серед стрілок $\sigma_{ii_1}, \sigma_{i_1 i_2}, \ldots, \sigma_{i_k j}$ може бути не більше чим одна, що веде із $\alpha_m \in P_{\max}$ в $\alpha_1 \in P_{\min}$, то $\alpha_{ij} \leq 1$. Отже, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ є $(0,1)$-матрицею. По ній можна побудувати скінченну частково впорядковану множину $S$ таку, що $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}$. Тоді $\widetilde{Q}(S) = Q(\mathcal{E}) = \widetilde{Q}(P)$. За теоремою 4.8 частково впорядкована множина $S$ і $P$ є $Q$-еквівалентними. Тому матриці показників таких множин еквівалентні. Таким чином, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_P$. Теорема доведена. $\square$

Асоційовані сагайдаки $Q$-еквівалентних частково впорядкованих множин ізоморфні, тому справедливий наслідок.

**Наслідок 7.12.** *Якщо в скінченній частково впорядкованій множині $P$ існує елемент $\alpha$, порівняний з усіма елементами цієї множини, то сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ є жорстким.*

**Приклад 7.13.** *Неважко перевірити, що частково впорядкована множина*



*має жорсткий асоційований сагайдак. Ця множина не задовольняє умові наслідку 7.12. Для цієї множини виконуються перші дві умови теореми 7.5 і не виконується третя умова.*

**Теорема 7.14.** *Нехай $Q = Q(\mathcal{E})$ — сагайдак зведеної матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, $E = e_{11} + \ldots + e_{ss} + e_{s+1s+1} + \ldots + e_{nn}$ — розклад одиничної матриці в суму ідемпотентних матричних одиниць, $e = e_{11} + \ldots + e_{ss}$, $f = e_{s+1s+1} + \ldots + e_{nn}$, $\mathcal{E}_1 = e\mathcal{E}e$, $\mathcal{E}_2 = f\mathcal{E}f$ — зведені матриці* *показників, $Q_1 = Q(\mathcal{E}_1)$, $Q_2 = Q(\mathcal{E}_2)$ — їх сагайдаки. Якщо $[Q] = \begin{pmatrix} [Q_1] & Q_{12} \\ Q_{21} & [Q_2] \end{pmatrix}$, то сагайдак $Q$ не є жорстким.*

*Доведення.* За означенням сагайдак $Q$ є жорстким, якщо існує єдина з точністю до еквівалентності зведена матриця показників $\mathcal{E}$. Таким чином, в даній теоремі нам потрібно показати, що існує не одна зведена матриця показників, яка не еквівалентна даній.

Згідно умов теореми матриця показників $\mathcal{E}$ має вигляд $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$ і відповідно сагайдаки $Q_1 = Q(\mathcal{E}_1)$, $Q_2 = Q(\mathcal{E}_2)$. Розглянемо матрицю $\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} + tU & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$, де $t$ — натуральне число, $U$ — матриця з одиниць.

Нехай $\mathcal{E}' = (\alpha'_{ij})$. Тоді

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \leq s \text{ або } j > s \\ \alpha_{ij} + t, & \text{якщо } i > s \text{ і } j \leq s \end{cases} \tag{9}$$

Позначимо $\mathcal{E}_1 = (\alpha^{(1)}_{ij}) \quad i,j = 1,\ldots,s$, $\mathcal{E}_2 = (\alpha^{(2)}_{ij}) \quad i,j = s+1,\ldots,n$, $\mathcal{E}_{12} = (\alpha^{(12)}_{ij}) \quad i = 1,\ldots,s, j = s+1,\ldots,n$, $\mathcal{E}_{21} = (\alpha^{(21)}_{ij}) \quad i = s+1,\ldots,n$,
$j = 1,\ldots,s$.

$\mathcal{E}$ — зведена матриця показників, тобто виконуються наступні умови:

- $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,n$;
- $\alpha_{ik} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для будь-яких $i,j,k$;
- $\alpha_{ii} = 0$ для будь-яких $i$.

Покажемо, що $\mathcal{E}'$ є зведеною матрицею показників.

Оскільки на діагоналі в $\mathcal{E}'$ матриці $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$, то звідси випливає, що $\alpha'_{ii} = 0$ в $\mathcal{E}'$. Якщо $i \leq s$ або $k > s$, то $\alpha'_{ij} + \alpha'_{jk} \geq \alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik} = \alpha'_{ik}$.
Якщо $i > s$ і $k \leq s$, то $\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + t$.

Можливі наступні випадки:

(1) $j \leq s$. Тоді $\alpha'_{ij} + \alpha'_{jk} = (\alpha_{ij} + t) + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik} + t = \alpha'_{ik}$;

(2) $j > s$. Тоді $\alpha'_{ij} + \alpha'_{jk} = \alpha_{ij} + (\alpha_{jk} + t) \geq \alpha_{ik} + t = \alpha'_{ik}$.

Отже, у всіх випадках $\alpha'_{ij} + \alpha'_{jk} \geq \alpha'_{ik}$ і крім цього $\alpha'_{ij} + \alpha'_{ji} \geq \alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$, при $i \neq j$. Всі умови зведеності виконуються, тому $\mathcal{E}'$ – зведена матриця показників.

Далі покажемо, що $Q(\mathcal{E}') = Q = Q(\mathcal{E})$.
Нехай $[Q] = (q_{ij})$, $[Q_1] = (q^{(1)}_{ij}), i,j = 1,...,s$, $[Q_2] = (q^{(2)}_{ij}), i,j = s+1,...,n$ і $[Q(\mathcal{E}')] = (q'_{ij})$. Покажемо, що $q'_{ij} = q_{ij}$, при $i \neq j$. Розглянемо можливі випадки:

1. Нехай $i,j \leq s$. Тоді

$$\begin{aligned} q'_{ij} &= \min\bigl(1, \min_{1\leq k\leq n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr) = \\ &\min\bigl(1, \min_{1\leq k\leq s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij}), \min_{s+1\leq k\leq n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr) = \\ &\min\bigl(\min(1, \min_{1\leq k\leq s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})), \min(1, \min_{s+1\leq k\leq n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij}))\bigr) = \\ &\min\bigl(\min(1, \min_{1\leq k\leq s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})), \min_{s<k\leq n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr). \end{aligned}$$

Використовуючи (1) отримаємо наступне:

$$q'_{ij} = \min\bigl(\min(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})), \min_{s<k\le n}(\alpha_{ik} + (\alpha_{kj} + t) - \alpha_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(q_{ij}^{(1)}, \min_{s<k\le n}(\alpha_{ik} + (\alpha_{kj} + t) - \alpha_{ij})\bigr).$$

Оскільки $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ik} \ge 0$, то $\min_{s<k\le n}\bigl(\alpha_{ik} + (\alpha_{kj} + t) - \alpha_{ij})\bigr) \ge t \ge 1$. Тому $q'_{ij} = \min\bigl(q_{ij}^{(1)}, t\bigr) = q_{ij}^{(1)} = q_{ij}$.

2. Нехай $i > s, j \le s$. Тоді

$$q'_{ij} = \min\bigl(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij}), \min_{s<k\le n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{k\ne j, 1\le k\le s}((\alpha_{ik} + t) + \alpha_{kj} - (\alpha_{ij} + t)), \min_{k\ne i, s<k\le n}(\alpha_{ik} + (\alpha_{kj} + t) - (\alpha_{ij} + t))\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{k\ne j, 1\le k\le s}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}), \min_{k\ne i, s<k\le n}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{1\le k\le n}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\bigr) = q_{ij}.$$

3. Нехай $i \le s, j > s$. Тоді

$$q'_{ij} = \min\bigl(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij}), \min_{s<k\le n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{k\ne i,j, 1\le k\le n}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\bigr) = q_{ij}.$$

4. Нехай $i, j \ge s$. Тоді

$$q'_{ij} = \min\bigl(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij}), \min_{s<k\le n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{kj} - \alpha'_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{k\ne j, 1\le k\le s}((\alpha_{ik} + t) + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}), \min_{k\ne i, s<k\le n}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\bigr) =$$
$$\min\bigl(t, q_{ij}^{(2)}\bigr) = q_{ij}^{(2)} = q_{ij}.$$

Покажемо, що $q_{ii} = q'_{ii}$. Розглянемо випадки:

1. Нехай $i > s$. Тоді

$$q'_{ii} = \min\bigl(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{ki} - 1), \min_{s<k\le n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{ki} - 1)\bigr) =$$
$$\min\bigl(1, \min_{1\le k\le s}((\alpha_{ik} + t) + \alpha_{ki} - 1), \min_{s<k\le n}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\bigr).$$

Оскільки $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$, то звідси випливає, що $\alpha_{ik} + t + \alpha_{ki} - 1 \ge t \ge 1$.
Тому, $q'_{ii} = \min\bigl(t, q_{ii}^{(2)}\bigr) = q_{ii}^{(2)} = q_{ii}$.

2. Нехай $i < s$. Тоді

$$q'_{ii} = \min\big(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{ki} - 1), \min_{s<k\le n}(\alpha'_{ik} + \alpha'_{ki} - 1)\big) =$$
$$\min\big(1, \min_{1\le k\le s}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1), \min_{s<k\le n}(\alpha_{ik} + (\alpha_{ki} + t) - 1)\big) =$$
$$\min\big(q_{ii}^{(1)}, t\big) = q_{ii}^{(1)} = q_{ii}.$$

Отже, $q'_{ij} = q_{ij}$ для будь-яких $i, j$.

Покажемо, що $\mathcal{E}'$ не еквівалентна $\mathcal{E}$. Дійсно

$$\sum_{1\le i,j\le n} \alpha'_{ij} = \sum_{i,j\le s} \alpha'_{ij} + \sum_{i\le s<j} \alpha'_{ij} + \sum_{j\le s<i} \alpha'_{ij} + \sum_{i,j>s} \alpha'_{ij} = \sum_{i,j\le s} \alpha_{ij} + \sum_{i\le s<j} \alpha_{ij} +$$
$$+ \sum_{j\le s<i} (\alpha_{ij} + t) + \sum_{i,j>s} \alpha_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij} + \sum_{j\le s, i>s} t = \sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij} + t(n-s)\cdot s > \sum_{i,j\le s} \alpha_{ij}.$$

Тому зведена матриця показників $\mathcal{E}'$ не може бути еквівалентною зведеній матриці показників $\mathcal{E}$.

Отже, $Q$ – не жорсткий. Теорема доведена.

□

Дана теорема є узагальненим випадком теорем 7.2, 7.5 і 7.8. Якщо в доведенні теорем 7.2, 7.5, 7.8 частково впорядковані множини занумерувати наступним чином: $P^{'} = \{\alpha_1, ...., \alpha_s\}$, $P^{''} = \{\alpha_{s+1}, ...., \alpha_n\}$), то матриця показників $\mathcal{E}(\alpha)$ матиме вигляд такий як $\mathcal{E}'$ у теоремі 7.14. Наприклад, у доведенні теореми 7.8 матриця показників $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$, де $\alpha > 1$ і

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \le \alpha_j; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P' \text{ або } \alpha_j \in P''; \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } \alpha_i \in P'', \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

Для будь-яких $\alpha_i \in P''$ і $\alpha_j \in P'$ завжди $\alpha_i \nleq \alpha_j$.

Звідси

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \le \alpha_j; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } i \le s \text{ або } j > s; \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha_i \nleq \alpha_j \text{ і } i > s, j \le s. \end{cases}$$

Таким чином зведена матриця показників $\mathcal{E}(P)$ матиме вигляд

$$\mathcal{E}(P) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(P^{'}) & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} + \alpha U & \mathcal{E}(P^{''}) \end{pmatrix}$$

Звідси видно, що $\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}'$. Таке ж отримуємо і в теоремах 7.2, 7.5.

Теореми 7.2, 7.5, 7.8 про нежорсткість сагайдака $Q(P)$ можна узагальнитти наступним чином.

**Теорема 7.15.** *Нехай $P$ — скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:*

- *для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що $\alpha_i$ і $\alpha_j$ не порівнянні;*
- *існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}$, $P''_{\max}$, $P'_{\min}$, $P''_{\min} \neq \emptyset$;*

*Тоді сагайдак $\widetilde{Q}(P)$ не є жорстким.*

**Теорема 7.16.** *Допустимий сагайдак $Q$, який має хоча б одну петлю, не є жорстким.*

*Доведення.* Нехай $Q$ — допустимий сагайдак, який має хоча б одну петлю. Тоді існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$. Можна вважати, що $\alpha_{i1} = 0$ для всіх $i$ (цього можна досягти еквівалентними перетвореннями 1-го типу). Також можна вважати, що $q_{11} = 1$ (це досягається еквівалентними перетвореннями 2-го типу).

За матрицею $\mathcal{E}$ визначимо множину $M \subseteq \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ двома умовами:

1. Якщо $\alpha_{ij}$ знаходиться в першому стовпчику, або не є максимальним елементом в $j$-ому стовпчику, то $\alpha_{ij} \in M$;

2. Якщо $\alpha_{ik} \in M, \alpha_{kj} \in M$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, то $\alpha_{ij} \in M$.

З визначення множини  маємо, що цій множині можуть не належати тільки максимальні в своєму стовпчику елементи.

Розглянемо деякі властивості множини $M$.

(a) $\alpha_{1j} \notin M$ для $j > 1$. Зокрема, $M \neq \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Дійсно, з нерівності $\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{i1} + \alpha_{1j} = 0 + \alpha_{1j} = \alpha_{1j}$ випливає, що $\alpha_{1j}$ $(j > 1)$ є максимальним елементом в $j$-ому стовпчику. Тому він не може належати множині $M$ за умовою 1). Не може він належати множині $M$ і за умовою 2), бо не існує $k$ такого, що $\alpha_{1j} \leqslant \alpha_{1k} + \alpha_{kj}$, де $\alpha_{1k}$, $\alpha_{kj}$ належать $M$.

