

XXV Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2021 року (за поштовим штемпелем) на адресу

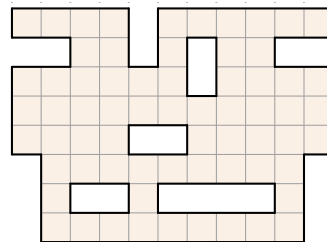
01601 МСП, Київ,

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
кафедра математичного аналізу
“Олімпіада 5-12”

або у відсканованому вигляді на електронну адресу olymp5-12@ukr.net.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

<http://www.mechmat.univ.kiev.ua>.



XXV Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5 – 12”

Умови задач

1. Розріжте зображену на емблемі олімпіади фігуру на шість рівних частин.
2. Є три монети вагою 7 грамів та три монети вагою 8 грамів. Усі монети виглядають однаково. Скільки зважувань на терезах без гир потрібно, аби розділити монети на три пари, кожна з яких важить 15 грамів?
3. На площині нарисовано квадрат і декілька прямих, які не проходять через його вершини. Для кожної сторони і кожної діагоналі квадрата обчислили кількість прямих, які перетинають цей відрізок. Чи могло виявитися, що ці кількості — шість послідовних натуральних чисел?
4. Під пальмою лежала велика купа кокосів. Перший краб узяв собі половину кокосів і ще один кокос, другий краб — третину кокосів, що залишилися, і ще два кокоси, третій краб — чверть кокосів, що залишилися, і ще три кокоси, тощо. Так тривало, поки залишок кокосів ділився на потрібну кількість частин. Яка найбільша кількість крабів могла дістати кокоси?
5. Вінні-Пух сів на дієту, коли кут між годинною та хвилинною стрілками дорівнював t° . Рівно через t хвилин він побачив, що кут між годинною та хвилинною стрілками знову дорівнює t° , і вирішив підкріпитися. Скільки часу Вінні-Пух сидів на дієті, якщо минуло менше години, а годинник завжди показує правильний час?



6. У царя сто міністрів. Кожен міністр вважає хоча б одного міністра чесним і хоча б одного міністра розумним. При цьому якщо міністр A вважає міністра B чесним, то всі, хто вважає міністра A розумним, теж вважають міністра B чесним. А якщо міністр A вважає міністра B розумним, то всі, хто вважає міністра A чесним, теж вважають міністра B розумним. Довести, що принаймні один міністр вважає себе розумним.

7. Нехай a, b, c — натуральні числа, жодне з яких не ділиться на інше. Довести, що

$$2a + 2b + 2c + \text{НСД}(a, b) + \text{НСД}(b, c) + \text{НСД}(a, c) < \\ < \text{НСК}(a, b) + \text{НСК}(b, c) + \text{НСК}(a, c).$$

8. Нехай ABC — гострокутний трикутник, D — середина BC . Бісектриси кутів $\angle ADB$ та $\angle ADC$ перетинають описані навколо трикутників ADB та ADC кола у точках E та F відповідно. Довести, що $EF \perp AD$.

9. Нехай a, b, c, d — такі додатні числа, що $abcd = 1$. Довести, що

$$(a + c)(b + d)(ac + bd) \geq 2(a + b + c + d).$$

10. Довести, що існує нескінченно багато натуральних чисел n таких, що $3^n - 1$ ділиться на $n^3 - 1$.

11. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E . Нехай P та Q — центри кіл, описаних навколо трикутників BCE та DCE відповідно. Пряма, яка проходить через точку P паралельно до AB , і пряма, яка проходить через точку Q паралельно до AD , перетинаються в точці R . Довести, що точка R лежить на прямій AC .

12. Чи існує многочлен f степеня 2021 з цілими коефіцієнтами такий, що при довільному цілому n кожні два з чисел $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, \dots є взаємно простими?