КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА

О. Ю. Константінов

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Посібник охоплює основні розділи курсу функціонального аналізу. Зокрема, *Лінійні нормовані та банахові простори, Гільбертові простори, Лінійні неперервні функціонали, Лінійні неперервні оператори, Оператори в гільбертовому просторі, Компактні оператори.*

Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю вправ та прикладів.

Зміст

Розділ 1

Лінійні нормовані та банахові простори

1.1 Означення і елементарні властивості

Означення 1.1. Нехай E лінійний простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. *Нормою* називається функція $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, така що

1) Для довільного $x \in E : \|x\| \geq 0$ та $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ (невід'ємність);

2) Для довільних $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (однорідність);

3) Для довільних $x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Зауважимо, що так само можно ввести поняття норми і для дійсного лінійного простору. Далі ми здебільшого будемо працювати з комплексними просторами, проте всі відмінності будуть обговорюватися окремо.

Означення 1.2. Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається *лінійним нормованим простором.*

Зауваження 1.1. (друга нерівність трикутника) У лінійному нормованому просторі для довільних $x, y \in E$

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| .$$

Справді, з міркувань симетричності достатньо розглянути випадок $\|x\| \geq \|y\|$. Маємо

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \Leftrightarrow \|x\| \leq \|y\| + \|x - y\| ,$$

що випливає з нерівності трикутника та рівності $x = y + (x - y)$.

Зауваження 1.2. Кожен лінійний нормований простір E є метричним простором, метрику можна задати рівністю

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Перевіримо, що так введена функція $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ задовольняє властивості метрики. Маємо

1) Для довільних $x, y \in E$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0, \text{ до того ж } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2) Для довільних $x, y \in E$

$$\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\| = \rho(x, y).$$

3) Для довільних $x, y, z \in E$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Означення 1.3. Будемо казати, що *послідовність* $\{x_n, n \geq 1\} \subset E$ *збігається до* $x \in E$, якщо вона збігається до x у метриці ρ, тобто

$$x_n \xrightarrow{E} x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \rho(x_n, x) \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

З означення та зауваження 1.1 випливає, що

$$x_n \xrightarrow{E} x \Longrightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|.$$

Легко бачити, що додавання елементів лінійного нормованого простору та множення їх на скаляр є неперервними операціями, тобто якщо $x_n \xrightarrow{E} x$, $y_n \xrightarrow{E} y$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda$, то

$$x_n + y_n \xrightarrow{E} x + y, \quad \lambda_n x_n \xrightarrow{E} \lambda x.$$

(Доведіть це самостійно!)

Означення 1.4. Повний лінійний нормований простір E називається *банаховим*.

Означення 1.5. Лінійний нормований простір E називається *сепарабельним*, якщо існує не більш ніж злічена множина $A \subset E$, така що замикання $\overline{A} = E$.

1.2 Класичні банахові простори

Приклад 1.1. $E = \mathbb{C}$ з $\|x\| = |x|$. Так само можна ввести норму в дійсному лінійному просторі $E = \mathbb{R}$.

Приклад 1.2. $E = \mathbb{C}^n$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,,\ \lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,,$$

а норма визначається рівністю

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно вводиться норма і в дійсному лінійному просторі $E = \mathbb{R}^n$.

Приклад 1.3. Нехай T деяка множина, $M\left(T\right)$ простір обмежених на T функцій $x : T \to \mathbb{C}$. Доведемо, що $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} |x\left(t\right)|$ є нормою. Справді,

1) $\|x\| \geq 0$, та $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sup\limits_{t \in T} |x\left(t\right)| = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in T\ \ |x\left(t\right)| = 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = \sup\limits_{t \in T} |\lambda x\left(t\right)| = |\lambda| \sup\limits_{t \in T} |x\left(t\right)| = |\lambda|\, \|x\|$;

3) Очевидно, для всіх $t \in T$

$$|x\left(t\right) + y\left(t\right)| \leq |x\left(t\right)| + |y\left(t\right)| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Переходячи до супремума, дістанемо нерівність трикутника.

Доведемо, що простір $(M\left(T\right), \|\cdot\|)$ буде повним. Справді, нехай $\{x_n, n \geq 1\} \subset M\left(T\right)$ фундаментальна послідовність, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, такий що для всіх $n, m > N$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, звідки для всіх $t \in T$

$$|x_n\left(t\right) - x_m\left(t\right)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Таким чином, для довільного $t \in T$ числова послідовність $\{x_n\left(t\right), n \geq 1\}$ фундаментальна в $\mathbb{C}$. Оскільки $\mathbb{C}$ повний простір, то існує $x\left(t\right) \in \mathbb{C}$, таке що $x_n\left(t\right) \longrightarrow x\left(t\right)$, $n \longrightarrow \infty$. Перейдемо в (1.1) до границі при $n \longrightarrow \infty$ та дістанемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, такий що для всіх $m > N$ та $t \in T$

$$|x\left(t\right) - x_m\left(t\right)| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

З (1.2) випливає, що $x - x_m$ обмежена функція на T, а отже, $x = (x - x_m) + x_m \in M(T)$. До того ж,

$$\|x - x_m\| = \sup_{t \in T} |x\left(t\right) - x_m\left(t\right)| \leq \varepsilon,$$

звідки $x_m \longrightarrow x$ в $M\left(T\right)$.

Приклад 1.4. Нехай $\mathcal{F}$ σ-алгебра на множині T, μ міра на $(T, \mathcal{F})$. Розглянемо простір $\mathcal{L}_p$ $\mathcal{F}$-вимірних функцій $x : T \to \mathbb{C}$, що є інтегрованими у степені p $(1 \leq p < +\infty)$, тобто

$$\int_T |x(t)|^p \, d\mu(t) < +\infty.$$

Розглянемо функцію

$$\mathcal{L}_p \ni x \mapsto \|x\|_p := \left(\int_T |x(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Очевидно

1) $\|x\|_p \geq 0$, та $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0 \, (\mathrm{mod}\ \mu)$.

2) $\|\lambda x\|_p = \left(\int_T |\lambda x(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_T |x(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|x\|_p$

3) Нерівність трикутника збігається з нерівністю Мінковського.

Отже, всі аксіоми норми, крім першої виконані. Введемо на $\mathcal{L}_p$ відношення еквівалентності:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = y \, (\mathrm{mod}\ \mu). \tag{1.3}$$

Тоді клас еквівалентності $[x]$ складається з усіх тих $y \in \mathcal{L}_p$, що співпадають з x μ-майже скрізь. Простором $L_p(T, \mu)$ будемо називати простір таких класів еквівалентності з введеними операціями

$$[x] + [y] := [x + y],$$
$$[\lambda x] := \lambda [x]$$

і нормою

$$\|[x]\|_p := \|x\|_p.$$

Легко бачити, що ці означення коректні та $\|\cdot\|_p$ є нормою. До того ж справедлива наступна теорема, що доводиться в курсі теорії міри та інтеграла.

Теорема 1.1. *Для довільного $p \in [1, \infty)$ $L_p(T, \mu)$ – банаховий простір.*

Зауваження 1.3. Нехай E лінійний простір. Функція $s : E \to \mathbb{R}$ називається *напівнормою*, якщо вона є невід'ємною та задовольняє другу та третю аксіоми норми. Можна ввести відношення еквівалентності

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} s(x - y) = 0.$$

Легко довести, що це дійсно відношення еквівалентності та відповідний фактор-простір $E/\sim$ є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|[x]\| := s(x).$$

Зокрема, $\|\cdot\|_p$ напівнорма на $\mathcal{L}_p$.

Нагадаємо наступний важливий факт з курсу з теорії міри.

Теорема 1.2. *Нехай μ σ-скінченна міра. Тоді для довільного $p \in [1, \infty)$ множина*

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \middle| a_k \in \mathbb{C}, A_k \in \mathcal{F}, \mu(A_k) < +\infty, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

є щільною в $L_p(T, \mu)$.

Означення 1.6. σ-скінчена міра μ називається *сепарабельною*, якщо існує такий `не більш ніж злічений` клас множин $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, що для довільних $\varepsilon > 0$ та $A \in \mathcal{F}$ скінченної міри знайдеться така множина $B \in \mathcal{K}$, що $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Очевидно, можна вважати, що множини з $\mathcal{K}$ мають скінченну міру (що ми і будемо далі робити).

Теорема 1.3. *Нехай міра μ є сепарабельною, тоді для довільного $p \in [1, \infty)$ простір $L_p(T, \mu)$ є сепарабельним простором.*

Доведення. Розглянемо множину

$$S_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k} \middle| a_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}, B_k \in \mathcal{K}, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{N} \right\},$$

де $\mathcal{K}$ клас множин з означення сепарабельної міри μ. Очевидно, що множина S_0 злічена. Доведемо, що вона є щільною в $L_p(T, \mu)$. В силу теореми 1.2 досить довести, що для довільної множини $A \in \mathcal{F}$ скінченної міри, та для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий елемент $x \in S_0$, що $\|\chi_A - x\|_{L_p} < \varepsilon$. Оскільки μ сепарабельна міра, то для довільної множини $A \in \mathcal{F}$ (такої, що $\mu(A) < +\infty$) та для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться така множина $B \in \mathcal{K}$, що $\mu(A \triangle B) < \varepsilon^p$. Тоді для $x = \chi_B \in S_0$ маємо

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{L_p} = \|\chi_{A \triangle B}\|_{L_p} < \varepsilon.$$

□

Приклад 1.5. Нехай m міра Лебега на прямій, та $\mathcal{F}$ σ-алгебра вимірних за Лебегом множин. Тоді m є сепарабельною мірою. Справді, розглянемо злічений клас множин з $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{K} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \middle| -\infty < a_k < b_k < +\infty, a_k, b_k \in \mathbb{Q}, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{N} \right)$$

За теоремою про наближення міри, для довільної множини $A \in \mathcal{F}$ скінченої міри та для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться така множина $B \in \mathcal{K}$, що $m(A \triangle B) < \varepsilon$. Отже, за означенням, міра m є сепарабельною. Тоді, за теоремою 1.3, простір $L_p(\mathbb{R}, m) =: L_p(\mathbb{R})$ також є сепарабельним для довільного $p \in [1, \infty)$. Аналогічно можна показати, що для довільного $p \in [1, \infty)$ простір $L_p(\mathbb{R}^n, m_n)$, де m_n міра Лебега в R^n, також є сепарабельним.

Вправа 1.1. Розглянемо неспадну неперервну справа функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нехай λ_F відповідна міра Лебега—Стільтьєса на $\mathbb{R}$. Довести, що λ_F сепарабельна, а отже, простір $L_p(\mathbb{R}, \lambda_F)$ $(p \in [1, \infty))$ також є сепарабельним.

