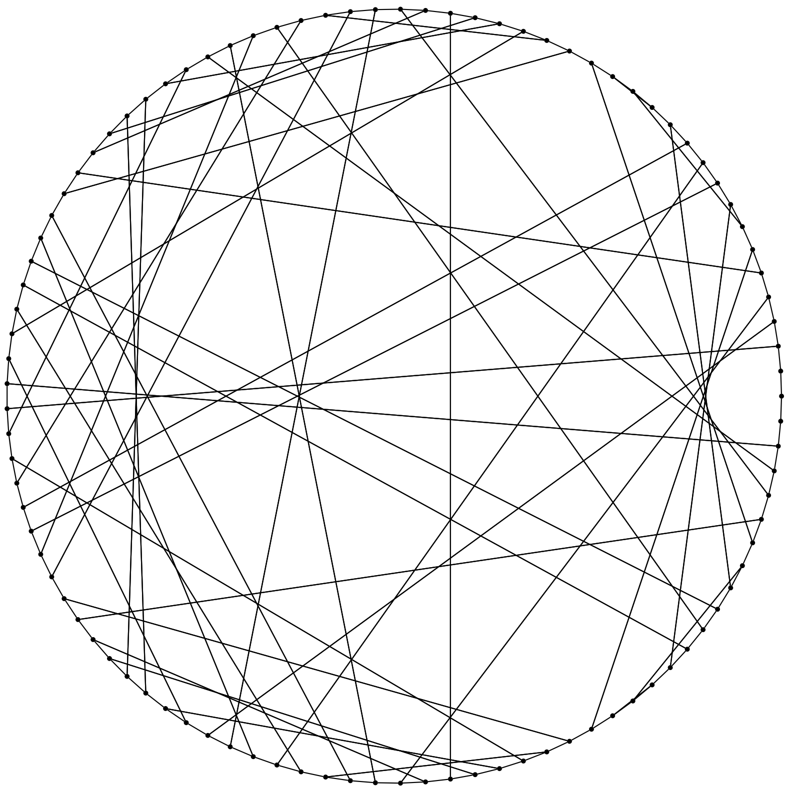
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Є. В. Бондаренко

ТЕОРІЯ ГРАФІВ: ЕКСПАНДЕРИ

Навчальний посібник



Київ — 2020

УДК 519.17
ББК 22.181

Рецензенти:
Б.В. Олійник – доктор фізико-математичних наук, професор
О.О. Пришляк – доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол №14 від 24 червня 2020 року)

Бондаренко Є.В.
Теорія графів: експандери. Навчальний посібник. – К., 2020. – 81 с.

У посібнику викладено основи теорії графів експандерів. Особлива увага приділена методам побудови експандерів. Наведено деякі застосування експандерів в комп'ютерних науках. Посібник призначений для студентів старших курсів університетів та аспірантів, які цікавляться математикою та її застосуванням у комп'ютерних науках.

УДК 519.17
ББК 22.181

Зміст

Передмова

Експандери є скінченними графами, в яких поєднуються дві, на перший погляд, протилежні властивості — сильна зв'язність і мала кількість ребер. За останні п'ятдесят років було знайдено багато глибоких та несподіваних застосувань експандерів у різних областях математики та комп'ютерних наук. Вони знайшли застосування у таких розділах, як теорія складності обчислень, паралельне сортування, дерандомізація алгоритмів, коди з виправленням помилок, розподілені обчислення та багато іншого. Зокрема, кілька важливих проблем теорії комп'ютерних наук були розв'язані за допомогою експандерів.

Мета даного посібника познайомити читача з дивовижним світом графів експандерів. Посібник укладено на основі курсу лекцій з теорії графів, який автор читав на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка та факультеті інформатики Києво-Могилянської академії. Основний матеріал посібника ґрунтується на оглядовій статті [12], книжках [3, 8, 16] та лекціях [13, 14, 22, 23].

Посібник має наступну структуру. В першому розділі наводяться необхідні відомості з теорії графів та лінійної алгебри. Розглядаються елементи спектральної теорії графів та оператор Лапласа на графах.

В другому розділі наводяться комбінаторне та спектральне означення експандерів і доводиться нерівність Чігера, з якої випливає еквівалентність цих двох означень. Далі розглядаються різні властивості експандерів: ріст діаметрів, хроматичне число, лема про перемішування, випадкові блукання. Особлива увага приділена асимптотичній поведінці другого власного числа регулярних графів.

Побудова експандерів є дуже нетривіальною задачею. У третьому підрозділі описано найбільш відомі конструкції. Спочатку доводиться існування експандерів ймовірнісними методами. Далі розбираються експандери Маргуліса, ітерована конструкція експандерів за допомогою зиг-заг добутку графів і алгебраїчні конструкції за допомогою груп з властивістю (T).

В останньому розділі описано деякі застосування експандерів в теорії комп'ютерних наук. Це побудова сортувальних мереж логарифмічної глибини, побудова ефективних кодів з виправленням помилок та зменшення використання випадкових бітів у рандомізованих алгоритмах.

У читача цього посібника ми передбачаємо володіння основами математики на рівні студентів другого-третього курсів спеціальності математика або прикладна математика.

1 Необхідні відомості з теорії графів та лінійної алгебри

1.1 Графи

В цьому розділі ми нагадаємо необхідні відомості з теорії графів. Більше інформації можна знайти в книжках [10, 11, 6].

Графом називається пара $G = (V, E)$, де V — довільна множина, а E — множина, що складається з деяких двоелементних підмножин V. Елементи V називаються вершинами графа G, а елементи E — ребрами. Розміром графа G називається кількість вершин у ньому, позначається $|G|$. Граф називається скінченним, якщо він має скінченний розмір.

Для ребра $e = \{v, u\} \in E$ кажуть, що e з'єднує вершини v та u. В цьому випадку, v та u називаються суміжними або сусідніми в графі та інцидентними ребру e. Ребро $e = \{v, u\} \in E$ будемо скорочено позначати $e = vu$ або $e = uv$.

З означення випливає, що дві вершини в графі можуть бути з'єднанні щонайбільше одним ребром (немає кратних ребер) і жодна вершина не з'єднана сама із собою (немає петель). Такі графи називаються простими, і всі графи в посібнику, якщо не сказано іншого, будуть вважатися простими.

Два графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються ізоморфними, позначається $G_1 \cong G_2$, якщо існує така бієкція $f : V_1 \to V_2$, що для кожної пари вершин $v, u \in V_1$ виконується: $vu \in E_1$ тоді і лише тоді, коли $f(v)f(u) \in E_2$.

Граф H називається підграфом графа G, позначається $H \subseteq G$, якщо $V(H) \subseteq V(G)$ і $E(H) \subseteq E(G)$. Підграф графа $G = (V, E)$, індукований підмножиною $S \subset V$, — це граф з множиною вершин S та усіма ребрами між цими вершинами в графі G.

Розглянемо кілька стандартних прикладів графів. Шляхом довжини $n \geq 1$ називається граф P_n з n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ та ребрами $v_i v_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Циклом C_n довжини $n \geq 3$ називається шлях P_n разом з ребром $v_n v_1$. Повним графом на n-вершинах називається граф K_n, в якому кожні дві вершини сполучені ребром. Граф гіперкуб Q_n має множину вершин $\{0, 1\}^n$, в якому два двійкових слова є суміжними, якщо вони відрізняються у одному біті. Граф Q_n збігається з графом, утвореним з вершин та ребер n-вимірного гіперкуба.

Граф $G = (V, E)$ називається дводольним, якщо його множину вершин V можна розбити на дві диз'юнктні непорожні підмножини $V = V_1 \cup V_2$ так, що кожне ребро графа має вигляд vu для $v \in V_1$ та $u \in V_2$. Можна також сказати, що граф є дводольним, якщо можна розфарбувати його вершини у два кольори так, щоб сусідні вершини мали різний колір. Дводольний граф з розбиттям $V = V_1 \cup V_2$ називається повним дводольним, якщо він містить всі ребра вигляду vu для $v \in V_1$ та $u \in V_2$. Повний дводольний граф, у якого $|V_1| = n$ і $|V_2| = m$, позначається $K_{n,m}$ (див. приклад на рис. 3).

Степенем вершини v, позначається $deg(v)$, називається кількість ребер в графі, інцидентних v. Іншими словами, $deg(v)$ дорівнює кількості сусідів у вершини v. Граф називається d-регулярним, якщо всі його вершини мають степінь d. Наприклад, цикл C_n є 2-регулярним графом, повний граф K_n є $(n-1)$-регулярним, а гіперкуб Q_n є n-регулярним.

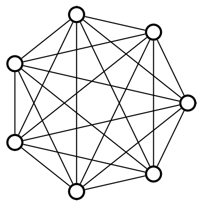


Рис. 1: Повний граф K_7

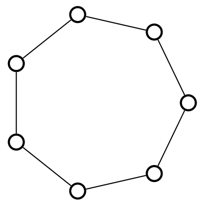


Рис. 2: Цикл C_7

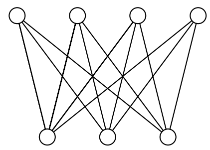


Рис. 3: Повний дводольний граф $K_{4,3}$

Шляхом довжини n в графі називається послідовність вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$, де v_i та v_{i+1} є суміжними для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Шлях називається простим, якщо всі вершини в ньому різні. Циклом в графі називається простий шлях, в якому перша та остання вершини є суміжними. Також можна казати, що простим шляхом (циклом) в графі називається довільний підграф, який ізоморфний шляху P_n (циклу C_n).

Граф називається зв'язним, якщо довільні дві вершини графа можна з'єднати шляхом. Максимальний зв'язний підграф графа називається його компонентою зв'язності. Цикл C_n — це єдиний зв'язний граф, в якому всі вершини мають степінь два.

Зв'язний граф без циклів називається деревом. В дереві кожні дві вершини можна з'єднати єдиним шляхом. Кожне дерево з n вершин має точно $n-1$ ребер. Існує єдине d-регулярне дерево, яке будемо позначати T_d (див. рис. 4).

Відстанню між двома вершинами $v, u \in V$ у зв'язному графі, позначається $dist(v, u)$, називається довжина найкоротшого шляху між v та u. З такою відстанню зв'язний граф є дискретним метричним простором. Кулю з центром у вершині v та радіусу r будемо позначати

$$B_r(v) = \{u \in V \mid dist(v, u) \leq r\}.$$

Діаметром зв'язного графа, позначається $\operatorname{diam}(G)$, називається максимальна відстань між його вершинами.

1.2 Симетричні матриці

В цьому розділі ми нагадаємо необхідні відомості з лінійної алгебри та теорії операторів. Всі матриці будуть квадратними з дійсними коефіцієнтами. Для матриці A через A_{ij} або a_{ij} будемо позначати ij-тий елемент матриці.

Матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ називається симетричною, якщо $A^\top = A$, де $A^\top$ — транспонована матриця. Симетричні матриці можна охарактеризувати такою властивістю:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \text{для всіх } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

де $\langle x, y \rangle = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Це випливає з рівностей

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^\top y = x^\top A^\top y = x^\top A y = \langle x, Ay \rangle.$$

В наступній теоремі сформульовані основні властивості дійсних симетричних матриць.

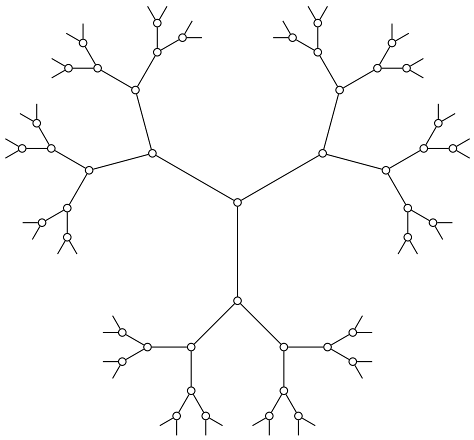


Рис. 4: Частина нескінченного 3-регулярного дерева T_3

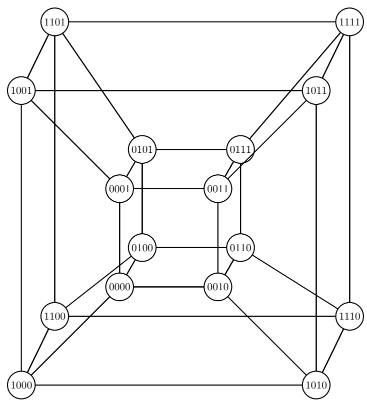


Рис. 5: Гіперкуб Q_4

Теорема 1.1 (Спектральна теорема)**.** *Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$ — симетрична матриця. Тоді:*

1) *Всі власні числа A є дійсними.*
2) *Власні вектори A, що відповідають різним власним числам, є ортогональними.*
3) *Існує ортонормований базис $\mathbb{R}^n$, який складається з власних векторів матриці A (власний ортонормований базис).*

Нехай $v_1, v_2, \dots, v_n$ — власний ортонормований базис для матриці A з власними числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тоді A можна представити у вигляді

$$A = QDQ^\top = \lambda_1 v_1 v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top + \ldots + \lambda_n v_n v_n^\top, \tag{1}$$

де $Q = (v_1, \dots, v_n)$ — ортогональна матриця, утворена стовпцями $v_1, \dots, v_n$, і $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — діагональна матриця з числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ по діагоналі. Цей запис називається спектральним розкладом матриці.

Слідом квадратної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$, позначається $\mathrm{tr}(A)$, називається сума коефіцієнтів по діагоналі. Якщо матриця A симетрична і має власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то

$$\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^k \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Справді, зі спектрального розкладу для A отримуємо

$$\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}((QDQ^\top)^k) = \mathrm{tr}(QD^kQ^\top) = \mathrm{tr}(Q^\top QD^k) = \mathrm{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k,$$

де в третій рівності ми використали відому властивість сліду $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

В деяких випадках нам буде зручніше працювати з операторами замість матриць. Нехай W — дійсний або комплексний векторний простір зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Окрім $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$, ми будемо використовувати простір

$$L^2(V) = \left\{ f : V \to \mathbb{C} \, : \, \sum_{v \in V} |f(v)|^2 < \infty \right\},$$

де V — скінченна множина або підмножина $\mathbb{Z}^n$, зі скалярним добутком та нормою

$$\langle f, g\rangle = \sum_{v\in V} f(v)\overline{g(v)} \quad \text{і} \quad \|f\|^2 = \sum_{v\in V} |f(v)|^2.$$

Для кожного лінійного оператора $\varphi : W \to W$ існує спряжений оператор $\varphi^* : W \to W$, який визначається рівністю

$$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle \ \text{ для всіх } x, y \in W.$$

Оператор φ називається самоспряженим, якщо $\varphi^* = \varphi$. Симетричні матриці з $M_n(\mathbb{R})$ визначають самоспряжені оператори простору $\mathbb{R}^n$, і навпаки, для скінченно вимірного простору W матриця самоспряженого оператора у ортонормованому базисі є симетричною.

1.3 Матриця суміжності

Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф з n вершинами. Занумеруємо вершини графа $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Матрицею суміжності графа G називається матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$, в якій

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i v_j \in E; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Замість нумерації вершин графа, ми можемо говорити, що рядки і стовпці матриці A індексовані вершинами графа, і A_{vu} дорівнює кількості ребер між вершинами v та u.

Матриця суміжності однозначно визначає граф. Якщо A і B — матриці суміжності двох ізоморфних графів, то $A = PBP^{-1}$, де P — це деяка перестановочна матриця. Таким самим співвідношенням пов'язані матриці суміжності, задані різною нумерацією вершин одного графа.

Оскільки ми працюємо з простими графами, то матриця суміжності A є симетричною і $A_{vv} = 0$ для всіх $v \in V$, зокрема, $\mathrm{tr}(A) = 0$. Граф G є d-регулярним, якщо сума елементів у кожному рядку матриці A дорівнює d. Степені матриці A дозволяють визначити кількість шляхів в графі за допомогою наступної теореми.

Теорема 1.2. *Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф і A — матриця суміжності графа G. Тоді $(A^k)_{vu}$ для $v, u \in V$ та $k \geq 1$ дорівнює кількості шляхів в графі довжини k між вершинами v та u.*

Доведення. Індукція за k. При $k = 1$ твердження виконується за означенням матриці суміжності. Припустимо, що $(A^{k-1})_{vu}$ дорівнює кількості шляхів довжини $k-1$ між v та u для всіх $v, u \in V$. Кожен шлях довжини k між v та u через $k-1$ кроків потрапляє у деякого сусіда w вершини u. Тому всі шляхи довжини k можна отримати, взявши всі шляхи довжини $k-1$ до кожного сусіда вершини u. Це і обчислює добуток матриць:

$$(A^k)_{vu} = (A^{k-1}A)_{vu} = \sum_{w\in V} (A^{k-1})_{vw} A_{wu}.$$

□

Наслідок 1.3. $(A^2)_{vv} = \deg(v)$ *для кожної* $v \in V$.

Доведення. Повернутися назад у вершину за два кроки можна тільки, якщо перейти до сусідньої вершини і повернутися назад. Тому кількість таких шляхів дорівнює степені вершини. $\square$

З теореми також випливає, що матрицю суміжності можна використати для перевірки зв'язності графа: граф G є зв'язним тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці $E + A + A^2 + \ldots + A^m$ є додатніми для деякого $m \leq n - 1$, а найменше таке m дорівнює діаметру графа.

Матриця суміжності A природно діє множенням на векторах з $\mathbb{R}^n$:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (Af)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j \ \text{ для } f \in \mathbb{R}^n.$$

Якщо розглядається індексація елементів матриці A вершинами графа, то замість векторів $f \in \mathbb{R}^n$ розглядаються функції $f : V \to \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. В цьому випадку, зокрема для нескінченних графів, замість матриці суміжності A говорять про оператор суміжності, який також позначається A:

$$A : L^2(V) \to L^2(V), \quad (Af)(v) = \sum_{u \in V} A_{vu} f(u) = \sum_{vu \in E} f(u).$$

1.4 Спектри графів

Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф з n вершинами і A — матриця суміжності G. Матриця A є симетричною і за спектральною теоремою має n дійсних власних чисел (враховуючи кратність), які ми завжди впорядковуємо:

$$\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Ці власні числа також називаються власними числами графа, а $\lambda_i(G) = \lambda_i$ позначатиме i-те найбільше власне число (з урахуванням кратності). Множина всіх власних чисел називається спектром графа, позначається $\mathrm{spec}(G)$. Зауважимо, що матриці A та PAP^{-1} мають однакові власні числа, тому спектр графа не залежить від нумерації вершин.

Обчислимо спектр деяких графів.

Приклад 1.1. Цикл C_n має матрицю суміжності

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця A є циркулянтною, а для таких матриць відомо як шукати власні числа. Зокрема, власними числа C_n є $2\cos(\frac{2\pi k}{n})$ для $k = 0, \ldots, n-1$. Для того, щоб це побачити, можна перевірити, що вектор $(1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \ldots, \varepsilon_k^{n-1})$, де $\varepsilon_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n})$ — k-тий корінь n-го степеня з 1, є власним вектором з власним числом $\varepsilon_k + \varepsilon_k^{n-1} = 2\cos(\frac{2\pi k}{n})$.

Приклад 1.2. Повний граф K_n має матрицю суміжності

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(A - xE) = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1-x)(x+1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отже, K_n має власне число $n-1$ кратності 1 та власне число -1 кратності $n-1$.

Приклад 1.3. Гіперкуб Q_n має власні числа $n, n-2, n-4\dots, -n$ з кратностями

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}.$$

Покажемо два підходи, щоб це довести. Графи Q_n можна будувати рекурсивно, розбивши множину вершин $\{0,1\}^n$ на дві частини в залежності від останнього біта. Тому матриця суміжності Q_n задовольняє рекурсії

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & A_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Звідси можна отримати рекурсію на характеристичний многочлен

$$\chi_n(x) = \chi_{n-1}(x-1)\chi_{n-1}(x+1)$$

і знайти власні числа за індукцією. У другому способі ототожнимо вершини графа Q_n з підмножинами $I \subseteq \{1,\dots,n\}$, тоді ребром з'єднані дві підмножини, коли вони відрізняються на один елемент. Ми покажемо, що для кожної підмножини $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ вектор $f_S : V(Q_n) \to \{1,-1\}$,

$$f_S(I) = (-1)^{|S \cap I|} \text{ для } I \subseteq \{1,\dots,n\},$$

є власним вектором A_n з власним числом $n - 2|S|$. Справді:

$$\begin{aligned} (A_n f_S)(I) &= \sum_{|J \cap I| = 1} (-1)^{|S \cap J|} = \sum_{x \in S} (-1)^{|S \cap I| + 1} + \sum_{x \notin S} (-1)^{|S \cap I|} = \\ &= -|S|(-1)^{|S \cap I|} + (n - |S|)(-1)^{|S \cap I|} = (n - 2|S|) f_S(I). \end{aligned}$$

Залишається зауважити, що інших власних чисел немає, оскільки f_S для $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ є лінійно незалежними (навіть ортогональними).

Яким чином власні числа графа відображаються у інших його характеристиках вивчає спектральна теорія графів. Ми розглянемо кілька необхідних нам результатів цієї цікавої теорії (див. [8, 7, 20]).

Твердження 1.4. *Нехай $G = (V,E)$ — скінченний граф з n вершинами і власними числами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Тоді*

1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$;

2) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2|E|$;

3) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ *дорівнює кількості замкнених шляхів в графі довжини* k.

Доведення. Використаємо зв'язок між власними числами та слідом симетричної матриці:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{v \in V} (A^k)_{vv}.$$

Пункт 1) виконується, оскільки $A_{vv} = 0$. Пункт 2) випливає з наслідку 1.3 та рівностей

$$\sum_{v \in V} (A^2)_{vv} = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Пункт 3) випливає з теореми 1.2. □

Граф G є d-регулярним, якщо сума елементів у кожному рядку матриці суміжності A дорівнює d. В термінах спектру це рівносильно тому, що одиничний вектор $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ є власним вектором A з власним числом d.

Твердження 1.5. *Нехай* $G = (V, E)$ *— скінченний* d*-регулярний граф з* n *вершинами та власними числами* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. *Тоді:*

1) $\lambda_1 = d$ *і* $|\lambda_i| \leq d$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$.

2) Граф G *є зв'язним тоді і лише тоді, коли* $\lambda_2 < \lambda_1$, *тобто* λ_1 *має кратність один. Більш загально, кількість компонент зв'язності графа* G *дорівнює кратності власного числа* λ_1.

3) Якщо G *є дводольним, то його спектр є симетричним відносно нуля.*

4) Граф G *є дводольним тоді і лише тоді, коли* $\lambda_n = -d$.

Доведення. 1) Нехай λ — власне число і $f : V \to \mathbb{R}$ — відповідна власна функція оператора суміжності A. Візьмемо вершину $v \in V$, для якої $|f(v)| = \max_{u \in V} |f(u)| > 0$. Оцінимо значення $(Af)(v)$:

$$|(Af)(v)| = |(\lambda f)(v)| = |\lambda| \cdot |f(v)|,$$
$$|(Af)(v)| = \Big| \sum_{vu \in E} f(u) \Big| \leq \sum_{vu \in E} |f(u)| \leq d \cdot \max_{u \in V} |f(u)| = d \cdot |f(v)|.$$

Звідси випливає необхідна нерівність $|\lambda| \leq d$.

2) Ми покажемо, що власний простір A з власним числом d утворений функціями, які сталі на компонентах зв'язності. З цього буде випливати пункт 2), оскільки розмірність такого простору дорівнює кількості компонент. З рівняння

$$(Af)(v) = \sum_{vu \in E} f(u) = d \cdot f(v)$$

легко бачити, що довільна функція, яка є сталою на компонентах зв'язності графа, є власною функцією A з власним числом d. Навпаки, нехай $f : V \to \mathbb{R}$ — власна функція A з власним числом d. Покажемо, що f є сталою на компонентах зв'язності графа. Нехай C — деяка компонента G і візьмемо таку вершину $v \in C$, що $|f(v)| = \max_{u\in C} |f(u)|$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $f(v) > 0$. Тоді $f(u) \le f(v)$ для всіх $u \in C$ і маємо нерівність

$$f(v) = \tfrac{1}{d}(Af)(v) = \tfrac{1}{d} \sum_{vu\in E} f(u) \le f(v),$$

яка насправді є рівністю. Це можливо тільки тоді, коли $f(v) = f(u)$ для кожного сусіда u вершини v. Застосувавши ті самі аргументи для сусідів і так далі, отримаємо, що f приймає одне значення на всіх вершинах C.

3) Нехай G — дводольний і $V = V_1 \cup V_2$ — відповідне розбиття вершин. Нехай f — власна функція A з власним числом λ. Визначимо функцію

$$g(v) = \begin{cases} f(v), & \text{якщо } v \in V_1; \\ -f(v), & \text{якщо } v \in V_2. \end{cases}$$

Тоді для $v \in V_1$ маємо $g(u) = -f(u)$ для всіх сусідів u вершини v. Отже:

$$(Ag)(v) = \sum_{u\in V} A_{vu} g(u) = -\sum_{u\in V} A_{vu} f(u) = -(Af)(v) = (-\lambda) f(v) = (-\lambda) g(v).$$

Так само для $v \in V_2$. Отже, g є власною функцією A з власним числом $-\lambda$. Якщо власне число λ має кратність k, то буде існувати k лінійно незалежних власних функцій f. Відповідні функції g також є лінійно незалежними, і тому $-\lambda$ теж має кратність k. Звідси випливає симетричність спектру відносно нуля.

4) Залишається довести, що якщо $-d$ є власним числом, то граф є дводольним. Нехай $f : V \to \mathbb{R}$ — власна функція A з власним числом $-d$. Нехай C — довільна компонента зв'язності графа і візьмемо вершину $v \in C$ таку, що $|f(v)| = \max_{u\in C} |f(u)|$. Не втрачаючи загальності, припускаємо $f(v) > 0$, а отже $f(u) \le f(v)$ для всіх $u \in C$. Тоді виконується нерівність

$$f(v) = \tfrac{1}{-d}(Af)(v) = \tfrac{1}{-d} \sum_{vu\in E} f(u) \le f(v),$$

яка є рівністю. Це можливо тільки тоді, коли $f(u) = -f(v)$ для всіх сусідів u вершини v. Застосувавши ті самі аргументи для сусідів і так далі, отримаємо:

$$f(u) = \begin{cases} f(v), & \text{якщо } dist(v,u) \text{ є парною}; \\ -f(v), & \text{якщо } dist(v,u) \text{ є непарною}. \end{cases}$$

Це визначає розбиття множини вершин C на підмножини $C_1 = \{u \in V : f(u) = f(v)\}$ і $C_2 = \{u \in V : f(u) = -f(v)\}$. Причому між вершинами в C_1 і C_2 немає ребер, бо інакше $f(v) = -f(v) = 0$. Отже, кожна зв'язна компонента графа є дводольною, тому і весь граф є дводольним. $\square$

Власні числа d та $-d$ зв'язного d-регулярного графа називаються тривіальними. В теорії графів експандерів ключову роль буде грати друге власне число графа $\lambda_2(G)$ і величина $\lambda_1 - \lambda_2 = d - \lambda_2$, яка називається спектральним розривом графа.

Теорема 1.6 (Релея-Рітца)**.** *Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами, і A — матриця суміжності графа G. Тоді*

$$\lambda_2(G) = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ v\ne 0, v\perp\mathbb{1}}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2} = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n, \\ \|v\|=1, v\perp\mathbb{1}}} \langle Av, v\rangle.$$

Доведення. За спектральною теоремою матриця A має власні вектори $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}, v_2, \ldots, v_n$ з власними числами $\lambda_1 = d \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, які утворюють ортонормований базис $\mathbb{R}^n$. Розкладемо вектор $v \in \mathbb{R}^n$ за цим базисом:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,\ c_i \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Av = \sum_{i=1}^{n} c_i A v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i.$$

Помітимо, що $v \perp \mathbb{1}$ тоді і лише тоді, коли $\langle v, v_1\rangle = \sum_i c_i \langle v_i, v_1\rangle = c_1 = 0$. Для таких векторів v маємо

$$\langle Av, v\rangle = \langle \sum_{i=2}^{n} c_i \lambda_i v_i, \sum_{j=2}^{n} c_j v_j \rangle = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} c_i c_j \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle =$$
$$= \sum_{i=2}^{n} c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} c_i^2 = \lambda_2 \|v\|^2.$$

Залишається зауважити, що рівність досягається для $v = v_2$. □

В деяких застосуваннях експандерів також важливою буде величина

$$\lambda(G) = \max_{\lambda_i \neq d} |\lambda_i| = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|),$$

а для дводольних графів $\max_{|\lambda_i| \neq d} |\lambda_i|$ — друге найбільше за модулем власне число графа. Теорема 1.6 одразу переноситься на число $\lambda(G)$, якщо додати модуль до чисельника.

Теорема 1.7 (Релея-Рітца)**.** *Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами, і A — матриця суміжності графа G. Тоді*

$$\lambda(G) = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0, v \perp \mathbb{1}}} \frac{|\langle Av, v\rangle|}{\|v\|^2} = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n, \\ \|v\|=1, v \perp \mathbb{1}}} |\langle Av, v\rangle|.$$

Число $\lambda(G)$ можна виразити через норму матриць. Нагадаємо, що (операторною) нормою квадратної матриці A розмірності n називається число

$$\|A\| = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \|Av\|.$$

Норма матриць має наступні властивості:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c| \cdot \|A\|, \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Для симетричних матриць норму можна визначити через її власні числа:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Теорема 1.8. *Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами і матрицею суміжності A. Тоді*

$$\lambda(G) = \|A - \tfrac{d}{n} J\|,$$

де J — це квадратна матриця розмірності n, у якої всі елементи рівні 1.