Отже, $\alpha_{1j} \notin M$ для $j > 1$ і тому $M$ є власною підмножиною $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

(b) Якщо $\alpha_{ij} < 2$, то $\alpha_{ij} \in M$. Якщо $\alpha_{ij} \notin M$, то $\alpha_{ij} \geqslant 2$.

З рівності

$$1 = q_{11} = \min\left(1, \min_{k \neq 1} (\alpha_{1k} + \alpha_{k1} - 1)\right)$$

отримуємо, що $\alpha_{1k} = \alpha_{1k} + \alpha_{k1} > 1$ для всіх $k > 1$. Тому максимальний елемент в $k$-ому стовпчику $(k > 1)$ завжди більший, ніж 1. За умовою 1) всі елементи $\alpha_{ij}$ $(j > 1)$, які не перевищують 1, належать множині $M$.

(c) $\alpha_{ii} \in M$ для всіх $i$.

При $i > 1$ (c) є частковим випадком (b). $\alpha_{11} \in M$ за умовою 1).

За матрицею показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ побудуємо матрицю $B = (\beta_{ij})$ наступним чином:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, \text{ якщо } \alpha_{ij} \in M; \\ \alpha_{ij} + 1, \text{ якщо } \alpha_{ij} \notin M. \end{cases}$$

Наприклад. $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо множину $M$:

після першого кроку $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & & 3 \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$,

після другого кроку $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо матрицю $B$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Твердження 7.17.** *$B$ — зведена матриця показників.*

*Доведення.* За властивістю (c) $\alpha_{ii} \in M$ для всіх $i$. Тому $\beta_{ij} = \alpha_{ii} = 0$ для всіх $i$.

Покажемо, що для елементів матриці $B$ виконуються нерівності $\beta_{ik} + \beta_{kj} \geqslant \beta_{ij}$. Припустимо супротивне, тобто $\beta_{ik} + \beta_{kj} < \beta_{ij}$ для деяких $i, j, k$. Оскільки за визначенням $(\beta_{ij})$ $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij} \leqslant \alpha_{ij}+1$ та $\alpha_{ik}+\alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij}$, то $\alpha_{ij}+1 \geqslant \beta_{ij} > \beta_{ik}+\beta_{kj} \geqslant \alpha_{ik}+\alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij}$. Останній ланцюг нерівностей можливий лише при $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + 1$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$. Рівності для $\beta_{ik}$, $\beta_{kj}$, $\beta_{ij}$ означають, що $\alpha_{ik} \in M$, $\alpha_{kj} \in M$, $\alpha_{ij} \notin M$. Тоді за умовою 2) визначення множини маємо $\alpha_{ij} = \alpha_{ik}+\alpha_{kj} \in M$. Отримали протиріччя. Отже, $B$ — матриця показників. $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників. Тому $\beta_{ij} + \beta_{ji} \geqslant \alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ при $j \neq i$. Отже, $B$ — зведена матриця показників. Твердження доведено. □

**Твердження 7.18.** $Q(B) = Q(\mathcal{E})$.

*Доведення.* Нехай $Q(B) = \left(\overline{q}_{ij}\right)$. З визначення сагайдака матриці показників, маємо $q_{ij} = 0$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли існує $k \neq i, j$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$; $\overline{q}_{ij} = 0$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли існує $l \neq i, j$ таке, що $\beta_{il} + \beta_{lj} = \beta_{ij}$.

Розглянемо випадки:

1) $\alpha_{ij} \notin M$;

2) $\alpha_{ij} \in M$.

1) Нехай $\alpha_{ij} \notin M$. Тоді елемент $\alpha_{ij}$ — максимальним в $j$-ому стовпчику ($j > 1$). З нерівності $\alpha_{1j} = \alpha_{i1}+\alpha_{1j} \geqslant \alpha_{ij}$ отримуємо, що $\alpha_{1j} = \alpha_{ij}$. Тому $\alpha_{i1}+\alpha_{1j} = \alpha_{ij}$ і $q_{ii} = 0$. Оскільки $\alpha_{i1} = 0 \in M$, $\alpha_{1j} \notin M$, $\alpha_{ij} \notin M$, то $\beta_{i1} = \alpha_{i1} = 0$, $\beta_{1j} = \alpha_{1j} + 1$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + 1$. Маємо рівність $\beta_{i1} + \beta_{1j} = \beta_{ij}$ і тому $\overline{q}_{ij} = 0$. Отже, якщо $\alpha_{ij} \notin M$, то $q_{ii} = \overline{q}_{ij} = 0$.

2) Нехай $\alpha_{ij} \in M$.

Припустимо, що $q_{ij} = 0$. Якщо $\alpha_{ij}$ — максимальний елемент в $j$-ому стовпчику, то за умовою 2) визначення множини $M$ $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, де $\alpha_{ik} \in M$, $\alpha_{kj} \in M$ при $k \neq i, j$.

Тоді $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$, $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\beta_{ij} = \beta_{ik} + \beta_{kj}$. Звідки $\overline{q}_{ij} = 0$.

Якщо $\alpha_{ij}$ не є максимальним елементом в $j$-ому стовпчику, то з рівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$ при $k \neq i, j$ маємо $\alpha_{kj} \leqslant \alpha_{ij}$. Тому $\alpha_{kj}$ теж не є максимальним елементом в $j$-ому стовпчику і $\alpha_{kj} \in M$.

При $\alpha_{ik} \notin M$ елемент $\alpha_{ik}$ є максимальним в $k$-ому стовпчику ($k > 1$) і $\alpha_{ik} = \alpha_{1k}$. Тоді $\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{1k} + \alpha_{kj} \geqslant \alpha_{1j}$. Отримали протиріччя, бо $\alpha_{1j}$ — максимальний елемент в $j$-го стовпчику. Отже $\alpha_{ik} \in M$. Тому $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ і $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$. Отримали $\overline{q}_{ij} = 0$.

Таким чином, якщо $q_{ij} = 0$, то $\overline{q}_{ij} = 0$.

Навпаки, нехай $\overline{q}_{ij} = 0$. Тоді $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$, $k \neq i, j$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ $(\alpha_{ij} \in M)$.

Якщо припустити, що $\alpha_{ik} \notin M$ або $\alpha_{kj} \notin M$, то отримаємо протиріччя:

$\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \beta_{ik} + \beta_{kj} \geqslant \alpha_{ik} + \alpha_{kj} + 1 \geqslant \alpha_{ij} + 1$.

Отже, $\alpha_{ik} \in M$ і $\alpha_{kj} \in M$. Тоді $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\alpha_{ij} = \alpha_{ik}+\alpha_{kj}$. Звідси $q_{ij} = 0$. Твердження доведено. □

З властивості (a) і визначення матриці $B$ випливає, що $\sum\limits_{i,j} \beta_{ij} > \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}$. Тому за ??? матриця показників $B$ не еквівалентна матриці показників $\mathcal{E}$.

Таким чином, існує принаймі дві нееквівалентні матриці показників $\mathcal{E}$ і $B$ такі, що $Q(\mathcal{E}) = Q(B) = Q$. Тому за означенням сагайдак $Q$ не є жорстким. Теорема доведена. □

**Зауваження 7.19.** *З доведення цієї теореми випливає, що допустимий сагайдак $Q$, який має хоча б одну петлю, має нескунченну кількість нееквівалентних матриць показників з даним сагайдаком.*

**Теорема 7.20.** *Для довільного натурального $m$ >1 існує допустимий сагайдак $Q_m$, для якого існує рівно $m$ попарно нееквівалентних матриць показників, сагайдак яких співпадає з сагайдаком $Q_m$.*

*Доведення.* Розглянемо сагайдак $Q_m$, який має $2(m+1)+1$ вершину та $3m+1$ стрілку, а саме $VQ = \{1, \ldots, 2m+3\}$, $AQ_m = \{\sigma_{2k-1,2k}, \sigma_{2k,2k+1}, \sigma_{2k+1,2k-1}$ для всіх $k = 1, \ldots, m+1, \sigma_{1,2m+3}\}$, де $\sigma_{ij}$ — стрілка з вершини $i$ у вершину $j$.

Для сагайдака $Q_m$ побудуємо $m$ зведених попарно нееквівалентних між собою матриць показників. Відомо, що зведена матриця показників однозначно задається ваговою функцією $\varphi(\sigma_{ij}) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sigma_{ij} \in AQ$, яка задовольняє умови теореми 6.3. Побудуємо $m$ вагових функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ наступним чином:

$$\varphi_p(\sigma_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = 2k-1,\ j = 2k, \\ 0, & \text{якщо } i = 2k,\ j = 2k+1, \\ 0, & \text{якщо } i = 2k+1,\ j = 2k-1, \\ p, & \text{якщо } i = 1,\ j = 2(m+1)+1. \end{cases}$$

Функції $\varphi_p$ задовольняють всі умови теореми:

1) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k}) + \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1}) + \varphi_p(\sigma_{2k+1,2k-1}) = 1$, тому вершини $2k-1$, $2k$, $2k+1$ не мають петель.

2) $\varphi_p(\sigma_{12}) + \varphi_p(\sigma_{23}) + \varphi_p(\sigma_{34}) + \varphi_p(\sigma_{45}) + \ldots + \varphi_p(\sigma_{2m-1,2m}) + \varphi_p(\sigma_{2m,2m+1}) + \varphi_p(\sigma_{2m+1,2m+2}) + \varphi_p(\sigma_{2m+2,2m+3}) =$
   $= m + 1 > \varphi_p(\sigma_{1,2m+3})$ (вага шляху більша, ніж вага стрілки).

3) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k}) + \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1}) + \varphi_p(\sigma_{2k+1,2k-1}) \geqslant 1$,
   $\varphi_p(\sigma_{1,2m+1}) + \varphi_p(\sigma_{2m+1,2m-1}) + \varphi_p(\sigma_{2m-1,2m-3}) + \ldots + \varphi_p(\sigma_{31}) + \varphi_p(\sigma_{1,2m+1}) \geqslant 1$.

(вага кожного циклу не менше 1).

Побудуємо зведені матриці показників $\mathcal{E}_p = \left(\alpha_{ij}^p\right) \in M_n(\mathbb{Z})$. Покладемо при $i \neq j$

$$\alpha_{ij}^p = \begin{cases} \varphi_p(\sigma_{ij}), & \text{якщо } q_{ij} = 1, \\ \min \varphi_p\left(P(i,j)\right), & \text{якщо } q_{ij} = 0. \end{cases}$$

(тут мінімум береться по всім можливим шляхам $P(i,j) = \sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \cdots \sigma_{i_{k-1} i_j}$ із $i$ в $j$.)

Тоді за теоремою 6.3 $Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E}_2) = \ldots = Q(\mathcal{E}_m) = Q_m$. Сума всіх елементів матриці $\mathcal{E}_k$ менша, ніж сума всіх елементів матриці $\mathcal{E}_{k+1}$. Тому $m$ зведених матриць показників $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\ldots$, $\mathcal{E}_m$ попарно нееквівалентні між собою.

Покажемо тепер, що інших нееквівалентних матриць показників із сагайдаком $Q_m$ не існує. Нехай $Q_m = Q(\mathcal{E})$ для деякої зведеної матриці показників, $[Q_m] = (q_{ij})$. Доведемо, що $\mathcal{E}$ еквівалентна до однієї з матриць $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\ldots$, $\mathcal{E}_m$.

Застосувавши елементарне перетворення першого типу перейдемо від матриці $\mathcal{E}$ до еквівалентної матриці $\mathcal{E}^*$ з першим нульовим стовпчиком. В сагайдаку $Q_m$ із третьої вершини можна попасти в першу тільки через стрілку $\sigma_{31}$. Тому $\varphi^*(\sigma_{31}) = 0$. Аналогічно із вершини 2 у вершину 1 існує єдиний шлях через $\sigma_{23}$, $\sigma_{31}$. Тому $\varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{31}) = 0$ і тоді $\varphi^*(\sigma_{23}) = 0$. Оскільки вершина 2 не має петлі, то $\varphi^*(\sigma_{12}) + \varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{31}) = 1$. Тому $\varphi^*(\sigma_{12}) = 1$.

Абсолютно аналогічно одержується $\varphi^*(\sigma_{2k-1,2k}) = 1$, $\varphi^*(\sigma_{2k,2k+1}) = \varphi^*(\sigma_{2k+1,2k-1}) = 0$, для $k = 2, \ldots, m+1$. Оскільки
$\varphi^*(\sigma_{12}) + \varphi^*(\sigma_{23}) + \varphi^*(\sigma_{34}) + \varphi^*(\sigma_{45}) + \ldots + \varphi^*(\sigma_{2m-1,2m}) + \varphi^*(\sigma_{2m,2m+1}) + \varphi^*(\sigma_{2m+1,2m+2}) + \varphi^*(\sigma_{2m+2,2m+3}) = m + 1 > \varphi^*(\sigma_{1,2m+3})$. і $\varphi^*(\sigma_{1,2m+3}) + \varphi^*(\sigma_{2m+3,2m+1}) + \varphi^*(\sigma_{2m+1,2m-1}) + \varphi^*(\sigma_{2m-1,2m-3}) + \ldots + \varphi^*(\sigma_{31}) \geqslant 1$, то $1 \leqslant \varphi^*(\sigma_{1,2m+3}) \leqslant m$. Нехай $t = \varphi^*(\sigma_{1,2m+3})$. Тоді $\mathcal{E}$ еквівалентна $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_t$.