Вправа 1.2. Довести, що довільна скінченна на скінченних інтервалах борелева міра μ на прямій є мірою Лебега—Стільтьєса, а отже, простір $L_p(\mathbb{R}, \mu)$ є сепарабельним для довільного $p \in [1, \infty)$.

Для спрощення позначень покладемо:

$$L_p(\mathbb{R}) := L_p(\mathbb{R}, m), \; L_p(a, b) := L_p((a, b), m).$$

Розглянемо простір $C[a, b]$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Довільна неперервна функція $x = x(t)$ є борелевою та інтегровною у степені p, тобто $x \in \mathcal{L}_p([a, b], m)$. Це означає, що відповідний клас еквівалентності $\hat{x} \in L_p(a, b)$. Очевидно, різним елементам $x, y \in C[a, b]$ відповідають різні класи еквівалентності $\hat{x}, \hat{y} \in L_p(a, b)$. Справді, якщо $\hat{x} = \hat{y}$, то, за означенням, $x = y \pmod m$. Тоді в за неперервністю x, y маємо $x(t) = y(t)$ для всіх $t \in [a, b]$. Отже, $x = y$ (як елементи простору $C[a, b]$). Таким чином,

$$C[a, b] \subset L_p(a, b),$$

де включення розуміється як ін'єктивне відображення (вкладення) простору $C[a, b]$ у простір $L_p(a, b)$ ($x \in C[a, b]$ ототожнюється з відповідним класом еквівалентності $\hat{x}$).

Розглянемо клас $C_0(\mathbb{R})$ фінітних неперервних на $\mathbb{R}$ функцій:

$$C_0(\mathbb{R}) := \{x \in C(\mathbb{R}) \mid \exists a > 0 : x(t) = 0, \; |t| \geq a\}.$$

Очевидно, $C_0(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$.

Теорема 1.4. *Множина $C_0(\mathbb{R})$ є щільною в $L_p(\mathbb{R})$ для всіх $p \in [1; +\infty)$.*

Доведення. Для доведення твердження теореми досить наблизити елементами з $C_0(\mathbb{R})$ довільну функцію з множини

$$S' = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{(b_k, c_k]} \mid a_k \in \mathbb{C}, b_k, c_k \in \mathbb{R}, b_k < c_k, \, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Завдяки лінійності $C_0(\mathbb{R})$ достатньо наблизити індикатор довільного напівінтервалу $(a, b]$. Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо:

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a + \frac{\varepsilon}{4} < t < b - \frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{2}{\varepsilon}t - \frac{2a}{\varepsilon} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } a - \frac{\varepsilon}{4} < t < a + \frac{\varepsilon}{4} \\ -\frac{2}{\varepsilon}t + \frac{2b}{\varepsilon} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } b - \frac{\varepsilon}{4} < t < b + \frac{\varepsilon}{4} \\ 0, & \text{якщо } t < a - \frac{\varepsilon}{4} \text{ або } t > b + \frac{\varepsilon}{4} \end{cases}$$

Очевидно, $x_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R})$ та $\|x - x_\varepsilon\|_p^p < \varepsilon$. □

Аналогічно можна показати, що множина $C[a, b]$ щільна в $L_p(a, b)$, а $C_0(\mathbb{R}^n)$ щільна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. За допомогою теореми 1.4 легко довести наступне твердження (неперервність функцій з $L_p(\mathbb{R})$ в середньому).

Вправа 1.3. Нехай $x \in L_p(\mathbb{R})$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для всіх h: $|h| < \delta$ маємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x(t + h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon.$$

Наведемо ще одне важливе твердження, що показує зв'язок між збіжностями в L_p, майже скрізь та за мірою.

Лема 1.1. *Нехай* $1 \leq p < +\infty$. *Тоді*

$$x_n \longrightarrow x \text{ \textit{в} } L_p(T, \mu) \Rightarrow x_n \xrightarrow{\mu} x \Rightarrow \exists \{x_{nk}, k \geq 1\} : x_{n_k} \longrightarrow x \pmod{\mu}.$$

Доведення. Друга імплікація є твердженням класичної теореми Ріса. Перша імплікація легко випливає з нерівності Чебишова. Маємо:

$$\int\limits_T |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu(t) \geq \int\limits_{\{t \mid |x_n - x| > \varepsilon\}} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu(t) \geq$$
$$\geq \varepsilon^p \cdot \mu(\{t \mid |x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\}),$$

що доводить твердження. □

Безпосереднім наслідком цієї леми є наступне корисне твердження.

Твердження 1.1. Нехай $x_n \to x$ в $L_p(T, \mu)$, та $x_n \to y \pmod{\mu}$. Тоді $x = y \pmod{\mu}$.

Означення 1.7. Будемо називати $\mathcal{F}$-вимірну функцію $x : T \longrightarrow \mathbb{C}$ *істотно обмеженою* (відносно міри μ), якщо існує $c \geq 0$, таке що

$$|x(t)| \leq c \pmod{\mu}.$$

Простір усіх істотно обмежених на T функцій позначимо $\mathcal{L}_\infty(T,\mu)$. Введемо на цьому просторі функцію $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in T} |x(t)| := \inf\{c \geq 0 \mid |x(t)| \leq c \ (\mathrm{mod}\ \mu)\}.$$

Вправа 1.4. Довести, що

$$\|x\|_\infty = \min\{c \geq 0 \mid |x(t)| \leq c \ (\mathrm{mod}\ \mu)\}.$$

Легко показати, що $\|\cdot\|_\infty$ напівнорма. Після факторізації отримаємо банахів простір $L_\infty(T,\mu)$.

Твердження 1.2. Якщо $\mu(T) < +\infty$, то для всіх $1 \leq p' \leq p \leq \infty$:

$$L_\infty(T,\mu) \subset L_p(T,\mu) \subset L_{p'}(T,\mu) \subset L_1(T,\mu).$$

Ці включення є неперервними, тобто зі збіжності в $L_\infty(T,\mu)$ випливає збіжність в $L_p(T,\mu)$, зі збіжності в $L_p(T,\mu)$ випливає збіжність в $L_p{}'(T,\mu)$ та зі збіжності в $L_{p'}(T,\mu)$ випливає збіжність в $L_1(T,\mu)$.

Доведення. Маємо:

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_T |x(t)|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_T \|x\|_\infty^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (\mu(T))^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$

звідки $L_\infty(T,\mu) \subset L_p(T,\mu)$. Далі, за нерівністю Гельдера:

$$\|x\|_1 = \int\limits_T |x|\, d\mu \leq \left(\int\limits_T |x|^{p'}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_T 1^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_{p'} \cdot (\mu(T))^{\frac{1}{q}},$$

де число q таке, що $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = 1$. Звідси, $L_{p'}(T,\mu) \subset L_1(T,\mu)$. Аналогічно,

$$\|x\|_{p'}^{p'} = \int\limits_T |x|^{p'}\, d\mu \leq \left(\int\limits_T \left(|x|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} d\mu\right)^{\frac{p'}{p}} \left(\int\limits_T 1^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p^{p'} \cdot (\mu(T))^{\frac{1}{q}},$$

де число q таке, що $\frac{p'}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Звідси, $L_p(T,\mu) \subset L_{p'}(T,\mu)$. $\square$

Приклад 1.6. Нехай $T := \mathbb{N}$, σ-алгебра $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$. Довільну функцію $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ можна ототожнити з послідовністю $(x_k)_{k\geq 1}$, де $x_k := x(k), k \in N$. Нехай міра μ на $(T,\mathcal{F})$ така, що $\mu(k) = 1$ для всіх $k \in T$. Покладемо: $l_p := L_p\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu\right)$, $1 \leq p < +\infty$. Тоді

$$\|x\|_{l_p} = \left(\int\limits_T |x|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже,

$$l_p = \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty} \mid \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Легко довести, що простори $l_p,\ p \in [1, \infty)$ є сепарабельними. Справді, злічена множина

$$A = \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \ |x_k = \alpha_k + i\beta_k : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q},\ \exists k_0 = k_0(x) : x_k = 0\ \forall k \geq k_0\}$$

є щільною в l_p.

Зауважимо, що якщо

$$l_p \ni x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty} \longrightarrow x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p,$$

то $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k, n \longrightarrow \infty$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ (тобто з збіжності в l_p випливає покоординатна збіжність). Це є наслідком очевидної нерівності

$$\|x\|_p \geq |x_k|\,,\ k \geq 1.$$

Проте обернене твердження неправильне. Справді, для

$$x^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots),$$

маємо, що для всіх $k \geq 1$ $x_k^{(n)} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, але $\left\|x^{(n)}\right\|_p = 1 \not\to 0$.

Аналогічно можна ввести простір

$$l_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, \mu) = \left\{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid \|x\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k| < +\infty\right\}$$

Твердження 1.3. l_∞ несепарабельний банахів простір простір.

Доведення. Розглянемо незліченну множину

$$B := \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \{0,\ 1\}, k \geq 1\} \equiv 2^{\{0,1\}} \subset l_\infty.$$

Для довільних різних $x, x' \in B$ маємо

$$\rho(x, x') = \sup_{k\geq 1} |x_k - x'_k| = 1. \tag{1.4}$$

Нехай A довільна щільна в l_∞ множина, тобто для всіх $x \in l_\infty$, $\varepsilon > 0$ існує такий $y \in A$, що $\rho(x, y) < \varepsilon$, зокрема для кожного $x \in B$ знайдеться такий $y \in A$, що $\rho(x, y) < \frac{1}{2}$. Внаслідок рівності (1.4) для довільних різних $x, x' \in B$

$$B\left(x; \frac{1}{2}\right) \cap B\left(x'; \frac{1}{2}\right) = \emptyset.$$

Отже, кулі $\left\{B\left(x; \frac{1}{2}\right)\right\}_{x\in B}$ не перетинаються, і кожна з них містить принаймні одну точку з A. Тому, потужність A не менша за потужність B, тобто множина A є незліченною. $\square$

Вправа 1.5. Для довільних $1 \le p \le p' \le \infty$

$$l_1 \subset l_p \subset l_{p'} \subset l_\infty.$$

Вправа 1.6. Якщо $0 < p < 1$, то $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ не задовольняє нерівності трикутника.

Вправа 1.7. Довести, що простір $L_\infty(a, b) \equiv L_\infty((a, b), m)$ є несепарабельним.

1.3 Підпростори

Означення 1.8. Нехай E лінійний нормований простір. Довільна непорожня замкнена лінійна множина $L \subset E$ називається *підпростором* E.

Приклад 1.7. 1) Найпростіший приклад підпросторів дають $L = E$ та $L = \{0\}$.