Доведення. За спектральною теоремою матриця A має власні вектори $v_1 == \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}, v_2, \ldots, v_n$ з власними числами $\lambda_1 = d \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, які утворюють ортонормований базис $\mathbb{R}^n$. Тоді A має спектральний розклад

$$A = dv_1v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top + \ldots + \lambda_n v_n v_n^\top.$$

Помітимо, що $v_1 v_1^\top = \frac{1}{n}J$. Тому

$$A - \tfrac{d}{n}J = \lambda_2 v_2 v_2^\top + \ldots + \lambda_n v_n v_n^\top.$$

Зокрема, $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ є власними числами симетричної матриці $A - \frac{d}{n}J$. Отже,

$$\|A - \tfrac{d}{n}J\| = \max\{0, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\} = \lambda(G).$$

□

Наслідок 1.9. *Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами і матрицею суміжності A. Тоді*

$$\lambda(G) = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ v\neq 0, v\perp \mathbb{1}}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|=1, v\perp \mathbb{1}}} \|Av\|.$$

Вправа 1.1. Нехай H — підграф графа G. Доведіть, що $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$.

Вправа 1.2. Доведіть, що ізоморфні графи мають однаковий спектр. Наведіть приклад двох неізоморфних графів, які мають однаковий спектр.

Вправа 1.3. Нехай $G = (V, E)$ — скінченний d-регулярний граф. Подвійним накриттям графа G називається дводольний граф H з множиною вершин $V \times \{0, 1\}$ та ребрами $\{(u, 0), (v, 1)\}$ та $\{(v, 0), (u, 1)\}$ для кожного ребра $uv \in E$. Виразіть власні числа H через власні числа G.

Вправа 1.4. Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф з власними числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доведіть, що $\sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6t(G)$, де $t(G)$ — це кількість трикутників в графі, тобто циклів довжини три. Виведіть звідси, що $t(G) \leq \frac{\sqrt{2}}{3}|E|^{3/2}$.

Вправа 1.5. Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами. Доповненням до G називається граф G^c на тій самій множині вершин, в якому суміжними є ті вершини, що не є суміжними в G. Покажіть, що $\lambda_1(G^c) = n-d-1$ і $\lambda_i(G^c) = -1 - \lambda_{n+2-i}(G)$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.

1.5 Оператор Лапласа на графах

Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф з n вершинами. Матрицею Лапласа графа G називається матриця $\Delta = D - A$, де A — матриця суміжності графа, а D — діагональна матриця, в якої по діагоналі стоять степені вершин. Елементи Δ такі:

$$\Delta_{vu} = \begin{cases} \deg(v), & \text{якщо } v = u; \\ -1, & \text{якщо } v \neq u \text{ та } vu \in E; \\ 0, & \text{якщо } v \neq u \text{ та } vu \notin E. \end{cases}$$

Матриця Лапласа діє на векторах, індексованих вершинами. Так само як для матриці суміжності, нам буде зручніше говорити про функції замість векторів та працювати з операторами замість матриць. Оператором Лапласа на графі G називається оператор $\Delta : L^2(V) \to L^2(V)$, де

$$(\Delta f)(v) = \sum_{vu \in E} (f(v) - f(u)) = \deg(v) \left(f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{vu \in E} f(u) \right).$$

Таким чином, $(\Delta f)(v)$ обчислює з вагою $\deg(v)$ різницю між $f(v)$ та середнім значення f у сусідніх вершинах.

Так само як в диференційній геометрії звичайний оператор Лапласа на евклідових просторах виражається через градієнт, оператор Лапласа на графах можна задати через дискретний аналог градієнта. Зафіксуємо довільну орієнтацію на ребрах графа G: для кожного ребра $e \in E$ позначимо одну з його вершин як e^-, а іншу e^+. Визначимо оператор $\delta : L^2(V) \to L^2(E)$ за правилом:

$$(\delta f)(e) = f(e^+) - f(e^-), \quad \text{де } f \in L^2(V) \text{ та } e \in E.$$

Оператор δ вимірює як функція f змінюється вздовж ребер.

Твердження 1.10. *Спряженим до оператора $\delta : L^2(V) \to L^2(E)$ буде оператор $\delta^* : L^2(E) \to L^2(V)$, який визначається так:*

$$(\delta^* g)(v) = \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^+}} g(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^-}} g(e), \quad \text{де } g \in L^2(E) \text{ та } v \in V.$$

Доведення. Потрібно перевірити, що $\langle \delta f, g \rangle = \langle f, \delta^* g \rangle$ для всіх $f \in L^2(V)$ та $g \in L^2(E)$. Перевіряємо:

$$\begin{aligned}
\langle \delta f, g \rangle &= \sum_{e \in E} (\delta f)(e)\overline{g(e)} = \sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))\overline{g(e)} = \\
&= \sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^+}} f(v)\overline{g(e)} - \sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^-}} f(v)\overline{g(e)} = \\
&= \sum_{v \in V} f(v) \left(\sum_{\substack{e \in E \\ v = e^+}} \overline{g(e)} - \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^-}} \overline{g(e)} \right) = \sum_{v \in V} f(v)\overline{(\delta^* g)(v)} = \langle f, \delta^* g \rangle.
\end{aligned}$$

□

Якщо функцію $g \in L^2(E)$ інтерпретувати як потік на графі, де $g(e)$ дорівнює кількості інформації, що проходить по ребру e, то $(\delta^* g)(v)$ вимірює кількість інформації, яка проходить через вершину v.

Твердження 1.11. $\Delta = \delta^* \delta$.

Доведення. Для $f \in L^2(V)$ та $v \in V$ маємо

$$\begin{aligned}
(\delta^* \delta f)(v) &= \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^+}} (\delta f)(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^-}} (\delta f)(e) = \\
&= \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^+}} \big(f(e^+) - f(e^-)\big) - \sum_{\substack{e \in E \\ v = e^-}} \big(f(e^+) - f(e^-)\big) = \\
&= \deg(v) f(v) - \sum_{vu \in E} f(u) = (\Delta f)(v).
\end{aligned}$$

□

Наслідок 1.12. *Для довільної орієнтації ребер графа G виконується*

$$\langle \Delta f, f\rangle = \sum_{e\in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2 \qquad \text{для всіх } f \in L^2(V).$$

Доведення.

$$\langle \Delta f, f\rangle = \langle \delta^*\delta f, f\rangle = \langle \delta f, \delta f\rangle = \|\delta f\|^2 = \sum_{e\in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2. \qquad \square$$

Нехай G — скінченний d-регулярний граф. Тоді матриця Лапласа має вигляд $\Delta = dE - A$. Звідси одразу випливає, що власний вектор матриці A з власним числом λ є власним вектором Δ з власним числом $\beta = d - \lambda$. Зокрема, одиничний вектор $\mathbb{1}$ є власним вектором Δ з власним числом 0. За твердженням 1.5 маємо

$$0 \in \operatorname{spec}(\Delta) = \{d - \lambda \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\} \subset [0, 2d].$$

Власні числа Δ будемо занумеровувати починаючи з найменшого:

$$0 = \beta_1 = d - \lambda_1 \le \beta_2 = d - \lambda_2 \le \ldots \le \beta_n = d - \lambda_n \le 2d,$$

де $\beta_i = \beta_i(G) = d - \lambda_i(G)$ — це i-те найменше власне число Δ (з урахуванням кратності). Тоді спектральний розрив графа — це просто $\beta_2 = d - \lambda_2$ — перше ненульове власне число Δ. Теорему Релея-Рітца можна переформулювати через оператор Лапласа.

Теорема 1.13 (Релея-Рітца)**.** *Нехай G — скінченний d-регулярний граф з n вершинами і Δ — матриця Лапласа. Тоді*

$$\beta_2(G) = \min_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ v\neq 0, v\perp\mathbb{1}}} \frac{\langle \Delta v, v\rangle}{\|v\|^2} = \min_{\substack{v\in\mathbb{R}^n,\\ \|v\|=1, v\perp\mathbb{1}}} \langle \Delta v, v\rangle.$$

Вправа 1.6. Нехай G — скінченний граф з n вершинами, матрицею суміжності A і власними числами $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$. Доведіть, що

$$\lambda_1 = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ v\neq 0}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = \max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ v\neq 0, v\perp v_1}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2},$$

де $v_1 \in \mathbb{R}^n$ — довільний власний вектор A з власним числом λ_1.

2 Графи експандери та їх властивості

2.1 Означення експандерів та нерівність Чігера

Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф. Для підмножини $F \subset V$ границею ∂F називається множина ребер, яка сполучає F та $V \setminus F$.

Означення 2.1. *Ізопериметричною константою* або *константою Чігера* скінченного графа G називається число

$$h(G) = \min\left\{\frac{|\partial F|}{|F|} : F \subset V \ \text{ і } \ 0 < |F| \leq \frac{|V|}{2}\right\}.$$

Одразу з означення випливає, що $h(G) > 0$ тоді і лише тоді, коли граф G є зв'язним. Константа Чігера в деякому сенсі вимірює розширюючі властивості зв'язного графа. Чим меншою є константа Чігера, тим меншою кількістю ребер можна розділити великі множини вершин. З іншого боку, оскільки

$$|\partial F| \geq h(G) \min\{|F|, |V \setminus F|\} \ \text{ для всіх } F \subset V,$$

то «велика» константа Чігера означає, що при довільному розбитті вершин на дві частини між ними залишається пропорційно велика кількість ребер.

Найбільшу константу Чігера, а відповідно і найкращі розширюючі властивості, мають повні графи K_n, але вони мають і найбільшу кількість ребер. Найменша константа Чігера у шляха P_n з його $n-1$ ребром. Ми хочемо, щоб кількість ребер в графах зростала лінійно від кількості вершин, але розширюючі властивості «не згасали». Найкраще для цього підходять d-регулярні графи для фіксованого $d \geq 2$.

Означення 2.2 (Комбінаторне означення експандерів)**.** Послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів $(G_n)_{n\geq 1}$ з $|G_n| \to \infty$ при $n \to \infty$ називається послідовністю *експандерів*, якщо існує така константа $\varepsilon > 0$, що $h(G_n) \geq \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Нижче ми покажемо, що розширюючі властивості d-регулярного графа можна пов'язати із його спектральним розривом $d - \lambda_2$. Це дозволить дати еквівалентне означення експандерів.

Означення 2.3 (Спектральне означення експандерів)**.** Послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів $(G_n)_{n\geq 1}$ з $|G_n| \to \infty$ при $n \to \infty$ називається послідовністю *експандерів*, якщо існує така константа $\varepsilon > 0$, що $\lambda_2(G_n) \leq d - \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

В деякій літературі графи, які задовольняють попередньому означенню, називаються односторонніми експандерами, оскільки $d - \lambda_2$ оцінює розрив з однієї частини спектру. У двосторонньої послідовності експандерів вимагається, щоб спектральний розрив був з обох боків спектру, тобто $\lambda(G) = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|) \leq d - \varepsilon$. Зокрема, такі графи не можуть бути дводольними.

В комп'ютерних науках також вживають таке означення: Скінченний граф G називається (n, d, λ)-експандером, якщо він має n вершин, є d-регулярним і $\lambda_2(G) \leq \lambda$. В цьому означенні також замість $\lambda_2(G)$ може братися $\lambda(G)$.

Перш ніж перейти до доведення еквівалентності комбінаторного та спектрального означення експандерів розглянемо кілька прикладів.

Приклад 2.1. Єдиним зв'язним 2-регулярним графом на n вершинах є цикл C_n. Для знаходження константи Чігера $h(C_n)$ мінімум достатньо брати по підмножинах вершин $F \subset V$, які «знаходяться поруч», тобто індукують зв'язний підграф. В цьому випадку $|\partial F| = 2$ і ми отримуємо

$$h(C_n) = \min_{0<m\leq n/2} \frac{2}{m} = \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Тому $h(C_n) \to 0$ при $n \to \infty$ і $(C_n)_{n\geq 1}$ не утворює послідовність експандерів. Спектр графа C_n був обчислений в прикладі 1.1: власними числами є $2\cos\frac{2\pi k}{n}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тому $\lambda_2(C_n) = 2\cos\frac{2\pi}{n} \to 2$ при $n \to \infty$.

Приклад 2.2. Повний граф K_n є $(n-1)$-регулярним графом на n вершинах. Для довільної $F \subset V$ з $|F| = m$ маємо $|\partial F| = m(n-m)$. Тому

$$h(K_n) = \min_{0<m\leq n/2} \frac{m(n-m)}{m} = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Спектр графа K_n був обчислений в прикладі 1.2: K_n має власне число $n-1$ кратності 1 та власне число -1 кратності $n-1$. Тому $\lambda_2(K_n) = -1$ і спектральний розрив дорівнює $n-2$. Проте $(K_n)_{n\geq 1}$ не утворює послідовність експандерів, бо ці графи не є d-регулярними для фіксованого d.

Серед цих прикладів невипадково немає послідовності експандерів. Справа в тому, що побудувати таку послідовність є дуже нетривіальною задачею, і перші відомі конструкції спиралися на глибокі результати з алгебри та теорії чисел. Навіть просто довести існування експандерів є непростою задачею. Ми займемося цими задачами в розділі 3.

Наступна теорема показує, що розширюючі властивості графа можна охарактеризувати через його спектральний розрив.

Теорема 2.1 (Нерівності Чігера)**.** *Нехай $G = (V, E)$ — скінченний зв'язний d-регулярний граф. Тоді*

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)},$$

де λ_2 — друге власне число графа G. Еквівалентно:

$$\frac{\beta_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d\beta_2},$$

де $\beta_2 = d - \lambda_2$ — друге власне число оператора Лапласа на графі. Зокрема, алгебраїчне означення експандерів узгоджене з комбінаторним означенням.

Доведення. Нехай A — матриця суміжності графа G. Спочатку доведемо нижню оцінку. Для цього ми використаємо оцінку з теореми Релея-Рітца для спеціально побудованої функції f. Виберемо таку підмножину $F \subset V$, що

$|F| \leq |V|/2$ і $h(G) = |\partial F|/|F|$. Покладемо $a = |V \setminus F|$ і $b = |F|$, $a \geq b$, і розглянемо функцію $f : V \to \mathbb{R}$,

$$f(v) = \begin{cases} a, & \text{якщо } v \in F; \\ -b, & \text{якщо } v \notin F. \end{cases}$$

Помітимо, що $f \perp \mathbb{1}$, оскільки

$$\sum_{v \in V} f(v) = \sum_{v \in F} a - \sum_{v \notin F} b = a|F| - b|V \setminus F| = ab - ba = 0.$$

Обчислюємо скалярні добутки:

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{v \in F} a^2 + \sum_{v \in V \setminus F} b^2 = a^2 b + b^2 a = ab(a + b),$$

$$(\Delta f, f) = \sum_{e \in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2 = \sum_{e \in \partial F} (a + b)^2 = |\partial F|(a + b)^2,$$

де в другій формулі використано наслідок 1.12 для довільної орієнтації на ребрах графа. За теоремою Релея-Рітца отримуємо:

$$\beta_2 \leq \frac{(\Delta f, f)}{(f, f)} = \frac{|\partial F|(a + b)^2}{ab(a + b)} = h(G)\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq 2h(G),$$

що і потрібно було довести.

Доведемо верхню оцінку. Нехай $g : V \to \mathbb{R}$ — власна функція оператора Лапласа Δ з власним числом β_2. Можна вважати, що g приймає невід'ємні значення для менше половини вершин, інакше замінимо g на $-g$. Покладемо $V^+ = \{v \in V : g(v) \geq 0\}$, $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$. Оскільки $g \perp \mathbb{1}$, то $\sum_{v \in V} g(v) = 0$ і V^+ непорожня. Розглянемо функцію

$$f : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f(v) = \begin{cases} g(v), & v \in V^+; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Лема 2.1. $(\Delta f, f) \leq \beta_2(f, f)$.

Доведення. Спочатку оцінимо $(\Delta f)(v)$ для $v \in V^+$:

$$\begin{aligned}(\Delta f)(v) &= df(v) - \sum_{u \in V^+} a_{vu} f(u) = dg(v) - \sum_{u \in V^+} a_{vu} g(u) \leq \\ &\leq dg(v) - \sum_{u \in V} a_{vu} g(u) = (\Delta g)(v) = \beta_2 g(v).\end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}(\Delta f, f) &= \sum_{v \in V^+} (\Delta f)(v) f(v) \leq \sum_{v \in V^+} (\Delta g)(v) g(v) = \\ &= \sum_{v \in V^+} \beta_2 g(v)^2 = \beta_2 \sum_{v \in V^+} f(v)^2 = \beta_2(f, f).\end{aligned}$$

□

Визначимо орієнтацію на ребрах графа так, щоб $f(e^+) \geq f(e^-)$ для всіх $e \in E$, і розглянемо допоміжну величину

$$B_f = \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 - f(e^-)^2).$$

Лема 2.2. $B_f \leq \sqrt{2d(\Delta f, f)(f, f)}$.

Доведення. Розкладаємо різницю квадратів, застосовуємо нерівність Коші-Буняковського та наслідок 1.12:

$$\begin{aligned}
B_f &= \sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))(f(e^+) + f(e^-)) \leq \\
&\leq (\sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{e \in E} (f(e^+) + f(e^-))^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq (2 \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 + f(e^-)^2))^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\Delta f, f)} = \\
&= (2d \sum_{v \in V} f(v)^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\Delta f, f)} = \sqrt{2d(\Delta f, f)(f, f)}.
\end{aligned}$$

□

Лема 2.3. $h(G)(f, f) \leq B_f$.

Доведення. Нехай $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_r$ — значення функції f і розділимо вершини на рівні $L_i = \{v \in V : f(v) \geq c_i\}$. Отже,

$$L_r \subset L_{r-1} \subset \ldots \subset L_1 \subset L_0 = V,$$

причому $L_i \subset V^+$ для $i \geq 1$. Оскільки $|L_k \setminus L_{k+1}| = |L_k| - |L_{k+1}|$ дорівнює кількості вершин з $f(v) = c_k$ і $c_0 = 0$, то норму f можна записати так:

$$(f, f) = \sum_{v \in V} f(v)^2 = |L_r| c_r^2 + \sum_{k=1}^{r-1} |L_k \setminus L_{k+1}| c_k^2 = \sum_{k=1}^{r} |L_k| (c_k^2 - c_{k-1}^2). \tag{2}$$

Нехай ребро $e \in E$ сполучає дві вершини з різних рівнів: $f(e^+) = c_i$ та $f(e^-) = c_j$, де $i > j$. Відповідний доданок в сумі B_f можна розписати так:

$$f(e^+)^2 - f(e^-)^2 = c_i^2 - c_j^2 = \sum_{k=j+1}^{i} (c_k^2 - c_{k-1}^2).$$

Помітимо, що коли ми беремо суму по всіх ребрах $e \in E$, то доданок $c_k^2 - c_{k-1}^2$ з'являється по одному разу для кожного ребра $e \in \partial L_k$ і не з'являється для інших ребер. Тому B_f можна записати так:

$$B_f = \sum_{k=1}^{r} |\partial L_k| (c_k^2 - c_{k-1}^2).$$

Оскільки $|L_k| \leq |V^+| \leq |V|/2$ для $k \geq 1$, то $|\partial L_k| \geq h(G)|L_k|$ за означенням $h(G)$. Враховуючи (2) отримуємо:

$$B_f \geq h(G) \sum_{k=1}^{r} |L_k|(c_k^2 - c_{k-1}^2) = h(G)(f, f).$$

$\square$

З оцінок на B_f та леми 2.1 випливає:

$$h(G) \leq \frac{B_f}{(f,f)} \leq \sqrt{2d\frac{(\Delta f, f)}{(f,f)}} \leq \sqrt{2d\beta_2},$$

що і потрібно було довести. $\square$

Приклад 2.3. Гіперкуб H_n є n-регулярним графом з 2^n вершинами. Власними числами H_n є $n-2k$ для $k = 0, 1, \ldots, n$ (див. приклад 1.3). Отже, $\lambda_2(H_n) = n-2$ і за нерівністю Чігера маємо $h(H_n) \geq \frac{n-(n-2)}{2} = 1$. Для множини вершин $F = \{v \in \{0,1\}^n : v_1 = 0\}$ виконується $|F| = 2^{n-1}$ і $|\partial F| = 2^{n-1}$. Отже, $h(H_n) = 1$ і нижня оцінка в теоремі 2.1 є точною. Хоча $(H_n)_{n\geq 1}$ і не утворює послідовність експандерів, бо степінь графів залежить від n, але це краще ніж у випадку повних графів, оскільки ця залежність логарифмічна: $d(H_n) = n = \log |H_n|$.

Теорема 2.1 була незалежно доведена багатьма математиками (Dodziuk, Tanner, Alon-Milman та інші). Вона є дискретним аналог відомої в рімановій геометрії теореми Чігера (1970) про те, що константа Чігера $h(M)$ компактного ріманового многовида M та найменше додатнє власне число $\lambda_2(M)$ оператора Лапласа-Бельтрамі на M пов'язані нерівністю $\lambda_2(M) \geq h^2(M)/4$.

Вправа 2.1. Константа Чігера, оцінюючи пропорцію $|\partial F|/|F|$, вимірює реберне розширення графів. Разом з цим можна розглядати вершинне розширенння. Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф. Для підмножини $F \subset V$ (зовнішньою) вершинною границею $\partial_{out}(F)$ називається множина вершин в $V \setminus F$, які мають сусіда в F. Тоді вершинною ізопериметричною константою графа G називається число

$$h_{out}(G) = \min\left\{\frac{|\partial_{out}(F)|}{|F|} : F \subset V \text{ і } 0 < |F| \leq \tfrac{|V|}{2}\right\}.$$

1) Доведіть, що для d-регулярного графа G виконується нерівність

$$h_{out}(G) \leq h(G) \leq d \cdot h_{out}(G).$$

Зокрема, послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів $(G_n)_{n\geq 1}$ буде послідовністю експандерів тоді і лише тоді, коли існує така константа $\varepsilon > 0$, що $h_{out}(G_n) > \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

2) Оцініть константу h_{out} для графів C_n, K_n, Q_n.

3) * Знайдіть аналог нерівності Чігера для вершинного розширення.

Вправа 2.2. Нехай $G = (V, E)$ — нескінченний граф, в якому кожна вершина має степінь $\leq d$. Доведіть, що

$$h(G) = \inf_{F \subset V, |F| < \infty} \frac{|E(F, \overline{F})|}{|F|} \leq \sqrt{2d\beta_2(G)},$$

де $E(F, \overline{F})$ — множина ребер між F та $\overline{F} = V \setminus F$ і

$$\beta_2(G) = \inf_{f \in L^2(V)} \left\{ \frac{\sum_{vu \in E} |f(v) - f(u)|^2}{\sum_{v \in V} |f(v)|^2} \right\}.$$

2.2 Властивості експандерів

В цьому підрозділі ми розглянемо як розширюючі властивості графа проявляються у інших його характеристиках. Замість другого власного числа λ_2 будемо використовувати друге найбільше за модулем власне число $\lambda = \lambda(G) = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ і застосовувати нерівності

$$|\langle Af, f \rangle| \leq \lambda(G)\langle f, f \rangle \text{ і } \|Af\| \leq \lambda(G)\|f\| \text{ для всіх } f \in L^2(V),\ f \perp \mathbb{1}, \quad (3)$$

які випливають з теореми 1.7 та наслідку 1.9.

2.2.1 Число незалежності та хроматичне число

Хроматичним числом $\chi(G)$ графа G називається мінімальна кількість кольорів, у які можна розфарбувати вершини графа так, щоб суміжні вершини мали різний колір. Множини вершин з однаковим кольором визначають розбиття множини вершин графа

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{\chi(G)}, \quad (4)$$

де V_k є диз'юнктними і вершини в кожній V_k не суміжні між собою.

Числом незалежності $i(G)$ графа G називається максимальна кількість вершин, які не суміжні в графі (незалежні). Оскільки кожна множина V_k у розкладі (4) є незалежною, то $|V_k| \leq i(G)$, і число незалежності та хроматичне число графа пов'язані нерівністю $|V| \leq i(G)\chi(G)$.

Теорема 2.2. *Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами і $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$. Тоді:*

$$i(G) \leq \frac{n\lambda}{d} \quad \text{і} \quad \chi(G) \geq \frac{d}{\lambda}.$$

Доведення. Оскільки $n \leq i(G)\chi(G)$, то достатньо довести нерівність для $i(G)$. Ми застосуємо нерівність (3) для спеціально підібраної функції f.

Нехай $F \subset V$ — незалежна множина вершин з $|V| = i(G)$. Розглянемо функцію $f : V \to \mathbb{R}$,

$$f(v) = \begin{cases} |V| - |F|, & \text{якщо } v \in F; \\ -|F|, & \text{якщо } v \notin F. \end{cases}$$

Перевіримо, що $f \perp \mathbb{1}$:

$$\sum_{v \in V} f(v) = \sum_{v \in V \setminus F} f(v) + \sum_{v \in F} f(v) = -|F| \cdot |V \setminus F| + |V \setminus F| \cdot |F| = 0.$$

Оцінимо норму f:

$$\|f\|^2 = \sum_{v \in V} f(v)^2 = \sum_{v \in F} |V \setminus F|^2 + \sum_{v \in V \setminus F} |F|^2 =$$
$$= |F| \cdot |V \setminus F|^2 + |V \setminus F| \cdot |F|^2 = n \cdot |F| \cdot |V \setminus F| \leq i(G) n^2.$$

Оскільки $a_{vu} = 0$ для різних $v, u \in F$, то значення $(Af)(v)$ для $v \in F$ можна обчислити так:

$$(Af)(v) = \sum_{u \notin F} a_{vu} f(u) = -|F| \sum_{u \notin F} a_{vu} = -|F| \sum_{u \in V} a_{vu} = -d \cdot i(G).$$

Тоді $\|Af\|^2 \geq \sum_{v \in F} (Af)^2(v) = d^2 i(G)^3$. За нерівністю (3) отримуємо:

$$d \cdot i(G)^{3/2} \leq \|Af\| \leq \lambda \cdot \|f\| \leq \lambda \cdot n \cdot i(G)^{1/2},$$

з чого і випливає потрібна нерівність. $\square$

2.2.2 Діаметр експандерів

Діаметром зв'язного скінченного графа G називається найбільша відстань між його вершинами, позначається $\mathrm{diam}(G)$. Неважко бачити, що для d-регулярного графа з n вершинами діаметр не може бути меншим за $\log_d n$. Наступне твердження показує, що у послідовності експандерів діаметри ростуть логарифмічно.

Теорема 2.3. *Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами. Тоді:*

$$\mathrm{diam}(G) \leq \frac{2 \log n}{\log C}, \text{ де } C = 1 + \tfrac{h(G)}{d}.$$

Доведення. Візьмемо довільну вершину $v \in V$. Нехай $B_r(v)$ — куля радуіса r з центром у вершині v. Якщо $|B_r(v)| \leq |V|/2$, то $|\partial B_r(v)| \geq h(G)|B_r(v)|$. Кожне ребро з $\partial B_r(v)$ з'єднує вершини між $B_r(v)$ та $B_{r+1}(v) \setminus B_r(v)$, а оскільки граф є d-регулярним, то $d \cdot |B_{r+1}(v) \setminus B_r(v)| \geq |\partial B_r(v)|$. Тому

$$|B_{r+1}(v)| \geq |B_r(v)| + \tfrac{1}{d} |\partial B_r(v)| \geq |B_r(v)| + \tfrac{h(G)}{d} |B_r(v)| = C |B_r(v)|.$$

За індукцією отримуємо $|B_{r+1}(v)| \geq C^{r+1}$, за умови, що $|B_r(v)| \leq |V|/2$.

Нехай $v_1, v_2 \in V$ — вершини, відстань між якими дорівнює діаметру графа. Нехай r_1, r_2 — це максимальні радіуси, що $|B_{r_i}(v_i)| \leq |V|/2$. Тоді $|B_{r_i+1}(v_i)| \geq C^{r_i+1}$, і ми можемо оцінити відстань між v_1 та v_2 так:

$$\mathrm{diam}(G) \leq r_1 + r_2 + 1 \leq \frac{\log |B_{r_1}(v_1)|}{\log C} + \frac{\log |B_{r_2+1}(v_2)|}{\log C} \leq \frac{2 \log n}{\log C}.$$

$\square$

Наслідок 2.4. *Нехай* $(G_n)_{n\geq 1}$ *— послідовність експандерів. Тоді* $\operatorname{diam}(G_n) = O(\log|G_n|)$.

Зважаючи на нерівність $|B_r(v)| \geq C^r$, доведену вище, кажуть, що ріст куль в експандерах є експоненційним.

Наступна теорема дає оцінку на діаметр графа в залежності від другого власного числа.

Теорема 2.5 (Chung, 1989)**.** *Нехай G — зв'язний (недводольний) d-регулярний граф з n вершинами і $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$. Тоді*

$$\operatorname{diam}(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log d - \log\lambda} + 1.$$

Доведення. Нехай A — матриця суміжності графа G. За теоремою 1.2 діаметр графа обмежується зверху довільним таким числом m, що всі елементи A^m є додатніми. Для знаходження такого m використаємо спектральний розклад матриці. Нехай $f_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}, f_2, \ldots, f_n$ — ортонормована система власних векторів A, що відповідають власним числам $d = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Тоді

$$(A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k f_k^\top)_{(ij)} \;\text{ i }\; (A^m)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m (f_k f_k^\top)_{(ij)}.$$

Можемо оцінити елементи m-го степеня матриці так:

$$\begin{aligned}(A^m)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m (f_k f_k^\top)_{(ij)} \geq \frac{d^m}{n} - \Big|\sum_{k=2}^{n} \lambda_k^m (f_k f_k^\top)_{(ij)}\Big| \geq \\ &\geq \frac{d^m}{n} - \lambda^m \sum_{k=2}^{n} |(f_k)_i||(f_k)_j| \geq \frac{d^m}{n} - \lambda^m \Big(\sum_{k=2}^{n} |(f_k)_i|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=2}^{n} |(f_k)_j|^2\Big)^{1/2} = \\ &= \frac{d^m}{n} - \lambda^m \left(1 - (f_1)_i^2\right)^{1/2} \left(1 - (f_1)_j^2\right)^{1/2} = \frac{d^m}{n} - \lambda^m \Big(1 - \frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

Тоді для $m = \lfloor \frac{\log(n-1)}{\log d/\lambda} \rfloor + 1$ маємо $(A^m)_{ij} > 0$ для всіх i, j і $\operatorname{diam}(G) \leq m$. $\square$

Вправа 2.3. Нехай G — зв'язний граф, в якому максимальна степінь вершини дорівнює d. Доведіть, що $\operatorname{diam}(G) \geq \frac{\log|G|}{\log d}$.