Отже, зведених попарно не еквівалентних між собою матриць показників з сагайдаком $Q_m$ рівно $m$. □

**Приклад 7.21.** *При $m$=2 сагайдак $Q_2$ складаєтьcя з 7 вершин.*

$$[Q]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Існує дві зведені матриці показників для яких $Q_2 = Q(\mathcal{E}_1) = Q(\mathcal{E}_2)$:*

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Сума всіх елементів матриць $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ дорівнює 31 і 36 відповідно. Тому матриці не еквівалентні.*

**Твердження 7.22.** *Для довільного еквівалентного перетворення $\varphi$ першого типу і для довільного еквівалентного перетворення $\psi$ другого типу існує еквівалентного перетворення $\overline{\varphi}$ першого типу таке, що $\varphi\psi = \psi\overline{\varphi}$ ($\psi\varphi = \overline{\varphi}\psi$).*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників, $\varphi$ — еквівалентне перетворення першого типу, тобто $\varphi(\mathcal{E}) = A = (a_{ij})$, де $\varphi(\alpha_{ij}) = a_{ij} = \alpha_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Для довільного еквівалентного перетворення $\psi$ другого типу, що задається підстановкою $\tau$, маємо $\psi(A) = \Omega = (\omega_{ij})$, де $\omega_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$. Нехай $\psi\varphi(\mathcal{E}) = \Omega$. Тоді $\omega_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij} = \alpha_{ij} + t_i - t_j$. Звідси $\omega_{ij} = \alpha_{\theta(i)\theta(j)} + t_{\theta(i)} - t_{\theta(j)}$, де $\theta = \tau^{-1}$.

Якщо виконати перетворення $\psi$ над матрицею показників $\mathcal{E}$, то отримаємо зведену матрицю показників $B = \psi(\mathcal{E}) = (b_{ij})$, де $b_{\tau(i)\tau(j)} = \alpha_{ij}$. Тоді $b_{ij} = \alpha_{\theta(i)\theta(j)}$. Виконаємо над матрицею показників $B$ перетворення $\overline{\varphi}$ першого типу: до елементів $i$ - го рядка матриці додамо ціле число $t_{\theta(i)}$, а від елементів $i$ - го стовпчика віднімемо число $t_{\theta(i)}$. Отримаємо зведену матрицю показників з елементами $\alpha_{\theta(i)\theta(j)} + t_{\theta(i)} - t_{\theta(j)} = \omega_{ij}$. Отже, $\varphi\psi = \psi\overline{\varphi}$. □

**Теорема 7.23.** *Дві зведені матриці показників $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ в $M_n(\mathbb{Z})$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка $\tau$ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх $i, j, k$.*

*Доведення.* Нехай матриці показників $A = (a_{ij}$ і $B = (b_{ij})$ в $M_n(\mathbb{Z})$ еквівалентні. За твердженням 7.22 матрицю $B$ можна отримати з матриці $A$ наступним чином: спочатку виконати над $A$ еквівалентні перетворення $\varphi$ першого типу, а потім над $\varphi(A)$ виконати еквівалентні перетворення $\psi$ другого типу.

Якщо $\varphi(A) = G = (g_{ij})$, то $g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору цілих чисел $t_1, \ldots, t_n$. Нехай перетворення $\psi$ задається підстановкою $\tau$. Тоді $b_{\tau(i)\tau(j)} = g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$. Позначимо $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, $C = (c_{ij})$. Оскільки $c_{ij} = t_i - t_j$, то вони задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх $i, j, k$.

Навпаки, нехай для зведених матриць показників $A = (a_{ij}$ і $B = (b_{ij})$ в $M_n(\mathbb{Z})$ існує підстановка $\tau$ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх $i, j, k$. Виконаємо над зведеною матрицею показників еквівалентне перетвореня $\psi$ другого типу, що задається підстановкою $\tau$. Отримаємо зведену матрицю показників $F = \psi(A) = (f_{ij})$, де $f_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$ для всіх $i, j$.

Виконаємо тепер над $F$ еквівалентне перетворення $\varphi$ першого типу $\varphi(F) = H = (h_{ij})$, де $h_{ij} = f_{ij} + x_i - x_j$, $x_i = c_{\theta(i)1}$, $\theta = \tau^{-1}$. Тоді

$$h_{\tau(i)\tau(j)} = f\tau(i)\tau(j) + x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)} = a_{ij} + c_{i1} - c_{j1}.$$

Оскільки $c_{i1}-c_{j1}=c_{ij}$ та $a_{ij}+c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}$, то $h_{\tau(i)\tau(j)}=b_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх $i,j$.

Отже, $H=B$ і матриці показників $A$ та $B$ еквівалентні. Теорема доведена. □

**Зауваження 7.24.** *Цілочисельна матриця $C$ з умови теореми 7.23 кососиметрична та $c_{ij}=c_{i1}-c_{j1}$ для всіх $i,j$. Дійсно, оскільки $c_{ii}=b_{\tau(i)\tau(i)}-a_{ii}=0$ для всіх $i$, то $c_{ij}+c_{ji}=c_{ii}=0$. Звідси $c_{ji}=-c_{ij}$, тобто $C=-C^T$, $C$ — кососиметрична матриця. Крім цього, $c_{ij}=c_{ik}-c_{jk}$ для всіх $i,j,k$. Зокрема, $c_{ij}=c_{i1}-c_{j1}$.*

**Наслідок 7.25.** *Дві зведені матриці показників $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ в $M_n(\mathbb{Z})$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка $\tau$ така, що*

$$b_{\tau(i)\tau(j)}+b_{\tau(j)\tau(k)}-b_{\tau(i)\tau(k)}=a_{ij}+a_{jk}-a_{ik} \tag{10}$$

*для всіх $i,j,k$.*

*Доведення.* Рівність $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$ при $c_{ij}=b_{\tau(i)\tau(j)}-a_{ij}$ еквівалентна рівності 10. □

**Теорема 7.26.** *Дві зведені матриці показників $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ в $M_n(\mathbb{Z})$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх сагайдаки $Q(A)$ та $Q(B)$ ізоморфні і ваги відповідних циклів сагайдаків $Q(A)$ та $Q(B)$ рівні.*

*Доведення.* Нехай матриці показників $A$ і $B$ еквівалентні. $B$ отримується з $A$ перетворенням $\varphi$ першого типу і перетворенням $\psi$ другого типу. $\varphi(A)=C=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+t_i-t_j$. $\psi(C)=B$, де $b_{\tau(i)\tau(j)}=c_{ij}$. Маємо $b_{\tau(i)\tau(j)}=a_{ij}+t_i-t_j$ для довільних $i$, $j$, $k$. Для підстановки $\tau$ виконується рівність (10) з наслідку 7

$$b_{\tau(i)\tau(j)}+b_{\tau(j)\tau(k)}-b_{\tau(i)\tau(k)}=a_{ij}+a_{jk}-a_{ik}.$$

Для довільних $i_1,i_2,\dots,i_s$ маємо рівності

$$\begin{gathered}
b_{\tau(i_1)\tau(i_2)}+b_{\tau(i_2)\tau(i_3)}-b_{\tau(i_1)\tau(i_3)}=a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}-a_{i_1i_3};\\
b_{\tau(i_1)\tau(i_3)}+b_{\tau(i_3)\tau(i_4)}-b_{\tau(i_1)\tau(i_4)}=a_{i_1i_3}+a_{i_3i_4}-a_{i_1i_4};\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_{\tau(i_1)\tau(i_k)}+b_{\tau(i_k)\tau(i_{k+1})}-b_{\tau(i_1)\tau(i_{k+1})}=a_{i_1i_k}+a_{i_ki_{k+1}}-a_{i_1i_{k+1}};\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_{\tau(i_1)\tau(i_{s-1})}+b_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}-b_{\tau(i_1)\tau(i_s)}=a_{i_1i_{s-1}}+a_{i_{s-1}i_s}-a_{i_1i_s};\\
b_{\tau(i_1)\tau(i_s)}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}-b_{\tau(i_1)\tau(i_1)}=a_{i_1i_s}+a_{i_si_1}-a_{i_1i_1}.
\end{gathered}$$

Додаючи ці $(s-1)$-у рівності, отримаємо

$$b_{\tau(i_1)\tau(i_2)}+b_{\tau(i_2)\tau(i_3)}+\ldots+b_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}=a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}+\ldots+a_{i_{s-1}i_s}+a_{i_si_1} \tag{11}$$

Нехай $\sigma_{i_1i_2}\sigma_{i_2i_3}\dots\sigma_{i_{s-1}i_s}\sigma_{i_si_1}$ — цикл у сагайдаку $Q(A)$. Тоді $\sigma_{\tau(i_1)\tau(i_2)}\sigma_{\tau(i_2)\tau(i_3)}\dots\sigma_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}\sigma_{\tau(i_s)\tau(i_1)}$ — відповідний цикл у сагайдаку $Q(B)$. Нехай $\omega_1$, $\omega_2$ — вагові функції, задані на $Q(A)$ і $Q(B)$ відповідно. Тоді

$$\omega_1\left(\sigma_{i_1i_2}\sigma_{i_2i_3}\dots\sigma_{i_{s-1}i_s}\sigma_{i_si_1}\right)=a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}+\ldots+a_{i_{s-1}i_s}+a_{i_si_1}.$$

$$\omega_2\left(\sigma_{\tau(i_1)\tau(i_2)}\sigma_{\tau(i_2)\tau(i_3)}\dots\sigma_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}\sigma_{\tau(i_s)\tau(i_1)}\right)=b_{\tau(i_1)\tau(i_2)}+b_{\tau(i_2)\tau(i_3)}+\ldots+b_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}.$$

За (11) ваги цих циклів рівні.

Навпаки, нехай $Q(A)\simeq Q(B)$, $\tau$ — підстановка, яка задає цей ізоморфізм, $\omega_1$, $\omega_2$ — вагові функції, задані на $Q(A)$ та $Q(B)$ відповідно, причому $\omega_1(\sigma_{ij})=a_{ij}$ для стрілки $\sigma_{ij}$ в $Q(A)$ та $\omega_2(\sigma_{ps})=b_{ps}$ для стрілки $\sigma_{ps}$ в $Q(B)$. І нехай ваги відповідних циклів сагайдаків $Q(A)$ і $Q(B)$ рівні. Тобто для довільного циклу $\sigma_{i_1i_2}\sigma_{i_2i_3}\dots\sigma_{i_{s-1}i_s}\sigma_{i_si_1}$ сагайдака $Q(A)$ і відповідного циклу $\sigma_{\tau(i_1)\tau(i_2)}\sigma_{\tau(i_2)\tau(i_3)}\dots\sigma_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}\sigma_{\tau(i_s)\tau(i_1)}$ сагайдака $Q(B)$

$$\omega_2\left(\sigma_{\tau(i_1)\tau(i_2)}\sigma_{\tau(i_2)\tau(i_3)}\dots\sigma_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}\sigma_{\tau(i_s)\tau(i_1)}\right)=\omega_1\left(\sigma_{i_1i_2}\sigma_{i_2i_3}\dots\sigma_{i_{s-1}i_s}\sigma_{i_si_1}\right)$$

або

$$b_{\tau(i_1)\tau(i_2)}+b_{\tau(i_2)\tau(i_3)}+\ldots+b_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}=a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}+\ldots+a_{i_{s-1}i_s}+a_{i_si_1}.$$

Нехай $i_1,i_2,\ldots,i_s$ — довільні вершини сагайдака $Q(A)$. Існують шляхи $P(i_k,i_{k+1})$ $k=1,\ldots,s-1$ та $P(i_s,i_1)$ такі, що $a_{i_ki_{k+1}}=\omega_1\left(P(i_k,i_{k+1})\right)$ $k=1,\ldots,s-1$, $a_{i_si_1}=\omega_1\left(P(i_s,i_1)\right)$. Маємо цикл $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{s-1}P(i_k,i_{k+1})\right)\bigcup P(i_s,i_1)$ сагайдака $Q(A)$. Йому відповідає цикл $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{s-1}P(\tau(i_k),\tau(i_{k+1}))\right)\bigcup P(\tau(i_s),\tau(i_1))$ сагайдака $Q(B)$. За умовою теореми

$$\omega_1\left(\left(\bigcup_{k=1}^{s-1}P(i_k,i_{k+1})\right)\bigcup P(i_s,i_1)\right)=\omega_2\left(\left(\bigcup_{k=1}^{s-1}P(\tau(i_k),\tau(i_{k+1}))\right)\bigcup P(\tau(i_s),\tau(i_1))\right).$$

Причому $\omega_1\left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{s-1}P(i_k,i_{k+1})\right)\bigcup P(i_s,i_1)\right)=a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}+\ldots+a_{i_{s-1}i_s}+a_{i_si_1}$.