2) Одновимірним підпростором (натягнутим на вектор $x \in E$) називається підпростір $L = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

3) Нехай $E = C[a, b]$, L множина всіх поліномів. L лінійна множина, але $\bar{L} = C[a, b]$. Таким чином L не є підпростором.

4) Нехай $E = C[a, b]$, $L = \{x \in C[a, b] \mid x(a) = 0\}$. Тоді L підпростір в просторі E.

5) Нехай $E = L_2(-1; 1)$, а $L = \{x \mid x(t) = 0$ для $\mu -$ м.в. $t \ge 0\}$. Очевидно L є лінійною множиною. Доведемо замкненість. Якщо $L \ni x_n \xrightarrow{L_2} x \in L_2(-1; 1)$, то існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ така що $x_{n_k} \longrightarrow x \,(\mathrm{mod}\, \mu)$, звідки $x(t) = 0$ для μ-м.в. $t \ge 0$, тобто $x \in L$. Таким чином L підпростір.

Зауважимо, що в лінійному нормованому просторі немає ортогональності, проте можна довести наступне важливе твердження.

Лема 1.2. *(Ріса про майже перпендикуляр) Нехай L підпростір лінійного нормованого простору E, $L \ne E$, тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : \quad \|x_\varepsilon\| = 1 :$ $\rho(x_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$.*

Доведення. Нехай $x \in E$, $x \notin L$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Позначимо $\rho(x, L) := \alpha$. Покажемо, що $\alpha > 0$. Дійсно, якщо $\alpha = 0$, то існує послідовність $y_n \in L$: $\alpha = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|x - y_n\|$. Тоді $y_n \to x$ і в силу замкненості L маємо $x \in L$, що суперечить початковому припущенню. З означення α маємо що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_\varepsilon \in L : \quad \|x - y_\varepsilon\| < \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$. Покладемо $x_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|}$, тоді $\|x_\varepsilon\| = \left\| \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} \right\| = 1$. Тоді

$$\forall y \in L : \quad \|x_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \|x - y_\varepsilon - y\|x - y_\varepsilon\|\| > \frac{1 - \varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = 1 - \varepsilon,$$

та

$$\rho(x_\varepsilon, L) = \inf_{y\in L} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Означення 1.9. Нехай E лінійний нормований простір, $M \subset E$. Лінійною оболонкою M будемо називати найменшу лінійну множину, що містить M

$$\text{л.о.}(M) := \Big\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \ \mid \ c_k \in \mathbb{C}, x_k \in M, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Означення 1.10. Замкненою лінійною оболонкою M будемо називати найменший підпростір, що містить M.

$$\text{з.л.о.}(M) := \overline{\text{л.о.}(M)}.$$

1.4 Ізоморфізм лінійних нормованих просторів

Означення 1.11. Нехай E лінійний нормований простір, $n \in \mathbb{N}$. Будемо казати, що $dimE = n$, якщо в E є n лінійно незалежних векторів і довільні $n+1$ вектори в E лінійно залежні. Будемо казати, що $dimE = \infty$, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ в E існує n лінійно незалежних векторів.

Вправа 1.8. Доведіть, що простори $C[a, b]$, l_p, $L_p(a, b)$ нескінченновимірні.

Означення 1.12. Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори. E_1 називається *ізоморфним* E_2, якщо існує бієкція $\varphi : E_1 \to E_2$, така що:
1) $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$.
2) $\exists C_1, C_2 > 0 : \quad \forall x \in E_1 \quad C_1\|x\|_{E_1} \leq \|\varphi(x)\|_{E_2} \leq C_2\|x\|_{E_1}$.

Зауважимо, що остання умова в точності означає, що відображення φ та його обернене неперервні.

Теорема 1.5. *(про ізоморфізм скінченновимірних просторів) Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $dimE_1 = dimE_2 = n < \infty$,. Тоді E_1 ізоморфний E_2.*

Доведення. Нехай E лінійний нормований простір, $dimE = n < \infty$. Достатньо довести, що E ізоморфний $\mathbb{C}^n$ з евклідовою нормою. Нехай $\{e_1, ..., e_n\}$ довільна система з n лінійно незалежних векторів в E. Тоді

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_1, ..., x_n) = \overline{x} \in \mathbb{C}^n : \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Розглянемо відображення

$$\varphi(x) := \overline{x} = (x_1, ..., x_n).$$

Очевидно φ лінійна бієкція з E в $\mathbb{C}^n$. Покажемо, що φ є ізоморфізмом. Очевидно

$$\|x\|_E = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_E \le \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_E \le \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_E^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = C\|\varphi(x)\|_{\mathbb{C}^n}, \tag{1.5}$$

де $C = \left(\sum\limits_{i=1}^n \|e_i\|_E^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Введемо функцію:

$$f(\overline{x}) := f(x_1, ..., x_n) = \|x\|_E.$$

Очевидно $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ неперервна функція З оцінки

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| = |\|x\|_E - \|y\|_E| \le \|x - y\|_E \le C\|\overline{x} - \overline{y}\|_{\mathbb{C}^n}$$

випливає, що f неперервна. Покажемо, що

$$d := \min_{\|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n}=1} f(\overline{x}) > 0.$$

Припустимо від супротивного, що $d = 0$, тоді $\exists \overline{x} : \|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n} = 1$, такий, що $f(\overline{x}) = \|x\|_E = 0$. Таким чином $x = 0$, що еквівалентно тому, що $\overline{x} = 0$. Отримали суперечність, отже $d > 0$. Для $x \in E$, $x \ne 0$ покладемо $x'_k := \frac{x_k}{\|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n}}$, $\overline{x}' = (x'_i)_{i=1}^n$. Очевидно $\|\overline{x}'\|_{\mathbb{C}^n} = 1$. Тоді

$$\|x\|_E = \|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n} \cdot \left\|\sum_{k=1}^n x'_k e_k\right\| = \|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n} f(\overline{x}') \ge d\|\overline{x}\|_{\mathbb{C}^n} = d\|\varphi(x)\|_{\mathbb{C}^n}. \tag{1.6}$$

З оцінок (1.5), (1.6) випливає, що φ ізоморфізм □

Означення 1.13. Нехай E лінійний нормований простір, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ норми на E. Будемо казати, що $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ еквівалентні ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), якщо

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad \forall x \in E \quad C_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2\|x\|_2.$$

Вправа 1.9. $\sim$ відношення еквівалентності.

Вправа 1.10. Нехай E лінійний нормований простір, $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ еквівалентні норми на E. Позначимо $E_i := (E, \|\cdot\|_i)$, $\quad i = 1, 2$. Доведіть, що

1) $x_n \to x$ в $E_1 \Leftrightarrow x_n \to x$ в E_2,

2) x_n - фундаментальна в $E_1 \Leftrightarrow x_n$ - фундаментальна в E_2,

3) E_1 - повний $\Leftrightarrow E_2$ - повний,
4) A - відкрита в $E_1 \Leftrightarrow A$ - відкрита в E_2,
5) A - замкнена в $E_1 \Leftrightarrow A$ - замкнена в E_2,
6)A - компактна в $E_1 \Leftrightarrow A$ - компактна в E_2,
7)A - обмежена в $E_1 \Leftrightarrow A$ - обмежена в E_2.

Вправа 1.11. В скінченновимірному лінійному нормованому просторі всі норми еквівалентні.

Вправа 1.12. Нехай $E = C[0,1]$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $\quad \|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$. Доведіть, що $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ не еквівалентні.

Вправа 1.13. Нехай E лінійний нормований простір, $M = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset E$. Довести, що л.о.$(M)$ підпростір в E.

Теорема 1.6. *Нехай E лінійний нормований простір. Тоді куля $\overline{B}(0,1) = \{x \mid \|x\| \le 1\}$ компактна в $E \Leftrightarrow dimE < \infty$.*

Доведення. Достатність випливає з теореми 1.5 про ізомррфізм скінченновимірних просторів. Нехай тепер $dimE = \infty$, доведемо, що $\overline{B}(0,1)$ не компактна. Для довільного $y_1 \in \overline{B}(0,1)$ розглянемо одновимірний підпростір натягнутий на $y_1 : L_1 = \{\lambda y_1,\, \lambda \in \mathbb{C}\}$. За лемою Ріса про майже перпендикуляр знайдеться вектор $y_2 \in E$ такий, що $\|y_2\| = 1$ та $\rho(y_2, L_1) \ge \frac{1}{2}$. Покладемо $L_2 :=$ л.о.$(\{y_1, y_2\})$. Тоді L_2 підпростір E та $L_2 \neq E$. Аналогічно знайдеться $y_3 \in E :\ \|y_3\| = 1,\ \rho(y_3, L) \ge \frac{1}{2}$. Покладемо $L_3 :=$ л.о.$(\{y_1, y_2, y_3\}) \neq E$. Повторюючи ці аргументи побудуємо послідовності векторів $\{y_n\}$ та підпросторів $L_n :=$ л.о.$(\{y_1, y_2, ..., y_n\})$ такі, що

$$\|y_n\| = 1, \quad \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

З останньої нерівності випливає, що $\|y_k - y_n\| > \frac{1}{2},\ k \neq n$. Таким чином з послідовності $\{y_n\}$ не можна виділити збіжну підпослідовность, що і доводить твердження теореми. $\square$

Розділ 2

Гільбертові простори

2.1 Скалярний добуток та його властивості

Нехай H (комплексний) лінійний простір.

Означення 2.1. Функція $(\cdot,\cdot) : H\times H \to \mathbb{C}$ називається *скалярним добутком*, якщо виконані наступні умови

1) Для довільного $x \in H$
$$(x,x) \geq 0,$$
та $(x,x) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 0$.

2) Для довільних $x, y \in H$
$$(x,y) = \overline{(y,x)}.$$

3) Для довільних $x, y, z \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x,z) + \mu (y,z) .$$

З означення скалярного добутку випливає, що для довільних $x, y, z \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ виконується

$$(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} (z,x) + \bar{\mu} (z,y) ,$$
$$(0,x) = (x,0) = 0.$$

Аналогічно вводиться скалярний добуток для дійсного лінійного простору. В цьому випадку друга аксіома є звичайною умовою симетричності $(x,y) = (y,x)\,,\ x, y \in H$.

Означення 2.2. *Передгільбертовим простором* називається лінійний простір зі скалярним добутком.

Наведемо основні властивості скалярного добутку та передгільбертових просторів.