2.2.3 Лема про перемішування

Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф. Для підмножин $S, T \subseteq V$ визначимо

$$e(S,T) = \left|\{(v,u) \in V \times V \mid v \in S, u \in T, vu \in E\}\right|,$$

яке обчислює кількість ребер між S та T. Зверніть увагу, що якщо S і T мають спільні вершини, то кожне ребро між вершинами $S \cap T$ рахується двічі. У випадковому d-регулярному графі, грубо кажучи, кожне ребро з'являється із ймовірністю $\frac{d}{n}$, і тому очікувана кількість ребер між двома підмножинами S, T дорівнює $\frac{d}{n}|S||T|$. Наступна теорема показує, що чим менше друге власне число графа, тим більше граф схожий на випадковий.

Теорема 2.6. *(Лема про перемішування, Alon-Chung, 1988) Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами і $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$. Тоді для довільних підмножин $S, T \subseteq V$ виконується нерівність*

$$\left| e(S,T) - |S||T|\frac{d}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}.$$

Доведення. Число $e(S,T)$ можна виразити через характеристичні функції множин S, T та матрицю суміжності графа A:

$$\langle \chi_S, A\chi_T \rangle = \sum_{v \in V} \chi_S(v)(A\chi_T)(v) = \sum_{v \in S} \sum_{u \in V} a_{vu} \chi_T(u) = \sum_{v \in S, u \in T} a_{vu} = e(S,T).$$

Нехай $f_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}, f_2, \ldots, f_n$ — ортонормована система власних векторів A, що відповідають власним числам $d = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Розкладемо χ_S, χ_T за цим базисом:

$$\chi_S = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad \text{та} \quad \chi_T = \sum_{i=1}^n b_i f_i, \quad \text{де } a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Тоді $\sum_i a_i^2 = |S|$ і $\sum_i b_i^2 = |T|$. Оскільки $f_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $a_1 = \frac{|S|}{\sqrt{n}}$ і $b_1 = \frac{|T|}{\sqrt{n}}$. Тоді:

$$e(S,T) = \langle \chi_S, A\chi_T \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i f_i, \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j f_j, \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \lambda_j \langle f_i, f_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i \lambda_i = a_1 b_1 d + \sum_{i=2}^n a_i b_i \lambda_i = d\frac{|S||T|}{n} + \sum_{i=2}^n a_i b_i \lambda_i.$$

За нерівністю Коші-Буняковського отримуємо потрібну нерівність:

$$\left| e(S,T) - |S||T|\frac{d}{n} \right| \leq \left| \sum_{i=2}^n a_i b_i \lambda_i \right| \leq \lambda \sum_{i=2}^n |a_i b_i| \leq$$

$$\leq \lambda \Big(\sum_{i=2}^n a_i^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=2}^n b_i^2 \Big)^{1/2} \leq \lambda \sqrt{|S||T|}.$$

□

З леми про перемішування можна вивести теорему 2.2.

Наслідок 2.7. *Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами і $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$. Тоді $|S| \leq \frac{n\lambda}{d}$ для кожної незалежної підмножини $S \subset V$.*

Доведення. Оскільки S — незалежна, то $e(S,S) = 0$. За лемою про перемішування для $T = S$ отримуємо:

$$\frac{d}{n}|S|^2 \leq \lambda\sqrt{|S|^2} \quad \Rightarrow \quad |S| \leq \frac{n\lambda}{d}.$$

□

Вправа 2.4. [22, Ex.10] Нехай $(G_n)_{n \geq 1}$ — послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

1) Існує така константа $\varepsilon > 0$, що $\lambda(G_n) \leq d - \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.
2) Існує така константа $\varepsilon > 0$, що $e(S,T) \leq (d-\varepsilon)\sqrt{|S||T|}$ для всіх $S, T \subset V_n$ потужності $\leq \frac{|V_n|}{2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

2.2.4 Випадкові блукання на експандерах

Блуканням на графі $G = (V, E)$ називається довільна послідовність вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots$, де вершини v_k та v_{k+1} є суміжними в графі для кожного k. Якщо кожна наступна вершина обирається випадково із сусідів попередньої вершини, то блукання називається випадковим. Перша вершина обирається випадково з деяким розподілом π_0 на V, а далі на кожному кроці вершини обираються серед сусідів попередньої випадково з однаковою ймовірністю. Ми отримуємо послідовність розподілів π_k на вершинах графа, де $\pi_k(v) = \Pr(v_k = v)$ — це ймовірність прийти у вершину v через k кроків випадкового блукання.

Нехай граф G є d-регулярним з матрицею суміжності A. Тоді ймовірність переходу з вершини v у вершину u за один крок дорівнює a_{vu}/d. Тому

$$\pi_k = M\pi_{k-1} = M^k \pi_0, \quad \text{де } M = \tfrac{1}{d}A.$$

Матриця M називається матрицею переходу випадкового блукання. Якщо $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — власні числа A, то власними числами M є $(\lambda_i/d)_{i=1}^n$. Зокрема, 1 є найбільшим власним числом M, а рівномірний розподіл $\pi_u = \frac{1}{n}\mathbb{1}$ є відповідним власним вектором, тобто $M\pi_u = \pi_u$; розподіл з такою властивістю називається стаціонарним.

Добре відомим є результат, що якщо скінченний граф не є дводольним, то послідовність розподілів π_k збігається до деякого стаціонарного розподілу. У випадку зв'язного d-регулярного недводольного графа, послідовність π_k збігається до рівномірного розподілу π_u. Нас буде цікавити швидкість цієї збіжності. Вимірювати відстань між розподілами прийнято через повну варіацію:

$$\|\pi_1 - \pi_2\|_{tv} = \max_{S \subset V} \Big| \sum_{v \in S} \pi_1(s) - \sum_{v \in S} \pi_2(s) \Big|,$$

яка виражається через L^1 норму як $\|\pi_1 - \pi_2\|_{tv} = \frac{1}{2}\|\pi_1 - \pi_2\|_1$.

Наступна теорема показує, що випадкове блукання на експандері експоненційно швидко збігається до рівномірного розподілу. У вправі 2.5 читачу пропонується самостійно довести протилежний факт, що послідовність графів, на яких випадкове блукання швидко збігається до рівномірного розподілу, є послідовністю експандерів.

Теорема 2.8. *Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами і $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$. Для довільного початкового розподілу π_0 на вершинах графа і кожного $k \in \mathbb{N}$ виконується:*

$$\|\pi_k - \pi_u\|_1 \leq \sqrt{n}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^k \quad і \quad \|\pi_k - \pi_u\|_2 \leq \left(\frac{\lambda}{d}\right)^k.$$

Доведення. Перша нерівність випливає з другої. Оскільки

$$\sum_{v \in V} \pi_0(v) = \sum_{v \in V} \pi_u(v) = 1,$$

то $(\pi_0 - \pi_u) \perp \mathbb{1}$ і можна застосувати нерівність (3) для матриці M:

$$\|\pi_k - \pi_u\|_2 = \|M^k \pi_0 - \pi_u\|_2 = \|M^k \pi_0 - M^k \pi_u\|_2 = \\ = \|M^k(\pi_0 - \pi_u)\|_2 \leq \left(\frac{\lambda}{d}\right)^k \|\pi_0 - \pi_u\|_2 \leq \left(\frac{\lambda}{d}\right)^k.$$

□

Вправа 2.5. [22, Ex.15] Нехай $G_n = (V_n, E_n)$ — послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів і $\alpha > 1/2$. Покажіть, що наступні умови рівносильні:

1) Існує така константа $\varepsilon > 0$, що $\lambda(G_n) \geq \varepsilon$ для всіх достатньо великих n.
2) Існує така константа $C > 0$, що $\|\pi_k - \pi_u\|_2 \leq |V_n|^{-\alpha}$ для $k \geq C \log |V_n|$ та всіх достатньо великих n.

2.3 Асимптотична поведінка $\lambda_2(G)$

В цьому розділі ми розглянемо питання, наскільки великим може бути спектральний розрив $d - \lambda_2$ у d-регулярних графів. Спочатку зробимо слабку оцінку на друге найбільше за модулем власне число $\lambda(G)$.

Твердження 2.9. *Нехай G — зв'язний d-регулярний граф з n вершинами. Тоді:*

$$\lambda(G) = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|) \geq \sqrt{d} - o_n(1).$$

Доведення. Нехай A — матриця суміжності графа G. Згадаємо, що $(A^2)_{vu}$ дорівнює кількості шляхів в графі з вершини v у вершину u довжини два. Тоді:

$$(A^2)_{vv} \geq d \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}(A^2) \geq nd.$$

З іншого боку, $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq d^2 + (n-1)\lambda^2$. З цих двох нерівностей отримуємо:

$$nd \leq d^2 + (n-1)\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \geq d\frac{n-d}{n-1} = d\left(1 - \frac{d-1}{n-1}\right),$$

звідки і випливає потрібне твердження. □

Точну асимптотичну оцінку на $\lambda_2(G) \leq \lambda(G)$ дає наступна теорема.

Теорема 2.10 (Alon-Boppana, 1986)**.** *Нехай $d \geq 3$ і $(G_n)_{n\geq 1}$ — послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів з $|G_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Тоді*

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_2(G_n) \geq 2\sqrt{d-1}.$$

Аналогічний результат справедливий для найменшого нетривіального власного числа, але потрібна додаткова умова.

Означення 2.4. Обхватом зв'язного графа G називається довжина найкоротшого циклу в G. Позначається $g(G)$.

Теорема 2.11. *Нехай $d \geq 3$ і $(G_n)_{n\geq 1}$ — послідовність скінченних зв'язних d-регулярних графів з $g(G_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(G_n) \leq -2\sqrt{d-1},$$

де $\mu(G) = \min_{\lambda \neq -d} \lambda$ — найменше нетривіальне власне число графа G.

Ці теореми показують, що «найкраща» послідовність експандерів складається з графів, у яких всі нетривіальні власні числа знаходять в інтервалі $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$. Такі графи називаються графами Рамануджана і будуть окремо розглянуті в розділі 3.6.

Ми спочатку доведемо дещо слабшу версію теореми Alon-Boppana, де $\lambda_2(G)$ замінено на $\lambda(G)$. Це доведення ідейно простіше і його легше зрозуміти. Суть полягає в тому, щоб оцінити випадкові блукання на d-регулярному графі через випадкові блукання на d-регулярному дереві. В наступному підрозділі ми розглянемо цей зв'язок детальніше.

Доведення теореми Alon-Boppana для $\lambda(G)$. Нехай вершини $v, u \in V$ знаходяться на відстані $\mathrm{diam}(G)$. Покладемо $k = \lfloor \mathrm{diam}(G)/2 \rfloor - 1$ так, що v, u не з'єднані шляхом довжини $2k$. Зокрема $(A^{2k})_{vu} = 0$ за теоремою 1.2, де A — матриця суміжності графа G.

Розглянемо функцію $f : V \to \mathbb{R}$, яка приймає значення $f(v) = 1$, $f(u) = -1$ та нуль у всіх інших вершинах. Тоді $f \perp \mathbb{1}$ і можна застосувати теорему Релея-Рітца для матриці A^{2k} з числом λ^{2k} та до функції f:

$$\lambda^{2k} \geq \frac{(A^{2k}f, f)}{(f, f)} = \frac{(A^{2k})_{vv} + (A^{2k})_{uu} - 2(A^{2k})_{vu}}{2} = \frac{(A^{2k})_{vv} + (A^{2k})_{uu}}{2}.$$

Числа $(A^{2k})_{vv}$ та $(A^{2k})_{uu}$ обчислюють кількість замкнених шляхів довжини $2k$ в графі G у вершинах v та u відповідно. Кількість таких шляхів не менша за кількість t_{2k} замкнених шляхів в нескінченному d-регулярному дереві T_d у довільній фіксованій вершині (корені дерева).

Асимптотика чисел t_{2k} є добре відомою. Ми зробимо оцінку знизу для повноти доведення. Кожен шлях довжини $2k$ задає набір $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2k})$, де ε_i дорівнює 1 або -1 в залежності від того, i-тий крок направлений у бік кореня чи від нього. При цьому виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{2k} \varepsilon_i = 0 \quad \text{та} \quad \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i \geq 0 \ \text{ для всіх } 1 \leq j \leq 2k.$$

Тому кількість таких наборів дорівнює k-тому числу Каталана $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$. Крім того, кожен крок у бік кореня здійснюється однозначно, а крок від кореня можна здійснити принаймні $d-1$ способами (якщо ми знаходимося у корені, то є d способів). Використавши відому асимптотику чисел Каталана отримуємо:

$$\lambda^{2k} \geq t_{2k} \geq (d-1)^k C_k = \frac{(d-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k} \sim \frac{(d-1)^k 2^{2k}}{k\sqrt{\pi k}}.$$

Отже,

$$\liminf_{|G|\to\infty} \lambda(G) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{2\sqrt{d-1}}{(\pi^{\frac{1}{4}}k^{\frac{3}{4}})^{1/k}} = 2\sqrt{d-1}.$$

□

Оскільки для d-регулярних графів виконується $\mathrm{diam}(G_n) \to \infty$ при $|G_n| \to \infty$, то теорема Alon-Boppana випливає з наступного результату Nilli.

Теорема 2.12 (Nilli, 1991). *Нехай $G = (V, E)$ — скінченний зв'язний d-регулярний граф з діаметром не менше 4. Тоді:*

$$\lambda_2(G) > 2\sqrt{d-1} - \frac{2\sqrt{d-1}-1}{\lfloor \frac{1}{2}\mathrm{diam}(G)\rfloor - 1}.$$

Доведення. Доведення слідує оригінальній статті Nilli [21]. Покладемо $k = \lfloor \frac{1}{2}\mathrm{diam}(G)\rfloor - 1$. Нехай $v_1, v_2 \in V$ — деякі вершини, відстань між якими дорівнює $\mathrm{diam}(G) \geq 2k+2$. Визначимо множини вершин:

$$V_i = \{v \in V \mid dist(v, v_1) = i\} \text{ та } U_i = \{u \in V \mid dist(u, v_2) = i\},\ 0 \leq i \leq k.$$

Помітимо, що за побудовою, жодна вершина з V_i не з'єднана ребром з жодною вершиною з U_j. Крім того, $|V_{i+1}| \leq (d-1)|V_i|$ для всіх $i > 0$.

Для пари дійсних чисел a, b визначимо функцію $f : V \to \mathbb{R}$:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{a}{(\sqrt{d-1})^i}, & \text{якщо } v \in V_i \text{ для } 0 \leq i \leq k; \\ \frac{b}{(\sqrt{d-1})^i}, & \text{якщо } v \in U_i \text{ для } 0 \leq i \leq k; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Оберемо числа a, b так, що $a > 0$, $b < 0$, і $\sum_{v\in V} f(v) = 0$, тобто $f \perp \mathbb{1}$. Ми плануємо застосувати теорему Релея-Рітца для оператора Лапласа Δ на графі G та функції f. Для цього оцінимо величини (f, f) та $(\Delta f, f)$. Запишемо $(f, f) = A_1 + B_1$, де

$$A_1 = a^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{|V_i|}{(d-1)^i} \text{ та } B_1 = b^2 \sum_{i=0}^{k} \frac{|U_i|}{(d-1)^i}.$$

За наслідком 1.12 маємо

$$(\Delta f, f) = \sum_{vu\in E} (f(v)-f(u))^2 = \sum_{vu\in E, v,u\in \cup V_i} (f(v)-f(u))^2 + \sum_{vu\in E, v,u\in \cup U_i} (f(v)-f(u))^2.$$

Позначимо першу та другу суми через A_2 та B_2 відповідно, і оцінимо їх:

$$
\begin{aligned}
A_2 = \sum_{vu\in E}(f(v)-f(u))^2 &\le \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{vu\in E, v\in V_i, u\in V_{i+1}}(f(v)-f(u))^2 \le \\
&\le a^2\left(\sum_{i=0}^{k-1}|V_i|(d-1)\Big(\frac{1}{(\sqrt{d-1})^i}-\frac{1}{(\sqrt{d-1})^{i+1}}\Big)^2+|V_k|\frac{d-1}{(d-1)^k}\right)\le \\
&\le a^2\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|V_i|}{(d-1)^i}(d-2\sqrt{d-1})+\frac{|V_k|}{(d-1)^k}(d\pm 2\sqrt{d-1}-1)\right)\le \\
&\le (d-2\sqrt{d-1})A_1+(2\sqrt{d-1}-1)\frac{A_1}{k},
\end{aligned}
$$

де в останній нерівності ми використали $|V_k|/(d-1)^k \le A_1/k$, що виконується, оскільки послідовність $|V_i|/(d-1)^i$ є незростаючою. Аналогічні оцінки виконуються для B_2. За теоремою Релея-Рітца отримуємо:

$$
\begin{aligned}
d-\lambda_2=\beta_2 \le \frac{(\Delta f, f)}{(f,f)} = \frac{A_2+B_2}{A_1+B_1} \le \max\left(\frac{A_2}{A_1},\frac{B_2}{B_1}\right) < \\
< d-2\sqrt{d-1}+\frac{2\sqrt{d-1}-1}{k},
\end{aligned}
$$

з чого і випливає твердження теореми. □

Наступна теорема показує, що не тільки друге власне число асимптотично не менше за $2\sqrt{d-1}$, а навіть додатня пропорція власних чисел знаходиться в інтервалі $[2\sqrt{d-1}-\varepsilon, d]$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.13 (Серр). *Для кожного натурального $d \ge 3$ та $\varepsilon > 0$ існує константа $C = C(d,\varepsilon)>0$ така, що кожен скінченний зв'язний d-регулярний граф G з n вершинами має принаймні Cn власних чисел більших за $2\sqrt{d-1}-\varepsilon$.*

Доведення. Ми розглянемо доведення Cioaba з роботи [12]. Нехай A — матриця суміжності графа G. Позначимо через n_ε кількість власних чисел більших за $2\sqrt{d-1}-\varepsilon$. Оцінимо слід матриці $(A+dE)^k$ двома способами:

$$
\operatorname{tr}(A+dE)^k = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+d)^k \le (2d)^k\cdot n_\varepsilon + (d+2\sqrt{d-1}-\varepsilon)^k\cdot n,
$$

$$
\operatorname{tr}(A+dE)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot\operatorname{tr}(A^j)\cdot d^{k-j} \ge \sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2j}\cdot n\cdot t_{2j}\cdot d^{k-2j},
$$

де в останній нерівності ми залишили тільки доданки з парними індексами та використали нерівність $\operatorname{tr}(A^{2j}) = \sum_{v\in V}(A^{2j})_{vv} \ge n\cdot t_{2j}$ і t_{2j} є кількістю замкнених шляхів довжини $2j$ в d-регулярному дереві у корені дерева. Застосуємо оцінку на t_{2j} з доведення теореми Alon-Boppanda для $\lambda(G)$:

$$
t_{2j} \ge c\frac{(2\sqrt{d-1})^{2j}}{j^{3/2}}.
$$

де $c > 0$ — деяка константа. Отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A+dE)^k &\geq \frac{cn}{k^{3/2}} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} \cdot (2\sqrt{d-1})^{2j} \cdot d^{k-2j} = \\ &= \frac{cn}{2k^{3/2}} \left[(d+2\sqrt{d-1})^k + (d-2\sqrt{d-1})^k\right] \geq \\ &\geq \frac{cn}{2k^{3/2}} (d+2\sqrt{d-1})^k.\end{aligned}$$

З верхньої та нижньої оцінок на слід маємо

$$\frac{n_\varepsilon}{n} \geq \frac{\frac{c}{2k^{3/2}}(d+2\sqrt{d-1})^k - (d+2\sqrt{d-1}-\varepsilon)^k}{(2d)^k}$$

Перший доданок у чисельнику зростає швидше за другий. Тому чисельник можна зробити додатнім для деякого $k = k(d, \varepsilon)$. Відповідне значення дробу дає необхідну константу $C = C(d, \varepsilon) > 0$. □

2.4 Накриття графів. Спектр d-регулярного дерева

Асимптотична оцінка $2\sqrt{d-1}$ в теоремі Alon-Boppana є невипадковою і пов'язана із спектром універсального накриття d-регулярних графів. Поняття накриття просторів є стандартним в топології, яке адаптується для графів, оскільки графи є одновимірними симпліціальними комплексами.

Означення 2.5. Нехай G, H — довільні графи. Сюр'єктивне відображення $f : V(H) \to V(G)$ називається накриттям, якщо для кожної вершини $v \in V(H)$ функція f відображає ребра інцидентні v бієктивно на ребра інцидентні $f(v)$.

Відмітимо кілька властивостей накриттів. Одразу з означення випливає, що накриття d-регулярного графа є графом d-регулярним. Також неважко показати, що накриття зв'язного графа є зв'язним графом, при цьому кожна вершина G має однакову кількість прообразів, яка називається степенем накриття. Звідси випливає, що якщо зв'язний граф G накривається графом H, то G є фактором H.

Наступне твердження показує, що накриття графів не покращує розширюючі властивості (див. також вправу 2.6, де аналогічна нерівність виконується для константи Чігера).

Твердження 2.14. *Нехай $\varphi : H \to G$ — накриття скінченних графів. Тоді кожне власне число G є власним числом H. Зокрема, $\lambda_2(H) \geq \lambda_2(G)$.*

Доведення. Нехай A і B — оператори суміжності графів G та H відповідно. Нехай $f : V(G) \to \mathbb{R}$ — власна функція A з власним числом λ. Тоді $f \circ \varphi : V(H) \to \mathbb{R}$ є власною функцію B з власним числом λ:

$$\begin{aligned}(Bf \circ \varphi)(v) &= \sum_{vu \in E(H)} (f \circ \varphi)(u) = \sum_{vu \in E(G)} f(\varphi(u)) = \\ &= \sum_{\varphi(v)u \in E(G)} f(u) = (Af)(\varphi(v)) = \lambda f(\varphi(v)) = (f \circ \varphi)(v).\end{aligned}$$

□

Вправа 2.6. Нехай G, H — скінченні графи. Доведіть, що якщо H накриває G, то $h(H) \leq h(G)$.

З алгебраїчної топології відомо, що серед накриттів простору є універсальне накриття, яке накриває всі зв'язні накриття цього простору. У випадку графів універсальне накриття є нескінченним деревом, яке можна побудувати наступним чином. Нехай $G = (V, E)$ — зв'язний граф і зафіксуємо деяку вершину $v_0 \in V$. Вершинами універсального накриття $\widehat{G}$ є блукання $w = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, де $v_i \in V$, $v_i v_{i-1} \in E$ і $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, m$. Дві вершини w_1 та w_2 з'єднані ребром, якщо вони відрізняються на один останній крок, тобто мають вигляд $w_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ та $w_2 = (v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1})$.

Універсальним накриттям довільного зв'язного d-регулярного графа є d-регулярне дерево, яке будемо позначати T_d (див. рис. 4). Хоча дерево T_d є нескінченним, і ми не може говорити про його константу Чігера в сенсі означення 2.1, дерево T_d можна вважати екстремальним з точки зору розширюючих властивостей d-регулярних графів.

Твердження 2.15. *Коефіцієнтом розширення дерева T_d для $d \geq 3$ є число*

$$h(T_d) := \inf_{F \subset V, |F| < \infty} \frac{|\partial F|}{|F|} = d - 2.$$

Доведення. Інфімум достатньо брати по скінченних підмножинах $F \subset V$, які індукують зв'язний підграф T_d. В цьому випадку цей підграф є деревом і має $|F| - 1$ ребер. Всього в графі T_d буде $d|F| - (|F| - 1)$ ребер, які дотичні до вершини з F. Отже, $|\partial F| = d|F| - 2(|F| - 1)$ і маємо

$$h(T_d) = \inf_{F \subset V, |F| < \infty} \frac{d|F| - 2(|F| - 1)}{|F|} = d - 2.$$

□

Вправа 2.7. Доведіть, що $h(G) < h(T_d)$ для кожного скінченного d-регулярного графа G. Навіть краще, $h(G) \leq d/2 + o_n(1)$, де n — кількість вершин G.

Уявимо на хвилинку, що твердження 2.14 виконується і для нескінченних графів. Тоді достатньо було б знайти друге власне число дерева T_d і ми би отримали точну оцінку на спектральний розрив для всіх d-регулярних графів! На жаль, проблема виникає навіть з означенням другого власного числа для дерева T_d. Оскільки цей граф нескінченний, то замість лінійної алгебри ми повинні перейти до функціонального аналізу.

Нехай A — оператор суміжності дерева T_d, який природньо розглядати на просторі $L^2(V)$. На відміну від скінченних d-регулярних графів, одинична функція вже не є власною функцію оператора A, оскільки вона не належить простору $L^2(V)$. Навіть більше, оператор A не має власних функцій та власних чисел, оскільки рівняння $Ax = \lambda x$ не має ненульових розв'язків в $L^2(V)$ для жодного $\lambda \in \mathbb{C}$. Спектром дерева T_d та оператора A називається множина

$$spec(T_d) = spec(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A - \lambda E \text{ не є оборотним}\}.$$

Тому $\lambda \in spec(A)$, якщо або $A - \lambda E$ має ненульове ядро, тобто A має власну функцію з власним числом λ, що не виконується, або $A-\lambda E$ не є сюр'єктивним. Отже, $\lambda \in spec(A)$ тоді і лише тоді, коли $A - \lambda E$ не сюр'єктивний.

Теорема 2.16. $spec(T_d) = [-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$.

Доведення. Зафіксуємо деяку вершину $v \in T_d$. Для параметра $r \in \mathbb{C}$ розглянемо функцію $f_r : V \to \mathbb{C}$, яка приймає значення r^m на всіх вершинах на відстані m від вершини v. При $|r| < 1/\sqrt{d-1}$ виконується $f_r \in L^2(V)$, оскільки

$$\|f_r\|^2 = \sum_{v\in V} |f_r|^2 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} d(d-1)^m |r|^{2m} = 1 + \frac{dr}{|r|^2(d-1)}.$$

Застосуємо оператор $A - \lambda E$:

$$((A-\lambda E)f_r)(u) = \begin{cases} dr - \lambda, & \text{якщо } v = u; \\ r^{m-1}((d-1)r^2 - \lambda r + 1), & \text{якщо } dist(v,u) = m \geq 1. \end{cases}$$

Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$ і $|\lambda| > 2\sqrt{d-1}$. Тоді квадратне рівняння

$$(d-1)r^2 - \lambda r + 1 = 0 \tag{5}$$

має два різні корені $r_1 \neq r_2$ і $r_1 r_2 = 1/(d-1)$. Один з них, нехай r_1, має норму $|r_1| < 1/\sqrt{d-1}$ і тому $f_{r_1} \in L^2(V)$. (Варто зауважити, що при $|\lambda| = 2\sqrt{d-1}$ корені рівні $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{d-1}$ і відповідна функція f_{r_1} не належить $L^2(V)$). Також $f_{r_1}(v) = dr_1 - \lambda \neq 0$. Тому:

$$(A-\lambda E)(\tfrac{1}{f_{r_1}(v)} f_{r_1}) = \delta_v, \quad \text{де } \delta_v(u) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v = u; \\ 0, & \text{якщо } v \neq u. \end{cases}$$

Оскільки кожну функцію $g \in L^2(V)$ можна представити у вигляді квадратично сумованої (нескінченної) лінійної комбінації функцій δ_v для $v \in V$, то $(A - \lambda E)(x) = g$ має розв'язок в $L^2(V)$ для всіх $g \in L^2(V)$. Отже, $A - \lambda E$ є сюр'єктивним і $\lambda \notin spec(A)$.

Тепер нехай $|\lambda| < 2\sqrt{d-1}$. Покажемо, що рівняння

$$(A-\lambda E)x = \delta_v \tag{6}$$

не має розв'язків в $L^2(V)$. Припустимо, що $g \in L^2(V)$ є розв'язком. Сферичною симетризацією g називається функція $f : V \to \mathbb{C}$, значення якої у вершинах на відстані m від v дорівнює середньому значенню g на цих вершинах, тобто для вершини u з $dist(v,u) = m \geq 1$ маємо

$$f(u) = f_m = \frac{1}{d(d-1)^m} \sum_{w\in V, dist(v,w)=m} g(w).$$

Тоді $f \in L^2(V)$ і теж є розв'язком рівняння (6). Значення f_m задовольняють рекурентне рівняння

$$(d-1)f_{m+2}^2 - \lambda f_{m+1} + f_m = 0 \ \text{ для } m \geq 0.$$

Добре відомо, що таке рекурентне рівняння має розв'язок $f_m = c_1 r_1^m + c_2 r_2^m$, де $r_1 \neq r_2$ — розв'язки квадратного рівняння (5). При $|\lambda| < 2\sqrt{d-1}$ корені r_1, r_2

є комплексними і мають модуль $|r_1| = |r_2| = 1/\sqrt{d-1}$. Тому $f \notin L^2(V)$ і ми отримали суперечність. Отже, рівняння (6) не має розв'язків і $\lambda \in spec(A)$.

Оскільки оператор A є самоспряженим, то спектр A дійсний. А оскільки спектр завжди замкнений, він містить $\pm 2\sqrt{d-1}$. $\square$

Вправа 2.8. Доведіть, що для оператора суміжності A d-регулярного дерева $T_d = (V, E)$ виконується нерівність

$$|(Ax, y)| \le 2\sqrt{d-1}\|x\|\|y\| \quad \text{для всіх } x, y \in L^2(V),$$

причому $2\sqrt{d-1}$ є найкращою можливою константою, а рівність не досягається для жодних $x, y \in L^2(V)$.