Припустимо, що $b_{\tau(i_k)\tau(i_{k+1})}=\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_k),\tau(i_{k+1})\right)$ $k=1,\ldots,s-1$, $b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}=\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_s),\tau(i_1)\right)$, де $\tilde{P}(i,j)$ можливо відмінний від $P(i,j)$ шлях. За умовою теореми

$$\omega_1\left(\left(\bigcup_{k=1}^{s-1}\tilde{P}(i_k,i_{k+1})\right)\bigcup \tilde{P}(i_s,i_1)\right)=\omega_2\left(\left(\bigcup_{k=1}^{s-1}\tilde{P}(\tau(i_k),\tau(i_{k+1}))\right)\bigcup \tilde{P}(\tau(i_s),\tau(i_1))\right).$$

Тоді

$$\begin{gathered}a_{i_ki_{k+1}}=\omega_1\left(P(i_k,i_{k+1})\right)\le\omega_1\left(\tilde{P}(i_k,i_{k+1})\right),\quad k=1,\ldots,s-1,\\ a_{i_si_1}=\omega_1\left(P(i_s,i_1)\right)\le\omega_1\left(\tilde{P}(i_s,i_1)\right),\\ b_{\tau(i_k)\tau(i_{k+1})}=\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_k),\tau(i_{k+1})\right)\le\omega_2\left(P(\tau(i_k),\tau(i_{k+1})\right)\quad k=1,\ldots,s-1,\\ b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}=\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_s),\tau(i_1)\right)\le\omega_2\left(P(\tau(i_s),\tau(i_1)\right).\end{gathered}$$

Маємо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s-1}a_{i_ki_{k+1}}+a_{i_si_1}&=\sum_{k=1}^{s-1}\omega_1\left(P(i_k,i_{k+1})\right)+\omega_1\left(P(i_s,i_1)\right)\le\sum_{k=1}^{s-1}\omega_1\left(\tilde{P}(i_k,i_{k+1})\right)+\left(\tilde{P}(i_s,i_1)\right)=\\ &=\sum_{k=1}^{s-1}\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_k),\tau(i_{k+1})\right)+\omega_2\left(\tilde{P}(\tau(i_s),\tau(i_1)\right)=\sum_{k=1}^{s-1}b_{\tau(i_k)\tau(i_{k+1})}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}\le\\ &\le\sum_{k=1}^{s-1}\omega_2\left(P(\tau(i_k),\tau(i_{k+1})\right)+\omega_2\left(P(\tau(i_s),\tau(i_1)\right)=\\ &=\sum_{k=1}^{s-1}\omega_1\left(P(i_k,i_{k+1})\right)+\omega_1\left(P(i_s,i_1)\right)=\sum_{k=1}^{s-1}a_{i_ki_{k+1}}+a_{i_si_1}.\end{aligned}\tag{12}$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{s-1}a_{i_ki_{k+1}}+a_{i_si_1}=\sum_{k=1}^{s-1}b_{\tau(i_k)\tau(i_{k+1})}+b_{\tau(i_s)\tau(i_1)}.$$

для всіх $i_1,i_2,\ldots,i_s$. Зокрема

$$a_{ij}+a_{jk}+a_{ki}=b_{\tau(i)\tau(j)}+b_{\tau(j)\tau(k)}+b_{\tau(k)\tau(i)},$$

$$a_{ik} + a_{ki} = b_{\tau(i)\tau(k)} + b_{\tau(k)\tau(i)}.$$

Віднімаючи ці рівності, отримаємо

$$a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} = b_{\tau(i)\tau(j)} + b_{\tau(j)\tau(k)} - b_{\tau(i)\tau(k)}.$$

За наслідком 7 матриці показників $A$ та $B$ еквівалентні. Теорема доведена. $\square$

Нехай $Q = (VQ, AQ)$ — допустимий сагайдак. Тоді за теоремою 6.3 через кожну вершину $a \in VQ$ без петлі проходить цикл $C_a$ одиничної ваги. Розглянемо сагайдак $\overline{Q}$ з множиною вершин $VQ$ і множиною стрілок $A\overline{Q} = \bigcup\limits_{a \in VQ} AC_a$ (об'єднання береться по циклам одиничної ваги, але не обов'язково по всім таким циклам, і вважаємо, що $C_a = a$, якщо вершина $a$ має петлю). Очевидно $\overline{Q} = C_{a_1} \bigcup \cdots \bigcup C_{a_m}$ для деяких вершин $a_1, \ldots, a_m$.

**Теорема 7.27.** *Допустимий сагайдак $Q$ має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$ тоді і тільки тоді, коли існує $\overline{Q}$ — незв'язний сагайдак.*

*Доведення.* Згідно зауваженню 7.19 сагайдак, який має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників з даним сагайдаком. Тому досить довести теорему у випадку, коли сагайдак не має петель.

Нехай допустимий сагайдак $Q$ має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ з сагайдаком $Q(\mathcal{E}) = Q$. Нехай $\{\mathcal{E}_\gamma = (\alpha_{ij}^{(\gamma)})\}$ — множина всіх таких матриць. Тоді існують індекси $i$ та $j$, що множина $\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\}$ необмежена. За теоремою 6.3 існують вагові функції $w_\gamma \colon AQ \to \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ такі, що $\alpha_{ij}^{(\gamma)} = w_\gamma(P(i,j))$, де $P(i,j)$ — шлях із вершини $i$ у вершину $j$ в сагайдаку $Q$ (шлях мінімальної ваги). Оскільки множина $\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\}$ — необмежена, то існує стрілка $\sigma_{kl}$ така, що множина $\{w_\gamma(\sigma_{kl})\}$ — необмежена.

Припустимо, що сагайдак $\overline{Q}$ звя'зний і є об'єднанням $m$ циклів $C_a$ одиничної ваги. Тоді в $\overline{Q}$ шлях із вершини $k$ в вершину $l$ має спільні стрілки з не більш, ніж $m$ одиничними циклами $C_a$. З адитивності ваги шляху отримуємо, що вага шляху з $k$ в $l$ не перевищує ваги всіх стрілок сагайдака $Q$, тобто $m$. За умовою теореми 6.3 вага стрілки $w_\gamma(\sigma_{kl})$ менша за вагу шляху з вершини $k$ у вершину $l$. Отже, $w_\gamma(\sigma_{kl}) < m$. Отримана суперечність доводить, що сагайдак $\overline{Q}$ є незв'язним.

Навпаки, нехай сагайдак $\overline{Q}$ — незв'язний: $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$, $\overline{Q}_1 \cap \overline{Q}_2 = \emptyset$. Занумеруємо вершини $\overline{Q}_1$ і $\overline{Q}_2$ числами $1, \ldots, s$, $s+1, \ldots, s+t$.

Сагайдак $Q$ — допустимий, тоді існує зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Відповідно до розбиття $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$ маємо

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}.$$

Можемо вважати, що $\alpha_{ij} \geq 0$ для всіх $i, j$. Нехай $x \in \mathbb{N}$ і $x > \max\limits_{i,j} \alpha_{ij}$.

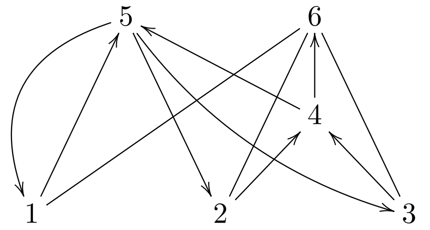
Розглянемо матрицю

$$\mathcal{E}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} + xU_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}^{(x)}).$$

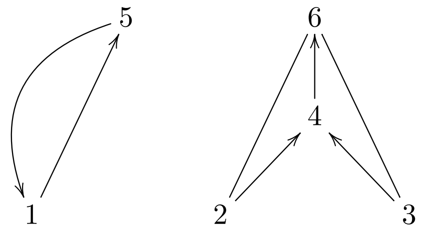
Це також зведена матриця показників і $Q(\mathcal{E}(x)) = Q(\mathcal{E}) = Q$. Оскільки $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}^{(x)} \neq \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}^{(y)}$ при $x \neq y$, то матриці $\mathcal{E}(x)$ та $\mathcal{E}(y)$ при $x \neq y$ нееквівалентні. Отже, допустимий сагайдак $Q$ має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}(x)$ з $Q(\mathcal{E}(x)) = Q(\mathcal{E}) = Q$. Теорема доведена. $\square$

**Зауваження 7.28.** *Вибираючи по-різному одиничні цикли сагайдака $Q$, будемо отримувати різні сагайдаки $\overline{Q}$.*

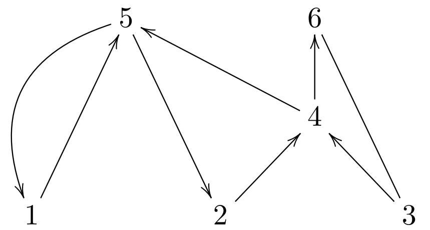
**Приклад 7.29.** *Розглянемо допустимий сагайдак $Q$*



*Якщо вибирати в $Q$ одиничні цикли $1 \to 5 \longrightarrow 1$, $2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2$, $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$, то $\overline{Q}$ буде незвязним.*



*Якщо вибирати в $Q$ одиничні цикли $1 \to 5 \longrightarrow 1$, $2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2$, $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$, то буде $\overline{Q}$ звязним.*



Нехай $P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина. Якщо існує розбиття на дві частково впорядковані множини $P'$ і $P''$ такі, що $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, то за теоремою 7.15 сагайдак $\tilde{Q}(P) = Q$ не є жорстким. Більше того, цей сагайдак має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}(x)$ таких, що $Q(\mathcal{E}(x)) = \tilde{Q}(P) = Q$. За теоремою 7.27 сагайдак $\overline{Q}$ є незв'язним.

**Теорема 7.30.** *Нехай $P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина така, що для будь-якого розбиття $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$ має місце строге включення $P'_{\max} \cup P''_{\max} \cup P'_{\min} \cup P''_{\min} \supsetneq P_{\max} \cup P_{\min}$. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P) = Q$ — жорсткий.*

*Доведення.* Для частково впорядкованої множини $P$ не існує розбиття $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, $P'_{\max} \cup P''_{\max} = P_{\max}$, $P'_{\min} \cup P''_{\min} = P_{\min}$. Тому за теоремою 7.27 сагайдак $\overline{Q}$ — зв'язний. $Q = \tilde{Q}(P)$ — допустимий сагайдак, тому існує $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ — вагова функція, що задовольняє умовам теореми 6.3. Нехай $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \in P_{\min}$, $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2} \in P_{\max}$. З нерівностей

$$
\begin{gathered}
1 \le w(P(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1})) + w(\alpha_{j_1}, \alpha_{i_1}) < w(P(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1})) + w(\alpha_{j_1}, \alpha_{i_2}) + w(P(\alpha_{i_2}, \alpha_{j_2})) + w(\alpha_{j_2}, \alpha_{i_1}), \\
1 \le w(P(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1})) + w(\alpha_{j_1}, \alpha_{i_1}) < w(P(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1})) + w(\alpha_{j_1}, \alpha_{i_2}) + w(P(\alpha_{i_2}, \alpha_{j_1})) + w(\alpha_{j_1}, \alpha_{i_1})
\end{gathered}
$$

випливає, що одиничний цикл в $\overline{Q}$ має рівно одну вершину з $P_{\max}$ і одну вершину з $P_{\min}$. Покажемо тепер, що в $\overline{Q}$ $w(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка з $\alpha_i$ у $\alpha_j$.

Елементарному еквівалентному перетворенню I-го типу — від елементів $i$-го рядка матриці показників відняти ціле число $t$, а до елементів $i$-го стовпчика додати $t$, — відповідає перетворення вагової функції: вага кожної стрілки, що виходить з вершини $i$ зменшується на $t$, а вага кожної стрілки, що входить у вершину $t$, збільшується на $t$.

У першому одиничному циклу $C_1$ з $\overline{Q}$ такими перетвореннями (перетворення над $Q$, а, отже, і над $\overline{Q}$) ми можемо зробити вагу стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ одиничною. Тоді вага будь-якої іншої стрілки з цього циклу дорівнює 0. Розглянемо тепер одиничний цикл $C_2$, який має з циклом

$C_1$ спільні вершини. Нехай $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$ — вершини з $P_{\min}$, що належать циклам $C_1$ та $C_2$, $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}$ — вершини з $P_{\max}$, що належать циклам $C_1$ та $C_2$ відповідно, $\alpha_1$ і $\alpha_2$ - спільні вершини циклів $C_1$ і $C_2$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Тоді стрілка ваги 1, яка належить циклу $C_2$, не може належати шляху від $\alpha_1$ до $\alpha_2$. Інакше частину циклу $C_2$ від $\alpha_2$ до $\alpha_1$ ваги 0, можна доповнити частиною циклу $C_1$ від $\alpha_1$ до $\alpha_2$ ваги 0 і отримаємо цикл ваги 0, що неможливо. Отже, стрілка ваги 1 циклу $C_2$ належить частині цього циклу — ланцюгу, який містить не більше однієї точки циклу $C_1$. Цей ланцюг містить стрілку від елемента $\alpha_{j_2}$ з $P_{\max}$ до елемента $\alpha_{i_2}$ з $P_{\min}$. Перетвореннями, що відповідають елементарним перетворенням I-го типу, вагу 1 стрілки у ланцюгу можна перемістити на стрілку $(\alpha_{j_2}, \alpha_{i_2})$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо таку вагову фунуцію $w$ на $\overline{Q}$, що $w(\alpha_i, \alpha_j) = 1$ лише у тому випадку, коли $\alpha_i \in P_{\max}$, а $\alpha_j \in P_{\min}$.

Нехай $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$, $\alpha_i$ належить циклу $C_1$ сагайдака $\overline{Q}$, а $\alpha_j$ належить циклу $C_s$, причому цикли $C_i$ та $C_{i+1}$ мають спільні вершини для $i = 1, \ldots, s$. Індукцією за $s$ легко показати, що вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1. База індукції — $\alpha_i$ та $\alpha_j$ належать одному циклу в $\overline{Q}$. Припустимо, вага стрілки з $\alpha_{i_u} \in P_{\max}$ у $\alpha_{j_k} \in P_{\min}$ дорівнює 1, якщо $\alpha_{i_u}$ належить циклу $C_u$, а $\alpha_{j_k}$ — циклу $C_k$, де $u, k \leq s-1$. Оскільки для $\alpha_{i_k} \in P_{\max}$, що належить циклу $C_k$, $w(\alpha_{i_1}, \alpha_j) < w(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_k}) + w(P(\alpha_{j_k}, \alpha_{i_k})) + w(\alpha_{i_k}, \alpha_j) = 1 + 0 + 1$, то $w(\alpha_{i_1}, \alpha_j) \leq 1$.

З іншого боку $w(\alpha_{i_1}, \alpha_j) + w(P(\alpha_j, \alpha_{i_k})) + w(\alpha_{i_k}, \alpha_{j_1}) > w(\alpha_{i_1}, \alpha_{j_1}) = 1$ або $w(\alpha_{i_1}, \alpha_j) + 0 + 1 > 1$. Отже, $w(\alpha_{i_1}, \alpha_j) = 1$, тобто, вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1.

Розглянемо стрілку $(\alpha_k, \alpha_p)$, яка є в діаграмі $Q(P)$, але її немає в сагайдаку $\overline{Q}$. Нехай вершина $\alpha_k$ належить циклу $C_a$, а вершина $\alpha_p$ — циклу $C_b$, $\alpha_{a_1}$, $\alpha_{a_2}$ — вершини циклу $C_a$, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$, $\alpha_{b_1}$, $\alpha_{b_2}$ — вершини циклу $C_b$, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$. Тоді $w(\alpha_k, \alpha_p) < w(P(\alpha_k, \alpha_{a_2}))+$ $w(\alpha_{a_2}, \alpha_{b_1}) + w(P(\alpha_b, \alpha_p)) = 0 + 1 + 0 = 1$.