Теорема 2.1. *Нерівність Шварца (Коші—Буняковського). Нехай H передгільбертовий простір. Тоді для довільних $x, y \in H$*

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)\,(y,y)\,. \tag{2.1}$$

Доведення. Розглянемо для фіксованих $x, y \in H$ функцію

$$B(\lambda) := (x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \lambda\,(y,x) + \bar{\lambda}\,(x,y) + |\lambda|^2\,(y,y) \ge 0,\ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для $y = 0$ (2.1) виконано. Для $y \ne 0$ покладемо $\lambda := -\frac{(x,y)}{(y,y)}$. Дістанемо:

$$0 \le (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)},$$

звідки

$$0 \le (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)},$$

що доводить теорему. □

Лема 2.1. *Передгільбертовий простір H є лінійним нормованим простором з нормою*

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}, \quad x \in H.$$

Доведення. Перевіримо властивості норми. Для довільного $x \in H$ $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0$ та

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Очевидно

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = |\lambda|\,\|x\|\,,\ x \in H,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Залишається перевірити нерівність трикутника. За нерівністю Шварца для довільних $x, y \in H$ маємо:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2 \le \\ &\le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\,,\end{aligned}$$

звідки $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. □

Означення 2.3. Повний передгільбертовий простір називається *гільбертовим* простором.

Наведемо приклади гільбертових просторів.

Приклад 2.1. 1) $H = \mathbb{C}^N$. Для $x = (x_k)_{k=1}^N, y = (y_k)_{k=1}^N \in H$ визначимо:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{y_k}.$$

Аксіоми скалярного добутку очевидно виконані.

2) $H = l_2$. Для $x = (x_k)_{k \geq 1}, y = (y_k)_{k \geq 1} \in H$ визначимо:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Зауважимо, що ряд збігається в силу нерівності Коші – Буняковського $\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l_2} \|y\|_{l_2}$.

3) $H = L_2(T, \mu)$. Для $x, y \in H$ покладемо:

$$(x, y) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu(t).$$

Перевірте самостійно, що скалярний добуток коректно визначений та H є гільбертовим простором.

Лема 2.2. *Тотожність паралелограма. Нехай H передгільбертовий простір. Тоді для довільних $x, y \in H$:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Доведення. Цю тотожність можна отримати, склавши дві очевидні рівності

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2,$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2.$$

□

Лема 2.3. *(Принцип поляризації.) Нехай H передгільбертовий простір. Тоді для довільних $x, y \in H$:*

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right). \qquad (2.2)$$

Доведення. Для доведення потрібно просто розписати праву частину аналогічно доведенню тотожності паралелограма. Відновіть деталі самостійно □

Зауваження 2.1. Тотожність паралелограма насправді є характеризуючою властивостю норми в передгільбертовому просторі. Й. Нейман у 1935 році довів, що (2.2) визначає в лінійному нормованому просторі E скалярний добуток тоді, й лише тоді, коли норма $\|\cdot\|$ задовольняє тотожності паралелограма. Зокрема, для довільних $p \in [1;\infty]$, $p \neq 2$ норми в l_p та $L_p(\mathbb{R})$ не задовольняють тотожності паралелограма, тобто ці простори не є гільбертовими.

Зауважимо, що якщо H є дійсним гільбертовим простором (або, як його тоді називають, *евклідовим* простором), то

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Лема 2.4. *(Неперервність скалярного добутка.) Нехай H передгільбертовий простір, послідовності $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$, такі що $x_n \xrightarrow{H} x, y_n \xrightarrow{H} y$. Тоді*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y).$$

Доведення. Доведення випливає з принципу поляризації та неперервності норми. □

2.2 Ортогональний розклад в гільбертовому просторі

Далі скрізь в цьому розділі H гільбертовий простір. Нагадаємо деякі означення.

Означення 2.4. Вектори $x, y \in H$ називаються ортогональними, якщо $(x,y) = 0$. Ортогональність векторів x, y будемо позначати як $x \perp y$.

Означення 2.5. Вектор $x \in H$ називається ортогональним до $M \subset H$, якщо $\forall y \in M : (x,y) = 0$. Будемо це позначати як $x \perp M$.

Означення 2.6. Множини $M_1 \in H,\ M_2 \in H$ називається ортогональними, якщо $\forall x \in M_1,\ \forall y \in M_2 : x \perp y$. Будемо це позначати як $M_1 \perp M_2$.

Означення 2.7. Ортогональним доповненням до множини $M \subset H$ називається

$$M^\perp = \{x \in H \mid x \perp M\}.$$

Лема 2.5. $\forall M \subset H \quad M^\perp$ *підпростір* H.

Доведення. Перевіримо спочатку, що $M^\perp$ лінійна множина. Нехай $x, y \in M^\perp, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тоді

$$\forall z \in M : \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) = 0.$$

Таким чином $\alpha x + \beta y \in M^\cdot$

Залишається пояснити замкненість $M^\perp$. Нехай $\{x_n\} \in M^\perp$ та $x_n \to x$ в H. Тоді в силу неперервності скалярного добутку

$$\forall z \in M: \quad (x,z) = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = 0 \Rightarrow x \in M^\perp.$$

□

Приклад 2.2. Нехай $H = \mathbb{C}^2$, e_1, e_2 ортонормовані вектори в H, $M = \{e_1\}$. Тоді $M^\perp = \{te_2 \mid t \in \mathbb{C}\}$.

Вправа 2.1. Нехай $M_1 \subset M_2 \subset H$. Довести, що $M_2^\perp \subset M_1^\perp$.

Вправа 2.2. Нехай $M \subset H$, $L =$ з.л.о. (M). Довести, що $L^\perp = M^\perp$.

Лема 2.6. *(про проекцію) Нехай H гільбертовий простір, L підпростір H. Тоді*

$$\forall x \in H \quad \exists! y \in L: \quad \rho(x,y) = \rho(x,L) := \inf_{z\in L}\|x - z\|.$$

Доведення. За означенням $\rho(x,L)$

$$\exists\, \{z_n\} \subset L: \quad \|x - z_n\| \to \rho(x,L) =: d.$$

З тотожності паралелограма маємо

$$2\left(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2\right) = \|2x - z_n - z_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2.$$

Звідси випливає, що

$$\|z_n - z_m\|^2 = -4\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\|^2 + 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 \leq$$

$$2\left(\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2\right) - 4d^2 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Отже z_n фундаментальна послідовність. В силу повноти H z_n збігається до деякого $y \in H$. Більш того, з замкненості L випливає, що $y \in L$. Очевидно

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \lim_{n\to\infty} = \|x - z_n\| = \rho(x,L).$$

Перевіримо єдиність y. Нехай $y, y' \in L$ такі, що $\|x - y\| = \|x - y'\| = d$. Тоді з тотожності паралелограма випливає, що

$$4d^2 = \left(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2\right) = 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2 + \|y - y'\|^2$$

Остаточно

$$\|y - y'\|^2 = 4d^2 - 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2 \leq 0$$

та $y' = y$. □

Теорема 2.2. *(про ортогональний розклад гільбертового простору) Нехай H гільбертовий простір, L підпростір H. Тоді*

$$\forall x \in H \quad \exists! y \in L, \quad \exists! z \in L^{\perp} \,:\, x = y + z. \tag{2.3}$$

Доведення. Нехай $y \in L \;:\; \|x - y\| = d = \rho(x, L)$. Покладемо $z := x - y$ та перевіримо, що $z \in L^{\perp}$. Маємо

$$\forall \nu \in L \quad \|z - \lambda\nu\|^2 = \|z\|^2 - \lambda(\nu, z) - \overline{\lambda}(z, \nu) + |\lambda|^2\|\nu\|^2 \geq d^2.$$

Отже,

$$\forall \nu \in L, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda^2|\|\nu\|^2 - \lambda(\nu, z) - \overline{\lambda}(z, \nu) \geq 0.$$

Для $\nu \neq 0$ покладемо $\lambda = \frac{\overline{(\nu,z)}}{\|\nu\|^2}$. Тоді

$$\frac{|(\nu, z)|^2}{\|\nu\|^2} - \frac{|(\nu, z)|^2}{\|\nu\|^2} - \frac{|(\nu, z)|^2}{\|\nu\|^2} \geq 0 \Rightarrow \quad (\nu, z) = 0.$$

Таким чином $z \in L^{\perp}$. Отже ми довели, що $x = y + z$, де $y \in L,\ z \in L^{\perp}$. Перевіримо єдиність. Припустимо, що є інше представлення $x = y' + z'$, де $x' \in L,\ z' \in L^{\perp}$. Тоді $L \ni y - y' = z' - z \in L^{\perp}$. Звідси випливає, що

$$0 = (y - y', z' - z) = \|z' - z\|^2.$$

Таким чином $z' = z$ та $y' = y$. □

Означення 2.8. Вектор $y \in L$, що однозначно визначається теоремою 2.2 (а також лемою 2.6) називається ортогональною проекцією x на L. Будемо це позначати як $y = pr_L x$.

Нагадаємо деякі означення. Нехай E лінійний простір, $A, B \subset E$. Сумою множин A, B називається

$$A + B := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in A,\ x_2 \in B\}.$$

Якщо H гільбертовий простір, L_1, L_2 ортогональні підпростори в H, то їх сума називається ортогональною

$$L_1 \oplus L_2 := L_1 + L_2.$$

Зауваження 2.2. З теореми 2.2 випливає, що

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Наведемо два наслідки з теореми 2.2.

Наслідок 2.1. $\forall M \subset H \quad H =$ *з.л.о* $(M) \oplus M^{\perp}$

Доведення. Нехай $L =$ з.л.о. (M). Залишається згадати, що в силу вправи 2.2 $L^{\perp} = M^{\perp}$. □

Означення 2.9. Нехай E лінійний нормований простір, $M \subset E$. Будемо говорити, що M тотальна, якщо з.л.о. $(M) = E$.

Наслідок 2.2. *Нехай $M \subset H$. Тоді M тотальна в H тоді і лише тоді, коли $M^{\perp} = \{0\}$.*

Доведення. Безпосередньо випливає з наслідку 2.1. □

Твердження 2.1. Нехай L, M ортогональні підпростори в H такі, що

$$H = L \oplus M.$$

Тоді $M = L^{\perp}$.

Доведення. З ортогональності L, M очевидно випливає, що $M \subset L^{\perp}$. Доведемо включення в інший бік. Маємо

$$\forall x \in L^{\perp} \quad \exists! x_1 \in L \quad \exists! x_2 \in M : \quad x = x_1 + x_2.$$

Домножимо цю рівність на x_1 скалярно та отримаємо $0 = (x, x_1) = \|x_1\|^2 + (x_2, x_1)$. Так як $(x_2, x_1) = 0$, то маємо $\|x_1\|^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Тому $x = x_2 \in M \Rightarrow L^{\perp} \subset M$. □

Приклад 2.3. Нехай $H = L_2(-1, 1)$,

$$L = \{x \in H \mid x(t) = x(-t)(mod\, m)\}, \quad M = \{x \in H \mid x(t) = -x(-t)(mod\, m)\}.$$

Покажемо, що L підпростір. Лінійність L очевидна, доведемо замкненість. Нехай $x_n \in L, \quad x_n \to x$ в $H \Rightarrow x_n \xrightarrow{m} x$, тоді за теоремою Ріса $\exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to x \; (mod\, m) \Rightarrow x \in L$. Аналогічно доводиться, що M підпростір. Так як добуток парної та непарної функції є непарною, то

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}dt = 0, x \in L, \; y \in M.$$

Зокрема, $L \perp M$. Покажемо, що $H = L \oplus M$. Очевидно $\forall x \in H$

$$x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Ясно, що $y(t) := \frac{x(t)+x(-t)}{2} \in L, \; z(t) := \frac{x(t)-x(-t)}{2} \in M$. З твердження 2.1 тепер випливає, що $\quad M = L^{\perp}$, та $y = pr_L x$.