Підхід через накриття дозволяє отримати наступне природнє узагальнення теореми Alon-Boppana.

Теорема 2.17 (Greenberg-Lubotsky, 1995). *Нехай $(G_n)_{n\ge 1}$ — послідовність графів, які мають однакове універсальне накриття T. Тоді:*

$$\liminf_{|G_n|\to\infty} \lambda(G_n) \ge \rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in spec(T)\}.$$

3 Конструкції експандерів

Багато конструкцій експанедрів є елементарними, але доведення спираються на глибокі результати з різних областей математики.

3.1 Випадковий граф є експандером

Існування послідовності експандерів для кожного $d \geq 3$ випливає з наступного ймовірнісного результату.

Теорема 3.1 (Колмогоров 1967, Пінскер 1973)**.** *Для кожного натурального $d \geq 3$ існує така константа $\varepsilon > 0$, що випадковий d-регулярний граф G з n вершинами задовольняє $h(G) \geq \varepsilon$ з додатньою ймовірністю. Більш того, ймовірність прямує до 1 при $n \to \infty$.*

Доведення. Ми покажемо першу частину теореми. Зауважимо, що d-регулярний граф на n вершинах має $dn/2$ ребер, зокрема, число dn має бути парним. Нехай $\mathcal{G}_{n,d}$ позначає множину всіх d-регулярних графів з n вершинами. Замість того, щоб працювати у ймовірнісному просторі, де графи в $\mathcal{G}_{n,d}$ мають рівномірний розподіл, ми розглянемо питання, як генерувати графи в $\mathcal{G}_{n,d}$, і будемо спиратися на той розподіл, який виникає з конструкції.

Існує кілька моделей для генерації випадкових графів в $\mathcal{G}_{n,d}$. Ми розглянемо модель Боллобаса[1], яка є найбільш відомою (див. [5]). В цій моделі d-регулярний граф з n вершинами, де nd є парним, будується так. Беремо nd точок і розбиваємо на n множин $S_1, \ldots, S_n$ по d точок в кожній. Беремо випадкове паросполучення на nd точках і стискуємо кожну підмножину S_i у одну вершину i, зберігаючи ребра, які задаються паросполученням. В результаті ми отримаємо d-регулярний граф на вершинах $1, 2, \ldots, n$, але в ньому можуть бути кратні ребра і петлі (див. приклад на рис. 6). Генеруючи графи за рівномірним розподілом на паросполученнях ми отримаємо ймовірнісний простір $\mathcal{R}_{n,d}$ d-регулярних графів з n-вершинами, де дозволяються кратні ребра та петлі.

За означенням графи експандери мають бути простими та зв'язними. Помітимо, що кожен простий граф генерується точно $(d!)^n$ паросполученнями. Тому генерація простих графів в моделі $\mathcal{R}_{n,d}$ відбувається рівномірно (для не простих графів це не так). Будемо спиратися на відомі результати про цю модель:

$$P(G \in \mathcal{R}_{n,d} \text{ є простим}) \sim e^{\frac{1-d^2}{4}}, \quad n \to \infty,$$
$$P(G \in \mathcal{R}_{n,d} \text{ є зв'язним}) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Зокрема, модель Боллобаса гарантує, що ми отримуємо простий зв'язний граф з додатньою ймовірністю. Залишається показати, що існує таке $\varepsilon > 0$, що випадковий граф $G \in \mathcal{R}_{n,d}$ задовольняє $h(G) \geq \varepsilon$ з додатньою ймовірністю.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оцінимо ймовірність того, що при побудові у графа з'являється «погана» підмножина вершин F: $|\partial F| < \varepsilon |F|$ і $|F| \leq n/2$. Нехай $m = |F|$. Для виконання умови $|\partial F| < \varepsilon |F|$ всередині F має бути не менше

[1] На англійській мові ця модель називається pairing model of Bollobas, але дослівний переклад «модель спарювання Боллобаса» можна неправильно сприймати.

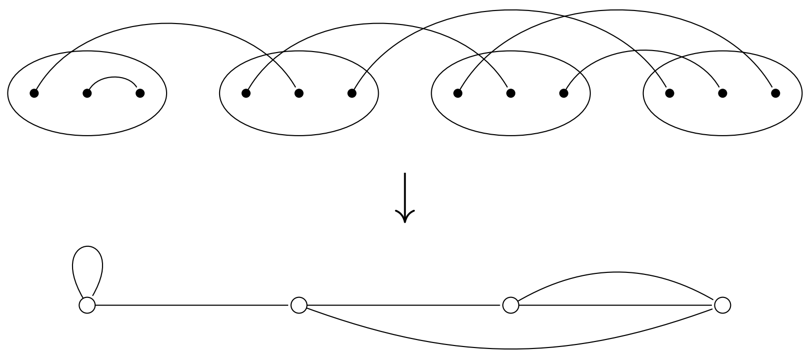


Рис. 6: Побудова 3-регулярного графа з 4 вершинами відповідно до моделі спарювання

$m(d-\varepsilon)$ ребер. Ймовірність такої події можемо обмежити зверху ймовірністю того, що при виборі md точок серед всіх nd точок між ними буде $m(d/2-\varepsilon)$ ребер:

$$\frac{\binom{dn/2}{m(d/2-\varepsilon)}\binom{dn-2m(d/2-\varepsilon)}{2\varepsilon m}}{\binom{dn}{dm}},$$

де $\binom{dn/2}{m(d/2-\varepsilon)}$ обчислює кількість способів вибрати $m(d/2-\varepsilon)$ ребер з усіх ребер паросполучення, це дає $2m(d/2-\varepsilon)$ точок, а $\binom{dn-2m(d-\varepsilon)}{2\varepsilon m}$ обчислює кількість способів обрати решту $2\varepsilon m$ точок. Тому ймовірність появи «поганої» множини можна оцінити зверху числом

$$\sum_{m=1}^{n/2}\binom{n}{m}\frac{\binom{dn/2}{m(d/2-\varepsilon)}\binom{dn-2m(d/2-\varepsilon)}{2\varepsilon m}}{\binom{dn}{dm}}.$$

Використавши відомі оцінки на біноміальні коефіцієнти, можна показати, що це число менше 1 для деякого $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$. Отже, з додатньою ймовірністю побудований граф не має «поганої» множини вершин і $h(G) \geq \varepsilon$. □

Нерівність Чігера дозволяє переформулювати попередню теорему в термінах спектру: випадковий d-регулярних граф має спектральний розрив $\geq \varepsilon$ з додатньою ймовірністю. Виникає природне питання, який спектральний розрив можна очікувати у випадкового регулярного графа. Теорема Alon-Boppana дає асимптотичну оцінку $\lambda(G) \geq 2\sqrt{d-1}$. Наступна теорема стверджує, що випадковий d-регулярний граф має майже оптимальний спектральний розрив з високою ймовірністю.

Теорема 3.2 (Friedman, 2003). *Для кожного $d \geq 3$ та довільного $\varepsilon > 0$ виконуєтьcя*

$$P(G \in \mathcal{G}_{n,d}\colon \lambda(G) \leq 2\sqrt{d-1}+\varepsilon) \to 1,\ n \to \infty,$$

де $\lambda(G) = \max(|\lambda_2(G)|, |\lambda_n(G)|)$.

В деяких застосуваннях ми будемо спиратися на існування спеціальних дводольних експандерів.

Вправа 3.1. Дводольний d-регулярний граф $G = (A \cup B, E)$ з $2n$ вершинами (n вершинами у кожній з доль A і B) називається $(2n, d, \alpha, \beta)$-експандером, якщо для кожної підмножини S в одній з доль потужності $|S| \leq \alpha n$ виконується

$$|N(S)| \geq \beta |S|,$$

де $N(S)$ є множиною сусідей вершин з S.

1) Покажіть, що з існування $(2n, d, \alpha, \beta)$-експандера випливає $\beta \leq d$.
2) Покажіть, що з існування $(2n, d, \alpha, d)$-експандера випливає $\alpha \leq \frac{1}{d}$.
3) Доведіть, що для довільного натурального $d \geq 3$ існує таке $\alpha > 0$, що для кожного $n \geq d$ існує дводольний $(2n, d, \alpha, d-2)$-експандер.
4) Доведіть, що для довільного $\lambda > 0$ існує натуральне $d \geq 3$ таке, що для всіх $n \geq d$ існує дводольний $(2n, d, \frac{1}{2}, \lambda)$-експандер. (Доведіть, що для довільного $\lambda > 0$ існує таке натуральне $d \geq 3$, що випадковий дводольний d-регулярний граф є (n, d, λ)-експандером з додатньою ймовірністю.)

3.2 Експандери Маргуліса

Першу конструкцію експандерів винайшов Маргуліс (1973), спираючись на результати теорії зображень груп. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо 8-регулярний граф G_n з n^2 вершинами. Множиною вершин графа G_n є група $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ і вершина (x, y) з'єднана ребром з вершинами

$$(x \pm 1, y),\ (x, y \pm 1),\ (x \pm y, y),\ (x, y \pm x),$$

де операції здійснюються за модулем n. Зауважимо, що графи G_n не є простими, вони мають кратні ребра та петлі, і ми вважаємо їх 8-регулярними з урахуванням цього моменту.

Теорема 3.3. *Графи $(G_n)_{n \geq 1}$ утворюють послідовність експандерів.*

Доведення. Ми розберемо доведення Джеймса Лі [15] (див. також [23]). Оригінальний підхід Маргуліса буде розглянуто пізніше в розділі 3.5.

Спочатку опишемо схему доведення. Нам потрібно показати, що існує така константа $c > 0$, що

$$\beta_2(G_n) \geq c \quad \text{для всіх } n \geq 1,$$

де $\beta_2(G_n)$ — це друге власне число оператора Лапласа графа G_n. За теоремою Релея-Рітца число $\beta_2(G_n)$ можна записати у вигляді

$$\beta_2(G_n) = \min_{f \in L^2(V_n)} \left\{ \frac{\sum_{uv \in E_n} |f(u) - f(v)|^2}{\sum_{v \in V_n} |f(v)|^2} : \sum_{v \in V_n} f(v) = 0 \right\}.$$

Запишемо ребра графів G_n через відображення $S(x, y) = (x, x + y)$ та $T(x, y) = (x + y, y)$, які є бієкціями на множинах вершин $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Вершина (x, y) з'єднана ребром з вершинами

$$(x \pm 1, y),\ (x, y \pm 1),\ S^{\pm 1}(x, y),\ T^{\pm 1}(x, y).$$

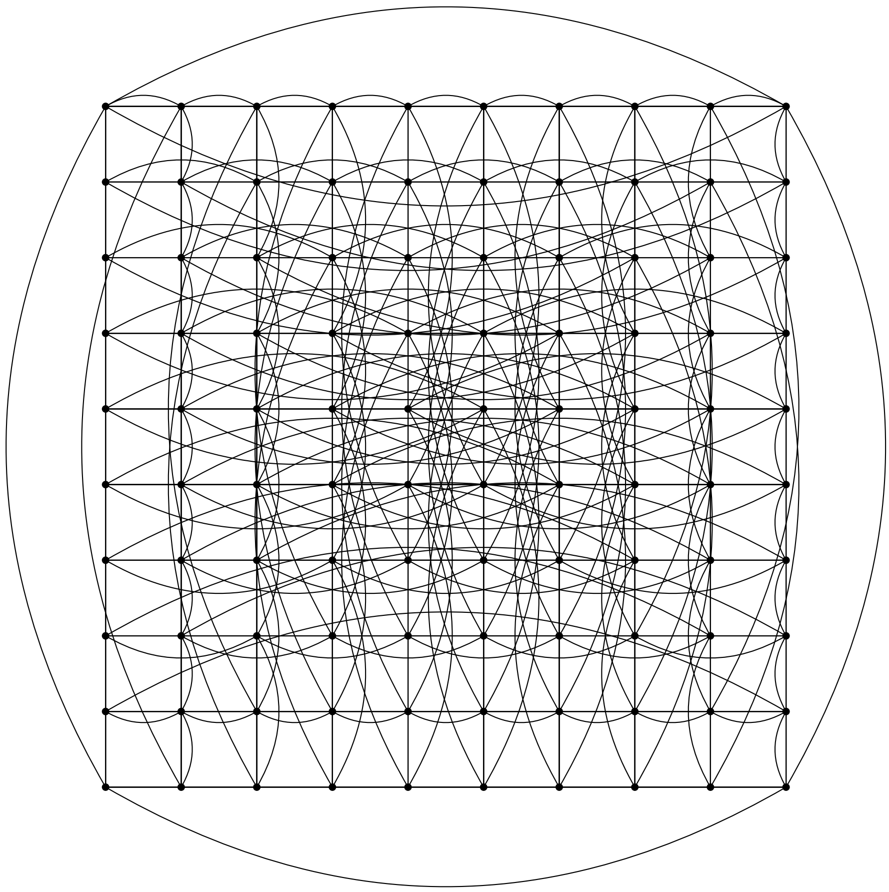


Рис. 7: Експандер Маргуліса для $n = 10$

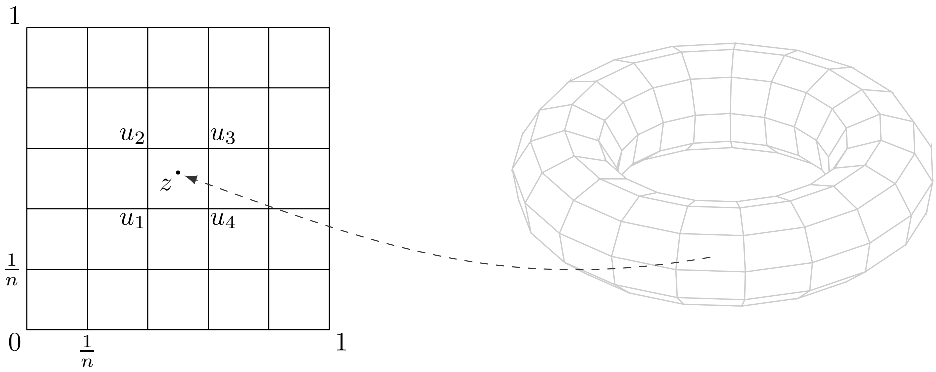


Рис. 8: Тор $\mathbb{T}^2$ з природнім поділом на квадрати

Для оцінки $\beta_2(G_n)$ ми розглянемо допоміжний нескінченний граф R, який є неперервною версією графів G_n. Граф R охоплює природнє зображення кожного графа G_n на торі $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, яке виникає при зануренні

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{T}^2, \quad (x, y) \to (x/n, y/n).$$

Множиною вершин R є тор $\mathbb{T}^2$, а ребра задаються відображеннями S і T: точка (x, y) з'єднується ребром з точками $S^{\pm 1}(x, y)$ та $T^{\pm 1}(x, y)$. Ми оцінимо $\beta_2(G)$ через $\beta_2(R)$ у лемі 3.1. Але оскільки ми не визначали β_2 для нескінченних графів, то R вважається графом просто для інтуїції. Число $\beta_2(R)$ ми визначимо без розгляду оператора Лапласа рівністю:

$$\beta_2(R) = \inf_{f \in L^2(\mathbb{T}^2)} \left\{ \frac{\|f - f \circ S\|^2 + \|f - f \circ T\|^2}{\|f\|^2} : \int_{\mathbb{T}^2} f = 0 \right\},$$

де $\mathbb{T}^2$ розглядається з мірою Лебега і ми працюємо у гільбертовому просторі

$$L^2(\mathbb{T}^2) = \left\{ f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{T}^2} |f|^2 < \infty \right\}.$$

Для оцінки $\beta_2(R)$ ми розглянемо допоміжний граф G_∞, який є (дискретною) нескінченною версією графів G_n. Множиною вершин графа G_∞ є $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$, а ребра задаються відображеннями S і T: вершина (x, y) з'єднується ребрами з вершинами $S^{\pm 1}(x, y)$ і $T^{\pm 1}(x, y)$. Ми оцінимо $\beta_2(R)$ через $\beta_2(G_\infty)$ у лемі 3.2, де

$$\begin{aligned}
\beta_2(G_\infty) &= \inf_{f \in L^2(\mathbb{Z}^2)} \left\{ \frac{\sum_{uv \in E} |f(u) - f(v)|^2}{\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} |f(v)|^2} : f(0, 0) = 0 \right\} = \\
&= \inf_{f \in L^2(\mathbb{Z}^2)} \left\{ \frac{\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} |f(v) - f(S(v))|^2 + |f(v) - f(T(v))|^2}{\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} |f(v)|^2} : f(0, 0) = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

У свою чергу $\beta_2(G_\infty)$ можна оцінити через розширюючі властивості графа за нерівністю Чігера $\beta_2(G_\infty) \geq \frac{h(G_\infty)^2}{2d}$ для нескінченних графів (див. вправу 2.2). Завершує доведення лема 3.3, з якої випливає нерівність $h(G_\infty) \geq 1/2$.

Лема 3.1. *Існує таке $c > 0$, що $\beta_2(G_n) \geq c\beta_2(R)$ для всіх $n \geq 1$.*

Доведення. Нехай мінімум в означенні $\beta_2(G_n)$ реалізується функцією $f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$. Будемо розглядати $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ як підмножину тора $\mathbb{T}^2$ при природньому зануренні (див. рис. 8). Продовжимо функцію f на весь тор $\widetilde{f} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ наступним чином. Кожна точка $z \in \mathbb{T}^2$ знаходиться всередині квадрата з деякими вершинами $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Запишемо z у вигляді опуклої лінійної комбінації $z = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$ і покладемо

$$\widetilde{f}(z) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(u_3) + \lambda_4 f(u_4).$$

Оскільки $\sum_{v \in V_n} f(v) = 0$, то $\int_{\mathbb{T}^2} \widetilde{f} = 0$. Ми можемо використати $\widetilde{f}$ для оцінки числа $\beta_2(R)$. Площу кожного квадрата на торі, який є образом квадрата на площині зі стороною $\frac{1}{n}$, можна оцінити знизу як $\frac{c}{n^2}$ для деякої константи $c > 0$. Тому існує така константа $c_1 > 0$, що інтеграл від $\widetilde{f}$ на квадраті, можна обмежити знизу $\frac{c_1}{n^2}|f(v)|^2$, де $v \in V_n$ — це ліва нижня вершина квадрата. Отже,

$$\|\widetilde{f}\|^2 \geq \frac{c_1}{n^2} \sum_{v \in V_n} |f(v)|^2.$$

Обмежимо зверху норми $\|f - f \circ S\|^2$ та $\|f - f \circ T\|^2$. Нехай $z \in \mathbb{T}^2$ належить квадрату з вершинами u_i, $z = \sum_i \lambda_i u_i$, а $S(z)$ — квадрату з вершинами v_i, тоді $S(z) = \sum \lambda_i v_i$. Існує пара u_i, v_i, для якої

$$|f(u_i) - f(v_i)|^2 \geq \tfrac{1}{4}|f(z) - f(S(z))|^2.$$

Вершини u_i та v_i можуть бути несуміжними в графі. Але з визначення ребер графа G_n випливає, що вершини u_i та v_i знаходяться на відстані ≤ 5 в графі. Тому принаймні для одного ребра $uv \in E_n$ у шляху між u_i та v_i буде виконуватися

$$|f(u) - f(v)|^2 \geq \tfrac{1}{5}|f(u_i) - f(v_i)|^2.$$

Звідси випливає існування константи $c_2 > 0$, для якої

$$\|f - f \circ S\|^2 \leq \frac{c_2}{n^2} \sum_{uv \in E_n} |f(u) - f(v)|^2.$$

Аналогічно для $\|f - f \circ T\|^2$. Підставляючи отримані нерівності в означення $\beta_2(R)$ отримуємо потрібне твердження. $\square$

Лема 3.2. $\beta_2(R) = \beta_2(G_\infty)$.

Доведення. Для переходу від графа R на торі $\mathbb{T}^2$ до графа G_∞ на групі $\mathbb{Z}^2$ ми використаємо перетворення Фур'є $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{Z}^2)$.

Нагадаємо необхідні відомості про перетворення Фур'є. Гільбертовий простір $L^2(\mathbb{T}^2)$ має ортонормований базис $\chi_{(m,n)}(x) = e^{2\pi i(mx+ny)}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Кожну функцію $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ можна розкласти за базисом:

$$f = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \chi_{(m,n)} \rangle \chi_{(m,n)}.$$

Тоді перетворення $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{Z}^2)$ можна задати правилом $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, де

$$\widehat{f} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(n,m) = \langle f, \chi_{(m,n)} \rangle.$$

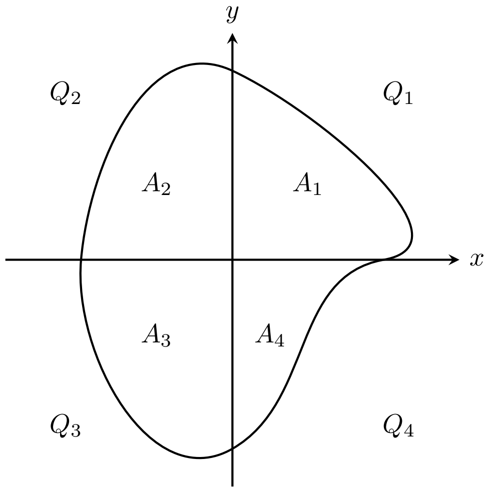


Рис. 9: Розбиття множини A на частини квадрантами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

Перевіримо, що перетворення Фур'є $f \mapsto \widehat{f}$ переводить $\beta_2(R)$ у $\beta_2(G_\infty)$. По-перше,

$$\widehat{f}(0,0) = \langle f, \chi_{(0,0)} \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} f.$$

Тому $\int_{\mathbb{T}^2} f = 0$ тоді і лише тоді, коли $\widehat{f}(0,0) = 0$. Перетворення Фур'є є лінійним і зберігає скалярний добуток, зокрема

$$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |\widehat{f}(m,n)|^2.$$

Отже, знаменники у виразах для $\beta_2(R)$ та $\beta_2(G_\infty)$ рівні. Залишилося знайти норми $\|f - f\circ S\|^2$ та $\|f - f\circ T\|^2$. Відображення S, T діють зсувом на базисі $\chi_{(m,n)}$. Звідси випливає

$$\begin{aligned}(\widehat{f\circ S})(m,n) &= \langle f\circ S, \chi_{(m,n)} \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} f(S(x,y))\chi_{(m,n)}(x,y) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} f(x, x+y)\chi_{(m,n)}(x,y) = \int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)\chi_{(m-n,n)}(x,y) = \\ &= \langle f, \chi_{(m-n,n)} \rangle = \widehat{f}(m-n,n).\end{aligned}$$

Маємо

$$\|f - f\circ S\|^2 = \|\widehat{f} - \widehat{f\circ S}\|^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |\widehat{f}(m,n) - \widehat{f}(m-n,n)|^2$$

Аналогічна рівність виконується для $\|f - f\circ T\|^2$. Отже, чисельник в означенні $\beta_2(R)$ теж дорівнює чисельнику в означенні $\beta_2(G_\infty)$. Лема доведена. $\square$

Лема 3.3. *Для всіх $A \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ виконується $|E(A,\overline{A})| \geq \frac{1}{2}|A|$, де $E(A,\overline{A})$ — це множина ребер між A та $\overline{A}$ у графі G_∞.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли A не перетинає координатні осі. Розділимо $\mathbb{Z}^2$ на квадранти Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 і розглянемо частини $A_i = A \cap Q_i$, на які вони ділять множину A (див. рис. 9). За нашим припущенням A_1, A_2, A_3, A_4 є диз'юнктними. З означення відображень S, T випливає

$$S(A_1), T(A_1) \subseteq Q_1, \qquad S^{-1}(A_2), T^{-1}(A_2) \subseteq Q_2,$$
$$S(A_3), T(A_3) \subseteq Q_3, \qquad S^{-1}(A_4), T^{-1}(A_4) \subseteq Q_4.$$

Помітимо, що відповідні пари множин є диз'юнктними:

$$S(A_1) \cap T(A_1) = \emptyset, \qquad S^{-1}(A_2) \cap T^{-1}(A_2) = \emptyset,$$
$$S(A_3) \cap T(A_3) = \emptyset, \qquad S^{-1}(A_4) \cap T^{-1}(A_4) = \emptyset.$$

Справді, якщо $(x, y) \in S(A_1) \cap T(A_1)$, то $(x, y) = (x', x' + y') = (x'' + y'', y'')$ для деяких $(x', y'), (x'', y'') \in A_1$. Тоді $x'' = -y'$, що неможливо для точок у першому квадранті з додатніми координатами. Аналогічно для інших пар множин. Оскільки S, T є бієкціями, то $|S^{\pm 1}(A_i)| = |T^{\pm 1}(A_i)| = |A_i|$ і ми отримуємо необхідну оцінку:

$$\begin{aligned} |E(A, \overline{A})| \geq |S(A_1)| + |T(A_1)| + |S^{-1}(A_2)| + |T^{-1}(A_2)| + \\ + |S(A_3)| + |T(A_3)| + |S^{-1}(A_4)| + |T^{-1}(A_4)| - |A| = \\ = 2(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) - |A| = |A|. \end{aligned} \tag{7}$$

Тепер розглянемо випадок довільної A. Нехай $A_0 \subset A$ містить ті точки з A, у яких одна з координат дорівнює нулю. Застосуємо попередній випадок до множини $A \setminus A_0$. Тільки помітимо, що при цьому множини $S^{\pm 1}(A_i)$, $T^{\pm 1}(A_i)$, які з'являються у нерівності (7), не містять точок з A_0. Тому

$$|E(A, \overline{A})| \geq |E(A \setminus A_0, \overline{A})| \geq |A| - |A_0|.$$

Тепер оцінимо кількість ребер між A_0 та $\overline{A}$. Маємо всього $4|A_0|$ ребер, які інцидентні вершині з A_0. Зауважимо, що всередині A_0 ребер немає. Кількість ребер, які інцидентні вершині з $A \setminus A_0$, не перевищує $4|A \setminus A_0|$, при цьому $|A| - |A_0|$ з них мають інший кінець в $\overline{A}$ за попередньою нерівністю. Тому

$$|E(A, \overline{A})| \geq |E(A_0, \overline{A})| \geq 4|A_0| - (4|A \setminus A_0| - (|A| - |A_0|)) = 7|A_0| - 3|A|.$$

Взявши середнє зважене цих двох нерівностей отримуємо

$$|E(A, \overline{A})| \geq \tfrac{7}{8}(|A| - |A_0|) + \tfrac{1}{8}(7|A_0| - 3|A|) = \tfrac{1}{2}|A|. \qquad \square$$

$\square$

Вправа 3.2. Знайдіть константу $c > 0$, для якої виконується лема 3.1. Як наслідок, зробіть нижню оцінку на $\beta_2(G_n)$.

3.3 Зиг-заг добуток графів

В 2002 році О. Рейнгольд, С. Вадхан і А. Вігдерсон винайшли просту комбінаторну конструкцію експандерів, яку ми розберемо в цьому підрозділі. Ця конструкція базується на новій операції на регулярних графах — зиг-заг добутку. В цьому розділі графи можуть мати петлі та кратні ребра.

3.3.1 Операції з графами

Ми розглянемо три операції на графах: піднесення у степінь, добуток заміни і зиг-заг добуток.

Степінь графа. Нехай $G = (V, E)$ — скінченний граф і $k \in \mathbb{N}$.

Означення 3.1. k-тим степенем графа G називається граф G^k з множиною вершин V, в якому дві вершини v, u з'єднуються одним ребром для кожного шляху довжини k між v та u в графі G.

Граф G^k може мати петлі та кратні ребра, навіть якщо граф G є простим. Якщо граф G є d-регулярним, то G^k є d^k-регулярним (з урахуванням петель та кратних ребер). Якщо A є матрицею суміжності графа G, то A^k є матрицею суміжності графа G^k за теоремою 1.2. Тому власними числами G^k є λ^k, де λ пробігає власні числа графа G. Оскільки степінь регулярності графів G^k залежить від k, то ми не можемо порівняти їх розширюючі властивості напряму. Більш того, граф G^k може стати незв'язним, навіть якщо G є зв'язним (див. вправу 3.3). Тому замість $\lambda(G)$ розглядається нормалізоване друге власне число за модулем:

$$\lambda_u(G) = \tfrac{1}{d}\lambda(G) = \tfrac{1}{d}\max_{\lambda \neq d} |\lambda| = \lambda(\tfrac{1}{d}A).$$

Тоді $\lambda_u(G^k) = \lambda_u(G)^k$ і якщо $\lambda_u(G) < 1$, то $\lambda_u(G^k) < \lambda_u(G) < 1$. Тому можна сказати, що піднесення граф у степінь, хоча і збільшує степінь вершин, зменшує нормалізоване друге власне число.

Вправа 3.3. Нехай G — скінченний граф і $k \in \mathbb{N}$. Доведіть, що граф G^k є зв'язним тоді і лише тоді, коли G є зв'язним і якщо граф є дводольним, то k має бути парним.

Добуток заміни[2]**.** Нехай G — D-регулярний граф з N вершинами і H — d-регулярний граф з D вершинами. Для кожної вершини $v \in V(G)$ помітимо ребра, інцидентні v, вершинами графа H взаємно однозначним чином. Тоді кожне ребро $e \in E(G)$ буде мати дві мітки $x, y \in V(G)$, асоційовані з різними кінцями ребра. Якщо e з'єднує вершини v і u, то будемо позначати мітки так:

$$v \overset{x \quad y}{\overline{\qquad\quad}} u,$$

де x — це мітка e як ребра, інцидентного v, а y — як ребра, інцидентного u. Добуток заміни графів G і H залежить від вибраних міток.