Отже, $w(\alpha_k, \alpha_p) = 0$.

Таким чином, будь-яка вагова функція $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що задовольняє умовам теореми 6.3, еквівалентна функції, що діє за наступним правилом:

$w(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_i \in P_{\max}, \alpha_j \in P_{\min}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Ця вагова функція визначає зведену $(0,1)$ - матрицю показників $\mathcal{E}(P) = (\alpha_{i,j})$, де $\alpha_{i,j} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i \leq \alpha_j$, та $\alpha_{i,j} = 1$ в інших випадках.

Це означає, що сагайдак $\tilde{Q}(P)$ — жорсткий. Теорема доведена. □

З теорем та отримуємо наступну теорему.

**Теорема 7.31.** *Нехай $P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким тоді і тільки тоді, коли не існує розбиття $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$ для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \emptyset$.*

## 8 Одиничні сагайдаки

**Означення 8.1.** *Простий цикл в сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати одиничним.*

**Твердження 8.2.** *В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.*

*Доведення.* Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_1$ — одиничний цикл сагайдака $Q = (VQ, AQ)$ і $w$ — вагова функція, задана на $AQ$. Тоді виконується рівність $\omega(v_1, v_2) + \cdots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) = 1$. Припустимо протилежне, що існують вершини $v_i$ та $v_j$, які не є сусідніми вершинами в циклі та стрілка $(v_i, v_j)$ належить $Q$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $i < j$. Тоді

$$\omega(v_i, v_{i+1}) + \omega(v_{i+1}, v_{i+2}) + \cdots + \omega(v_{j-1}, v_j) > \omega(v_i, v_j). \tag{13}$$

Оскільки $\omega(v_1, v_2) + \cdots + \omega(v_{m-1}, v_m) + \omega(v_m, v_1) = 1$, то

$\omega(v_i,v_{i+1})+\omega(v_{i+1},v_{i+2})+\cdots+\omega(v_{j-1},v_j)\leqslant 1$ і нерівність (13) можлива тільки у випадку $\omega(v_i,v_{i+1})+\omega(v_{i+1},v_{i+2})+\cdots+\omega(v_{j-1},v_j)=1$, $\omega(v_i,v_j)=0$.

Але тоді

$\omega(v_1,v_2)+\cdots+\omega(v_{i-1},v_i)+\omega(v_i,v_j)+\omega(v_j,v_{j+1})+\cdots+\omega(v_{m-1},v_m)+\omega(v_m,v_1)=0$. Отримали протиріччя. Твердження доведено. $\square$

**Зауваження 8.3.** *Два одиничні цикли можуть мати спільні стрілки.*

**Приклад 8.4.** *Зведена матриця показників* $\mathcal{E}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ *з матрицею суміжності* $[Q]=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ *має одиничні цикли* $1\to3\to2\to1$, $1\to3\to4\to1$.

**Твердження 8.5.** *Допустимий сагайдак $Q$ не може містити двох стрілок $(v_i,v_a)$ та $(v_j,v_a)$, де вершини $v_i$, $v_j$ належать одному одиничному циклу.*

*Доведення.* Припустимо протилежне. Нехай $v_1,v_2,\dots,v_m,v_1$ — одиничний цикл сагайдака $Q=(VQ,AQ)$, $1\leqslant i<j\leqslant m$. З твердження 8.2 випливає, що $a\notin\{1,2,\dots,m\}$, тобто вершина $v_a$ не належить одиничному циклу $v_1,v_2,\dots,v_m$.

Нехай $x=\omega(v_i,v_{i+1})+\cdots+\omega(v_{j-1},v_j)$ — вага шляху із вершини $v_i$ в вершину $v_j$ через вершини $v_{i+1},\dots,v_{j-1}$, а $y$ дорівнює вазі шляху із вершини $v_j$ в вершину $v_i$, тобто

$y=\omega(v_j,v_{j+1})+\cdots+\omega(v_{m-1},v_m)+\omega(v_m,v_1)+\omega(v_1,v_2)+\cdots+\omega(v_{i-1},v_i)$.

Оскільки вага шляху більша, ніж вага стрілки, то ми одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+\omega(v_j,\ v_a)\geq\omega(v_i,\ v_a)+1>\omega(v_i,\ v_a),\\ y+\omega(v_i,\ v_a)\geq\omega(v_j,\ v_a)+1>\omega(v_j,\ v_a).\end{cases}$$

Додаючи ці нерівності отримаємо

$$x+y\geq 2.$$

Але $x+y=1$, бо $v_1,v_2,\dots,v_m,v_1$ — одиничний цикл. Отримали протиріччя. Твердження доведено. $\square$

**Твердження 8.6.** *Допустимий сагайдак $Q=(VQ,AQ)$ не може містити стрілки $(v_a,v_i)$, $(v_a,\ v_j)$, де вершини $v_i$, $v_j$ належать деякому одиничному циклу.*

*Доведення.* Твердження доводиться аналогічно до твердження 8.5. $\square$

**Означення 8.7.** *Одиничні цикли, які мають спільну вершину, будемо називати суміжними.*

**Наслідок 8.8.** *Якщо $v_1,v_2,v_1$ та $v_2,v_3,\dots,v_k,v_2$ — одиничні цикли допустимого сагайдака $Q$ то $Q$ не містить стрілку $(v_1,v_p)$ та $Q$ не містить стрілку $(v_p,v_1)$, де $3\leqslant p\leqslant k$.*

*Доведення.* Сагайдак $Q$ містить стрілку $(v_1,v_2)$ та вершини $v_p$ та $v_2$ належать одному одиничному циклу. Тому за твердженням 8.6 $Q$ не містить стрілку $(v_1,v_p)$.

Аналогічно, сагайдак $Q$ містить стрілку $(v_2,v_1)$ та вершини $v_p$ та $v_2$ належать одному одиничному циклу. Тому за твердженням 8.5 $Q$ не містить стрілку $(v_p,v_1)$. $\square$

**Твердження 8.9.** *Якщо допустимий сагайдак $Q$ містить два одиничні суміжні цикли $v_1,v_2,v_3,v_1$ та $v_3,v_4,v_5,v_3$ і стрілку $(v_1,v_5)$, то цикл $v_1,v_5,v_3,v_1$ — одиничний.*

*Доведення.* Оскільки вага шляху більша, ніж вага стрілки, то

$$\omega(v_1,v_2)+\omega(v_2,v_3)+\omega(v_3,v_4)+\omega(v_4,v_5)\geqslant\omega(v_1,v_5)+1.$$

Додамо до обох сторін нерівності $\omega(v_3,v_1)+\omega(v_5,v_3)$. Отримаємо

$$\omega(v_1,v_2)+\omega(v_2,v_3)+\omega(v_3,v_1)+\omega(v_3,v_4)+\omega(v_4,v_5)+\omega(v_5,v_3)\geqslant \\ \geqslant\omega(v_1,v_5)+\omega(v_5,v_3)+\omega(v_3,v_1)+1. \quad (14)$$

Оскільки $v_1,v_2,v_3,v_1$ та $v_3,v_4,v_5,v_3$ одиничні цикли, то

$$\omega(v_1,v_2)+\omega(v_2,v_3)+\omega(v_3,v_1)=\omega(v_3,v_4)+\omega(v_4,v_5)+\omega(v_5,v_3)=1.$$

Тому остання нерівність рівносильна наступній:

$2\geqslant\omega(v_1,v_5)+\omega(v_5,v_3)+\omega(v_3,v_1)+1$ або $\omega(v_1,v_5)+\omega(v_5,v_3)+\omega(v_3,v_1)\leqslant 1$.

Враховуючи те, що вага циклу не менша за одиницю, одержимо, що $\omega(v_1,v_5)+\omega(v_5,v_3)+\omega(v_3,v_1)=1$. Отже, $v_1,v_5,v_3,v_1$ — одиничний цикл. Твердження доведено. $\square$

**Означення 8.10.** *Допустимий сагайдак $Q$ будемо називати одиничним, якщо об'єднання одиничних циклів сагайдака $Q$ утворює сильнозв'язний сагайдак $Q_1$, такий що $VQ=VQ_1$.*

**Лема 8.11.** *Для довільного одиничного сагайдака $Q$ існує матриця показників $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q=Q(\mathcal{E})$ і $0\leqslant\alpha_{ij}\leqslant n-1$ для всіх $i,j$.*

*Доведення.* Розглянемо довільні дві вершини $i,j$ одиничного сагайдака $Q$. Оскільки сагайдак $Q$ одиничний, то існує простий шлях із $i$ в $j$, який проходить тільки по стрілкам одиничних циклів. Цей шлях складається не більше, ніж з $(n-1)$-ої стрілки. Тому вага шляху не перевищує $n-1$. Оскільки $\alpha_{ij}$ дорівнює вазі мінімального за вагою шляху з $i$ в $j$, то $\alpha_{ij}\leqslant n-1$. Лема доведена. $\square$

**Лема 8.12.** *Якщо $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ — матриця показників з одиничним сагайдаком $Q=Q(\mathcal{E})$ і $\alpha_{ij}=k$, то $\alpha_{ji}\leqslant n-1-k$.*

*Доведення.* Оскільки $\alpha_{ij}=k$, то вага мінімального за вагою шляху, який починається в $i$ та закінчується в $j$, дорівнює $k$. Тому вага шляху, який починається в $i$, закінчується в $j$ та проходить по стрілкам одиничних циклів не менша за $k$. Нехай вага шляху з $i$ в $j$, який проходить по стрілкам одиничних циклів, дорівнює $p\geqslant k$. Нехай цей шлях проходить через вершини $i=v_0,v_1,\ldots,v_m=j$, де для $t=0,\ldots,m-1$ вершини $v_t,v_{t+1}$ належать одному одиничному циклу, але вершини $v_t,v_{t+1}$ не обов'язково є суміжними. Оскільки сума стрілок шляху дорівнює $p$, то кількість відрізків шляху вигляду $v_t,v_{t+1}$, вага яких дорівнює 0, не перевищує $m-p$.

Далі під шляхом $v_t,v_{t+1}$ будемо розуміти частину одиничного циклу.

Розглянемо зворотній шлях, який проходить через вершини $j=v_m,\ldots,v_0=i$, де $v_{t+1},v_t$ — частина одиничногу циклу. Якщо вага шляху $v_{t+1},v_t$ дорівнює 1, то вага шляху $v_t,v_{t+1}$ дорівнює 0. Тому кількість відрізків $v_{t+1},v_t$, вага яких дорівнює одиниці, не перевищує $m-p$.

Отже, вага шляху $j=a_m,\ldots,a_0=i$ не перевищує $m-p$. Оскільки $m$ не перевищує кількості стрілок шляху $a_0,a_1,\ldots,a_m$, то $m\leqslant n-1$. $k\leqslant p$, тому $m-p\leqslant n-1-p\leqslant n-1-k$.

Враховуючи, що $\alpha_{ji}$ дорівнює вазі мінімального за вагою шляху із $j$ в $i$, отримаємо, що $\alpha_{ji}$ не перевищує ваги шляху з $j$ в $i$, який проходить по одиничним циклам. Тому $\alpha_{ji}\leqslant n-1-k$. Лема доведена. $\square$

**Наслідок 8.13.** *Для довільного одиничного сагайдака $Q$ існує матриця показників $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ з $Q=Q(\mathcal{E})$, для якої $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}\leqslant n-1$ для всіх $i,j$.*

*Доведення.* За лемою 8.11 для сагайдака $Q$ існує матриця показників $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$, $Q=Q(\mathcal{E})$, для якої $0\leqslant\alpha_{ij}\leqslant n-1$. Нехай $\alpha_{ij}=k$. З леми 8.12 випливає, що $\alpha_{ji}\leqslant n-1-k$. Тому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}\leqslant n-1$. $\square$

В сагайдаку $Q$ позначимо через $d(v_1,v_2)$ мінімальну кількість одиничних циклів, через вершини яких потрібно пройти, щоб з вершини $v_1$ потрапити у вершину $v_2$. Будемо вважати $d(v,v)=0$.

**Лема 8.14.** *1) $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ для всіх $v_i, v_j \in VQ$,*

*2) $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geqslant d(v_i, v_j)$ для всіх $v_i, v_j, v_k \in VQ$.*

*Доведення.* Припустимо протилежне, що $d(v_i, v_j) < d(v_j, v_i)$. Занумеруємо цикли на шляху із $v_i$ в $v_j$ числами $1, 2, \ldots, m = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що з вершини $v_j$ рухаючись по стрілкам циклів $m, \ldots, 1$ можна потрапити в вершину $v_i$. Тому $d(v_j, v_i) \leqslant m = d(v_i, v_j)$. Отже, припущення не вірне, тому $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.

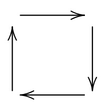
З вершини $v_i$ можна потрапити в вершину $v_j$ через вершину $v_k$. Тому $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geqslant d(v_i, v_j)$. □

# 9 Жорсткі сагайдаки на $n$ точках, де $n \leq 5$

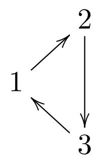
Розглянемо сагайдаки $Q$ на $n$ ($n \leq 5$) вершинах і які мають скінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$.

$n = 4$

1. Нехай у сагайдаку $Q$ є одиничний цикл довжини 4. Тоді в $Q$ між вершинами цього циклу немає інших стрілок, окрім стрілок циклу. Отже, сагайдак $Q$ — простий цикл довжини 4.