2.3 Ортонормовані системи в гільбертовому просторі

Означення 2.10. Нехай H гільбертовий простір, $\{e_k \mid k \geq 1\} \subset H$. Будемо говорити, шо $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ортонормована система (ОНС), якщо

$$(e_k, e_j) = \delta_{kj} := \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Наведемо основні властивості ортонормованих систем.

Лема 2.7. *Нехай H гільбертовий простір, $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНС в H, $\{c_k \mid k \geq 1\} \subset \mathbb{C}$. Тоді $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в H $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$.*

Доведення. Нехай $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. За теоремою Піфагора для $n \geq m$ маємо

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2,$$

звідки і випливає твердження леми. □

Лема 2.8. *(Нерівність Беселя) Нехай $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНС. Тоді $\forall x \in H$*

$$\sum_{k \geq 1} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Доведення. Очевидно для $\forall x \in H$

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\|^2 = \|x\|^2 - \left(x, \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k, x\right) + \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$$

Звідси випливає, що

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2.$$

Залишається перейти до границі, коли $n \to \infty$. □

Наслідок 2.3. *Нехай $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНС. Тоді $\forall x \in H$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ збігається в H.*

Лема 2.9. *Нехай H гільбертовий простір, $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНС, $L :=$ з.л.о. $\{e_k | k \geq 1\}$. Тоді*

$$\forall x \in H \quad pr_L x = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k.$$

Доведення. Очевидно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \in L$. Тому залишається довести, що

$$x - \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k \in L^{\perp}$$

З вправи 2.2 випливає, що останнє еквівалентно тому, що

$$y := x - \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k \perp e_j \quad j \geq 1.$$

З неперервності скалярного добутку маємо

$$(y, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k \geq 1} (x, e_k)(e_k, e_j) = 0,$$

що і доводить лему. □

Означення 2.11. Будемо говорити, що ОНС $\{e_k \mid k \geq 1\}$ є ортонормованим базисом (ОНБ) в H, якщо з.л.о. $\{e_k \mid k \geq 1\} = H$.

Зауваження 2.3. Нехай $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНБ в H. Тоді з леми 2.9 випливає, що

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k \tag{2.4}$$

(ряд збігаються в H). Ясно, що правильно і обернене твердження (з (2.4) випливає, що $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНБ в H.

Зауваження 2.4. З наслідку 2.2 безпосередньо випливає, що ОНС $\{e_k \mid k \geq 1\}$ є ОНБ в гільбертовому просторі H тоді і лише тоді, коли вона є *повною*, тобто

$$\{e_k \mid k \geq 1\}^{\perp} = \{0\}$$

.

Ясно, що ОНС та ОНБ можна розглядати і в передгільбертових просторах, проте в цьому випадку повна ортонормована система може вже не бути базисом (легко показати, що ОНБ є повною ОНС в довільному передгільбертовому просторі).

Вправа 2.3. Навести приклад повної ортонормованої системи в передгільбертовому просторі $R[a,b]$ з скалярним добутком

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

що не є ортонормованим базисом.

Теорема 2.3. *(Рівність Парсеваля) Нехай H гільбертовий простір, $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНБ в H. Тоді $\forall x, y \in H$*

$$(x,y) = \sum_{k\geq 1}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.$$

Доведення. З (2.4) випливає, що $x = \sum\limits_{k\geq 1}(x,e_k)e_k, \quad y = \sum\limits_{k\geq 1}(y,e_k)e_k$. Тоді

$$(x,y) = \sum_{k,j\geq 1}(x,e_k)\overline{(y,e_j)}(e_k,e_j) = \sum_{k\geq 1}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.$$

□

Теорема 2.4. *Нехай $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНС, тоді $\{e_k \mid k \geq 1\}$ буде ОНБ тоді і лише тоді, коли $\forall x \in H$ виконується*

$$\|x\|^2 = \sum_{k\geq 1}|(x,e_k)|^2. \tag{2.5}$$

Доведення. Необхідність випливає з рівності Парсеваля для $x = y$. Доведемо достатність. Маємо (дивись доведення нерівності Беселя)

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2 \to 0, \ n \to \infty.$$

Таким чином виконано (2.4), що і доводить теорему.

□

Приклад 2.4. Розглянемо в $H = l_2$ ОНС $e_n = (\underbrace{0,...,0}_{n-1},1,0,0,0,...)$. Очевидно, що для $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$

$$\|x\|^2 = \sum_{k\geq 1}|x_k|^2 = \sum_{k\geq 1}|(x,e_k)|^2.$$

В силу теореми 2.4 $\{e_n \mid k \geq 1\}$ ОНБ в H.

Приклад 2.5. Розглянемо в $H = L_2(-\pi, \pi)$ ОНС

$$\left\{ e_k(t) := \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}, k \in Z \right\}.$$

Очевидно

$$\text{л.о.}\{e^{ikt} \mid k \in Z\} = \text{л.о.}\{\cos kt, \sin kt \mid k \geq 0\}.$$

Звідси випливає, що л.о.$\{e^{ikt} \mid k \in Z\}$ щільна в L_2-метриці в $R[-\pi, \pi]$, а тоді і в $H = L_2(-\pi, \pi)$. Таким чином $\{e_k \mid k \in Z\}$ ОНБ в H.

Нагадаємо коротко суть процесу ортогоналізації. Припустимо, що система $\{x_k \mid k \geq 1\} \subset H$ лінійно незалежна, тобто $\forall n \geq 1$ $\{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ лінійно незалежна. Процес ортогоналізації полягає в побудові ОНС $\{e_k \mid k \geq 1\}$ такої, що

$$\forall n \geq 1 \quad \text{л.о.}\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\} = \text{л.о.}\{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Легко перевірити, що систему $\{e_k \mid k \geq 1\}$ можна визначити наступними формулами

$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$,

$e_2 := \frac{x_2 - (x_2, e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2, e_1)e_1\|} \in$ л.о.$\{x_1, x_2\}$,

...

$e_n := \dfrac{x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k)e_k}{\|x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k)e_k\|} \in$ л.о.$\{x_1, ..., x_n\}$.

Теорема 2.5. *В сепарабельному гільбертовому просторі існує ОНБ.*

Доведення. Нехай $\{x_n \mid n \geq 1\}$ злічена скрізь щільна множина в H. Розглянемо систему векторів $\{x'_n \mid n \geq 1\}$ утворену з $\{x_n \mid n \geq 1\}$ "викиданням"лінійно залежних векторів. Тоді $\overline{\text{л.о.}\{x'_n \mid n \geq 1\}} = \overline{\text{л.о.}\{x_n \mid n \geq 1\}} = H$. Очевидно, що в результаті ортогоналізації системи $\{x'_n \mid n \geq 1\}$ отримаємо ОНБ в H. □

Означення 2.12. Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори. Будемо говорити, що E_1, E_2 ізометрично ізоморфні, якщо існує лінійна бієкція $\varphi : E_1 \to E_2$ така, що $\forall x \in E_1 \quad \|\varphi(x)\|_{E_2} = \|x\|_{E_1}$.

Теорема 2.6. *Довільний нескінченновимірний сепарабельний гільбертовий простір H ізометрично ізоморфний l_2.*

Доведення. Нехай $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ОНБ в H. Тоді

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k.$$

Покладемо

$$\varphi(x) := (x_k)_{k=1}^{\infty}, \text{ де } x_k := (x, e_k).$$

Зауважимо, що в силу рівності Парсеваля (2.5) φ є ізометрією з H в l_2. Лінійність φ випливає з рівності

$$(\lambda x + \mu y)_k = (\lambda x + \mu y, e_k) = \lambda(x, e_k) + \mu(y, e_k) = \lambda x_k + \mu y_k, \ x, y \in H, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Зауважимо, що довільна лінійна ізометрія є ін'єкцією. Сюр'єктивність φ доведіть самостійно. □

Нагадаємо, що довільний метричний простір можна поповнити до повного метричного простору. Аналоги цього важливого результату справедливі і для лінійних нормованих та передгільбертових просторів. Наведемо без доведення відповідні формулювання.

Теорема 2.7. *Нехай E лінійний нормований простір. Тоді існує банаховий простір $\widetilde{E}$ та лінійне відображення $J : E \to \widetilde{E}$ таке, що*

1) $J(E)$ щільна в $\widetilde{E}$,

2) $\forall x \in E \quad \|J(x)\|_{\widetilde{E}} = \|x\|_E$.

Теорема 2.8. *Нехай H передгільбертовий простір. Тоді існує гільбертовий простір $\widetilde{H}$ та лінійне відображення $J : H \to \widetilde{H}$ таке, що*

1) $J(H)$ щільна в $\widetilde{H}$,

3) $\forall x, y \in H \quad (J(x), J(y))_{\widetilde{H}} = (x, y)_H$.

Простори $\widetilde{E}$ та $\widetilde{H}$ називаються поповненням E та H відповідно. Очевидно вони визначаються однозначно з точністю до ізометричного ізоморфізма.

Приклад 2.6. Розглянемо передгільбертовий простір $H = C[a, b]$ з скалярним добутком $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$. Тоді $\widetilde{H} = L_2(a, b), \ J(x) = \hat{x}$, де $\hat{x}$ клас еквівалентності, що містить x.

Розділ 3

Лінійні неперервні функціонали

3.1 Означення і елементарні властивості

Означення 3.1. Нехай E лінійний нормований простір, $f : E \to \mathbb{C}$. f називається лінійним функціоналом, якщо $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Зауваження 3.1. Для довільного лінійний функціонала $f(0) = 0$ (покладіть $\lambda = \mu = 0$).

Означення 3.2. Нехай E лінійний нормований простір, $f : E \to \mathbb{C}$ лінійний функціонал. f називається обмеженим, якщо

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x \in E : \quad |f(x)| \leq C||x||. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Нехай $f : E \to \mathbb{C}$ - лінійний функціонал. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) f неперервний в точці 0;
2) f неперервний на E;
3) f обмежений.