Означення 3.2. Добутком заміни графів G і H називається граф $G \circledr H$, множиною вершин якого є декартовий добуток $V(G) \times V(H)$, а ребра задаються так:

1) для кожної вершини $v \in V(G)$ і ребра $xy \in E(H)$ маємо ребро між вершинами (v, x) та (v, y) в графі $G \circledr H$;
2) для кожного поміченого ребра $v \overset{x \quad y}{\overline{\qquad\quad}} u$ графа G маємо ребро між вершинами (v, x) та (u, y) в графі $G \circledr H$.

[2] Термін «добуток заміни» є авторським перекладом з англійської мови терміну «replacement product».

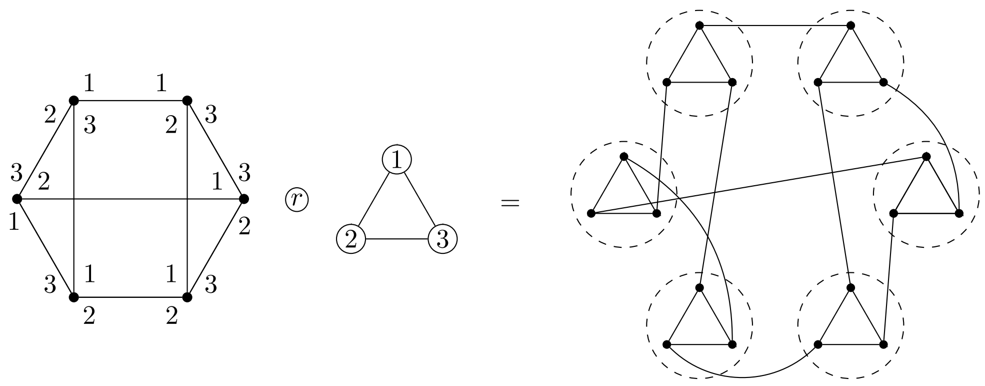


Рис. 10: Приклад добутку заміни двох графів

Перший тип ребер просто означає, що ми заміняємо кожну вершину графа G копією графа H, зберігаючи всі ребра H. Другий тип ребер вказує, як ми з'єднуємо вершини з різних копій H. Помітимо, що оскільки для кожної пари вершин $v \in V(G)$ та $x \in V(H)$ існує точно одне ребро в графі G, інцидентне вершині v з міткою x, то другий тип ребер додає точно одне ребро, інцидентне вершині (v, x). Отже, $G \circledR H$ є $(d+1)$-регулярним графом з $N \cdot D$ вершинами (див. приклад на рис. 10).

Вправа 3.4. Доведіть такі властивості добутку заміни:

1) Якщо графи G і H є зв'язними, то граф $G \circledR H$ є зв'язним.
2) $\operatorname{diam}(G \circledR H) \leq \operatorname{diam}(G) + \operatorname{diam}(H) + \operatorname{diam}(G) \cdot \operatorname{diam}(H)$.

Зиг-заг добуток. Нехай G — D-регулярний граф з N вершинами і H — d-регулярний граф з D вершинами. Помічаємо ребра графа G вершинами графа H так само, як і для добутку заміни. Зиг-заг добуток графів G і H залежить від вибраних міток.

Означення 3.3. Зиг-заг добутком графів G і H називається граф $G \circledz H$, множиною вершин якого є декартовий добуток $V(G) \times V(H)$, і для кожного зиг-заг шляху довжини три:

1) ребра $x \text{ — } x'$ в H; 2) ребра $v \xrightarrow{x' \quad y'} u$ в G; 3) ребра $y \text{ — } y'$ в H,

вершини (v, x) та (u, y) з'єднуються ребром в графі $G \circledz H$.

Оскільки граф H є d-регулярним, то перший і третій крок, при фіксованих x і y', можна зробити d способами; другий крок однозначно визначається v та x'. Тому зиг-заг добуток $G \circledz H$ є d^2-регулярним графом з $N \cdot D$ вершинами (див. приклад на рис. 11).

Вправа 3.5. З'ясуйте, при яких умовах зиг-заг добуток зв'язних графів є зв'язним графом. При умові, що граф $G \circledz H$ є зв'язним, доведіть, що

$$\operatorname{diam}(G \circledz H) \leq \operatorname{diam}(G) + 2 \operatorname{diam}(H).$$

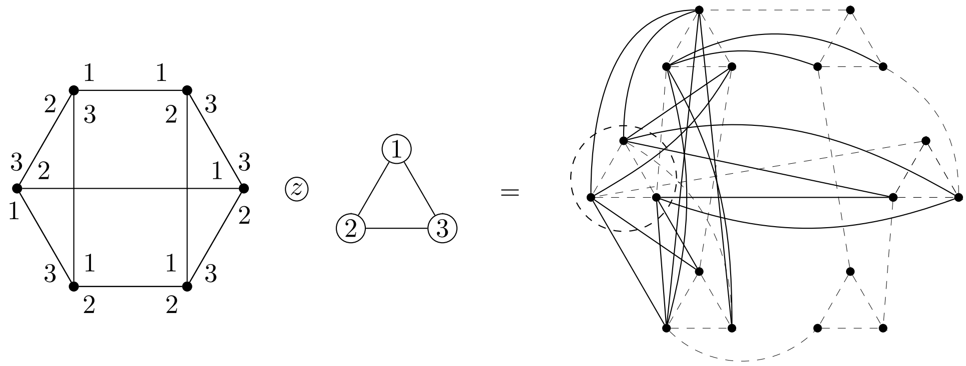


Рис. 11: Приклад зиг-заг добутку двох графів, де зображено всі ребра тільки для трьох вершин (однієї копії H)

Зиг-заг шлях в означенні зиг-заг добутку є шляхом довжини три у добутку заміни $G ⓡ H$. Так само як в теоремі 1.2, це дозволяє представити матрицю суміжності графа $G ⓩ H$ у вигляді:

$$Z = \widetilde{B} P \widetilde{B}, \tag{8}$$

де матриці $P, \widetilde{B}$ мають елементи

$$\widetilde{B}_{(v,x),(u,y)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } v \neq u; \\ B_{x,y}, & \text{якщо } v = u. \end{cases} \qquad P_{(v,x),(u,y)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v \overset{x \quad y}{\text{———}} u; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

де B — матриця суміжності графа H. Помітимо, що матриця P є перестановочною, проекція якої на множину $V(G)$ дає матрицю суміжності A графа G, а $\widetilde{B}$ є блочно-діагональною з N матрицями B, розташованими по діагоналі (при правильній нумерації вершин).

3.3.2 Оцінка на друге власне число

Зиг-заг добуток великого графа з маленьким графом дозволяє отримати великий граф з маленьким степенем регулярності. Залишається питання, які розширюючі властивості будуть у нового графа. Оскільки зиг-заг добуток комбінує графи з різним степенем регулярності, то замість другого власного числа $\lambda_2(G)$ або $\lambda(G)$ будемо використовувати нормалізований варіант:

$$\lambda_u(G) = \tfrac{1}{d}\lambda(G) = \tfrac{1}{d}\max_{\lambda \neq d}|\lambda| = \lambda(\tfrac{1}{d}A),$$

де A — це матриця суміжності d-регулярного графа G. Величина $\lambda_u(G)$ задовольняє всі теореми, що і число $\lambda(G)$, якщо замість матриці A розглядати матрицю $\frac{1}{d}A$, яка називається нормалізованою матрицею суміжності графа.

Теорема 3.4 (Рейнгольд-Вадхан-Вігдерсон, 2002)**.** *Нехай графи G і H задовольняють означення зиг-заг добутку графів. Тоді*

$$\lambda_u(G ⓩ H) \leq \lambda_u(G) + \lambda_u(H).$$

Враховуючи, що графи G і H є D- і d-регулярними відповідно, то нерівність можна переписати в термінах числа $\lambda(\cdot)$ так:

$$\lambda(G \textcircled{z} H) \le \tfrac{d^2}{D} \cdot \lambda(G) + d \cdot \lambda(H).$$

Доведення. Ми доведемо більш слабку оцінку —

$$\lambda_u(G \textcircled{z} H) \le \lambda_u(G) + \lambda_u(H) + \lambda_u(H)^2,$$

якої теж буде достатньо для побудови експандерів. Розберемо доведення з роботи [12, ст. 511].

Нехай A, B, Z — нормалізовані матриці суміжності графів G, H і $G \textcircled{z} H$ відповідно. Для оцінки другого власного числа будемо спиратися на теорему Релея-Рітца. Маємо

$$|\langle Ag, g\rangle| \le \lambda_u(A)\|g\|^2 \quad \text{і} \quad |\langle Bh, h\rangle| \le \lambda_u(B)\|h\|^2$$

для всіх $g \in L^2(V(G))$, $g \perp \mathbb{1}$ та $h \in L^2(V(H))$, $h \perp \mathbb{1}$. Нам потрібно оцінити $|\langle Zf, f\rangle|$ для $f \in L^2(V(G \textcircled{z} H))$, $f \perp \mathbb{1}$. Запишемо Z у вигляді (8) і підставимо:

$$\langle Zf, f\rangle = \langle \widetilde{B}P\widetilde{B}f, f\rangle = \langle P\widetilde{B}f, \widetilde{B}f\rangle.$$

Представимо f у вигляді $f = g + h$, де

$$g(v, x) = \tfrac{1}{D} \sum_{y \in V(H)} f(v, y), \; v \in V(G), x \in V(H).$$

Тоді g стала на множині вершин $\{(v, x) : x \in V(H)\}$ для кожної $v \in V(G)$, а сума значень h на кожній з цих множин дорівнює нулю. Звідси випливають рівності: $\langle g, h\rangle = 0$, $h \perp \mathbb{1}$, $\widetilde{B}g = g$. Тоді $\widetilde{B}f = \widetilde{B}(g + h) = g + \widetilde{B}h$ і

$$\begin{aligned}\langle Zf, f\rangle &= \langle P(g + \widetilde{B}h), g + \widetilde{B}h\rangle = \\ &= \langle Pg, g\rangle + \langle Pg, \widetilde{B}h\rangle + \langle P\widetilde{B}h, g\rangle + \langle P\widetilde{B}h, \widetilde{B}h\rangle.\end{aligned}$$

Другий, третій і четвертий доданки оцінимо через норму матриць. Пропонуємо читачу самостійно перевірити, що $\|\widetilde{B}\| \le \|B\|$. Тоді враховуючи $\|P\| = 1$ і $\|\widetilde{B}\| \le \|B\| \le \lambda_u(H)$ отримуємо

$$\begin{aligned}|\langle Pg, \widetilde{B}h\rangle| &\le \lambda_u(H) \cdot \|g\| \cdot \|h\|, \\ |\langle P\widetilde{B}h, g\rangle| &\le \lambda_u(H) \cdot \|g\| \cdot \|h\|, \\ |\langle P\widetilde{B}h, \widetilde{B}h\rangle| &\le \lambda_u(H)^2 \cdot \|h\|^2.\end{aligned}$$

Залишилося оцінити перший доданок. Визначимо функцію $g_c : V(G) \to \mathbb{C}$ за правилом $g_c(v) = g(v, x)$ для деякого $x \in V(H)$. Зауважимо, що $\|g\|^2 = D^2\|g_c\|$ і $g_c \perp \mathbb{1}$. Тоді:

$$\begin{aligned}\langle Pg, g\rangle &= \sum_{(v,x)} (Pg)(v, x)g(v, x) = \sum_{(v,x)} \sum_{(u,y)} P[(v, x), (u, y)]g(u, y)g(v, x) = \\ &= D^2 \sum_v \sum_u A_{vu} g_c(u) g_c(v) = D^2 \langle Ag_c, g_c\rangle \qquad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$|\langle Pg, g\rangle| = |D^2\langle Ag_c, g_c\rangle| \le D^2\lambda_u(G)\|g_c\|^2 \le \lambda_u(G)\|g\|^2.$$

Отже,

$$|\langle Zf, f\rangle| \leq \lambda_u(G)\|g\|^2 + 2\lambda_u(H)\|g\| \cdot \|h\| + \lambda_u(H)^2\|h\|^2.$$

Розглянувши праву частину нерівності як квадратичну форму відносно $\|g\|$ і $\|h\|$, а також враховуючи $\|g\|^2 + \|h\|^2 = \|f\|^2$, можемо оцінити максимальне значення квадратичної форми стандартним способом:

$$|\langle Zf, f\rangle| \leq (\lambda_u(G) + \lambda_u(H) + \lambda_u(H)^2)\|f\|^2,$$

що і потрібно було довести. □

Вправа 3.6. Знайдіть оцінку на $\lambda_u(G \textcircled{r} H)$.

3.3.3 Ітерована конструкція експандерів

Нехай H — d-регулярний граф з d^4 вершинами і $\lambda_u(H) \leq \frac{1}{5}$. Визначимо послідовність графів $(G_n)_{n\geq 1}$ рекурсивно:

$$G_1 = H^2, \qquad G_{n+1} = G_n^2 \textcircled{z} H, \ n \geq 1.$$

Тоді G_n є d^2-регулярними графами з d^{4n} вершинами. Покажемо за індукцією, що $\lambda_u(G_n) \leq \frac{1}{2}$ для всіх $n \geq 1$:

$$\lambda_u(G_{n+1}) \leq \lambda_u(G_n)^2 + \lambda_u(H) + \lambda_u(H)^2 \leq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} \leq \tfrac{1}{2}.$$

Отже, $(G_n)_{n\geq 1}$ утворює послідовність експандерів.

3.4 Графи Келі та графи Шрайєра

В цьому розділі ми розглянемо алгебраїчний спосіб побудови регулярних графів. Спочатку нагадаємо необхідні відомості з теорії груп.

3.4.1 Групи та дії груп

Нехай Γ — довільна група.

Означення 3.4. Підмножина $S \subset \Gamma$ називається системою твірних групи Γ, якщо довільний елемент $g \in \Gamma$ можна представити у вигляді $g = s_1 s_2 \ldots s_n$ для $s_i \in S \cup S^{-1}$, де $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$. Позначається $\Gamma = \langle S\rangle$.

Означення 3.5. Група Γ називається скінченно породженою, якщо вона має скінченну систему твірних.

Приклади 3.1. Всі скінченні групи є скінченно породженими з очевидних причин. Циклічні групи мають систему твірних з одного елемента. Діедральна група D_n симетрій правильного n-кутника породжується, наприклад, двома суміжними осьовими симетріями, або довільною осьовою симетрією та поворотом на кут $\frac{2\pi}{n}$.

Симетрична група Sym_n породжується транспозиціями $(i\, j)$, $i < j$, але її можна породити і двома елементами:

$$Sym_n = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \ldots\ n)\rangle.$$

Знакозмінна група Alt_n породжується циклами довжини три, але її теж можна породити двома елементами, так само як і довільну скінченну просту групу.

Вільна абелева група $\mathbb{Z}^n$ породжується n елементами і її не можна породити менше ніж n елементами. Кожна абелева група, породжена n елементами, є факторгрупою групи $\mathbb{Z}^n$, і розкладається у прямий добуток циклічних груп.

Матричні групи $GL_n(\mathbb{Z})$ та $SL_n(\mathbb{Z})$ є скінченно породженими. Можна показати, що група $GL_n(\mathbb{Z})$ породжується двома матрицями

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Група $SL_n(\mathbb{Z})$ є підгрупою індексу 2 в групі $GL_n(\mathbb{Z})$, і тому теж є скінченно породженою. Наприклад, група $SL_2(\mathbb{Z})$ породжується двома матрицями

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скінченна породженість зберігається при деяких алгебраїчних операціях. Факторгрупа скінченно породженої групи є скінченно породженою. Системою твірних факторгрупи є образ системи твірних групи при канонічній проекції. Зокрема, групи $GL_2(\mathbb{Z}_n)$ та $SL_2(\mathbb{Z}_n)$ породжуються двома елементами, як факторгрупи груп $GL_2(\mathbb{Z})$ та $SL_2(\mathbb{Z})$.

Підгрупа скінченно породженої групи не обов'язково є скінченно породженою. Наприклад, вільна група рангу два $F_2 = \langle a, b\rangle$ містить підгрупу

$$H = \langle a^n b a^{-1} : n \geq 1\rangle,$$

яка є вільною групою нескінченного рангу і не є скінченно породженою. Але підгрупи скінченного індексу в скінченно породженій групі є скінченно породженими. Якщо група Γ має скінченну систему твірних S і підгрупа $H < \Gamma$ має скінченний індекс n, то H породжується елементами $t_i^{-1} s t_j$ для $s \in S$, $i, j = 1, \dots, n$, де $t_1, \dots, t_n$ — представники (лівих) класів суміжності Γ за H.

Прямий добуток скінченної кількості скінченно породжених груп є скінченно породженим. Системою твірних прямого добутку є об'єднання систем твірних груп (занурених у прямий добуток). Аналогічно напівпрямий добуток скінченно породжених груп є скінченно породженим.

Означення 3.6. *Група* Γ *діє на множині* X, якщо визначено відображення $\Gamma \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g(x)$, і виконуються умови:

1) $(gh)(x) = g(h(x))$ для всіх $g, h \in \Gamma$ і $x \in X$;
2) $e(x) = x$ для всіх $x \in X$.

Позначається: (Γ, X) або $\Gamma \curvearrowright X$.

При дії (Γ, X) кожний елемент $g \in \Gamma$ діє підстановками на множині X. Тому можна сказати, що визначити дію групи Γ на множині X означає задати гомоморфізм з Γ в симетричну групу $Sym(X)$.

Означення 3.7. Дія групи Γ на множині X називається

- *транзитивною*, якщо для всіх $x, y \in X$ існує $g \in \Gamma$ такий, що $g(x) = y$;
- *регулярною*, якщо для всіх $x, y \in X$ існує точно один $g \in \Gamma$ такий, що $g(x) = y$;
- *точною*, якщо для кожного $g \in \Gamma$, $g \neq e$, існує $x \in X$ такий, що $g(x) \neq x$;
- *вільною*, якщо для кожного $g \in \Gamma$, $g \neq e$, виконується $g(x) \neq x$ для всіх $x \in X$.

Точність дії означає, що гомоморфізм $\Gamma \to Sym(X)$, індукований дією, має тривіальне ядро. В цьому випадку, різні елементи групи діють по різному на множині, і ми можемо відновити групу за її точною дією. Дія є регулярною тоді і лише тоді, коли вона є вільною і транзитивною.

Орбітою точки $x_0 \in X$ називається множина $Orb_\Gamma(x_0) = \{g(x_0) : g \in \Gamma\}$. Дія є транзитивою, коли вона має точно одну орбіту. Стабілізатором точки $x_0 \in X$ називається підгрупа $St_\Gamma(x_0) = \{g \in \Gamma : g(x_0) = x_0\}$ групи Γ. Відображення

$$gSt_\Gamma(x_0) \mapsto g(x_0)$$

є бієкцією між лівими класами суміжності групи Γ за підгрупою $St_\Gamma(x_0)$ та орбітою $Orb_\Gamma(x_0)$. Зокрема, $|Orb_\Gamma(x_0)| = [\Gamma : St_\Gamma(x_0)]$.

Приклади 3.2. 1) Кожна група Γ регулярно діє на собі множенням зліва:

$$\Gamma \times \Gamma \to \Gamma, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

2) Більш загально, для довільної підгрупи $H < \Gamma$ можна визначити дію групи Γ на множині лівих класів суміжності Γ/H за правилом

$$\Gamma \times \Gamma/H \to \Gamma/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH.$$

Ця дія є транзитивною, а стабілізатором тривіального класу $eH = H$ є сама підгрупа $St_\Gamma(H) = H$. Справедливе і зворотне твердження: кожна транзитивна дія групи Γ на множині X ізоморфна дії на класах суміжності за підгрупою $H = St_\Gamma(x_0)$, де $x_0 \in X$ — довільна точка. Ізоморфізм дій індукується бієкцією

$$\Gamma/St(x_0) \to X, \quad gSt(x_0) \mapsto g(x_0).$$

3) Симетрична група Sym_n діє транзитивно на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4) Загальна лінійна група $GL_n(\mathbb{Z})$ діє на векторах $\mathbb{Z}^n$ множенням матриць. Оскільки $\mathbb{Z}^n$ є групою, то можна визначити напівпрямий добуток $GL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$, який діє на $\mathbb{Z}^n$ афінними відображеннями:

$$(A, v)(x) = Ax + v, \quad \text{де} \;\; A \in GL_n(\mathbb{Z}), \;\; x, v \in \mathbb{Z}^n.$$

Зокрема, у розділі 3.5 важливу роль буде грати група $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$.

3.4.2 Графи Келі

Нехай Γ — скінченно породжена група і $S \subset \Gamma$ — її скінченна система твірних. Ми будемо завжди припускати, що система S є симетричною, тобто $s^{-1} \in S$ для всіх $s \in S$, і не містить одиниці групи.

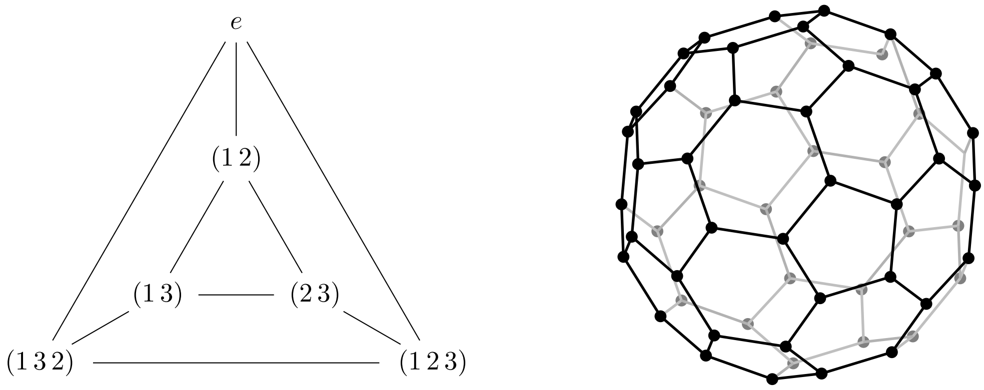


Рис. 12: Графи Келі симетричної групи Sym_3 (зліва) та знакозмінної групи Alt_5 (справа)

Означення 3.8. Графом Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ групи Γ відносно системи твірних S називається граф, множиною вершин якого є група Γ, а ребрами є пари $\{g, sg\}$ для всіх $g \in \Gamma$ та $s \in S$.

Припущення $e \notin S$ гарантує, що граф Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ не містить петель. А оскільки $s_1 g = s_2 g$ тільки при $s_1 = s_2$, то граф Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ є простим $|S|$-регулярним графом. Розглянемо кілька властивостей графів Келі.

Твердження 3.5. *1) Граф Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ є зв'язним.*

2) Група Γ діє автоморфізмами на своєму графі Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. Ця дія є транзитивною, вільною, регулярною.

3) Граф Келі $\mathcal{C}(G, S)$ є вершинно-транзитивним[3].

Доведення. 1) Оскільки S є симетричною системою твірних групи Γ, то кожний елемент $g \in \Gamma$ можна представити у вигляді $g = s_1 s_2 \dots s_n$ для $s_i \in S$. Тоді маємо шлях в графі Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$:

$$e - s_n - s_{n-1}s_n - \ \dots \ - s_1 s_2 \dots s_n = g,$$

який сполучає тривіальний елемент e з елементом g. Отже, граф $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ є зв'язним.

2) Визначимо дію групи Γ на вершинах графа $\mathcal{C}(\Gamma, S)$, тобто на Γ, за правилом: дія елемента $g \in \Gamma$ задається відображенням

$$\varphi_g : \Gamma \to \Gamma, \ \varphi_g(x) = xg^{-1}.$$

Ця дія є коректно визначеною, оскільки

$$\varphi_{gh}(x) = x(gh)^{-1} = xh^{-1}g^{-1} = \varphi_g(\varphi_h(x)).$$

Відображення φ_g є бієкцією, оскільки рівність $h_1 g^{-1} = h_2 g^{-1}$ можлива лише при $h_1 = h_2$. Також φ_g зберігає ребра графа Келі: ребро $\{h, sh\}$ переходить у ребро $\{hg^{-1}, shg^{-1}\}$. Отже, група Γ діє автоморфізмами. Транзитивність дії випливає з того, що $\varphi_g(e) = g$ для кожного $g \in \Gamma$. Дія є вільною, оскільки рівність $h = hg^{-1}$ можлива лише при $g = e$.

3) Випливає з 2). □

[3]Граф називається вершинно-транзитивним, якщо його група автоморфізмів діє транзитивно на вершинах.

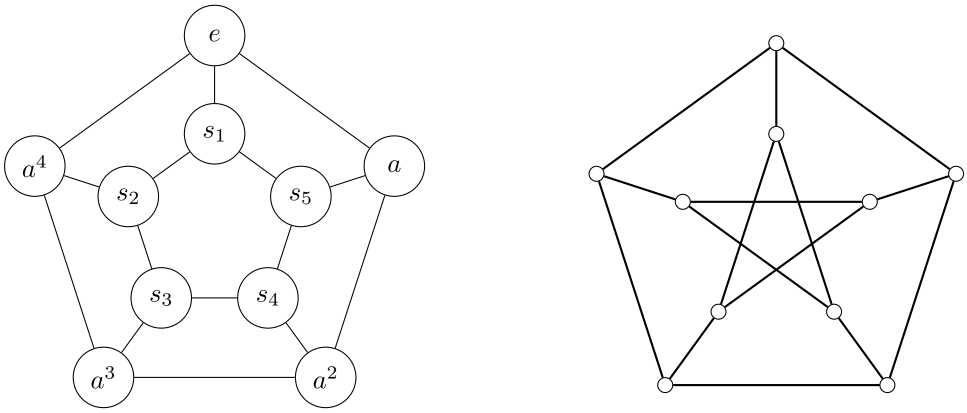


Рис. 13: Граф Келі діедральної групи D_5 (зліва) та граф Петерсена (справа)

Розглянемо кілька прикладів.

Приклади 3.3. Всі приклади скінченних регулярних графів, які ми розглядали в розділі 1.1, є графами Келі. Цикл C_n є графом Келі циклічної групи $\mathbb{Z}_n$ відносно системи твірних $S = \{\pm 1\}$. Граф гіперкуб Q_n є графом Келі групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ (n разів) відносно системи твірних

$$(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ (0, 0, \ldots, 1).$$

Повний граф K_n є графом Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ для довільної групи Γ з n елементів та системи твірних $S = \Gamma \setminus \{e\}$. Самостійно покажіть, що повний дводольний граф $K_{n,n}$ є графом Келі деякої групи.

На рис. 12 зображено графи Келі симетричної групи Sym_3 відносно системи твірних $S = \{(1\,2), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ та знакозмінної групи Alt_5 відносно системи твірних $S = \{(1\,2)(3\,4), (1\,2\,3\,4\,5)^{\pm 1}\}$.

Група симетрій правильного п'ятикутника, діедральна група D_5, містить п'ять поворотів та п'ять осьових симетрій:

$$D_5 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\},$$

де a — це поворот п'ятикутника на кут $\frac{2\pi}{5}$, а $s_1, \ldots, s_5$ — осьові симетрії. Множина $S = \{s_1, a^{\pm 1}\}$ є системою твірних D_5, відповідний граф Келі зображений на рис. 13.

Прикладом регулярного вершинно-транзитивного графа, який не є графом Келі жодної групи, є граф Петерсена (див. рис. 13).

Перевірити, чи є заданий регулярний граф графом Келі деякої групи, є складною задачею. В деяких випадках може допомогти наступний результат.

Теорема 3.6. *(Сабідуссі) Зв'язний граф $G = (V, E)$ є графом Келі деякої групи тоді і лише тоді, коли існує підгрупа $\Gamma < \operatorname{Aut} G$, яка діє регулярно на вершинах графа.*

Доведення. В один бік твердження випливає з властивостей графів Келі.

Нехай підгрупа $\Gamma < \operatorname{Aut} G$ діє регулярно на вершинах графа G. Зафіксуємо деяку вершину $v_0 \in V$ і визначимо множину

$$S = \{s \in \Gamma :\ s(v_0) \text{ з'єднана ребром з } v_0\}.$$

Якщо $s(v_0)$ і v_0 з'єднані ребром, то v_0 і $s^{-1}(v_0)$ теж з'єднані. Отже, $S = S^{-1}$.

Перевіримо, що S є системою твірних групи Γ. Візьмемо довільний $g \in \Gamma$. Оскільки граф G зв'язний, то існує шлях між вершинам v_0 і $g(v_0)$:

$$v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_n = g(v_0).$$

З транзитивності дії групи Γ випливає, що $v_i = g_i(v_0)$ для деякого $g_i \in \Gamma$, де $g_0 = e$ і $g_n = g$. Оскільки група діє автоморфізмами, то $g_{i-1}^{-1}(v_{i-1}) = v_0$ та $g_{i-1}^{-1}(v_i) = g_{i-1}^{-1}g_i(v_0)$ з'єднані ребром і $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i \in S$ за визначенням S. Тоді $g_i = s_1 s_2 \ldots s_i$ і $g = s_1 s_2 \ldots s_n$, що і потрібно було довести.

$$v_0 - s_1(v_0) - (s_2 s_1)(v_0) - \ldots - (s_n \ldots s_2 s_1)(v_0) = g(v_0).$$

Нехай $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ — граф Келі групи Γ відносно S. Визначимо відображення $\varphi : G \to \mathcal{C}(\Gamma, S)$, при якому вершина $v \in V$ відображається у єдиний елемент $g \in \Gamma$ такий, що $g(v) = v_0$. Існування та єдиність g, а також бієктивність φ, випливають з регулярності дії. Перевіримо, що φ зберігає ребра. Нехай вершини v і u з'єднані ребром в графі G. Нехай $\varphi(v) = g$ і $\varphi(u) = h$. Тоді $g(v) = v_0$ і $g(u) = gh^{-1}(v_0)$ теж з'єднані ребром. Отже, $s = gh^{-1} \in S$, і елементи h і $g = sh$ з'єднані ребром в графі Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. Навпаки, для ребра $\{g, sg\}$ в графі Келі, відповідні вершини $g^{-1}(v_0)$ і $(sg)^{-1}(v_0) = g^{-1}(s^{-1}(v_0))$ з'єднанні ребром в графі G, оскільки g^{-1} є автоморфізмом графа і v_0 та $s^{-1}(v_0)$ з'єднані ребром. Отже, φ — ізоморфізм графів. □

Графи Келі є зручним способом задавати послідовності зв'язних d-регулярних графів. Ми можемо взяти послідовність графів Келі $\mathcal{C}(\Gamma_n, S_n)$ для скінченних груп Γ_n із системами твірних S_n з d елементів. В теорії груп є багато природніх прикладів таких послідовностей. Наприклад, циклічні та діедральні групи, абелеві групи, симетричні або знакозмінні групи, різні матричні групи над скінченними полями або кільцями, сім'ї простих груп та багато іншого.