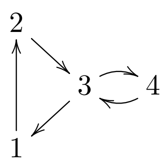


2. Нехай у сагайдаку $Q$ немає одиничного циклу довжини 4, є одиничний цикл довжини 3. Нехай це цикл

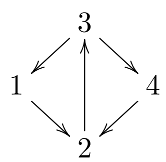



За твердженнями 8.5, 8.6 вершина 4 з'єднана з цим циклом лише двома стрілками: одна стрілка виходить із вершини 4, друга стрілка входить у вершину 4. З точністю до перенумерації вершин циклу $1 \to 2 \to 3 \to 1$ можливі випадки:

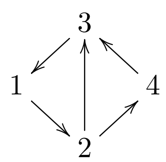
1)




2)




3)



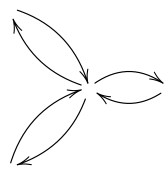
У випадку 3) через вершину 4 проходить єдиний цикл

$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$

Оскільки вершина 4 не має петлі, то цей цикл одиничний. Отримали суперечність. Отже, випадок 3) неможливий.

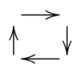
3. У сагайдаку $Q$ є одиничні цикли тільки довжини 2. Припустимо, що сагайдак $Q$ містить цикли $1 \rightleftarrows 2$ та $3 \rightleftarrows 4$ .

Тоді сагайдак $\overline{Q}$, який є об'єднанням цих циклів, - незв'язний. Отже сагайдак $Q$ має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ таких, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Отже, будь-які два одиничні цикли довжини 2 мають спільну вершину. І тому сагайдак $\overline{Q}$ має вигляд

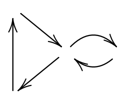


За твердженнями 8.5, 8.6 у сагайдаку $Q$ інших стрілок не може бути. Отже, $Q = \overline{Q}$. Таким чином, маємо 4 сагайдаки на чотирьох вершинах:

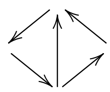
1)



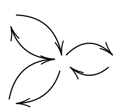
2)



3)



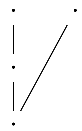
4)



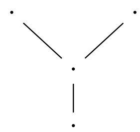
Це допустимі сагайдаки, які асоційовані з частково впорядкованими множинами.

1.

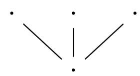
2.



3.



4.

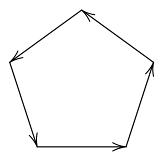


відповідно. За теоремою 7.15 сагайдаки 1-4 є жорсткими.

$n = 5$

4. Нехай у сагайдаку $Q$ є одиничний цикл довжини 5. Тоді в $Q$ між вершинами цього циклу немає інших стрілок, окрім стрілок циклу.

1.1.

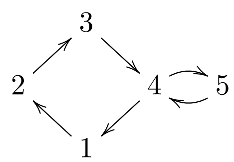


5. Нехай у сагайдаку $Q$ немає одиничного циклу довжини 5, є одиничний цикл довжини 4. Нехай це цикл

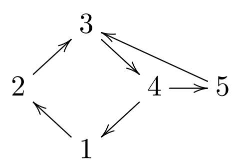
$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\ 1 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

За твердженнями 8.5, 8.6 вершина 5 з'єднана з цим циклом лише двома стрілками: одна стрілка виходить із вершини 5, друга - входить. Маємо випадки

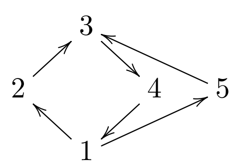
2.1.




2.2.




2.3.



2.4.

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
2 \arrow[ur] & & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[l] \\
 & 1 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

У випадку 2.4 через вершину 5 проходить одиничний цикл $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$ довжини 5. Маємо суперечність.

6. Нехай у сагайдаку $Q$ немає одиничних циклів довжини 4 або 5, є одиничний цикл довжини 3. Нехай маємо цикл

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dd] \\
1 \arrow[ur] & \\
 & 3 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Якщо вершини 4 і 5 з'єднані одиничним циклом довжини 2, то маємо незв'язний сагайдак $\overline{Q}$

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dd] & & \\
1 \arrow[ur] & & 4 \arrow[r, bend left] & 5 \arrow[l, bend left] \\
 & 3 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

За теоремою 7.27 сагайдак $Q$ має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників таких, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Отже, вершини 4 і 5 не з'єднані одиничним циклом довжини 2. Вони з'єднані або одним, або двома одиничними циклами з вершинами циклу довжини 3. Нехай вершини 4 і 5 з'єднані одним одиничним циклом з вершиною циклу $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Тоді маємо 2 одиничних цикли довжини 3 і сагайдак $\overline{Q}$ має вигляд

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dd] \\
 & 3 \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
1 \arrow[uu] & & 5 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

З урахуванням тверджень 8.5, 8.6 маємо можливі сагайдаки $Q$

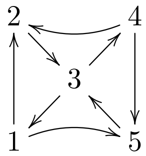
3.1.

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dd] \\
 & 3 \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
1 \arrow[uu] & & 5 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

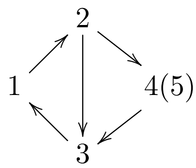
3.2.

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dd] \arrow[ll, bend left] \\
 & 3 \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
1 \arrow[uu] & & 5 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

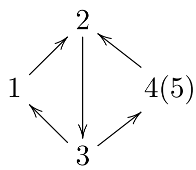
3.3.



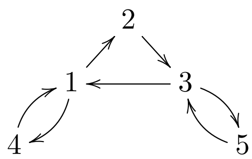

Нехай вершини 4 і 5 з'єднані різними одиничними циклами із циклом $1 \to 2 \to 3 \to 1$. За твердженнями 8.5, 8.6 кожна з вершин 4 і 5 з'єднана лише двома стрілками: вхідною та вихідною. Зауважимо, що вершина 4 або 5 не може бути з'єднана із циклом $1 \to 2 \to 3 \to 1$ наступним чином



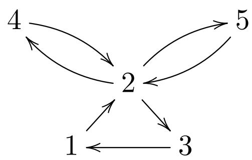

Через вершину 4 проходить єдиний одиничний цикл $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$, який має довжину 4. Отже, можливим є підсагайдак




Якщо вершини 4 і 5 з'єднані одиничними циклами довжини 2 з циклом $1 \to 2 \to 3 \to 1$, то сагайдак $\overline{Q}$ має вигляд

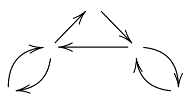



або

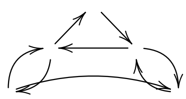



З урахуванням тверджень 8.5, 8.6 маємо можливі сагайдаки $Q$

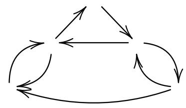
3.4.



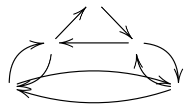
3.5.



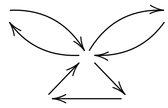
3.6.



3.7.

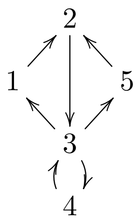


3.8.

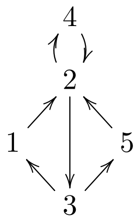


Якщо вершина 4 з'єднана з циклом $1 \to 2 \to 3 \to 1$ одиничним циклом довжини 2, а вершина 5 - одиничним циклом довжини 3, то сагайдак $\overline{Q}$ співпадає з одним із наступних сагайдаків

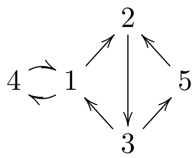
a)



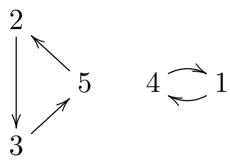

b)




c)

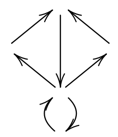



У випадку c) існує незв'язний сагайдак $\overline{Q}$

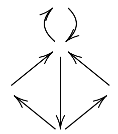



і $Q$ реалізується нескінченною кількістю нееквівалентних зведених матриць показників. З урахуванням тверджень 8.5, 8.6 маємо можливі сагайдаки $Q$

3.9.

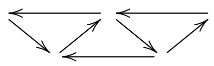


3.10.

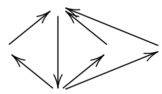


Якщо ж вершини 4 і 5 з'єднані з циклом $1 \to 2 \to 3 \to 1$ одиничними циклами довжини 3, то сагайдак $\overline{Q}$ співпадає з одним із наступних сагайдаків

a)

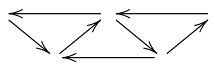


b)

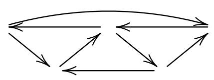


З урахуванням тверджень 8.5, 8.6 маємо можливі сагайдаки $Q$

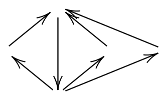
3.11.



3.12.

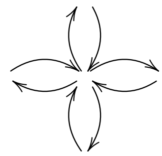


3.13.



7. Нехай сагайдак $Q$ містить одиничні цикли тільки довжини 2. Сагайдак $\overline{Q}$ повинен бути зв'язним, тому будь-які 2 одиничні цикли у ньому мають спільну вершину. Тому $\overline{Q}$ має вигляд

4.1.

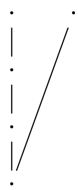


З урахуванням тверджень 8.5, 8.6 отримуємо, що $Q = \overline{Q}$ Зауважимо, що серед отриманих сагайдаків є ізоморфні. Сагайдак 3.2 ізоморфний сагайдаку 3.11, сагайдак 3.3 ізоморфний сагайдаку 3.12. Сагайдаки 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 3.13, 4.1 є асоційованими з частково впорядкованими множинами

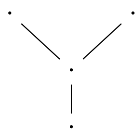
1.1.



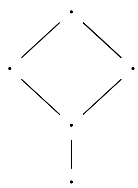
2.1.



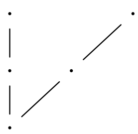
2.2.



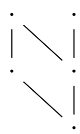
2.3.



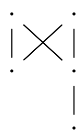
3.1.



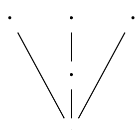
3.2.



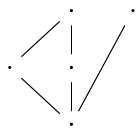
3.3.



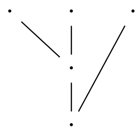
3.8.



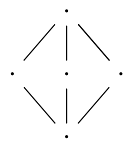
3.9.



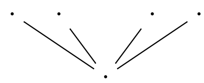
3.10.



3.13.



4.1.



відповідно. Тому це допустимі сагайдаки. За теоремою 7.31 всі ці сагайдаки є жорсткими. Перевірка показує, що сагайдаки 3.4, 3.5, 3.6, 3.7. є жорсткими.

Ми довели теорему.

**Теорема 9.1.** *З точністю до ізоморфізму існує 4 сагайдаки на чотирьох точках і 15 сагайдаків на п'яти точках, які реалізуються скінченною кількістю нееквівалентних зведених матриць показників.*

Це сагайдаки 1-4 на чотирьох точках і сагайдаки 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10, 3.13, 4.1. Всі ці сагайдаки є жорсткими.

# 10 Графи $G(\Lambda)$

Нехай $Q$ – сагайдак черепичного порядку $\Lambda$. Розглянемо сагайдак $\overline{Q}$, який отримується з сагайдака $Q(\Lambda)$ наступним чином: стрілка з $i$ в $j$ в $\overline{Q}$ є тоді і тільки тоді, коли є стрілка з $i$ в $j$ в $Q(\Lambda)$ і ця стрілка належить одиничному циклу.

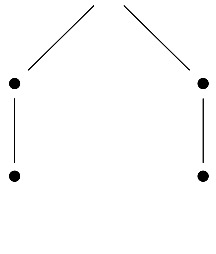
За черепичним порядком $\Lambda \subset M_n(D)$ будується простий граф $G(\Lambda)$ за правилом: вершинами $G(\Lambda)$ є точки $1, 2, \ldots, n$. Точки $i$ та $j$ з'єднані ребром тоді і лише тоді, коли $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$.

Очевидно, що $G(\Lambda)$ та $\overline{Q}$ зв'язні або незв'язні одночасно.

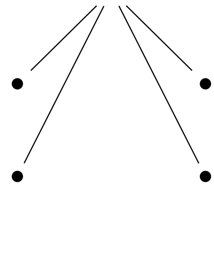
Через кожну точку допустимого сагайдака $Q$ без петель проходить одиничний цикл.

Якщо граф $G(\Lambda)$ зв'язний на 5-ти точках, то він є одним з наступних 21 графів:

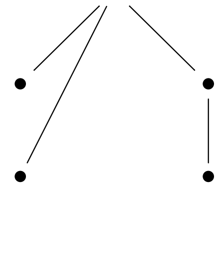
1.

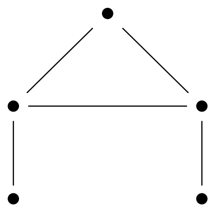


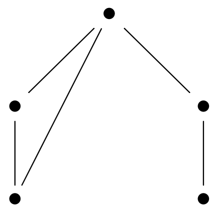
2.

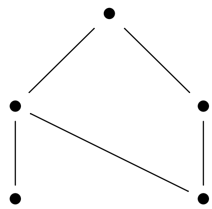


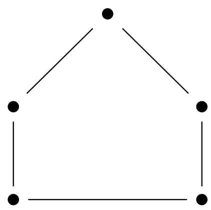
3.

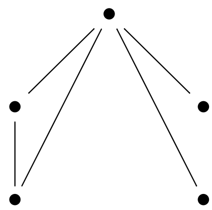


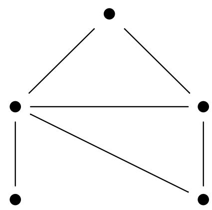
4. 

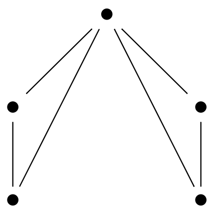
5. 

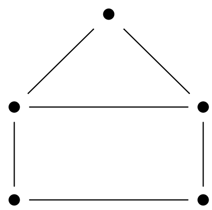
6. 

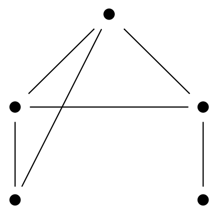
7. 

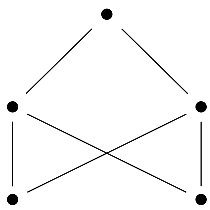
8. 