Доведення. 1) $\Rightarrow$2). Нехай $E \ni x_n \to x_0 \in E$. Тоді

$$f(x_n) - f(x_0) = f(x_n - x_0) \to f(0) = 0.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Доведемо від супротивного. Припустимо, що f не обмежений, тоді $\forall\ k \geq 1 \quad \exists\ x_k \in E : \ |f(x_k)| > k||x_k||$ (зокрема $x_k \neq 0$). Розглянемо $y_k := \frac{x_k}{\sqrt{k}||x_k||}$. Очевидно

$$||y_k|| = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0, \ k \to \infty,$$

проте

$$|f(y_k)| = \frac{|f(x_k)|}{\sqrt{k}||x_k||} > \sqrt{k} \to \infty,\ k \to \infty,$$

що суперечить неперевності в точці 0. 3) $\Rightarrow$ 1). Нехай $x_n \to 0$. Тоді з (3.1) випливає, що

$$|f(x_n)| \leq C||x_n|| \to 0, n \to \infty.$$

Таким чином f неперервний в 0. □

Приклад 3.1. Нехай $E = \mathbb{C}^m$. Позначимо через e_k вектор у якого всі координати крім k-тої нульові, а k-та координата рівна одиниці. Очевидно

$$\mathbb{C}^m \ni x = (x_1, ..., x_m) = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k.$$

Тоді для довільного лінійного функціонала $f : E \to \mathbb{C}$ маємо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \tag{3.2}$$

де $y_k := f(e_k) \in \mathbb{C}$. Очевидно формула (3.2) задає загальний вигляд лінійного функціонала на $\mathbb{C}^m$, зокрема довільний лінійний функціонал на $\mathbb{C}^m$ буде неперервним. З теореми про ізоморфізм скінченновимірних просторів випливає що останнє залишається вірним і для довільного скінченновимірного простору.

Приклад 3.2. Нехай $E = C[a, b], \quad ||x|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ x \in E$. Розглянемо

$$f(x) = x(a),\ x \in E.$$

. Очевидно, $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y)(a) = \lambda x(a) + \mu y(a) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

тобто f лінійний функціонал. З оцінки

$$|f(x)| = |x(a)| \leq ||x||,\ x \in E$$

випливає, що f обмежений, а тому неперервний.

Множину всіх лінійних неперервних функціоналів на E будемо позначати E^* та називати *спряженим* (до E) простором. Очевидно на E^* можно ввести структуру лінійного простору. Справді, для $f, f_1, f_2 \in E^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}$, покладемо

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ (f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), x \in E.$$

Очевидно $\lambda f, f_1 + f_2 \in E^*$, та всі аксіоми лінійного простору виконані.

Зауважимо, що для $f \in E^*$ з оцінки (3.1) випливає, що для деякого $C \geq 0$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq C, \ x \neq 0. \tag{3.3}$$

Означення 3.3. Нехай E лінійний нормований простір, $f \in E^*$. Нормою f будемо називати

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{3.4}$$

Зауваження 3.2. З (3.1) випливає, що $\|f\| \leq C < \infty$.

Теорема 3.2. *Нехай $f \in E^*$. Тоді*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \min\{C \geq 0 \mid \forall x \in E : \ |f(x)| \leq C\|x\|\}.$$

Доведення. Покладемо

$$a_1 := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|, \ a_2 := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|, \ a_3 := \min\{C \geq 0 \mid \forall x \in E : \ |f(x)| \leq C\|x\|\}.$$

Очевидно

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \sup_{\|y\|=1} |f(y)| = a_1.$$

Нехай C таке, що $\forall x \in E \quad |f(x)| \leq C\|x\|$. Тоді з (3.4) випливає, що $\|f\| \leq C$, а значить $\|f\| \leq \inf\{C \geq 0 \mid \forall x \in E : \ |f(x)| \leq C\|x\|\}$. До того ж з (3.4) маємо, що

$$\forall x \in E \ \ |f(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

Звідси випливає, що $\|f\| = a_3$. Рівність $\|f\| = a_2$ доведіть самостійно. □

Теорема 3.3. *Формула (3.4) задає норму на E^*.*

Доведення. Потрібно довести, що $\|f\|$ задовольняє означенню норми. Перші дві властивості перевірте самостійно, ми доведемо третю. Нехай $f_1, f_2 \in E^*$, тоді для довільного $x \in E$

$$|(f_1 + f_2)(x)| \leq |(f_1(x)| + |(f_2)(x)| \leq (\|f_1\| + \|f_2\|)\,\|x\|.$$

Звідси випливає, що $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$. □

Теорема 3.4. *(про повноту спряженого простору) Нехай E лінійний нормований простір. Тоді E^* банаховий простір.*

Доведення. Доведемо повноту E^*. Нехай $\{f_n, n \geq 1\} \subset E^*$ фундаментальна послідовність, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N \; \forall n, m \geq N :$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|. \tag{3.5}$$

Таким чином для довільного $x \in E$ числова послідовність $\{f_n(x)\}$ фундаментальна. Звідси випливає, що

$$\forall x \in E \;\text{ існує }\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{C}.$$

Перевіримо, що $f \in E^*$. Очевидно для $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad x, y \in E$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Спрямуємо $m \to \infty$ в (3.5) та отримаємо, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N \; \forall n \geq N :$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Таким чином $\forall n \geq N :$

$$f_n - f \in E^* \text{ та } \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f = (f - f_n) + f_n \in E^*$ та $f_n \to f$. □

Наведемо прості приклади підрахунку норми функціонала.

Приклад 3.3. Нехай

$$E = C[a, b], \quad f(x) = x(a), \; x \in E.$$

Очевидно, f лінійний функціонал та

$$|f(x)| = |x(a)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq 1.$$

З іншого боку для $x_0(t) := 1$ маємо

$$\|x_0\| = 1, \quad f(x_0) = 1. \text{ Тому } \quad \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = 1.$$

Таким чином $\|f\| = 1$.

Приклад 3.4. Нехай

$$E = C[-1, 1], \quad f(x) = x(-1) - 2x(0) + 4x(1), \; x \in E.$$

Очевидно, f лінійний функціонал та

$$|f(x)| \leq |x(-1)| + 2|x(0)| + 4|x(1)| \leq 7\|x\| \;\Rightarrow\; \|f\| \leq 7.$$

Нехай $x_0(t) := 2|t| - 1$, тоді

$$\|x_0\| = 1, \; f(x_0) = 1 + 2 + 4 = 7 \;\Rightarrow\; \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = 7.$$

Таким чином $\|f\| = 7$.

Приклад 3.5. Нехай $E = C[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - x(0),\ x \in E$. Очевидно, f лінійний функціонал та

$$|f(x)| \leq \int\limits_0^1 t|x(t)|dt + |x(0)| \leq \frac{3}{2}\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq \frac{3}{2}.$$

Розглянемо

$$x_n(t) := \begin{cases} 2nt - 1, & 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тоді $\|x_n\| = 1$, та за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$f(x_n) = \int\limits_0^1 tx_n(t)dt + 1 \to \frac{3}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq \sup_{n \geq 1} |f(x_n)| = \frac{3}{2}.$$

Таким чином $\|f\| = \frac{3}{2}$.

3.2 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в конкретних просторах

3.2.1 Загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в $\mathbb{C}^m$

Ми вже встановили, що загальний вигляд лінійного функціонала в $E = \mathbb{C}^m$ дається формулою (3.2), з якої випливає, що всі такі функціонали неперервні. Обчислимо $\|f\|$ у випадку коли

$$\|x\|_E = \|x\|_1 := \sum_{k=1}^m |x_k|,\ x = (x_k)_{k=1}^m.$$

Маємо

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^m x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq \max_{1 \leq k \leq m} |y_k| \cdot \|x\|_1,\ x \in E.$$

Звідси випливає, що

$$\|f\| \leq \max_{1 \leq k \leq m} |y_k| =: \|y\|_\infty.$$

З іншого боку

$$\|f\| = \max_{\|x\|=1} |f(x)| \geq \max_{1\leq k\leq m} |f(e_k)| = \max_{1\leq k\leq m} |y_k| = \|y\|_\infty.$$

Таким чином

$$\|f\| = \|y\|_\infty.$$

Вправа 3.1. Нехай $p \in [1, \infty]$, $\|x\|_E = \|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_k)_{k=1}^m$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

Довести, що в цьому випадку $\|f\| = \|y\|_q$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3.2.2 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в $l_p, L_p(T, \mu)$

Нехай $E = l_p$. Позначимо через e_k вектор у якого всі координати крім k-тої нульові, а k-та координата рівна одиниці.

Лема 3.1. *Нехай $p \in [1, \infty)$. Тоді $\forall x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p$*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \tag{3.6}$$

де ряд збігається в l_p.

Доведення. $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\|_p = \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, n \to \infty$ □

Зауваження 3.3. Для $p = \infty$ ряд (3.6) може не збігатися. Наведіть приклад.

Теорема 3.5. *Нехай $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (для $p = 1$ вважаємо $q = \infty$). Тоді формула*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \ x \in l_p. \tag{3.7}$$

де $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in l_q$ дає загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в l_p, до того ж $\|f\| = \|y\|_q$.

Доведення. Доведемо теорему для $p \in (1, \infty)$. Нехай f задається формулою (3.7), де $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in l_q$. Тоді за нерівністю Гьольдера ряд (3.7) збігається та

$$|f(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \ x \in l_p.$$

Лінійність f очевидна, тому звідси випливає, що

$$f \in l_p^*, \quad \text{та} \quad \|f\| \leq \|y\|_q. \tag{3.8}$$

Нехай тепер $f \in l_p^*$. Тоді завдяки (3.6)

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k).$$

Ми довели, що f задається формулою (3.7), де $y_k := f(e_k)$. Покажемо, що $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$. Нехай

$$z^{(n)} := (|y_1|^{q-1} e^{-iargy_1}, ..., |y_n|^{q-1} e^{-iargy_n}, 0, 0, 0, ...) \in l_p, \ n \geq 1.$$

Маємо

$$f(z^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} e^{-iargy_k} y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q,$$

та

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = |f(z^{(n)})| \leq \|f\| \|z^{(n)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p}.$$

Таким чином для всіх $n \geq 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Звідси випливає, що $y \in l_q$ та $\|y\|_q \leq \|f\|$. Остаточно з (3.8) маємо, що

$$\|f\| = \|y\|_q.$$

□

Вправа 3.2. Доведіть теорему для $p = 1$.