Можна будувати послідовності регулярних графів з однієї нескінченної групи. Нехай Γ — нескінченна група, породжена скінченною симетричною системою твірних S. Для нормальної підгрупи $H \lhd \Gamma$ факторгрупа Γ/H породжується образом множини S. Тому для довільної послідовності $H_n \lhd \Gamma$ нормальних підгруп скінченного індексу, послідовність графів Келі $\mathcal{C}(\Gamma/H_n, S)$ є послідовністю зв'язних d-регулярних графів. В розділі 3.5 ми побачимо, що якщо група Γ має «хороші» властивості, то графи $\mathcal{C}(\Gamma/H_n, S)$ утворюють послідовність експандерів для всіх підгруп скінченного індексу H_n та довільної системи твірних S.

3.4.3 Графи Шрайєра

Нехай Γ — група, породжена скінченною симетричною множиною S.

Означення 3.9. Нехай H — підгрупа групи Γ. Графом Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ групи Γ за підгрупою H називається граф, множиною вершин якого є множина лівих класів суміжності групи Γ за підгрупою H,

$$\Gamma/H = \{gH : g \in G\},$$

а ребрами з'єднані класи gH та sgH для всіх $s \in S$.

Граф Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ не обов'язково є простим, але завжди є зв'язним і $|S|$-регулярним з урахуванням кратних ребер та петель. Якщо H є нормальною підгрупою, то граф $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ збігається з графом Келі $\mathcal{C}(\Gamma/H, S)$. Зокрема, граф Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ є графом Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ для тривіальної підгрупи $H = \{e\}$. Тому графи Шрайєра є природнім узагальненням графів Келі.

Означення 3.10. Нехай група Γ діє на множині X. Графом Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ дії (Γ, X) називається граф, множиною вершин якого є множина X, а ребрами з'єднані точки x та $s(x)$ для всіх $x \in X$ та $s \in S$.

Граф Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ не завжди є простим, але він є $|S|$-регулярним з урахуванням можливих петель та кратних ребер. Граф $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ є зв'язним тоді і лише тоді, коли Γ діє транзитивно на X; в цьому випадку, $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ ізоморфний графу Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ для підгрупи $H = St_\Gamma(x_0)$, де $x_0 \in X$ — довільна точка. І навпаки, граф $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$ є графом Шрайєра дії групи Γ на своїх лівих класах суміжності Γ/H за підгрупою H множенням зліва. Якщо Γ діє регулярно на X, то граф $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ ізоморфний графу Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$.

Приклад 3.4. Група $SL_2(\mathbb{Z}_n)$ природньо діє на $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ множенням матриць на вектори і має симетричну систему твірних

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Графи Шрайєра $G_n = \mathcal{S}(\Gamma_n, \mathbb{Z}_n^2, S)$ є 4-регулярними графами, які є підграфами експандерів Маргуліса. Графи G_n теж утворюють послідовність експандерів, якщо з них видалити вершину $(0, 0)$.

Приклад 3.5. Група $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ діє на $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ афінними перетвореннями:

$$(A, v)(x) = Ax + v \bmod n,$$

де $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $v \in \mathbb{Z}^2$ і $x \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Група Γ має систему твірних S з 8 елементів, які відповідають афінним перетворенням

$$(a, b) \mapsto (a, b \pm 1),\ (a, b) \mapsto (a \pm 1, b),\ (a, b) \mapsto (a, b \pm a),\ (a, b) \mapsto (a \pm b, b).$$

Тоді графи Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, \mathbb{Z}_n^2, S)$ є в точності експандерами Маргуліса G_n з розділу 3.2. А граф G_∞ з доведення теореми 3.3 є графом Шрайєра дії групи Γ на $\mathbb{Z}^2$.

3.4.4 Спектри графів Келі та характери груп

Спектральні властивості графів Келі тісно пов'язані із зображеннями групи. В цьому підрозділі ми розглянемо одновимірні зображення, які називаються характерами групи.

Означення 3.11. Характером групи Γ називається довільний гомоморфізм $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$.

Кожна група має тривіальний характер $\chi(g) = 1$ для всіх $g \in \Gamma$. Оскільки елементами скінченного порядку в групі $\mathbb{C}^*$ є тільки корені з одиниці, то для скінченної групи кожен характер відображає елементи групи у корені з одиниці.

Твердження 3.7. *Нехай* Γ *— скінченна група.*

1) *Множина характерів групи* Γ *утворює групу відносно (поточкового) множення функцій.*
2) *Нехай* χ_1, χ_2 *— характери групи* Γ. *Тоді* $\chi_1\chi_2$ *та* χ^{-1}*Добуток характерів є характером групи. Зокрема, множина характерів групи утворює групу відносно множення функцій.*
3) *Два різні характери групи* Γ *є ортогональними. Зокрема, група з* n *елементів має не більше ніж* n *характерів.*

Доведення. 1) Нехай $\chi_1, \chi_2 : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ — характери групи Γ. Оскільки група $\mathbb{C}^*$ абелева, то добуток $\chi_1 \cdot \chi_2$ є гомоморфізмом:

$$(\chi_1\chi_2)(gh) = \chi_1(gh)\chi_2(gh) = \chi_1(g)\chi_1(h)\chi_2(g)\chi_2(h) = (\chi_1\chi_2)(g) \cdot (\chi_1\chi_2)(h).$$

Нейтральним елементом є тривіальний характер. Оберненим до характера χ є характер $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$, де остання рівність випливає з того, що $\chi(g)$ є коренем з одиниці.

2) Нехай $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ — нетривіальний характер групи. Візьмемо такий $h \in \Gamma$, що $\chi(h) \neq 1$. Тоді

$$\sum_{g\in\Gamma} \chi(g) = \sum_{g\in\Gamma} \chi(g) = \left(\sum_{g\in\Gamma} \chi(g)\right)\chi(h) \quad \Rightarrow \quad \sum_{g\in\Gamma} \chi(g) = 0.$$

Якщо χ_1, χ_2 — два різні характери групи, то $\chi_1\chi_2^{-1}$ є нетривіальним характером. Отже,

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \sum_{g\in\Gamma} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \sum_{g\in\Gamma} \chi_1(g)\chi_2(g)^{-1} = \sum_{g\in\Gamma} \chi_1\chi_2^{-1}(g) = 0.$$

Якщо група містить n елементів, то простір $L^2(\Gamma)$ має розмірність n і не може містити більше ніж n ненульових ортогональних елементів. ☐

Приклад 3.6. Кожний характер циклічної групи однозначно визначається образом твірного елемента. Тому циклічна група $\mathbb{Z}_n$ має точно n характерів $\chi_a(k) = \omega^{ak}$, $a = 0, 1, \ldots, n$, де $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первісний корінь n-го степеня з одиниці.

Група $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ має n^2 характерів $\chi_{a_1,a_2}(k_1, k_2) = \omega^{a_1k_1+a_2k_2}$, $a_1, a_2 = 0, 1, \ldots, n$.

Знакозмінна група Alt_n для $n \geq 5$ є простою групою. Тому вона має тільки тривіальний характер. Симетрична група Sym_n, окрім тривіального характеру, має ще характер $\chi(\pi) = \mathrm{sign}(\pi)$.

Теорема 3.8. *Нехай* Γ *— скінченна абелева група з* n *елементів. Тоді* Γ *має точно* n *характерів і вони утворюють ортогональний базис* $L^2(\Gamma)$.

Доведення. Теорема виконується для скінченних циклічних груп. А кожна абелева група розкладається у прямий добуток циклічних груп. Тому достатньо довести таке твердження: якщо скінченні абелеві групи Γ_1 і Γ_2 мають $n_1 = |\Gamma_1|$ і $n_2 = |\Gamma_2|$ характерів відповідно, то група $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ має n_1n_2 характерів. Нехай χ_1, χ_2 — характери груп Γ_1, Γ_2 відповідно. Тоді відображення

$$\gamma : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \mathbb{C}^*, \quad \gamma(g_1, g_2) = \gamma_1(g_1)\gamma_2(g_2),$$

є характером групи $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Оскільки $\gamma(g_1, e) = \gamma_1(g_1)$ і $\gamma(e, g_2) = \gamma_2(g_2)$, то різні пари характерів задають різні характери групи $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Отже, група $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ має принаймні $n_1 n_2$ характерів, а більше мати не може за твердженням 3.7. Твердження доведено. $\square$

Цікаво, що характери групи пов'язані з власними функціями графа Келі незалежно від вибору системи твірних.

Твердження 3.9. *Нехай Γ — група, породжена скінченною симетричною множиною S. Характер χ групи Γ є власною функцією графа Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ з власним числом $\sum_{s \in S} \chi(s)$.*

Доведення. Нехай A — оператор суміжності графа Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$. Тоді

$$(A\chi)(g) = \sum_{s \in S} \chi(sg) = \sum_{s \in S} \chi(s)\chi(g) = \left(\sum_{s \in S} \chi(s)\right)\chi(g), \ g \in \Gamma.$$

$\square$

Наслідок 3.10. *Нехай Γ — скінченна абелева група, породжена скінченною симетричною множиною S. Власними числами графа Келі $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ є $\sum_{s \in S} \chi(s)$, де χ пробігає характери групи.*

Вправа 3.7. Знайдіть власні числа графів C_n, Q_n, K_n за допомогою характерів відповідних груп та порівняйте з обчисленнями в прикладах 1.1–1.3.

Теорема 3.11. *Нехай Γ_n — послідовність скінченних абелевих груп, породжених симетричними системами твірних S_n з однаковою кількістю елементів. Тоді послідовність графів Келі $\mathcal{C}(\Gamma_n, S_n)$ не є послідовністю експандерів.*

Доведення. Нехай S_n містять d елементів. Тоді кожна група Γ_n є факторгрупою вільної абелевої групи $\mathbb{Z}^d$, і кількість елементів у довільній кулі $B_n(r)$ радіусу r у графі Келі $\mathcal{C}(\Gamma_n, S_n)$ не більша за кількість елементів у кулі радіусу r у гратці $\mathbb{Z}^d$ (зі стандартною системою твірних). Маємо

$$|B_n(r)| \le |B_{\mathbb{Z}^d}(r)| \le (2r)^d.$$

Отже, кулі в графах Келі абелевих груп зростають поліноміально, а не експоненційно, як має бути в експандерах за теоремою 2.3. $\square$

Аналогічно доводиться, що графи Келі нільпотентних груп з обмеженим степенем нільпотентності не можуть утворювати експандерів. Дещо складніше доводиться, що розв'язні групи з обмеженим степенем розв'язності не дають експандерів (див. [4, тв. 4.1]). Узагальнює ці результати наступна теорема.

Теорема 3.12 ([16, Prop. 3.3.7]). *Нехай Γ — аменабельна група, породжена скінченною симетричною множиною твірних S. Нехай $(H_n)_{n \ge 1}$ — послідовність підгруп скінченного індексу в групі Γ і $[\Gamma : H_n] \to \infty$ при $n \to \infty$. Тоді $(\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S))_{n \ge 1}$ не є послідовністю експандерів.*

Вправа 3.8. Нехай D_n — діедральна група і S_n — система твірних D_n, яка складається з трьох елементів: поворотів на кут $\pm\frac{2\pi}{n}$ та деякої осьової симетрії. Покажіть, що послідовність 3-регулярних графів Келі $(\mathcal{C}(D_n, S_n))_{n\geq 1}$ не є послідовністю експандерів.

Наступне твердження показує, що спектральний розрив кожного графа Шрайєра групи не менший за спектральний розрив її графа Келі.

Твердження 3.13. *Нехай скінченна група* Γ *діє на скінченній множині* X *і* S *— симетрична система твірних* Γ. *Тоді* $\lambda(\mathcal{S}(\Gamma, X, S)) \leq \lambda(\mathcal{C}(\Gamma, S))$.

Доведення. Нехай A і $\widetilde{A}$ — оператори суміжності графів $\mathcal{S}(\Gamma, X, S)$ і $\mathcal{C}(\Gamma, S)$ відповідно. Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in X$. Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ — власна функція оператора A з власним числом λ. Визначимо функцію $\widetilde{f} : \Gamma \to \mathbb{R}$ за правилом $\widetilde{f}(g) = f(g(x_0))$. Тоді:

$$(\widetilde{A}\widetilde{f})(g) = \sum_{s\in S} \widetilde{f}(sg) = \sum_{s\in S} f(sg(x_0)) = (Af)(g(x_0)) = \lambda f(g(x_0)) = \lambda \widetilde{f}(g).$$

Отже, λ є власним числом оператора $\widetilde{A}$. □

3.5 Групи з властивістю (T)

В цьому підрозділі ми коротко наведемо відомості про унітарні зображення груп, властивість (T) та алгебраїчні конструкції експандерів. Більше інформації та повні доведення можна знайти в книжках [16, 3, 26].

3.5.1 Унітарні зображення груп

Нехай $\mathcal{H}$ — гільбертовий простір над полем $\mathbb{C}$, в якому скалярний добуток векторів $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ будемо позначати $\langle \xi, \eta \rangle$. Оператор $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ називається унітарним, якщо $UU^* = U^*U = I$, де I — тотожній оператор; іншими словами, U є сюр'єктивним і зберігає скалярний добуток:

$$\langle U\xi, U\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad \text{для всіх } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Множина всіх унітарних операторів $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ на просторі $\mathcal{H}$ утворює групу відносно композиції, яка називається унітарною групою простору $\mathcal{H}$.

Нехай Γ — топологічна група. Нехай Γ — локально компактна топологічна група. Зокрема, Γ може бути скінченно породженою з дискретною топологією.

Означення 3.12. Унітарним зображенням топологічної групи Γ називається пара $(\pi, \mathcal{H})$, де $\mathcal{H}$ — комплексний гільбертовий простір і $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ — гомоморфізм такий, що для кожного $\xi \in \mathcal{H}$ відображення $\Gamma \to \mathcal{H}, g \mapsto \pi(g)\xi$ є неперервним.

Для дискретної групи Γ відображення в означенні завжди є неперервними. Тому зображенням дискретної групи Γ є довільний гомоморфізм $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Приклади 3.7. 1) Кожна група Γ має тривіальне зображення $1_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathbb{C})$, де $1_\Gamma(g) = I$ для всіх $g \in \Gamma$.

2) Нехай Γ — локально компактна група із зафіксованою мірою Хаара. Нехай $L^2(\Gamma)$ — гільбертовий простір квадратично інтегровних функцій $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ відносно міри Хаара. Для $g \in \Gamma$ оператор $\lambda_\Gamma(g) : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, де

$$(\lambda_\Gamma(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{для } f \in L^2(\Gamma), x \in \Gamma,$$

є унітарним, а відображення $\lambda_\Gamma : \Gamma \to U(L^2(\Gamma))$ є гомоморфізмом і задовольняє умову неперервності в означенні унітарного зображення. Пара $(\lambda_\Gamma, L^2(\Gamma))$ називається ліво-регулярним зображенням групи Γ.

3) Нехай Γ — дискретна група і H — підгрупа скінченного індексу. Група Γ діє на множині Γ/H лівих класів суміжності за підгрупою H. Ця дія індукує унітарне зображення $\pi : \Gamma \to L^2(\Gamma/H)$ над скінченно вимірним простором $L^2(\Gamma/H)$, де для $g \in \Gamma$ оператор $\pi(g) : L^2(\Gamma/H) \to L^2(\Gamma/H)$ задається правилом

$$(\pi(g)f)(xH) = f(g^{-1}xH) \quad \text{для } f \in L^2(\Gamma/H), x \in \Gamma.$$

Зауважимо, що для довільних $s \in \Gamma$ та $f \in L^2(\Gamma/H)$ виконується

$$\langle \pi(s)f, f\rangle = \sum_{xH \in \Gamma/H} (\pi(s)f)(xH)\overline{f(xH)} = \sum_{xH \in \Gamma/H} f(s^{-1}xH)\overline{f(xH)}.$$

Якщо група Γ породжується скінченною симетричною множиною S, то отримуємо зв'язок з оператором суміжності A графа Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H, S)$:

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= \sum_{xH \in \Gamma/H} (Af)(xH)\overline{g(xH)} = \sum_{xH \in \Gamma/H} \Big(\sum_{s \in S} f(sxH)\Big)\overline{g(xH)} = \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{xH \in \Gamma/H} f(sxH)\overline{g(xH)} = \sum_{s \in S} \langle \pi(s)f, g\rangle.\end{aligned}$$

Тому $A = \sum_{s \in S} \pi(s)$. Зокрема, розширюючі властивості графа Келі групи пов'язані із спектральними властивостями регулярного зображення.

3.5.2 Властивість (T)

Нехай Γ — локально компактна група.

Означення 3.13. Нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення групи Γ. Вектор $\xi \in \mathcal{H}$ називається інваріантним (відносно Γ або $\pi(\Gamma)$), якщо $\pi(g)\xi = \xi$ для всіх $g \in \Gamma$.

Означення 3.14. Кажуть, що зображення $(\pi, \mathcal{H})$ групи Γ допускає послідовність майже інваріантних векторів, якщо існує послідовність нормованих векторів $\xi_n \in \mathcal{H}$ така, що для кожного $g \in \Gamma$ виконується

$$\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Означення 3.15. Кажуть, що група Γ має властивість (T), якщо кожне унітарне зображення групи, яке допускає послідовність майже інваріантних векторів, має ненульовий інваріантний вектор.

Групи з властивістю (T) також називають групами Каждана.

Приклади 3.8. 1) Кожна скінченна група має властивість (T). Справді, нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення скінченної групи Γ, яке має послідовність майже інваріантних векторів. Тоді існує такий нормований вектор $\xi \in \mathcal{H}$, що

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| < \tfrac{1}{2} \ \text{ для всіх } g \in \Gamma.$$

Вектор $\eta = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{g\in\Gamma}\pi(g)\xi$ є інваріантним і ненульовим, оскільки $\|\eta\| \geq \|\xi\| - \|\xi - \eta\| \geq \frac{1}{2}$.

2) Група $\mathbb{Z}$ не має властивості (T). Для того, щоб це показати, розглянемо ліво-регулярне зображення $\lambda_{\mathbb{Z}}$ групи $\mathbb{Z}$. Зображення $\lambda_{\mathbb{Z}}$ має послідовність майже інваріантних векторів $\xi_n = \chi_{[-n,n]} \in L^2(\mathbb{Z})$ — нормована характеристична функція інтервалу $[-n, n]$. Але $\lambda_{\mathbb{Z}}$ не має ненульових інваріантних векторів: якщо $\lambda_{\mathbb{Z}}(g)f = f$ для $f \in L^2(\mathbb{Z})$, то

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} |f(x-g) - f(x)|^2 = 0$$

і f є константною; але єдина константна функція в $L^2(\mathbb{Z})$ — це нульова функція.

3) Неважко бачити, що факторгрупа групи з властивістю (T) за замкненою підгрупою має властивість (T). Тоді з попереднього прикладу випливає, що скінченно породжена абелева група має властивість (T) тільки тоді, коли вона є скінченною. Зокрема, для скінченно породженої групи Γ з властивістю (T) абеліанізація $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ є скінченною. Звідси випливає, що вільна група F_n рангу n не має властивості (T), оскільки $F_n/[F_n, F_n] \cong \mathbb{Z}^n$.

4) Нехай $H \leq \Gamma$ — замкнена підгрупа скінченного індексу. Тоді H має властивість (T) тоді і лише тоді, коли Γ має властивість (T). Звідси випливає, що група $SL_2(\mathbb{Z})$ не має властивості (T), оскільки містить вільну групу як підгрупу скінченного індексу. Нижче ми побачимо, що групи $SL_n(\mathbb{Z})$ та $SL_n(\mathbb{R})$ при $n \geq 3$ мають властивість (T).

Властивість (T) була введена Д. Кажданом для того, щоб показати, що гратки у деяких групах є скінченно породженими.

Означення 3.16. Граткою у локально компактній групі G називається дискретна підгрупа $\Gamma < G$ така, що факторпростір G/Γ має скінченну G-інваріантну міру.

Приклади 3.9. Група $\mathbb{Z}^n$ є граткою в групі $\mathbb{R}^n$. Крім того, кожна гратка в $\mathbb{R}^n$ ізоморфна $\mathbb{Z}^n$. Група $SL_n(\mathbb{Z})$ є граткою в групі $SL_n(\mathbb{R})$. Група $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ є граткою в групі $\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$.

Теорема 3.14 (Каждана). *Нехай Γ — гратка у локально компактній групі G. Тоді G має властивість (T) тоді і лише тоді, коли Γ має властивість (T).*

Теорема 3.15 (Каждана). *Нехай Γ — зліченна (дискретна) група з властивістю (T). Тоді Γ є скінченно породженою.*

Доведення. Нехай $\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots\}$. Розглянемо послідовність скінченно породжених підгруп $\Gamma_n = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$ в групі Γ. Нехай $\pi_n : \Gamma \to U(L^2(\Gamma/\Gamma_n))$ — унітарне зображення групи Γ, індуковане лівою дією групи Γ на класах суміжності Γ/Γ_n. Нехай $\pi = \oplus_{n\geq 1}\pi_n$ — пряма сума зображень, $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, де $\mathcal{H} = \oplus_{n\geq 1}L^2(\Gamma/\Gamma_n)$. Розглянемо послідовність нормованих векторів $\xi_n \in \mathcal{H}$, де ξ_n має одну ненульову координату на класі суміжності $\Gamma_n \in \Gamma/\Gamma_n$. Для кожного $g \in \Gamma$ маємо $g \in \Gamma_n$ і $\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0$ для всіх достатньо великих n. Отже, ξ_n утворює послідовність майже інваріантних векторів для зображення π. За властивістю (T) зображення π має деякий ненульовий інваріантний вектор $\eta = (\eta_n)_{n\geq 1}$. Якщо $\eta_n \neq 0$, то η_n є ненульовим Γ-інваріантним вектором в $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$. Тоді Γ/Γ_n є скінченним і Γ_n має скінченний індекс в групі Γ. Оскільки Γ_n є скінченно породженою, то Γ теж є скінченно породженою. $\square$

Наслідок 3.16. *Гратка у групі з властивістю (T) є скінченно породженою.*

Далі ми покажемо, що властивість (T) можна охарактеризувати в термінах існування пари Каждана. Ми обмежимося випадком скінченно породжених груп, оскільки саме цей випадок буде використовуватися для побудови експандерів.

Означення 3.17. Нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення групи Γ. Для $S \subset \Gamma$ та $\varepsilon > 0$ кажуть, що вектор $\xi \in \mathcal{H}$ є (S, ε)-інваріантним, якщо

$$\sup_{s\in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon\|\xi\|.$$

У випадку, коли S є системою твірних групи Γ, нерівність в означенні можна розширити на довільний елемент групи, спираючись на наступну лему.

Лема 3.4. *Нехай вектор $\xi \in \mathcal{H}$ є (S, ε)-інваріантним. Тоді*

1) ξ є $(S \cup S^{-1}, \varepsilon)$-інваріантним;

2) ξ є $(S^n, n\varepsilon)$-інваріантним, де $S^n = \{s_1 s_2 \dots s_n | s_i \in S\}$.

Доведення. 1) Оскільки $\pi(s)$ зберігає скалярний добуток, то маємо

$$\|\pi(s^{-1})\xi - \xi\| = \|\pi(s)(\pi(s^{-1})\xi - \xi)\| = \|\xi - \pi(s)\xi\| < \varepsilon\|\xi\|.$$

2) За нерівністю трикутника маємо

$$\begin{aligned}\|\pi(s_1 s_2 \dots s_n)\xi - \xi\| \leq \|\pi(s_1 s_2 \dots s_n)\xi - \pi(s_1 s_2 \dots s_{n-1})\xi\| + \\ + \|\pi(s_1 s_2 \dots s_{n-1})\xi - \pi(s_1 s_2 \dots s_{n-2})\xi\| + \ldots + \|\pi(s_1)\xi - \xi\| \leq \\ \leq \|\pi(s_n)\xi - \xi\| + \|\pi(s_{n-1})\xi - \xi\| + \ldots + \|\pi(s_1)\xi - \xi\| < n\varepsilon\|\xi\|.\end{aligned}$$

$\square$

Зокрема, якщо S породжує Γ, то існування послідовності майже інваріантних векторів еквівалентна умові, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує (S, ε)-інваріантний вектор.

Означення 3.18. Нехай Γ — дискретна група, породжена скінченною множиною S, і $\varepsilon > 0$. Пара (S, ε) називається парою Каждана для групи Γ, якщо кожне унітарне зображення групи Γ, яке має (S, ε)-інваріантний вектор, має ненульовий інваріантний вектор.

В цьому випадку, ε називається константою Каждана для Γ і S.

Теорема 3.17. *Нехай Γ — дискретна група, породжена скінченною множиною S. Тоді Γ має властивість (T) тоді і лише тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що (S, ε) є парою Каждана для Γ.*

Доведення. Нехай (S, ε) — пара Каждана для групи Γ. Кожне унітарне зображення групи Γ, яке допускає послідовність майже інваріантних векторів, має (S, ε)-інваріантний вектор, а тому і ненульовий інваріантний вектор. Отже, Γ має властивість (T).

Навпаки, нехай група Γ має властивість (T). Припустимо від супротивного, що для жодного $\varepsilon > 0$ пара (S, ε) не є парою Каждана. Тоді для кожного $\varepsilon_n = 1/n$ існує унітарне зображення $(\pi_n, \mathcal{H}_n)$ групи Γ, яке не має ненульових інваріантних векторів і має (S, ε_n)-інваріантний вектор $\xi_n \in \mathcal{H}_n$. Розглянемо унітарне зображення $\pi = \oplus_{n \geq 1} \pi_n$. Оскільки S породжує Γ, то з леми 3.4 випливає, що ξ_n утворюють послідовність майже інваріантних векторів для зображення π. Тоді з властивості (T) випливає, що π має ненульовий інваріантний вектор $\eta = (\eta_n)_{n \geq 1} \in \oplus_{n \geq 1} \mathcal{H}_n$. Якщо $\eta_n \neq 0$, то η_n є ненульовим інваріантним вектором для зображення π_n. Ми отримали суперечність з вибором зображення π_n. $\square$

3.5.3 Група $SL_3(\mathbb{R})$ має властивість (T)

Довести, що деяка нескінченна група має властивість (T), є складною задачею. В цьому підрозділі ми покажемо, що група $SL_3(\mathbb{R})$ має властивість (T). Для цього, ми будемо без доведення використовувати наступну теорему, яка стверджує, що група $\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$ має властивість (T) відносно своєї підгрупи $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.18. *Кожне унітарне зображення групи $\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$, яке має послідовність майже інваріантних векторів, має ненульовий вектор, інваріантний відносно $\mathbb{R}^2$.*

Доведення. Див. твердження 3.1.11 в [16]. $\square$

Зауважимо, що група $\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$ не має властивості (T), оскільки має факторгрупу $SL_2(\mathbb{R})$ без властивості (T).

Теорема 3.19. *Групи $SL_n(\mathbb{R})$ та $SL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 3$ мають властивість (T).*

Доведення. Ми розглянемо тільки випадок $n = 3$. Доведення спирається на декілька лем.

Лема 3.5 (Mautner). *Нехай Γ — топологічна група і $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення Γ. Нехай $x \in \Gamma$ і $\xi \in \mathcal{H}$. Припустимо, що існує така послідовність $(y_n)_{n \geq 1}$ в Γ, що $\lim_{n \to \infty} y_n x y_n^{-1} = e$ і $\pi(y_n)\xi = \xi$ для всіх n. Тоді $\pi(x)\xi = \xi$.*

Доведення. Оскільки $\pi(y_n)$ стабілізує ξ, то маємо

$$\|\pi(x)\xi - \xi\| = \|\pi(x)\pi(y_n^{-1})\xi - \pi(y_n^{-1})\xi\| = \\ = \|\pi(y_n)\pi(x)\pi(y_n^{-1})\xi - \xi\| = \|\pi(y_n x y_n^{-1})\xi - \xi\|.$$

Оскільки $\lim_{n \to \infty} y_n x y_n^{-1} = e$, а відображення $g \mapsto \pi(g)\xi$ є неперервним, то $\pi(x)\xi = \xi$. $\square$

Розглянемо такі підгрупи групи $SL_2(\mathbb{R})$:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Лема 3.6. $SL_2(\mathbb{R}) = \langle N, N^-, A \rangle$.

Доведення. Матрицю з $SL_2(\mathbb{R})$ можна представити у вигляді добутку:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/d & 1 \end{pmatrix} \text{ при } d \neq 0, \text{ і}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix},$$

де в останній матриці $-b \neq 0$ і її можна розкласти за першою рівністю. □

Лема 3.7. *Нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення групи $SL_2(\mathbb{R})$. Якщо вектор $\xi \in \mathcal{H}$ є інваріантним відносно $\pi(N)$, то він інваріантний відносно $\pi(SL_2(\mathbb{R}))$.*

Доведення. Спочатку покажемо, що ξ є інваріантним відносно $\pi(A)$. Розглянемо неперервну функцію

$$\phi : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \ \phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle.$$

Оскільки ξ є інваріантним відносно $\pi(N)$, то ϕ є сталою на множинах NgN для всіх $g \in SL_2(\mathbb{R})$. Покажемо, що $\phi(a)$ приймає однакове значення для всіх $a \in A$. Визначимо послідовність

$$g_n = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 1/n & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Для довільної матриці $a = diag(\lambda, 1/\lambda) \in A$ маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_n \begin{pmatrix} 1 & n/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1/n & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Оскільки ϕ стала на множинах NgN, то застосувавши ϕ до попередньої рівності отримуємо

$$\phi(g_n) = \phi(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1/n & 1/\lambda \end{pmatrix}) \to \phi(a), \ n \to \infty.$$

Звідси випливає, що значення $\phi(a)$ не залежить від $a \in A$, і ми отримуємо

$$\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \phi(e) = \|\xi\| \ \text{ для всіх } a \in A.$$

А оскільки $\pi(a)$ є унітарним, то за випадком рівності у нерівності Коші-Шварца отримуємо $\pi(a)\xi = \xi$ для всіх $a \in A$.