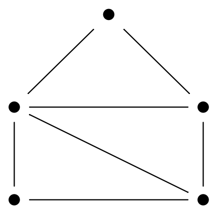
9. 

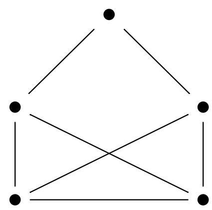
10. 

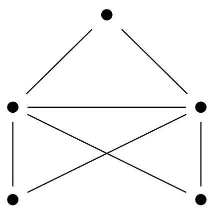
11. 

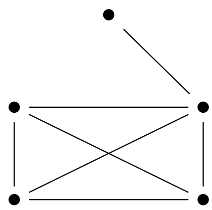
12. 

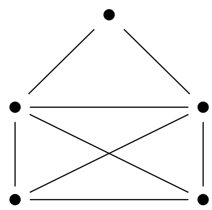
13. 

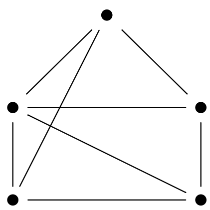
14. 

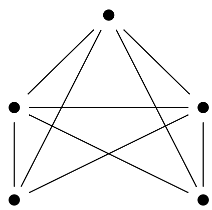
15. 

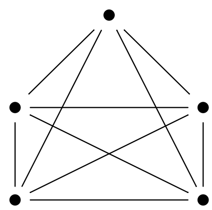
16. 

17. 

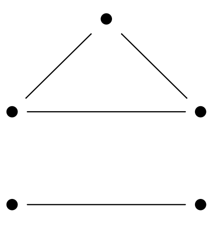
18. 

19. 

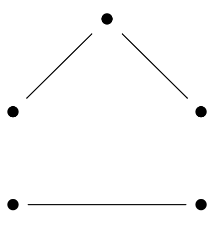
20. 

21. 

Якщо граф $G(\Lambda)$ незв'язний, то він має вигляд:



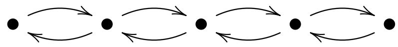
або



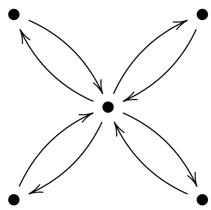
За графом $G(\Lambda)$ ми будуємо сагайдак $\overline{Q}(\Lambda)$ (якщо сагайдак $Q(\Lambda)$ – допустимий). При цьому повному підграфу на $m$ вершинах відповідає один одиничний цикл на цих $m$ вершинах.

Для зв'язних графів $G(\Lambda)$ отримуємо наступні сагайдаки $\overline{Q}(\Lambda)$:

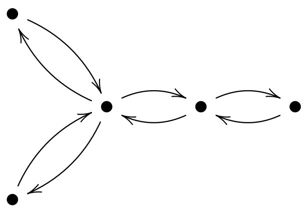
1.



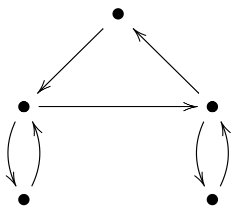
2.



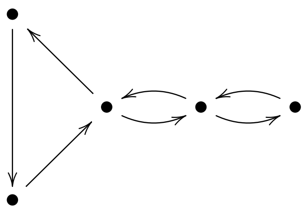
3.



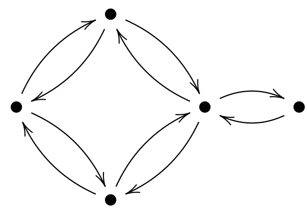
4.



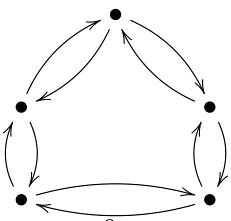
5.



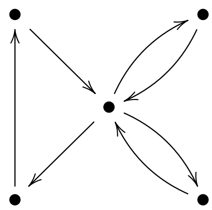
6.



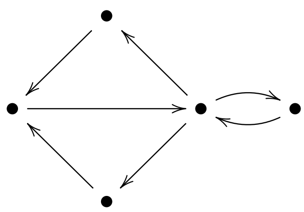
7.



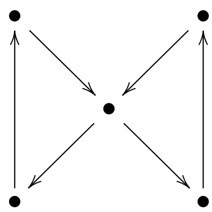
8.



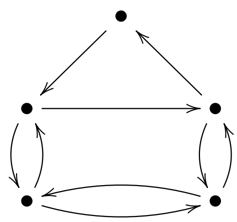
9.



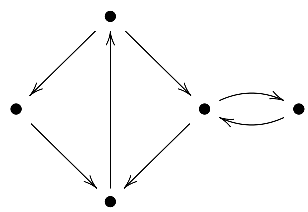
10.



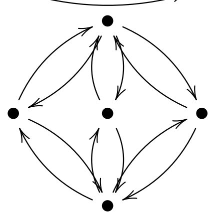
11.



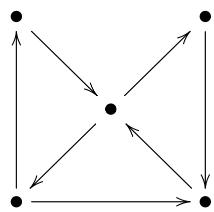
12.



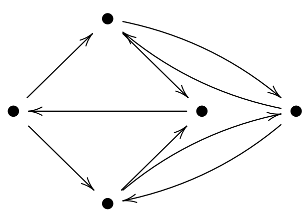
13.



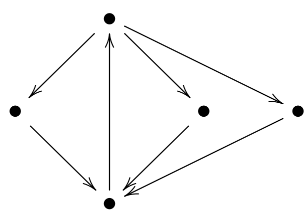
14.

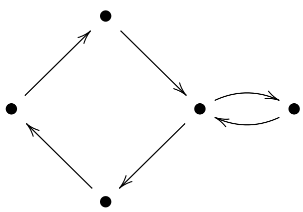


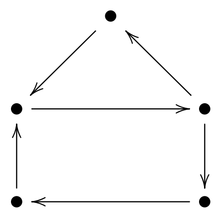
15.

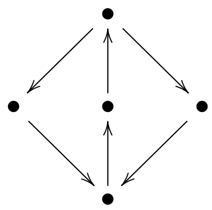


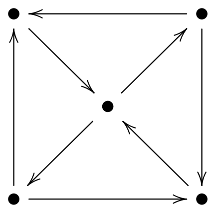
16.

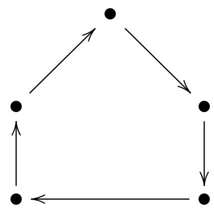


17. 

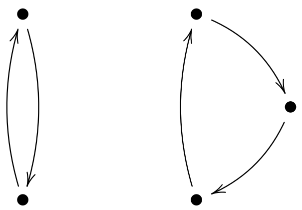
18. 

19. 

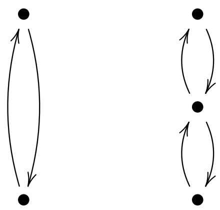
20. 

21. 

Для незв'язних графів $G(\Lambda)$ маємо:



або



## 11 Допустимі сагайдаки на 5-ти точках без петель

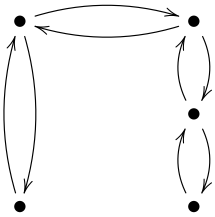
У сагайдаку $Q$, підсагайдаком якого є $\overline{Q}(\Lambda)$, можливо існують ще стрілки між вершинами. У випадку незв'язного $\overline{Q}(\Lambda)$, такі стрілки обов'язково є, бо $Q(\Lambda)$ – сильно зв'язний сагайдак. Кількість таких додаткових стрілок обмежуються умовами тверджень 8.5, 8.6.

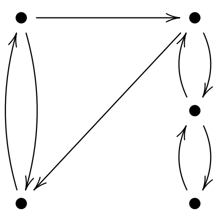
У випадку зв'язних $\overline{Q}(\Lambda)$ ми отримуємо 54 можливих неізоморфних сагайдаків $Q$.

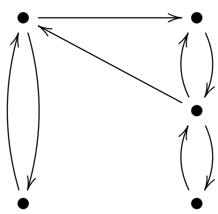
У випадку незв'язних $\overline{Q}(\Lambda)$ ми отримуємо 62 можливих неізоморфних сагайдаки $Q$.

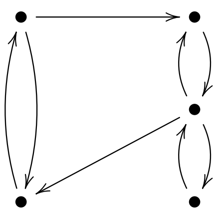
Перевірка всіх 119 можливих сагайдаків на ізоморфність та допустимість (виконання умов теореми 6.3) дає 96 неізоморфних допустимих сагайдаків без петель.

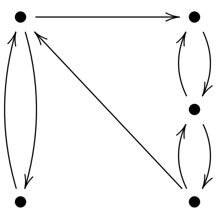
Нижче ми наводимо їх:

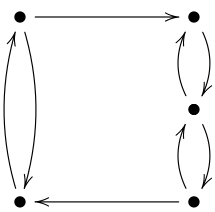
1. 

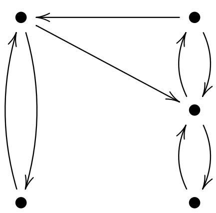
2. 

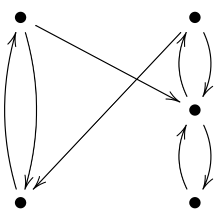
3. 

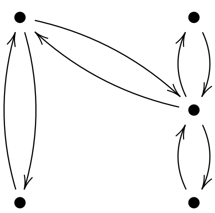
4. 

5. 

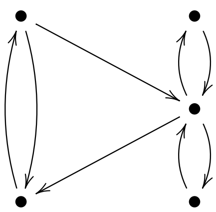
6. 

7. 

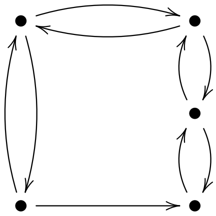
8. 

9. 

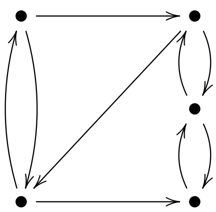
10.



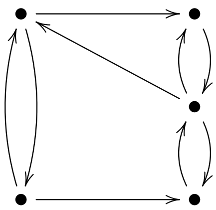
11.



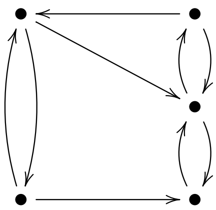
12.



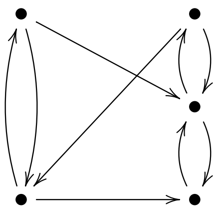
13.



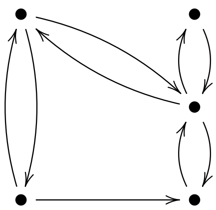
14.



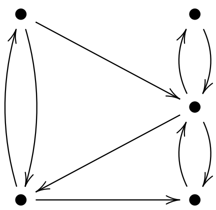
15.



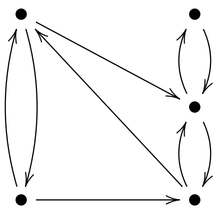
16.



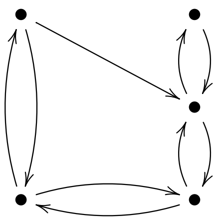
17.



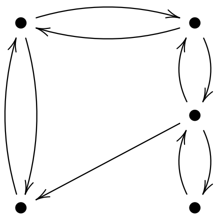
18.



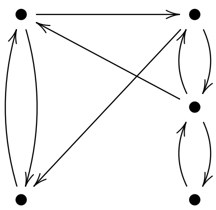
19.



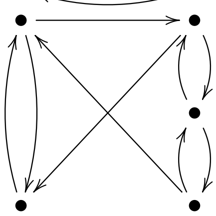
20.



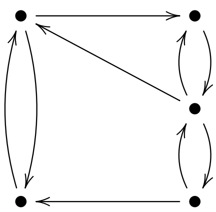
21.



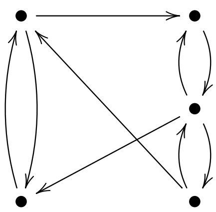
22.



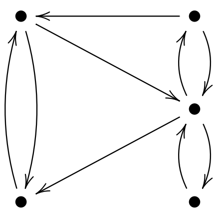
23.



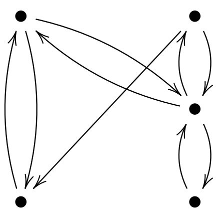
24.



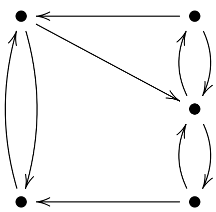
25.



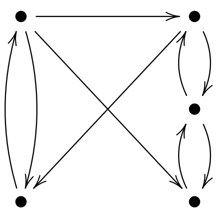
26.



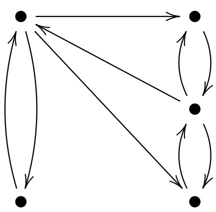
27.



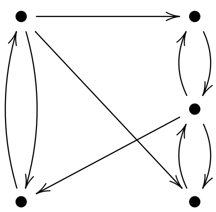
28.



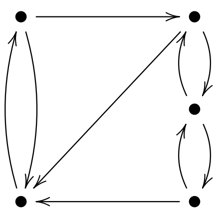
29.



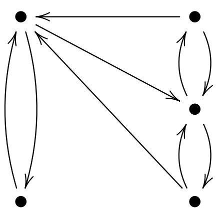
30.



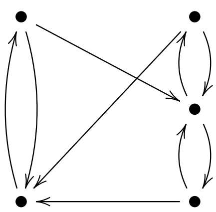
31.

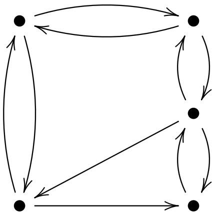


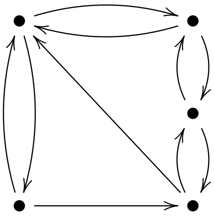
32.