З теореми 3.5 випливає, що формула (3.7) задає сюр'єктивне ізометричне відображення

$$l_p^* \ni f \xrightarrow{J} y \in l_q.$$

Легко бачити, що це відображення лінійне. Звідси та з ізометричності автоматично випливає ін'єктивність J. Таким чином встановлена наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді l_p^* ізометрично ізоморфно l_q.*

Ототожнюючи ізометрично ізоморфні простори це часто записують як

$$(l_p)^* = l_q, \ 1 \leq p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Зауваження 3.4. Для $p = \infty$ легко показати, що для довільного $y \in l_1$ формула (3.7) задає лінійний неперервний функціонал на l_∞ та $\|f\| = \|y\|_1$. Проте не всі функціонали з l_∞^* задаються формулою (3.7) (ми це покажемо далі). Таким чином зараз можна говорити про (строге) включення

$$l_1 \subset l_\infty^*.$$

Аналогічні результати справедливі для просторів $L_p(T,\mu)$. Наведемо їх без доведення.

Теорема 3.7. *Нехай $E = L_p(T,\mu)$, $p \in [1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ тоді*
1) $\forall f \in E^* \quad \exists! y \in L_q(T,\mu)$:

$$f(x) = \int\limits_T x(t)y(t)d\mu, \; x \in L_p(T,\mu), \tag{3.9}$$

2) $\|f\| = \|y\|_q$,
3) Відображення

$$L_p(T,\mu)^* \ni f \xrightarrow{J} y \in L_q(T,\mu).$$

є ізометричним ізоморфізмом.

Ототожнюючи ізометрично ізоморфні простори отримаємо

$$L_p(T,\mu)^* = L_q(T,\mu), \; p \in [1,\infty), \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Вправа 3.3. Довести, що $\forall\, y \in L_1(T,\mu)$ формула (3.9) задає лінійний неперервний функціонал на $L_\infty(T,\mu)$ та $\|f\| = \|y\|_1$.

3.2.3 Загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі

Теорема 3.8. *(Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі). Нехай H гільбертовий простір. Тоді для довільного $f \in H^*$ існує единий $y \in H$ такий, що*

$$f(x) := (x,y), \quad x \in H. \tag{3.10}$$

До того ж

$$\|f\| = \|y\|. \tag{3.11}$$

Доведення. Нехай $f \in H^*$, $L := \ker f := \{x \in H \mid f(x) = 0\}$. Зауважимо, що L підпростір в H. Очевидно можливі два наступні випадки.

а) $L = H \Leftrightarrow f = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0.$

б) $L \neq H$. Тоді $\exists\, y_1 \in L^{\perp},\ y_1 \neq 0$. Так як $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, то $y_1 \notin L$ та $f(y_1) \neq 0$. Для довільного $x \in H$ розглянемо вектор $z := x - \frac{f(x)}{f(y_1)} y_1$. Очевидно

$$f(z) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_1)} f(y_1) = 0 \ \Rightarrow \ z \in L.$$

Тоді

$$0 = (z, y_1) = (x, y_1) - \frac{f(x)}{f(y_1)} \|y_1\|^2 \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{f(y_1)}{\|y_1\|^2}(x, y_1).$$

Покладемо $y := \overline{\frac{f(y_1)}{\|y_1\|^2}} \cdot y_1$, та отримаємо (3.10). Єдиність легко довести від супротивного (доведіть це самостійно). Перевіримо (3.11). З нерівності Шварца випливає, що $\forall\, x \in H$

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|y\| \|x\| \text{ та } \|f\| \leq \|y\|.$$

З іншого боку, з співвідношень

$$f(y) = (y, y) = \|y\|^2, \quad |f(y)| \leq \|f\|\, \|y\|$$

маємо $\|y\| \leq \|f\|$, що доводить (3.11). □

Зауваження 3.5. Очевидно, для довільного $y \in H$ формула (3.10) задає лінійний неперервний функціонал на H. Зокрема з доведенної теореми випливає, що відображення

$$H^* \ni f \xrightarrow{J} y \in H$$

є ізометричним антилінійним ізоморфізмом, де антилінійність означає, що

$$J(f + g) = J(f) + J(g),\ J(\lambda f) = \bar{\lambda} J(f),\ f, g \in H^*,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ототожнюючи ізометрично ізоморфні простори часто пишуть

$$H^* = H.$$

Розділ 4

Продовження лінійних неперервних функціоналів

4.1 Продовження по неперервності

Нехай E лінійний нормований простір, L лінійна підмножина E. Очевидно, що L теж буде лінійним нормованим простором з тією самою нормою. Нас буде цікавити питання продовження лінійного неперервного функціонала з L на E. Нехай $f \in L^*$, $F \in E^*$. F називається *продовженням* f якщо для всіх $x \in L$ $\;F(x) = f(x)$. В цьому випадку f називається *звуженням* F на L. Це буде позначатися $f = F\restriction_L$.

Зауваження 4.1. Зауважимо, що при продовженні норма функціонала не може зменшитися. Тобто з $f = F\restriction_L$ випливає, що $\|F\| \geq \|f\|$. Справді,

$$\|F\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |F(x)| \geq \sup_{x\in L, \|x\|=1} |F(x)| = \sup_{x\in L, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|.$$

В зв'язку з цим важливою є задача побудови продовження з збереженням норми. У випадку щільності L в E ця задача розв'язується досить просто.

Теорема 4.1. ***(Продовження по неперервності)*** *Нехай E лінійний нормований простір, L щільна лінійна підмножина L, $f \in L^*$. Тоді існує єдиний $F \in E^*$ такий, що $F\restriction_L = f$. До того ж $\|F\| = \|f\|$.*

Доведення. З означення щільної підмножини отримуємо, що

$$\forall x \in E \quad \exists \{x_n\} \subset L : \; x_n \to x, \; n \to \infty.$$

Покладемо

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n). \tag{4.1}$$

Покажемо, що ця границя існує та не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$. Існування границі випливає з очевидної оцінки

$$|f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n - x_m)| \leq \|f\| \, \|x_n - x_m\| \to 0, \ m, n \to \infty,$$

та фундаментальності $\{x_n\}$. Нехай тепер інша послідовність $L \ni x'_n \to x, \ n \to \infty$. Тоді $\|x'_n - x_n\| \to 0$, та

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x'_n - x_n\| \to 0, \ n \to \infty,$$

що доводить незалежність границі від вибору $\{x_n\}$. Доведемо лінійність F. Нехай $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\{x_n\} \subset L$, $\{y_n\} \subset L$ такі, що $x_n \to x, y_n \to y, \ n \to \infty$. Тоді

$$F(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \mu \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lambda F(x) + \mu F(y).$$

Доведемо неперервність (обмеженість) F. З (4.1) випливає, що

$$|F(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f\| \, \|x_n\| = \|f\| \, \|x\| \, , \ x \in E.$$

Таким чином $F \in E^*$ та $\|F\| \leq \|f\|$. Використавши зауваження перед теоремою, отримаємо, що $\|F\| = \|f\|$. Поясніть самостійно, що F є продовженням f. Нехай тепер $\widetilde{F}$ довільне неперервне продовження f на E. Тоді F та $\widetilde{F}$ співпадають на щільній множині L, а тому співпадають і на всьому просторі E. Звідси випливає, що неперервне продовження f на E єдине. □

4.2 Теорема Гана - Банаха

Ситуація коли L не щільна в E істотно складніше, проте справедлива наступна, надзвичайно важлива, теорема.

Теорема 4.2. ***(Гана-Банаха)*** *Нехай E лінійний нормований простір, L лінійна підмножина E, $f \in L^*$. Тоді існує $F \in E^*$ такий, що $F \restriction_L = f$ та $\|F\| = \|f\|$.*

Доведемо спочатку наступну лему, що закладає фундамент доведення теореми Гана-Банаха.

Лема 4.1. *(Продовження рангу 1) Нехай E дійсний лінійний нормований простір, L лінійна підмножина E, $y \notin L$, $L_1 := л.о\{L \cup \{y\}\} = \{x + \lambda y, \ x \in L, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $f \in L^*$. Тоді $\exists F \in L_1^*$ такий, що $F \restriction_L = f$ та $\|F\| = \|f\|$.*

Доведення. Зауважимо, що представлення вектора $z \in L_1$ у вигляді

$$z = x + \lambda y, \ x \in L, \lambda \in \mathbb{R}$$

єдине. Дійсно, нехай

$$z = x_1 + \lambda_1 y = x_2 + \lambda_2 y,\ x_i \in L, \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2$, то $x_1 = x_2$. Якщо ж $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $y = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(x_2 - x_1) \in L$, що приводить до суперечності. Визначимо лінійне продовження F функціонала f на L_1 формулою

$$F(x + \lambda y) = F(x) + \lambda F(y) := f(x) + \lambda c,\ x \in L,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

де $c = F(y) \in \mathbb{R}$ деяка стала. Легко бачити, що F лінійний функціонал на L_1 та $F\restriction_L = f$. Покажемо, що сталу c можно підібрати так, щоб F був обмеженим функціоналом з нормою, що не перевищує $\|f\|$. Останнє еквівалентно тому, що

$$|F(x + \lambda y)| = |f(x) + \lambda c| \leq \|f\| \, \|x + \lambda y\|\,,\ x \in L, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Зауважимо що для $\lambda = 0$ (4.2) виконано, тому далі вважаємо, що $\lambda \neq 0$. Покладемо $x' = \frac{x}{\lambda}$, тоді (4.2) можно переписати, як

$$|f(x') + c| \leq \|f\| \, \|x' + y\|\,,\ x' \in L,$$

або

$$- \|f\| \, \|x' + y\| - f(x') \leq c \leq \|f\| \, \|x' + y\| - f(x'),\ x' \in L. \tag{4.3}$$

Зауважимо, що

$$\forall x_1, x_2 \in L : \quad - \|f\| \, \|x_1 + y\| - f(x_1) \leq \|f\| \, \|x_2 + y\| - f(x_2), \tag{4.4}$$

що випливає з

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \|f\| \, \|x_2 - x_1\| = \|f\| \, \|(x_2 + y) - (x_1 + y)\| \leq \|f\| \, (\|x_2 + y\| + \|x_1 + y\|).$$

Позначимо

$$c_1 := \sup_{x \in L}\{- \|f\| \, \|x + y\| - f(x)\},\ c_2 := \inf_{x \in L}\{\|f\| \, \|x + y\| - f(x)\}.$$

Легко бачити, що з (4.4) випливає, що

$$-\infty < c_1 \leq c_2 < \infty.$$

Тоді для довільного $c \in [c_1, c_2]$ буде виконуватися (4.3), а значить і (4.2). Останнє означає, що $\|F\| \leq \|f\|$. Так як при продовжені норма не зменшується, то остаточно маємо, що $\|F\| = \|f\|$. $\square$