Застосувавши лему 3.5 для матриць з рівності

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/n^2 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо, що ξ є інваріантним відносно $\pi(N^-)$.

Залишається застосувати лему 3.6. $\square$

Лема 3.8. *Нехай*

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} < SL_3(\mathbb{R}).$$

Нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення групи $SL_3(\mathbb{R})$. Якщо вектор $\xi \in \mathcal{H}$ є інваріантним відносно $\pi(J)$, то він інваріантний відносно $\pi(SL_3(\mathbb{R}))$.

Доведення. Розглянемо два природних занурення групи $SL_2(\mathbb{R})$ в групу $SL_3(\mathbb{R})$:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ab - cd = 1 \right\} < SL_3(\mathbb{R}),$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ab - cd = 1 \right\} < SL_3(\mathbb{R}).$$

Підгрупа $N < SL_2(\mathbb{R})$ при цих зануреннях переходить у підгрупи

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} < E_1, \quad N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} < E_2.$$

Оскільки $N_1, N_2 < J$, то вектор ξ є інваріантним відносно $\pi(N_1)$ і $\pi(N_2)$. Тому за лемою 3.7 вектор ξ є інваріантним відносно $\pi(E_1)$ і $\pi(E_2)$. Підгрупи E_1 і E_2 породжують щільну підгрупу групи $SL_3(\mathbb{R})$. Оскільки π є неперервним, то ξ є інваріантним відносно $\pi(SL_3(\mathbb{R}))$. $\square$

Ми готові довести, що $SL_3(\mathbb{R})$ має властивість (T). Нехай $(\pi, \mathcal{H})$ — унітарне зображення групи $SL_3(\mathbb{R})$, яке має послідовність майже інваріантних векторів. Група $SL_3(\mathbb{R})$ має підгрупу

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & s \\ c & d & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}) \right\} \cong J \rtimes SL_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R}).$$

Зображення $\pi|_H$ (звуження π на H) теж має послідовність майже інваріантних векторів. За теоремою 3.18 існує ненульовий вектор $\xi \in \mathcal{H}$, інваріантний відносно $\pi(J)$. Тоді за лемою 3.8 вектор ξ є інваріантним відносно $\pi(SL_3(\mathbb{R}))$. Отже, група $SL_3(\mathbb{R})$ має властивість (T). $\square$

3.5.4 Алгебраїчні конструкції експандерів

Нехай група Γ має властивість (T) і (S, ε) — пара Каждана для Γ. Властивість пари Каждана можна переформулювати так: для довільного унітарного зображення $(\pi, \mathcal{H})$, яке не має ненульових інваріантних векторів, виконується нерівність

$$\max_{s\in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \varepsilon\|\xi\| \quad \text{для всіх } \xi \in \mathcal{H}. \tag{9}$$

Зокрема, ця нерівність справедлива для зображень, які асоціюються із дією групи на класах суміжності за підгрупою. Існування такої константи $\varepsilon > 0$, незалежної від зображення, дозволяє отримати оцінку на друге власне число одразу для всіх графів Шрайєра цих дій.

Теорема 3.20. *Нехай Γ — скінченно породжена група з властивістю (T), S — скінченна симетрична система твірних групи Γ, $(H_n)_{n\geq 1}$ — послідовність підгруп скінченного індексу в групі Γ і $[\Gamma : H_n] \to \infty$ при $n \to \infty$. Тоді послідовність графів Шрайєра $(\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S))_{n\geq 1}$ є послідовністю експандерів*[4].

Зокрема, якщо підгрупи H_n є нормальними, то послідовність графів Келі $\mathcal{C}(\Gamma/H_n, S)$ утворює послідовність експандерів.

Доведення. За теоремою 3.17 існує таке $\varepsilon > 0$, що (S, ε) є парою Каждана для групи Γ. Ми покажемо, що

$$\beta_2(\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)) \geq \varepsilon^2/2 > 0 \;\text{ для всіх } n \geq 1,$$

де β_2 — це друге власне число оператора Лапласа Δ.

Зафіксуємо довільне $n \geq 1$. Розглянемо унітарне зображення $(\pi, \mathcal{H})$ групи Γ, індуковане дією групи на лівих класах суміжності за підгрупою H_n (див. приклад 3.7). Оскільки дія $(\Gamma, \Gamma/H_n)$ є транзитивною, то тільки константні функції в $\mathcal{H} = L^2(\Gamma/H_n)$ є інваріантними відносно Γ. Тоді підпростір

$$\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{H} : f \perp 1\} = \left\{ f : V \to \mathbb{C} : \sum_{v\in V} f(v) = 0 \right\}$$

є інваріантним, і зображення $\pi|_{\mathcal{H}_0} : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_0)$ не має ненульових інваріантних векторів. За властивістю (9) маємо

$$\max_{s\in S} \|\pi(s)f - f\|^2 \geq \varepsilon^2\|f\|^2 \quad \text{для всіх } f \in \mathcal{H}_0.$$

Визначимо орієнтацію на ребрах графа $\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)$ за правилом: для ребра $e = \{gH_n, sgH_n\}$ позначимо $e^- = gH_n$ та $e^+ = sgH_n$. Застосуємо наслідок 1.12 для оператора Лапласа Δ:

$$\begin{aligned}\langle \Delta f, f\rangle &= \sum_{e\in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{s\in S}\sum_{v\in V} |f(s^{-1}v) - f(v)|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s\in S} \|\pi(s)f - f\|^2 \geq \frac{1}{2}\max_{s\in S} \|\pi(s)f - f\|^2 \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2\|f\|^2.\end{aligned}$$

Отже, за теоремою Рейлі-Рітца отримуємо

$$\beta_2(\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)) = \min_{\substack{f\in\mathcal{H}_0 \\ f\neq 0}} \frac{\langle \Delta f, f\rangle}{\|f\|^2} \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

□

[4] Графи $\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)$ можуть не бути простими.

Теорема 3.20 дозволяє отримати багато послідовностей експандерів.

Приклад 3.10. Група $SL_3(\mathbb{Z})$ має властивість (T) і породжується матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $S = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}\}$. Відображення

$$\varphi : SL_3(\mathbb{Z}) \to SL_3(\mathbb{Z}_n),\ X \mapsto X \bmod n,$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом з ядром

$$H_n = \{X \in SL_3(\mathbb{Z}) : X \equiv E \bmod n\}.$$

Підгрупи H_n мають скінченний індекс і $SL_3(\mathbb{Z})/H_n \cong SL_3(\mathbb{Z}_n)$. Отже, послідовність 4-регулярних графів Келі $\mathcal{C}(SL_3(\mathbb{Z}_n), S)$ для $n \geq 1$ утворює послідовність експандерів.

Приклад 3.11. Графи Маргуліса G_n є графами Шрайєра афінної дії групи $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ на множинах $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ (див. приклад 3.5) відносно системи твірних

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Хоча група Γ не має властивості (T), вона має відносну властивість (T), сформульовану в теоремі 3.18. Цього достатньо, щоб показати, що $(G_n)_{n \geq 1}$ є послідовністю експандерів. Справді, розглянемо унітарне зображення π над простором $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$, індуковане дією групи. Оскільки $\mathbb{Z}^2$ діє транзитивно на $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, то єдиними $\mathbb{Z}^2$-інваріантними функція в просторі $\mathcal{H}$ є сталі функції. Отже, за відносною властивістю (T) зображення $\pi|_{\mathcal{H}_0}$ не має ненульових інваріантних векторів, і можна застосувати ті самі аргументи, що і в доведенні теореми 3.20.

Зауваження 3.1. Існують групи, які не мають властивості (T), але родина їх графів Шрайєра за всіма підгрупами скінченного індексу утворює родину експандерів[5]. Прикладом такої групи є $SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$.

Група $SL_2(\mathbb{Z})$ не має властивості (T), і можна показати, що графи Шрайєра $\mathcal{S}(SL_2(\mathbb{Z}), H, S)$, де H пробігає всі підгрупи скінченного індексу в $SL_2(\mathbb{Z})$, не є родиною експандерів. Тим не менше, ми отримаємо послідовність експандерів, якщо обмежитися родиною конгруенц-підгруп. Нагадаємо, що підгрупа групи $SL_2(\mathbb{Z})$ називається конгруенц-підгрупою, якщо вона містить ядро проекції $SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}_n)$ для деякого $n \geq 1$. Зокрема, графи Келі $\mathcal{C}(SL_2(\mathbb{Z}_n), S)$ є експандерами. Для того, щоб це показати, ми використаємо відому $\frac{3}{16}$-теорему Селберга про конгруенц-підгрупи.

Нехай Γ — скінченно породжена група із скінченною системою твірних S і $(H_n)_{n \geq 1}$ — родина підгруп скінченного індексу в Γ з $[\Gamma : H_n] \to \infty$ при $n \to \infty$. Припустимо, що Γ є фундаментальною групою деякого компактного

[5]Ця властивість має назву властивість (τ).

Ріманового многовиду M, і нехай M_n — це скінченне накриття M, що відповідає підгрупі H_n. Друге найменше власне число оператора Лапласа на графі Шрайєра $\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)$ можна оцінити через друге найменше (перше ненульове) власне число $\beta_2(M_n)$ оператора Лапласа $\Delta = -\mathrm{div}(\mathrm{grad})$ на просторі $L^2(M_n)$. Це дозволяє довести, що графи $\mathcal{S}(\Gamma, H_n, S)$ для $n \geq 1$ утворюють родину експандерів тоді і лише тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що $\beta_2(M_n) \geq \varepsilon$ для всіх $n \geq 1$ (див. [16, Теорема 4.3.2]). Застосуємо це твердження до групи $SL_2(\mathbb{Z})$.

Група $SL_2(\mathbb{Z})$ діє на верхній півплощині $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ дробово-лінійними перетвореннями:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad A \in SL_2(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{H},$$

які зберігають гіперболічну метрику на просторі $\mathbb{H}$. Тоді факторпростір $\mathbb{H}/\Gamma$ є компактним Рімановим многовидом для довільної підгрупи $\Gamma < SL_2(\mathbb{Z})$ скінченного індексу. Теорема Селберга оцінює число $\beta_2(\mathbb{H}/\Gamma)$ для конгруенц-підгруп.

Теорема 3.21 ($\frac{3}{16}$-теорема Селберга)**.** *Нехай* $\Gamma < SL_2(\mathbb{Z})$ *— конгруенц-підгрупа. Тоді* $\beta_2(\mathbb{H}/\Gamma) \geq \frac{3}{16}$.

Отже, графи Келі $\mathcal{C}(SL_2(\mathbb{Z}_n), S)$ для $n \geq 1$ утворюють послідовність експандерів. Це дозволяє побудувати ще простішу послідовність експандерів.

Приклад 3.12. Нехай p — просте число. Побудуємо послідовність графів G_p на множині вершин $\mathbb{Z}_p$, в якому вершина x з'єднана з вершинами $x+1$, $x-1$ та x^{-1} (для $x = 0$ визначаємо $x^{-1} = 0$). Тоді $(G_p)_{p \text{ – просте}}$ є послідовністю 3-регулярних експандерів. Графи G_p для $p = 97, 997$ зображено на рис. 14.

Справді, розглянемо дію групи $SL_2(\mathbb{Z})$ на проективній прямій $P^1(\mathbb{Z}_p)$ дробово-лінійними перетвореннями. Множина $P^1(\mathbb{Z}_p)$ містить $p+1$ точку, які можна ототожнити з $\mathbb{Z}_p$ разом з «точкою у нескінченності» ∞. Оскільки графи Келі $\mathcal{C}(SL_2(\mathbb{Z}_p), S)$ є експандерами, то графи Шрайєра $\mathcal{S}(SL_2(\mathbb{Z}_p), P^1(\mathbb{Z}_p), S)$ теж є експандерами за твердженням 3.13. Виберемо систему твірних

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тоді G_p є в точності графом Шрайєра $\mathcal{S}(SL_2(\mathbb{Z}_p), P^1(\mathbb{Z}_p), S)$, якщо з нього видалити точку ∞ та додати петлю у точці 0.

Для скінченно породженої групи Γ з властивістю (T) графи Келі $\mathcal{C}(\Gamma/H_n, S)$ факторгруп Γ/H_n утворюють послідовність експандерів незалежно від вибору скінченної системи твірних S групи Γ. Виникає природнє запитання, чи є властивість бути експандером груповою властивістю: якщо для послідовності скінченних груп Γ_n їхні графи Келі $\mathcal{C}(\Gamma_n, S_n)$ утворюють послідовність експандерів для деяких систем твірних, то чи буде це зберігатися при виборі інших систем твірних (з однаковою кількістю елементів). Перший контрприклад був побудований, використовуючи зв'язок між зиг-заг добутком графів та напівпрямим добутком груп. Пізніше було доведено, що вже послідовність симетричних груп Sym_n є контрприкладом:

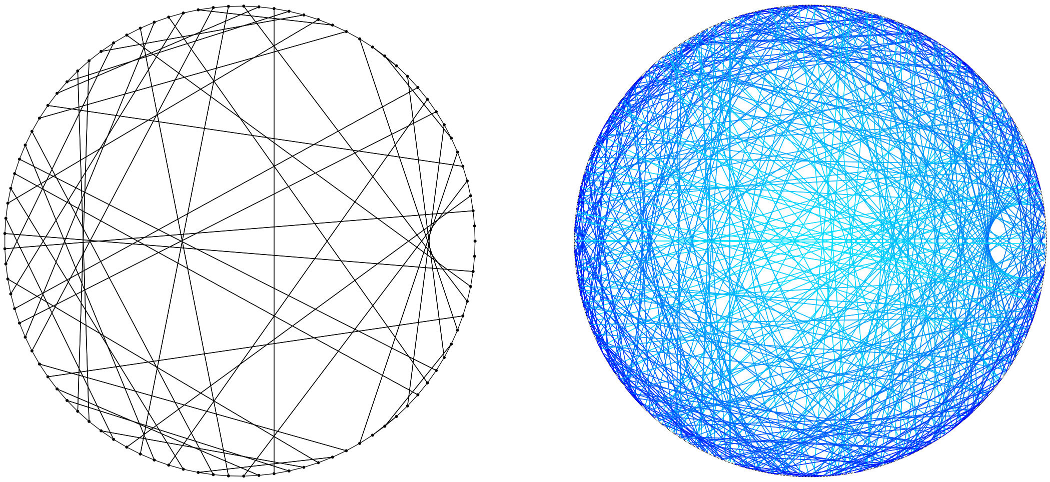


Рис. 14: Графи G_{97} та G_{997} з прикладу 3.12

Теорема 3.22 (Кассабов, 2005). *Графи Келі* $\mathcal{C}(Sym_n, S_n)$ *для* $S_n = \{(1\,2), (1\,2\dots n)^{\pm 1}\}$ *не є послідовністю експандерів. Але існують системи твірних груп* Sym_n*, для яких відповідні графи Келі утворюють послідовність експандерів.*

Вправа 3.9. Визначимо граф G_n на множині вершин $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, в якому вершина (a, b) з'єднується ребром з вершинами

$$(a, a \pm b),\ (-b, a),\ (b, -a),\ (a \pm 1, b),\ (a, b \pm 1).$$

Покажіть, що $(G_n)_{n \geq 1}$ є послідовністю експандерів.

Вправа 3.10. Нехай p — просте число. Визначимо граф G_p на множині вершин $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{(0, 0)\}$, в якому сусідами вершини (a, b) є

$$(a, a + b),\ (a, a - b),\ (-b, a).$$

Покажіть, що $(G_p)_{p\text{ – просте}}$ є послідовністю експандерів.

Вправа 3.11. Нехай p — просте число. Визначимо граф G_p на множині вершин $\mathbb{Z}_p^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, в якому вершина (a, b, c) з'єднується ребром з вершинами

$$(a, a + b, c),\ (a, a - b, c),\ (b, c, -a),\ (-c, a, b).$$

Покажіть, що $(G_p)_{p\text{ – просте}}$ є послідовністю експандерів.

3.6 Графи Рамануджана

За теоремою Alon-Boppana число $2\sqrt{d-1}$ — це асимптотично найменше за модулем друге власне число, яке можна очікувати для нескінченної послідовності d-регулярних графів. Це приводить до наступного означення.

Означення 3.19. Скінченний зв'язний d-регулярний граф називається графом Рамануджана, якщо для кожного власного числа графа λ виконується $|\lambda| = d$ або $|\lambda| \leq 2\sqrt{d-1}$.

Послідовність d-регулярних графів Рамануджана є оптимальною послідовністю експандерів з точки зору спектрального розриву.

З одного боку, навести приклади графів Рамануджана нескладно – граф Петерсена та повні графи є графами Рамануджана. Але побудувати або навіть просто довести існування нескінченної родини d-регулярних графів Рамануджана є дуже складною задачею. Першу конструкцію винайшли незалежно Маргуліс та Любоцький-Філіпс-Сарнак в 1988 році, спираючись на глибокі результати з теорії чисел та теорії груп. Для кожного непарного простого числа p вони побудували нескінченну родину $(p+1)$-регулярних графів Рамануджана як графів Келі груп $PGL_2(\mathbb{Z}_q)$ та $PSL_2(\mathbb{Z}_q)$ для простих чисел q. Далі ми опишемо цю конструкцію, але доведення є складних і виходить за рамки цього посібника. Зокрема, доведення спирається на доведений випадок гіпотези Рамануджана, на честь якого ці графи отримали свою назву.

Нехай p, q — різні прості числа і $p, q \equiv 1 \pmod 4$. Існує ціле число i, для якого $i^2 \equiv -1 \pmod q$. За теоремою Якобі (про розклад числа у суму чотирьох квадратів) діофантове рівняння

$$p = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

має точно $p + 1$ розв'язків з непарним $a_0 > 0$ і парними a_1, a_2, a_3. Для кожного розв'язку побудуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{Z}_q),$$

і нехай $S_{p,q}$ — це множина цих $p + 1$ матриць. Граф Келі $\mathcal{C}(PGL_2(\mathbb{Z}_q), S_{p,q})$ буде задовольняти нерівність на друге власне число з означення графів Рамануджана. Але цей граф не завжди є зв'язним, тобто $S_{p,q}$ може не бути системою твірних групи.

Якщо p є квадратичним лишком за модулем q, то $S_{p,q}$ породжує $PSL_2(\mathbb{Z}_q)$, і ми покладемо $X_{p,q} = \mathcal{C}(PSL_2(\mathbb{Z}_q), S_{p,q})$. В цьому випадку, граф $X_{p,q}$ має $\frac{q(q^2-1)}{2}$ вершин і не є дводольним.

Якщо p не є квадратичним лишком за модулем q, то $S_{p,q}$ породжує $PGL_2(\mathbb{Z}_q)$, і ми покладемо $X_{p,q} = \mathcal{C}(PGL_2(\mathbb{Z}_q), S_{p,q})$. В цьому випадку, граф $X_{p,q}$ має $q(q^2 - 1)$ вершин і є дводольним.

Теорема 3.23 ([17, 19]). *Графи $X_{p,q}$ є $(p + 1)$-регулярними графами Рамануджана.*

Довгий час залишалося відкритим питання, чи для кожного степеня $d \geq 3$ існує нескінченна родина d-регулярних графів Рамануджана. В 2015 році Marcus-Spielman-Srivastava довели, що у кожного графа Рамануджана є двократне накриття, яке теж є графом Рамануджана. Звідси випливає наступний результат.

Теорема 3.24 ([18]). *Для кожного $d \geq 3$ існує нескінченна родина d-регулярних (дводольних) графів Рамануджана.*

4 Застосування експандерів

В цьому розділі ми опишемо деякі застосування експандерів у теорії комп'ютерних наук.

4.1 Сортувальні мережі

Сортувальні мережі є моделлю для паралельного сортування і апаратних сортувальних схем. Сортувальна мережа складається з простих вузлів, які називаються компараторами, з'єднаних дротами. Кожен компаратор має дві вхідні лінії та дві вихідні, і виконує сортування двох елементів. Отримуючи на вхідні лінії два числа, компаратор порівнює їх, і виводить більше з них на нижню вихідну лінію, а менше — на верхню лінію (див. рис 15).

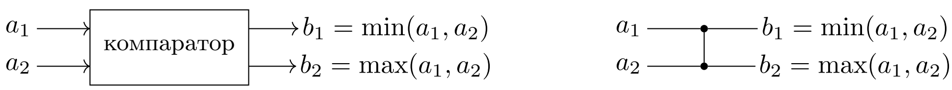


Рис. 15: Схематичне зображення компараторів

Мережа для сортування n елементів має n вхідних та n вихідних ліній. Дроти з'єднують вхідні лінії мережі з компараторами, з'єднують компаратори між собою, а також з'єднують виходи компараторів з виходами мережі. Для коректної роботи вимагається, щоб дроти не зациклювалися. Коли на вхідні лінії мережі подаються елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вони проходять через мережу, і на вихідних лініях отримуються елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n$, які є перестановкою вхідних чисел. Див. приклад такої мережі на рис. 16. Більш детальний опис мереж компараторів можна знайти в [9, Розділ 27].

Означення 4.1. Мережа описаного вигляду називається сортувальною мережею, якщо для довільних вхідних даних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вихідні дані мережі є впорядкованими:

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n.$$

Ефективність сортувальної мережі можна вимірювати двома способами: 1) через розмір мережі, який дорівнює загальній кількості компараторів у мережі; 2) через глибину мережі, яка дорівнює максимальній кількості компараторів, яку вхідний елемент проходить мережею від вхідної лінії до вихідної. Розмір мережі оцінює час сортування, якщо роботу компараторів вважати послідовною. Але суть сортувальних мереж у тому, щоб сортування відбувалося паралельно. Для цього компаратори ставлять у паралельну роботу, коли це можливо, а саме, коли вхідні значення для компараторів є доступними одночасно. Компаратори мережі можна розділити на рівні, де на кожному рівні компаратори працюють паралельно за сталий час і передають вихідні значення наступному рівню компараторів. Глибина мережі дорівнює кількості рівнів у ній і вимірює час паралельного сортування.

Сортувальні мережі можна будувати, спираючись на алгоритми сортування, в яких використовується тільки операція порівняння двох елементів. На

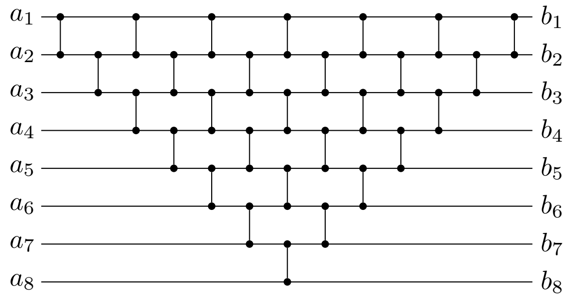


Рис. 16: Сортувальна мережа для сортування восьми елементів, основана на алгоритмі сортування бульбашкою. Мережа містить 28 компараторів (розмір мережі) і 13 рівнів (глибина мережі).

рис. 16 зображено сортувальну мережу, яка відповідає алгоритмам сортування бульбашкою або вставкою. Ця мережа має розмір $n(n-1)/2$ і глибину $2n-3$. Ефективні сортувальні мережі запропонував Бетчер — це бітонічне сортування та парно-непарне злиття Бетчера, які мають розмір $\Theta(n \log^2 n)$ та глибину $\Theta(\log^2 n)$[6]. Проте мережі Бетчера мають у $\log n$ раз більшу складність за теоретичну нижню оцінку.

Твердження 4.1. *Довільна сортувальна мережа для n елементів має розмір щонайменше $\Omega(n \log n)$ та глибину щонайменше $\Omega(\log n)$.*

Доведення. Всього існує $n!$ перестановок n різних елементів. Сортувальна мережа повинна правильно впорядковувати кожне з них. Одне порівняння дає тільки два можливих результати. Тому мережа з m компараторами може правильно впорядкувати щонайбільше 2^m наборів. Отримуємо необхідну умову $2^m \geq n!$, з якої випливає $m \geq \log_2(n!)$. Оскільки $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$, то кожна сортувальна мережа має містити принаймні $\Omega(n \log n)$ компараторів. Кожен рівень сортувальної мережі може містити щонайбільше $n/2$ компараторів. Отже, має бути щонайменше $\Omega(\log n)$ рівнів компараторів. □

Перші сортувальні мережі з теоретично мінімальною глибиною $O(\log n)$ були побудовані М. Айтайєм, Дж. Комлошем та Е. Семереді, спираючись на існування графів експандерів.

Теорема 4.2 (Айтай-Комлош-Семереді, 1983)**.** *Існують сортувальні мережі з розміром $O(n \log n)$ та глибиною $O(\log n)$.*

Константа, яка захована у O-велике, є дуже великою. Тому в реальних застосуваннях продовжують спиратися на мережі Бетчера. Побудова ефективних на практиці сортувальних мереж з глибиною $O(\log n)$ залишається відкритою проблемою.

Ми опишемо конструкцію AKS-мережі слідуючи роботам [2, 25, 1], але розглянемо доведення тільки тієї частини конструкції, яка спирається на експандери. Повне доведення можна знайти в роботах [24, 25, 1].

[6]Ми використовуємо стандартні позначення O, Ω, Θ для опису асимптотичної складності, прийняті в комп'ютерних науках.

4.1.1 ε-розділювачі

AKS мережа базується на ідеї сортування за принципом розділяй та володарюй: розділити вхідні елементи на дві частини (менші елементи в одній частині, а більші — в другій), і рекурсивно застосувати алгоритм до кожної частини.

Досконалим розділювачем[7] називається мережа компараторів, в якій n вихідних ліній розділено на дві рівні частини A і B таким чином, що для довільних n вхідних елементів, мережа поміщає $n/2$ менших елементів у частину A і $n/2$ більших елементів у частину B. Застосовуючи досконалий розділювач ітеративно до кожної частини, ми отримаємо сортувальну мережу, яка має структуру двійкового дерева з $\log_2 n$ рівнів розділювачів. Проте досконалий розділювач не може мати сталу глибину і вимагає щонайменше $\Omega(\log n)$ рівнів компараторів. Це дозволяє отримати сортувальну мережу глибини $O(\log^2 n)$. Ключовим інгредієнтом AKS мережі є існування ε-розділювачів зі сталою глибиною, які розділяють елементи з ε-похибкою.

Означення 4.2. Нехай $\varepsilon \geq 0$. Мережа компараторів для n вхідних даних називається (n, ε)-розділювачем, якщо для довільних n різних вхідних елементів та кожного $k = 1, 2, \ldots, n/2$ мережа переводить:

1) щонайбільше εk найменших k елементів у вихідні лінії $b_{n/2+1}, \ldots, b_n$;
2) щонайбільше εk найбільших k елементів у вихідні лінії $b_1, \ldots, b_{n/2}$.

Зокрема, ε-розділювач робить щонайбільше $\varepsilon n/2$ помилок при розділенні n вхідних даних на дві частини з $n/2$ найменших та $n/2$ найбільших елементів. При $\varepsilon = 0$ отримуємо досконалий розділювач.

Теорема 4.3. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існує константа d така, що для кожного парного $n \in \mathbb{N}$ існує (n, ε)-розділювач глибини щонайбільше d.*

Доведення. Будемо використовувати спеціальне означення експандерів для дводольних графів. Дводольним (n, d, λ)-експандером називається d-регулярний дводольний граф $G = (A \cup B, E)$ з n вершинами ($n/2$ вершинами у кожній з доль A і B) такий, що

$$\forall\, S \subseteq A \text{ та } \forall\, S \subseteq B \quad |N(S)| \geq \min(\lambda |S|, n/2 - |S|),$$

де $N(S)$ є множиною сусідей вершин з S. За вправою 3.1 для довільного $\lambda > 0$ існує натуральне $d \geq 3$ таке, що для всіх парних $n \geq 2d$ існує дводольний (n, d, λ)-експандер.

Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдемо таке $\lambda > 0$, що $1/(\lambda + 1) \leq \varepsilon$. Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний (n, d, λ)-експандер. Побудуємо ε-розділювач глибини d, в якому вхідні та вихідні лінії ототожнені з n вершинами графа, причому вершини з долі A відповідають вихідним лініям $b_1, \ldots, b_{n/2}$, а з долі B — лініям $b_{n/2+1}, \ldots, b_n$. Для цього використаємо відомий результат, що множина ребер d-регулярного дводольного графа G є об'єднанням d диз'юнктних 1-факторів $M_1, M_2, \ldots, M_d$ (досконалих паросполучень). Кожен 1-фактор M_i визначає компаратори на i-тому рівні розділювача, де кожне ребро в M_i задає лінії, які будуть з'єднані компаратором (див. приклад на рис. 17).

[7] Слово розділювач є авторським перекладом з англійської мови слова halver.