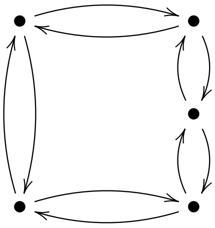


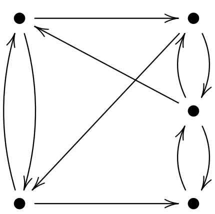
33.

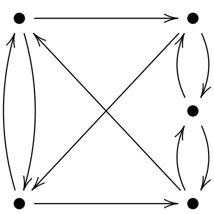


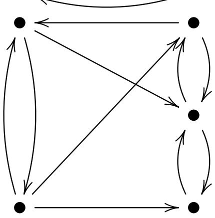
34. 

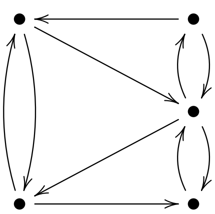
35. 

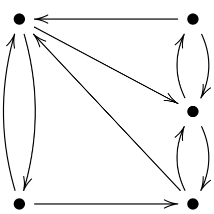
36. 

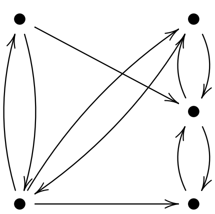
37. 

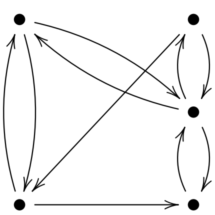
38. 

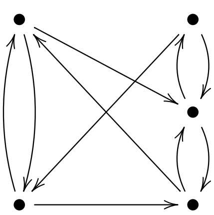
39. 

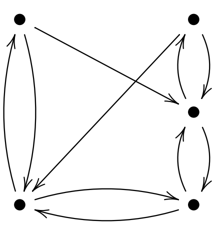
40. 

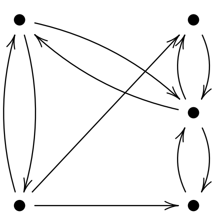
41. 

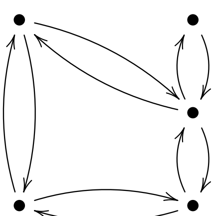
42. 

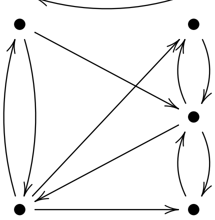
43. 

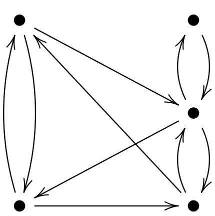
44. 

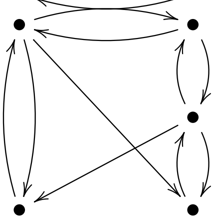
45. 

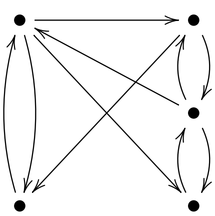
46. 

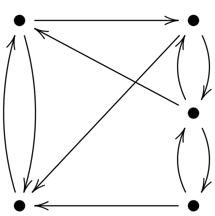
47. 

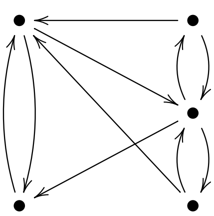
48. 

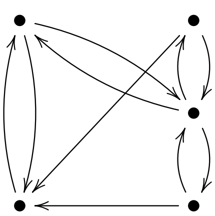
49. 

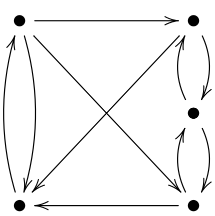
50. 

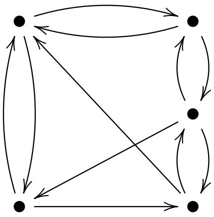
51. 

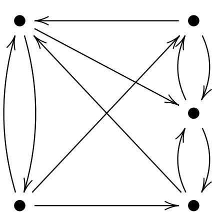
52. 

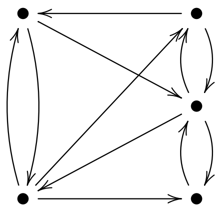
53. 

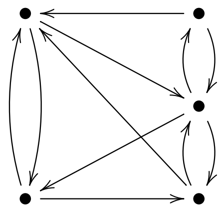
54. 

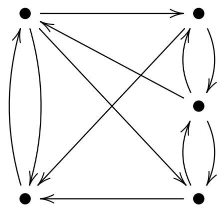
55. 

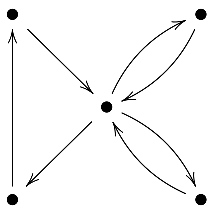
56. 

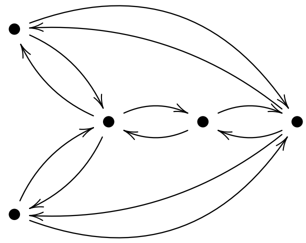
57. 

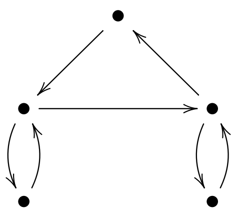
58. 

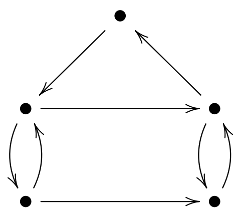
59. 

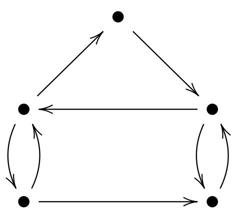
60. 

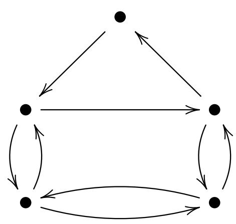
61. 

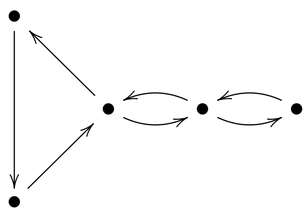
62. 

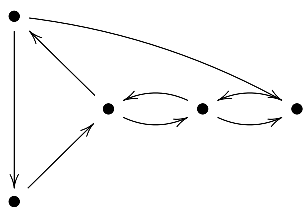
63. 

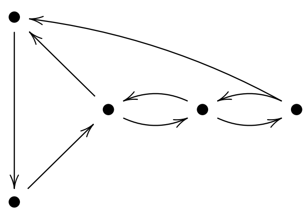
64. 

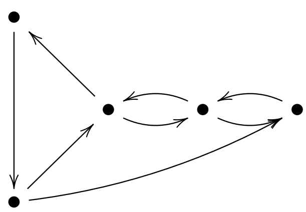
65. 

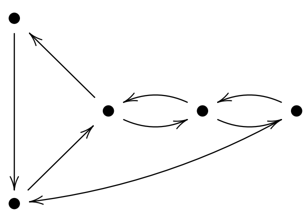
66. 

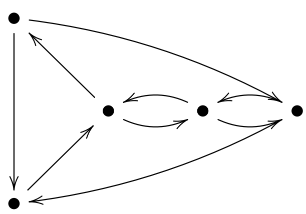
67. 

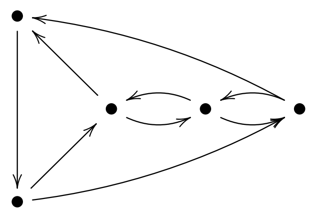
68. 

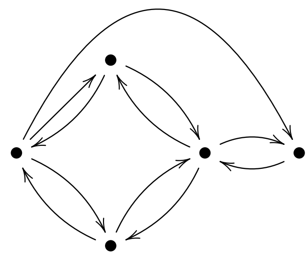
69. 

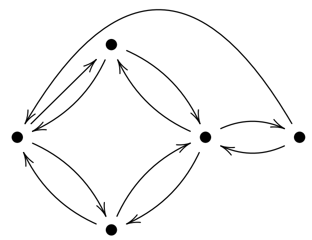
70. 

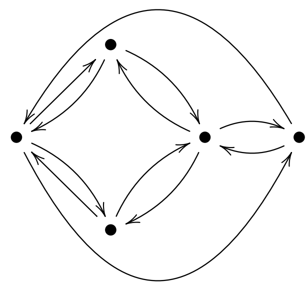
71. 

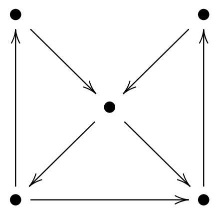
72. 

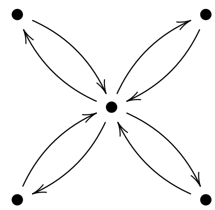
73.


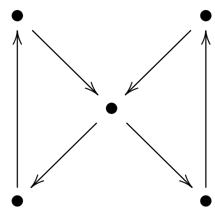
74.


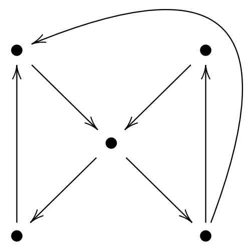
75.


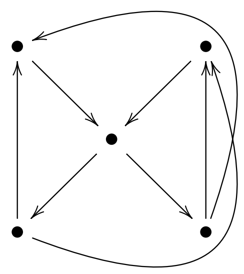
76.


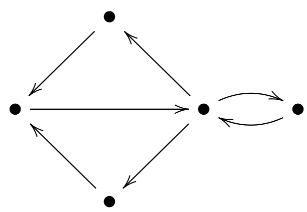
77.


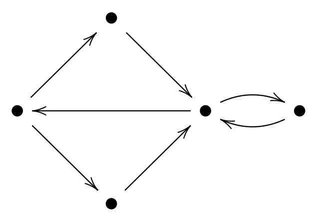
78.


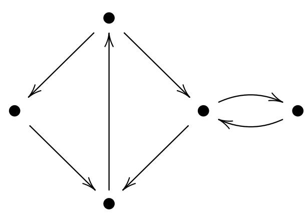
79.


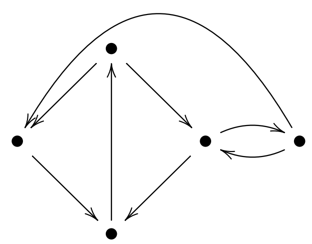
80.


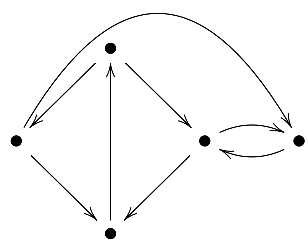
81.


82.


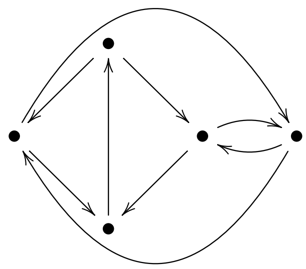
83.


84.


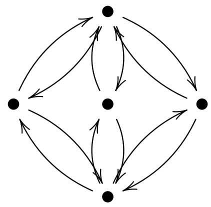
85.


86.


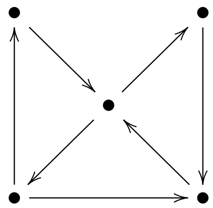
87.



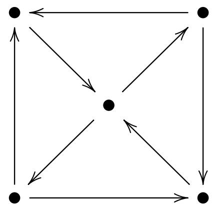
88.



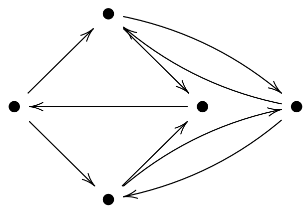
89.



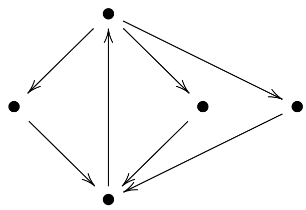
90.



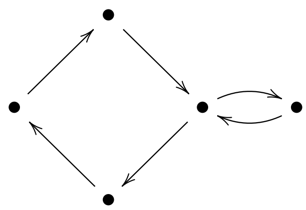
91.



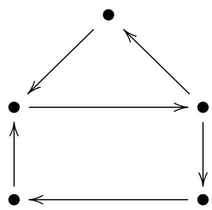
92.



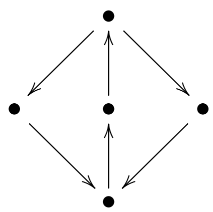
93.



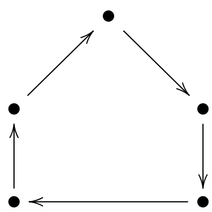
94.



95.



96.



## Література


[1] Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004, v. 1, 380 p.

[2] Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007, v. 2, 400 p.

[3] Kirichenko, V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev// International J. of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5– 6. – P. 1–16.

[4] Зеленський, О. В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників/ О.В. Зеленський// Вісн. Київ. ун-ту. Сер: Фіз.-мат. науки. – 2007.– №3. – С. 27-31.

[5] Журавлев, В. Н. Допустимые колчаны/ В. Н. Журавлев// Фундамент. и прикл. математика.–2008. — Т. 14, вып.7.– С. 121–128.

[6] Кириченко, В.В. О жестких колчанах/В.В Кириченко, В.Н. Журавлёв, И.Н. Цыгановская// Фундамент. и прикл. математика. – 2006. – Т. 12, вып. 8.– С. 105 – 120.

[7] Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриць показників./Журавльов В. М., Зеленський О. В., Дармосюк В. М. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2012. - №4. - С. 27-31.

[8] *Журавльов В.М.* Жорсткі сагайдаки, асоційовані з частково впорядкованими множинами. / В.М. Журавльов, Т.О. Журавльова, О.В. Зеленський // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка – 2013. – №4(29). – С. 39 – 44.

[9] Chernousova, Zh.T., Dokuchaev, M.A., Khibina, M.A., Kirichenko, V.V., Miroshnichenko, S.G., and Zhuravlev, V.N., *Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. I.*, Algebra and Discrete Math. v. 1 (2002), pp. 32-63.

[10] Chernousova, Zh.T., Dokuchaev, M.A., Khibina, M.A., Kirichenko, V.V., Miroshnichenko, S.G., and Zhuravlev, V.N., *Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. II.*, Algebra and Discrete Math. v. 2, N 2, (2003), pp. 47-86.