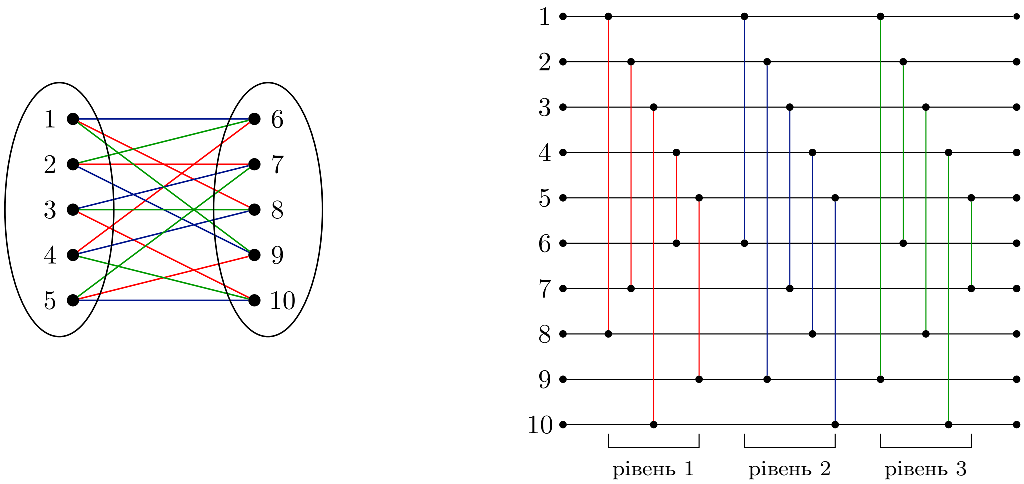


Рис. 17: Побудова ε-розділювача за допомогою експандерів

Покажемо, що побудована мережа є ε-розділювачем. Розглянемо довільне $k = 1, 2, \ldots, n/2$, і нехай L_k — це множина з найменших k вхідних елементів. Нехай S — це множина тих вихідних ліній з B, на яких виводяться елементи з L_k. Тоді всі сусіди вершин з S в графі G також виводять елементи з L_k. Отже,

$$|S| + |N(S)| \leq k.$$

З іншого боку,

$$|S| + |N(S)| \geq |S| + \min(\lambda|S|, n/2 - |S|) \geq \min(\lambda|S| + |S|, n/2).$$

Оскільки $k \leq n/2$, то $(1 + \lambda)|S| \leq k$ і $|S| \leq \varepsilon k$. Аналогічно доводиться оцінка для найбільших k елементів. $\square$

Вправа 4.1. Нехай $G = (V, E)$ — d-регулярний граф з n вершинами і $h(G) \geq \varepsilon$. Побудуємо дводольний граф H є $(2n, d + 1,)$. Доведіть, що H є дводольним $(2n, d + 1, 1 + \varepsilon/d)$-експандером.

Вправа 4.2. Доведіть, що досконалий розділювач для n елементів має глибину щонайменше $\Omega(\log n)$.

Вправа 4.3. В доведенні теореми 4.3 ми використали існування дводольних (n, d, λ)-експандерів для $n \geq 2d$. Що робити у випадку $n < 2d$?

4.1.2 Сепаратори

Іншим основним компонентом AKS мережі є сепаратори.

Означення 4.3. Нехай $\varepsilon, \eta \geq 0$. (n, ε)-розділювач називається $(n, m, \varepsilon, \eta)$-сепаратором, якщо для довільних n різних вхідних елементів та кожного $k = 1, 2, \ldots, m/2$ мережа переводить:

1) щонайбільше ηk найменших k елементів не на вихідні лінії $b_1, \ldots, b_{m/2}$;
2) щонайбільше ηk найбільших k елементів не на вихідні лінії $b_{n-m/2+1}, \ldots, b_n$.

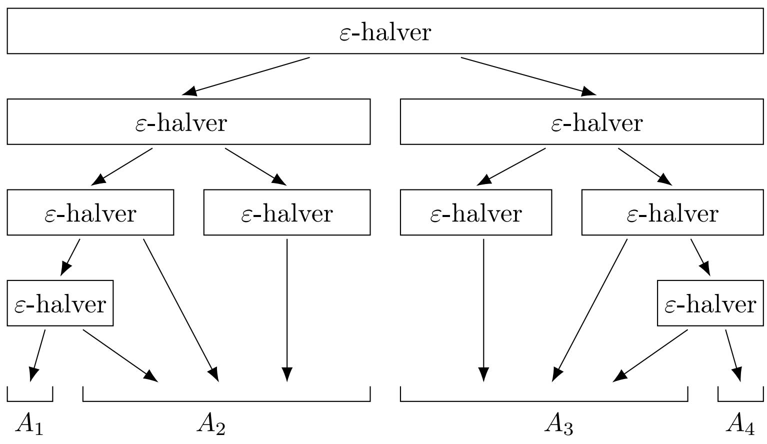


Рис. 18: Конструкція сепаратора

Сепаратори можна будувати за допомогою ε-розділювачів, як показано на рис. 18. Спочатку застосовують ε-розділювач до всіх n елементів, потім паралельно до $n/2$ елементів з обох частин і так далі, скільки потрібно рівнів. Якщо такий сепаратор має l рівнів ε-розділювачів, то на останньому рівні буде 2^l блоків розміру $n/2^l$.

Нехай A_1 і A_4 позначають вихідні лінії, що належать крайнім блокам. Тоді A_1 і A_4 містять щонайбільше $(\frac{\varepsilon}{2})^l n$ неправильних елементів серед тих, які були неправильно розподілені на першому рівні. Аналогічні оцінки справедливі для неправильних елементів, які були розподілені на інших рівнях. Правильний вибір параметрів ε та l дозволяє отримувати сепаратори з потрібними характеристиками.

Вправа 4.4. Доведіть, що для довільних $\varepsilon, \eta > 0$ і $0 < \delta < 1$ існує натуральне число d таке, що для довільних парних n і m з $\delta n \le m \le n$ існує $(n, m, \varepsilon, \eta)$-сепаратор глибини щонайбільше d.

4.1.3 Опис AKS мережі

AKS мережа має $O(\log n)$ пластів, кожен з яких має структуру двійкового дерева. Вершинами кожного дерева є сепаратори зі спеціально підібраними параметрами. Ми опишемо, як сепаратори з'єднуються між собою дротами.

Занумеруємо сепаратори двійкового дерева на кожному пласті наступним чином: корінь має номер 1, а діти вершини з номером i мають номери $2i$ та $2i+1$ (див. рис. 19). Тоді під (i, j)-сепаратором будемо розуміти сепаратор з номером i на j-тому пласті. Для кожного сепаратора вихідні лінії розподіляються на блоки A_1, A_2, A_3, A_4, як показано на рис. 18.

Вхідні елементи мережі подаються на вхідні лінії $(1, 1)$-компаратора. Вихідні лінії (i, j)-сепаратора з'єднуються з іншими сепараторами наступним чином:

1) вихідні лінії з блоків A_1 і A_4 подаються у $(\lfloor i/2 \rfloor, j+1)$-сепаратор (у випадку $i = 1$ будемо вважати $\lfloor i/2 \rfloor = 1$);
2) вихідні лінії з блока A_2 подаються у $(2i, j)$-сепаратор;

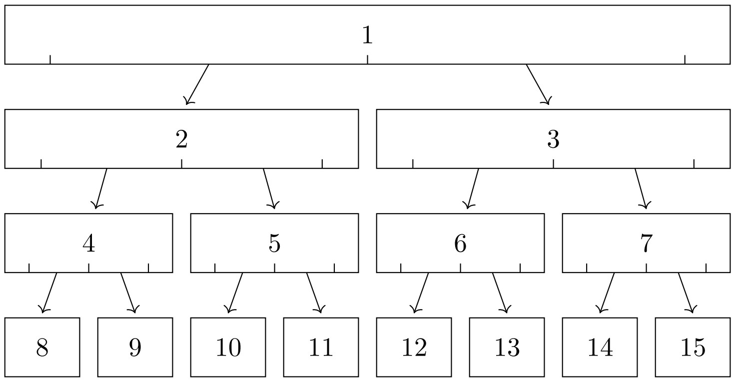


Рис. 19: Розташування сепараторів на одному пласті

3) вихідні лінії з блока A_3 подаються у $(2i+1, j)$-сепаратор.

Вихідні лінії, для яких це правило не задає з'єднання, є вихідними лініями мережі.

Пояснити роботу мережі можна так. Розмір сепараторів зменшується від рівня до рівня двійкових дерев та при переході від одного пласта до наступного, і ε-розділювачі на останньому рівні сепараторів працюють як досконалі. Проходячі дерево сепараторів, елементи розподіляються у листках дерева з можливими похибками. Похибки у роботі (i, j)-сепаратора, які накопичуються у блоках A_1 і A_4, повертаються на переробку у батьківську вершину наступного пласта. Правильно підібравши параметри сепараторів можна гарантувати, що всі похибки будуть виявлені, а глибина мережі буде $O(\log n)$.

4.2 Експандерні коди

В цьому розділі ми коротко нагадаємо відомості з теорії кодування та покажемо конструкцію ефективних кодів з виправленням помилок на основі експандерів. Більше інформації можна знайти в [1, 12].

4.2.1 Коди з виправленням помилок

Одна з основних задач теорії кодування полягає у розробці методів передачі даних. Канали зв'язку не є досконалими, при передачі повідомлень можуть відбуватися помилки і деякі біти можуть прийти перевернутими. Ми хочемо мати можливість вловити ці помилки або навіть виправити їх. Для цього дані кодуються і при кодуванні додаються додаткові біти, які дозволяють виправити помилки. Для наших потреб не так буде важливим процес кодування, як кодові слова, які пересилаються через канал зв'язку.

Означення 4.4. Кодом називається довільна підмножина $C \subset \{0,1\}^n$. Елементи C називаються кодовими словами.

При кодуванні з кожним повідомленням асоціюється деяке кодове слово. Таким чином, використовуючи код C можна передати не більше ніж $|C|$ повідомлень, тобто закодувати $m = \log_2 |C|$ біт інформації, хоча передаватися будуть кодові слова з n біт.

Означення 4.5. Величина $rate(C) = \log_2 |C|/n$ називається швидкістю коду.

Неформально, швидкість коду вимірює кількість інформації у кожному біті кодового слова. Чим більша швидкість коду, тим більше інформації можна передати через заданий канал зв'язку.

Для виправлення помилок використовують відстань Хемінга.

Означення 4.6. Відстань Хемінга між двома словами $x, y \in \{0,1\}^n$ дорівнює кількості біт, в яких ці слова відрізняються: $dist(x,y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$.

Це в точності відстань між вершинами в графі гіперкуба Q_n.

Означення 4.7. Відстанню коду C називається мінімальна відстань Хемінга між кодовими словами:

$$dist(C) = \min_{x \neq y \in C} dist(x,y).$$

Виправлення помилок, які можуть статися при передачі кодових слів, ґрунтується на такому спостереженні. Нехай $dist(C) > d$ і при передачі кодового слова $x \in C$ ми отримали слово $x' \in \{0,1\}^n$, яке відрізняється від x у щонайбільше $d/2$ біт. Тоді слово x можна однозначно відновити за словом x', як найближче кодове слово відносно відстані Хемінга. Таким чином, код C дозволяє, принаймні теоретично, виправити до $d/2$ помилок. Продемонструємо це на іграшковому прикладі.

Приклад 4.1. Розглянемо кодування $0 \mapsto 000$, $1 \mapsto 111$ за допомогою коду з двох слів $C = \{000, 111\}$. Код C має швидкість $1/3$, відстань 3 і дозволяє виправити одну помилку (один з трьох бітів). Наприклад, якщо при передачі ми отримали слово 010, то правильне кодове слово буде 000, а якщо отримали 110, то виправляємо на 111. Якщо ми будемо застосовувати це кодування побітово до двійкових слів з n бітів, то отримаємо кодові слова довжини $3n$, які утворюють код $C_n \subset \{0,1\}^{3n}$, який дозволяє виправляти до n помилкових бітів, по одній помилці в кожній трійці бітів.

Зрозуміло, що чим більша відстань між кодовими словам, тим більше помилок можна виправити цим кодом, але тим менше буде кодових слів заданої довжини, тобто менше швидкість коду. Задача теорії кодування полягає у пошуку кодів з оптимальними характеристиками. Послідовність кодів $C_n \subset \{0,1\}^n$ називається асимптотично хорошою, якщо існують такі константи $r > 0$ і $\delta > 0$, що $dist(C_n) > \delta n$ і $rate(C_n) > r$ для всіх n. Існування таких кодів можна довести ймовірнісними методами, але при цьому не можна гарантувати швидкі операції кодування та декодування, що важливо для практичних застосувань. Послідовність кодів називається ефективною, якщо кодування та декодування можна виконати за поліноміальний час від n. Далі ми побудуємо такі коди з лінійним часом для декодування, спираючись на явні конструкції дводольних графів експандерів.

4.2.2 Лінійні коди

Найбільш вивченими є лінійні коди.

Означення 4.8. Код $C \subset \{0,1\}^n$ називається лінійним, якщо він є підпростором над полем $\mathbb{F}_2$.

Помітимо, що якщо $\dim(C) = m$, то $|C| = 2^m$ і $rate(C) = m/n$. Неважко показати, що відстань лінійного коду $dist(C)$ дорівнює мінімальній кількості одиниць у ненульових кодових словах.

Лінійні коди можна задавати матрицями двома способами. По-перше, кожен підпростір $C \subset \mathbb{F}_2^n$ є образом матриці $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F}_2)$, стовпці якої утворюють базис C:

$$C = \operatorname{Im} A = \{Ax : x \in \mathbb{F}_2^m\}.$$

Операцію кодування можна виразити через множення матриці A на вектор:

$$A : \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2^n, \quad x \mapsto Ax.$$

Зокрема, всі лінійні коди мають швидкий алгоритм кодування за час $O(n^2)$.

По-друге, підпростір $C \subset \mathbb{F}_2^n$ є ядром деякої матриці $B \in M_{(n-m)\times n}(\mathbb{F}_2)$:

$$C = \operatorname{Ker} B = \{y \in \mathbb{F}_2^n : By = 0\}.$$

Матрицю B називають матрицею перевірки парності для коду C. Вона дозволяє швидко перевірити, чи належить задане слово коду. Для цього достатньо перевірити умову $By = 0$. Кожне рівняння системи $By = 0$ є сумою деяких бітів слова y і називається контрольною сумою.

Лінійні коди також можна задавати дводольними графами. Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний граф з долями $|A| = n$ і $|B| = m$. Граф G визначає лінійний код $C(G) \subset \mathbb{F}_2^n$, який задається матрицею перевірки парності $M^\top$, де

$$M_{vu} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } vu \in E; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \qquad v \in A,\ u \in B.$$

З кожною вершиною $v \in A$ асоціюється біт x_v у кодових словах. А кожна вершина $u \in B$ задає контрольну суму, в яку входять ті біти з A, що з'єднані ребрами з вершинами u (див. рис. 20). Таким чином, систему $M^\top x = 0$ можна записати у вигляді

$$\sum_{v \in N(u)} x_v = 0, \quad u \in B.$$

Якщо матриця парності є розрідженою, тобто більшість елементів є нулями, то код належить до класу кодів з малою щільністю перевірок на парність, так звані LDPC-коди. В термінах графа це означає, що в ньому невелика кількість ребер, а саме це і відбувається у графах експандерах.

4.2.3 Експандерні коди

Експандерні коди належать до класу LDPC-кодів, які задаються спеціальними дводольними експандерами.

Означення 4.9. Дводольний граф $G = (A \cup B, E)$ називається (n, m, d, α, β)-експандером, якщо $|A| = n$, $|B| = m$, кожна вершина в долі A має степінь d і для кожної підмножини $S \subseteq A$ потужності $|S| \le \alpha n$ виконується

$$|N(S)| > \beta |S|,$$

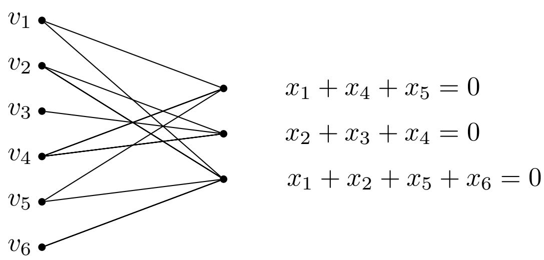


Рис. 20: Коди з графів

де $N(S)$ — це множина сусідей S.

Умова $deg(v) = d$ для $v \in A$ означає, що кожен біт x_v кодових слів входить у d контрольних сум.

Покажемо, що коди, які задаються дводольними експандерами, дозволяються виправляти достатньо багато помилок. Для цього використаємо наступну властивість.

Лема 4.1. *Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний $(n, m, d, \alpha, d/2)$-експандер. Тоді для кожної підмножини $S \subseteq A$ потужності $|S| \le \alpha n$ існує така вершина $b \in B$, що $|N(b) \cap S| = 1$, тобто b має точно одного сусіда в S.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що для деякої підмножини S з $|S| \le \alpha n$ кожна вершина $b \in N(S)$ має принаймні два сусіди в S. Тоді загальна кількість ребер, які виходять з S, буде принаймні $2N(S)$. З іншого боку, кожна вершина в S має d інцидентних ребер. Отже,

$$d|S| \ge 2N(S) \quad \Rightarrow \quad N(S) \le d/2|S|,$$

що суперечить властивості експандера G. □

Теорема 4.4 (Sipser-Spielman, 1996)**.** *Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний $(n, m, d, \alpha, d/2)$-експандер і $C(G)$ — відповідний код. Тоді $dist(C(G)) > \alpha n$.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує кодове слово $x \in C(G)$, в якому не більше за αn одиниць. Нехай S — це ті вершини з A, які відповідають одиничним координатам в слові x. Оскільки $|S| \le \alpha n$, то за лемою 4.1 існує вершина $b \in N(S)$, яка має точно одного сусіда в S. Тоді контрольна сума, яка задається b, має точно одну змінну, що відповідає вершині з S. Якщо підставити x, то в сумі буде тільки один ненульовий доданок. Тому x не може задовольняти цю контрольну суму, що суперечить умові $x \in C(G)$ (див. рис. 21). □

Зокрема, експандерні коди можуть виправляти до $\alpha n/2$ помилок. Підбираючи графи з потрібними параметрами можна отримувати коди з наперед заданими характеристиками. Але важливість експандерних кодів полягає у тому, що для них існує швидкий алгоритм декодування. Для цього потрібно використовувати більш сильні експандери.

Лема 4.2. *Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний $(n, m, d, \alpha, 3d/4)$-експандер. Тоді:*

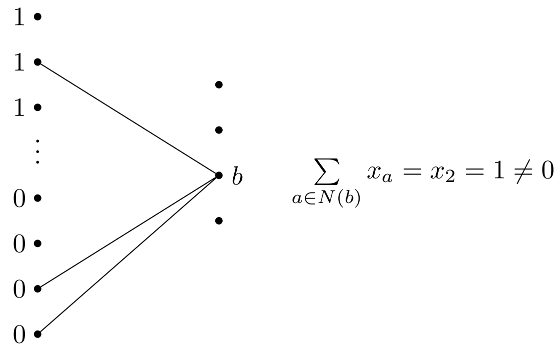


Рис. 21: Один сусід в S забороняє кодове слово, у якого одиниці розташовані в точності у вершинах з S

1) *Для кожної підмножини $S \subseteq A$ потужності $|S| \leq \alpha n$ існує більше $d/2|S|$ таких вершин $b \in B$, що $|N(b) \cap S| = 1$.*

2) *Існує така вершина $a \in S$, що $N(b) \cap S = \{a\}$ для більше $d/2$ вершин $b \in B$, тобто для більше половини сусідів вершини a.*

Доведення. Нехай $S \subseteq A$ — підмножина з $|S| \leq \alpha n$ і u — це кількість таких вершин $b \in B$, що $|N(b) \cap S| = 1$. Тоді кількість ребер, які виходять з S, можна оцінити так:

$$d|S| \geq u + 2(|N(S)| - u) > 3d/2|S| - u.$$

Звідси випливає потрібна нерівність $u > d/2|S|$.

Друге твердження випливає з того, що на кожну вершину $a \in S$ приходиться у середньому більше $d/2$ вершин b з $N(b) \cap S = \{a\}$. $\square$

Покажемо, що для експандерних кодів є ефективний алгоритм для декодування. Нехай при передачі кодового слова $x \in C(G)$ ми отримали деяке слово $y \in \{0,1\}^n$ і при цьому сталося не більше за $\alpha d/2$ помилок, тобто $dist(x, y) \leq \alpha d/2$. Алгоритм декодування на вхідних даних y повинен повернути кодове слово x. Якщо y не є кодовим словом, то деякі контрольні суми не дорівнюють нулю. Алгоритм декодування експандерних кодів працює дуже просто: *поки існує біт, для якого більше половини контрольних сум не дорівнює нулю, змінити значення цього біта.*

Теорема 4.5 (Sipser-Spielman, 1996)**.** *Нехай $G = (A \cup B, E)$ — дводольний $(n, m, d, \alpha, 3d/4)$-експандер і $C(G)$ — відповідний код. Нехай слово $y \in \{0,1\}^n$ знаходиться на відстані $\leq \alpha d/2$ від деякого кодового слова $x \in C(G)$. Застосування алгоритму до слова y поверне слово x за лінійну кількість ітерацій.*

Доведення. Зауважимо, що якщо існує біт, який алгоритм перевертає, то при цьому кількість ненульових контрольних сум зменшується. Але при цьому кількість помилок, тобто кількість біт, в яких відрізняються x та y, може збільшуватися.

Спочатку покажемо, що при кожній ітерації алгоритму кількість помилок не більша за αn. Звідси буде випливати за теоремою 4.4, що якщо алгоритм зупиняється на деякому кодовому слові, то це слово x.

На першому кроці кількість помилок $dist(x, y) \leq \alpha n/2$ за умовою. Кожен з цих бітів входить у d контрольних сум. Тому алгоритм стартує з $\leq d\alpha n/2$ ненульових контрольних сум. При кожній ітерації кількість помилок змінюється на одиницю. Якщо припустити, що кількість помилок стала більше αn, то на попередньому кроці маємо αn помилок (можна вважати цілим числом). Нехай $S \subset A$ — це множина вершин, які відповідають цим помилковим бітам. З пункту 1) леми 4.2 випливає, що існує більше $d/2|S| = d\alpha n/2$ вершин $b \in B$, які мають точно одного сусіда в S. Це означає, що для кожної такої вершини відповідна контрольна сума для слів x та y буде відрізнятися на одиницю. А оскільки x є кодовим словом, то для y всі ці контрольні суми будуть ненульовими. Таким чином, ми отримали більше $d\alpha n/2$ ненульових контрольних сум. Це суперечить тому, що алгоритм тільки зменшує кількість ненульових контрольних сум.

Залишається показати, що якщо y не є кодовим словом, то завжди знайдеться біт, який алгоритм перевертає. З цього буде випливати, що алгоритм зупиниться за лінійну кількість кроків на деякому кодовому слові. Покладемо

$$S = \{v \in A : x_v \neq y_v\}.$$

Якщо $S = \emptyset$, то y є кодовим словом і алгоритм зупиняється. Припустимо, що $S \neq \emptyset$, і ми вже знаємо, що $|S| \leq \alpha n$. Тоді за пунктом 2) леми 4.2 існує $a \in S$ така, що $N(b) \cap S = \{a\}$ для більше половини сусідів b вершини a. Як і вище, оскільки b має точно одного сусіда в S, то відповідна контрольна сума для y не буде виконуватися. Отже, більше половини контрольних сум для біта y_a будуть ненульовими, що і потрібно було довести. (Зауважимо, що хоча ми показали існування біту в множині S, який алгоритм може перевернути, алгоритм не обов'язково перевертає біт з S. Саме тому ми не могли стверджувати, що кількість помилок зменшується при ітераціях алгоритму.) $\square$

4.3 Збереження випадкових бітів

Інше цікаве застосування експанедрів полягає у зменшенні використання випадкових процесів у роботі рандомізованих алгоритмів, так званій дерандомізації алгоритмів.

Рандомізований алгоритм використовує генератор випадкових чисел у своїй роботі. Для перевірки, чи мають вхідні дані $w \in \{0,1\}^n$ певну властивість P, алгоритм генерує випадкове слово $r \in \{0,1\}^m$, $m = Poly(n)$, і детерміновано обчислює відповідь $A(w, r)$. При цьому алгоритм може давати неправильну відповідь з деякою ймовірністю. Ми будемо розглядати алгоритми з односторонньою помилкою:

1) Якщо $w \in P$, то $A(w, r) = 1$ для всіх $r \in \{0,1\}^m$.
2) Якщо $w \notin P$, то $A(w, r) = 1$ (помилка) з ймовірністю β (тобто для $\leq \beta 2^m$ випадкових слів r).

Як зменшити ймовірність помилки? Очевидний підхід — це виконати алгоритм t разів з різними випадковими словами і повернути 0, якщо принаймні один раз була отримана відповідь 0. В цьому випадку, ймовірність отримати невірну відповідь буде β^t, але при цьому потрібно згенерувати tm випадкових бітів. Застосування експандерів дозволяє зменшити кількість випадкових бітів, але зберегти експоненційне зменшення ймовірності помилки.

Ідея застосування експандерів полягає у тому, що випадкове блукання на експандері швидко збігається до рівномірного розподілу і не може залишатися довго у «поганій» множині вершин. Нехай $G = (V, E)$ — не дводольний d-регулярний експандер на множині вершин $V = \{0,1\}^m$ з другим нормалізованим власним числом $\lambda(G)/d \leq \alpha < 1$ і $\alpha + \beta < 1$. Випадкові слова ототожнюємо з вершинами графа, так що можна говорити про обчислення $A(x, v)$ для $v \in V$. Новий алгоритм визначається так:

1) Обираємо випадкову вершину $v_0 \in V$.
2) Генеруємо випадкове блукання $(v_0, v_1, \ldots, v_t)$ довжини t в графі G.
3) Обчислюємо $A(x, v_i)$ для $i = 0, 1, \ldots, t$. Якщо всі значення 1, то повертаємо 1; інакше 0.

Перший крок вимагає генерації m випадкових бітів, а кожен крок випадкового блукання, вибір одного з d сусідів — $\log_2 d$ випадкових бітів. Тому новий алгоритм використовує $m + t\log_2 d = m + O(t)$ випадкових бітів.

Як часто новий алгоритм дає неправильну відповідь? Нехай $B \subset V$ — це множина тих вершин v, при яких $A(x, v)$ повертає неправильну відповідь. За умовою $|B| \leq \beta 2^m$. Новий алгоритм поверне неправильну відповідь, якщо всі вершини випадкового блукання знаходяться в B. Ймовірність такої події оцінює наступна теорема.

Теорема 4.6. *Нехай $G = (V, E)$ — (n, d, α)-експандер і $B \subset V$, $|B| \leq \beta n$. Тоді:*

$$Pr\begin{pmatrix} \textit{випадкове блукання довжини } t \\ \textit{знаходиться в множині } B \end{pmatrix} \leq (\alpha + \beta)^t.$$

Зауважимо, що новий алгоритм вимагає ефективних методів для обчислення сусідніх вершин в графі. Це можна отримати за допомогою явних конструкцій експандерів, наприклад, використовуючи зиг-заг добуток.

Список літератури

[1] Asratian A. S., Denley T. M. J., Häggkvist R. Bipartite graphs and their applications. — Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics, 131, 1998.

[2] Baddar S. W. A.-H., Batcher K. E. Designing sorting networks: a new paradigm. — Berlin: Springer, 2011.

[3] Bekka B., de la Harpe P., Valette A. Kazhdan's property (T). — Cambridge University Press, New Mathematical Monographs (Book 11), 2008.

[4] Bestvina M., Sageev M., Vogtmann K. Geometric group theory. — American Mathematical Society, 2014.

[5] Bollobás B. Random graphs. 2nd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, Camb. Stud. Adv. Math., Vol.73, 2001.

[6] Bondy A., Murty U. S. R. Graph theory. — Springer, Graduate texts in Mathematics 244, 2008.

[7] Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of graphs. — Berlin: Springer, 2012.

[8] Chung F. R. K. Spectral graph theory. — American Mathematical Society, 1997.

[9] Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to algorithm (2nd ed.). — MIT Press, 2001.

[10] Diestel R. Graph theory. — Springer, Graduate texts in Mathematics, 2005.

[11] Gross J. K., Yellen J. Graph theory and its applications (2nd ed.). — Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2005.

[12] Hoory S., Linial N., Wigderson A. Expander graphs and their applications. — Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 43, Number 4, 2006. — P. 439–561.

[13] Kotowski M., Kotowski M. Lectures on expanders. — 2012, available at https://www.mimuw.edu.pl/ mk249019/notes/skrypt-stg.pdf

[14] Kowalski E. An introduction to expander graphs. — SMF, 2019.

[15] Lee J. R. Gabber-Galil analysis of Margulis' expanders. — 2012, available at https://tcsmath.wordpress.com/2012/04/18/gabber-galil-analysis-of-margulis-expanders/

[16] Lubotzky A. Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. — Basel: Birkhäuser, 1992.

[17] Lubotzky A., Phillips R., Sarnak P. Ramanujan graphs. — Combinatorica, 8 (3), 1988. — P. 261–277.

[18] Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N. Interlacing families. I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees. — Ann. Math. (2), 182 (1), 2015. — P. 307–325.

[19] Маргулис Г. А. Явные теоретико-групповые конструкции комбинаторных схем и их применения в построении расширителей и концентраторов. — Пробл. передачи информ., 24 (1), 1988. — С. 51–60.

[20] Nica B. A brief introduction to spectral graph theory. — Zürich: European Mathematical Society, EMS Textbooks in Mathematics, 2018.

[21] Nilli A. On the second eigenvalue of a graph. — Discrete Mathematics, 91, 1991. — P. 207–210.

[22] Tao T. Basic theory of expander graphs. — 2011, available at https://terrytao.wordpress.com/2011/12/02/245b-notes-1-basic-theory-of-expander-graphs/

[23] Trevisan L. Lecture Notes on Expansion, Sparsest Cut, and Spectral Graph Theory. — University of California, Berkeley, 2014.

[24] Seiferas J. Sorting networks of logarithmic depth, further simplified. — Algorithmica 53 (3), 2009. — P. 374–384.

[25] Xie H. Studies on sorting networks and expanders. — Master Thesis, Ohio University, 1998.

[26] Zimmer R. J. Ergodic theory and semisimple groups. — Basel: Birkhäuser, Monographs in Mathematics (Book 81), 1984.