Теорема 4.3. ***(Гана-Банаха, випадок дійсного простору.)*** *Нехай E дійсний лінійний нормований простір, L лінійна підмножина E, $f \in L^*$. Тоді існує $F \in E^*$ такий, що $F\restriction_L = f$ та $\|F\| = \|f\|$.*

Доведення. Доведемо теорему за додаткового припущення сепарабельності простору E. Нехай $\{y_n : n \geq 1\}$ довільна тотальна підмножина E. Покладемо $L_0 := L$ та побудуємо послідовність лінійних множин $\{L_k : k \geq 1\}$ наступним чином. Нехай n_1 найменший номер, такий що $y_{n_1} \notin L$ (якщо таких номерів немає, то L щільна в E і твердження випливає з теореми 4.1). Покладемо $L_1 :=$ л.о$\{L_0 \cup \{y_{n_1}\}\}$. Нехай тепер n_2 найменший номер, такий що $y_{n_2} \notin L_1$ (якщо таких номерів немає, то L_1 щільна в E), $L_2 :=$ л.о$\{L_1 \cup \{y_{n_2}\}\}$. По індукції побудуємо (скінчену або нескінчену) послідовність $\{L_n : n \geq 1\}$ таку, що $L_k :=$ л.о$\{L_{k-1} \cup \{y_{n_k}\}\}$. Покладемо,

$$M := \bigcup_{n \geq 1} L_n.$$

Очевидно M лінійна та щільна в E. В силу леми 4.1 можна побудувати послідовність $\{f_k \mid k \geq 1\}$ таку, що

$$f_k \in L_k^*, \quad f_k \restriction_{L_{k-1}} = f_{k-1}, \quad \|f_k\| = \|f\|, \quad k \geq 1 \tag{4.5}$$

(тут $f_0 = f$). Побудуємо продовження f_∞ функціонала f на M. Для довільного $x \in M$ знайдеться таке k , що $x \in L_k$. Покладемо для такого x

$$f_\infty(x) = f_k(x), \ x \in L_k, \ k \geq 0.$$

В силу (4.5) таке означення коректне (не залежить від k). Перевірте самостійно, що f_∞ лінійний функціонал. З нерівності

$$|f_\infty(x)| = |f_k(x)| \leq \|f\| \ \|x\|, \ x \in L_k, \ k \geq 0$$

тепер випливає, що $\|f_\infty\| = \|f\|$. Залишається лише послатися на теорему 4.1. $\square$

Зауваження 4.2. Зауважимо, що доведення теореми в загальному випадку несепарабельного простору E замість метода математичної індукції використовує лему Цорна та може бути знайдено практично в усіх підручниках з функціонального аналізу (див., наприклад [1], [5], [6].)

Теорема 4.4. *(Гана - Банаха, випадок комплексного простору.) Нехай E комплексний лінійний нормований простір, L лінійна підмножина E, $f \in L^*$. Тоді існує $F \in E^*$:*

$$1) F \restriction_L = f, \ 2) \|F\| = \|f\|.$$

Доведення. Зауважимо, що E можна розглядати як дійсний лінійний нормований простір (якщо обмежитися множенням лише на дійсні скаляри). Відповідний дійсний лінійний нормований простір позначатимо $E_{\mathbb{R}}$ (зокрема, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ двовимірний дійсний лінійний простір). Для $f \in L^*$ покладемо

$$a(x) := Ref(x), \ b(x) := Imf(x), \ x \in L.$$

Очевидно a, b лінійні над полем дійсних чисел. До того ж

$$|a(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \, , \; x \in L.$$

Звідси випливає, що $a \in L^*_{\mathbb{R}}$ та $\|a\| \leq \|f\|$. Аналогічно, $b \in L^*_{\mathbb{R}}$. З рівності $f(x) = a(x) + ib(x)$ маємо,

$$ia(x) - b(x) = if(x) = f(ix) = a(ix) + ib(ix), \; x \in L.$$

Звідси випливає, що

$$b(x) = -a(ix), x \in L.$$

Згідно з теоремою Гана - Банаха для дійсного простору можна стверджувати, що існує

$$A \in E^*_{\mathbb{R}} : A \restriction_{L_{\mathbb{R}}} = a \text{ та } \|A\| = \|a\| \, .$$

Покладемо

$$B(x) := -A(ix), \quad F(x) := A(x) + iB(x), \; x \in E \tag{4.6}$$

Очевидно F лінійний функціонал над полем $\mathbb{R}$:

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; x \in E.$$

До того ж

$$F(ix) = iF(x), x \in E.$$

Справді, в силу (4.6)

$$F(ix) = A(ix) + iB(ix) = -B(x) + iA(x) = i(A(x) + iB(x)) = iF(x), \; x \in E.$$

Звідси легко випливає, що F лінійний функціонал і над полем $\mathbb{C}$. Перевірте самостійно, що F є продовженням f. Для $x \in E$ позначимо $\alpha := e^{-iarg(F(x))}$. Тоді,

$$0 \leq |F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = A(\alpha x) \leq \|A\| \, \|\alpha x\| = \|a\| \, \|x\| \leq \|f\| \, \|x\| \; x \in E.$$

Зауважимо, що $B(\alpha x) = 0$, бо $F(\alpha x) \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що $F \in E^*$ та $\|F\| \leq \|f\|$. Так як норма прдовження не менше норми початкового функціоналу, то $\|F\| = \|f\|$. $\square$

4.3 Наслідки з теореми Гана-Банаха

Наслідок 4.1. *Нехай E лінійний нормований простір, L підпростір E, $y \overline{\in} L$. Тоді існує $f \in E^*$:*

$$1) f \restriction_L = 0, \; 2) f(y) = \rho(y, L) := \inf_{z \in L} \|y - z\| \, , \; 3) \, \|f\| = 1.$$

Доведення. Нехай $L_1 = \text{л.о}\{L \cup \{y\}\} = \{x + \lambda y,\ x \in L,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$,

$$f_1(x + \lambda y) := \lambda \rho(y, L),\ x \in L,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, $f_1 \restriction_L = 0$, $f_1(y) = f_1(0 + 1 \cdot y) = \rho(y, L) > 0$ $(y \notin L)$. Перевірте самостійно, що f_1 лінійний функціонал на L_1. Маємо

$$\|f_1\|_{L_1^*} = \sup_{x \in L, \lambda \neq 0} \frac{|f_1(x + \lambda y)|}{\|x + \lambda y\|} = \sup_{x \in L, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda \rho(y, L)|}{|\lambda| \left\|y - (-\frac{x}{\lambda})\right\|} = \frac{\rho(y, Ł)}{\inf\limits_{z \in L} \|y - z\|} = 1.$$

З теореми Гана-Банаха випливає, що існує $f \in E^*$ такий, що $f \restriction_{L_1} = f_1$, $\|f\| = \|f_1\| = 1$. Ясно, що f задовольняє умови 1), 2), 3). □

Зауваження 4.1. *В умовах наслідку 4.1. L_1 підпростір. Дійсно, нехай*

$$L_1 \ni z_n = x_n + \lambda_n y \to z \in E.$$

Тоді,

$$\lambda_n \rho(y, L) = f_1(z_n) \to f_1(z).$$

Звідси випливає збіжність послідовності $\{\lambda_n \mid n \geq 1\}$ до $\lambda := \frac{f_1(z)}{\rho(y,L)}$, а значить і $\{x_n \mid n \geq 1\}$ прямує до деякого $x \in L$ (L замкнена). Таким чином $z = x + \lambda y \in L_1$.

Наслідок 4.2. *Нехай E лінійний нормований простір, $y \in E$, $y \neq 0$. Тоді існує $f \in E^*$:*

$$1) f(y) = \|y\|,\ \ 2) \|f\| = 1.$$

Доведення. Випливає з наслідку 4.1 для $L = \{0\}$, зокрема $f(y) = \rho(y, \{0\}) = \|y\|$. □

Наслідок 4.3. *Нехай E лінійний нормований простір, $y_1, y_2 \in E$, $y_1 \neq y_2$. Тоді існує $f \in E^*$: $f(y_1) \neq f(y_2)$. (множина лінійних неперервних функціоналів розділяє точки)*

Доведення. Випливає з наслідку 4.2 для $y := y_1 - y_2$. □

Наслідок 4.4. *Нехай E лінійний нормований простір, $M \subset E$. Тоді M тотальна в $E \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f \restriction_M = 0 \Rightarrow f = 0$.*

Доведення. Нехай M тотальна в E та $f \restriction_M = 0$. Тоді з лінійності f випливає, що $f \restriction_{\text{л.о}\{M\}} = 0$, а з неперервності f маємо, що $f \restriction_{\text{з.л.о}\{M\}} = 0$. Таким чином $f = 0$. Якщо M не тотальна в E, то розглянемо, $L := \text{з.л.о}\{M\} \neq E$. З наслідку 4.1 тепер випливає існування такого $E^* \ni f \neq 0$, що $f \restriction_L = 0$. □

Вправа 4.1. Нехай $f \in E^*$ $L := Ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$. Довести, що 1) L підпростір, 2) Якщо $f \neq 0$, то для довільного $y \notin L$ $E = \text{л.о}\{L, y\}$.

Зауваження 4.3. Застосуйте міркування аналогічні до аргументів з доведення теореми Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі.

4.4 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в $C[a, b]$

Нехай $BV[a, b]$ простір (комплекснозначних) функцій, що мають обмежену варіацію на $[a, b]$. Розглянемо для $g \in BV[a, b]$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t),\ x \in C[a, b] = E.$$

Лема 4.2. *Для довільної $g \in BV[a, b]$ f лінійний неперервний функціонал на $C[a, b]$, та*

$$\|f\| \leq Var_{[a,b]}g. \tag{4.7}$$

Доведення. Лінійність f очевидна, доведемо обмеженість. Так як інтеграл є границею інтегральних сум Рімана - Стілтьєса, то достатньо встановити відповідну оцінку для довільної інтегральної суми. Нехай $\lambda = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ розбиття відрізка $[a, b]$, $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Маємо

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} x(s_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k))\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x(s_k)|\,|g(t_{k+1}) - g(t_k)| \leq$$

$$\leq \|x\|_{C[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| \leq \|x\|_{C[a,b]} Var_{[a,b]}g.$$

Звідси випливає, що

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dg(t)\right| \leq Var_{[a,b]}g\,\|x\|_{C[a,b]}\,.$$

Останнє доводить твердження леми. □

Введемо, важливий підклас функцій обмеженої варіації.

$$V[a, b] := \{g \in BV[a, b] \mid g(a) = 0,\ g \text{ неперервна справа на } (a, b)\}.$$

Нагадаємо, що формула

$$\nu_g([a, t] = g(t), t \in (a, b].$$

задає ізоморфізм між $V[a, b]$ та простором скінчених зарядів на σ-алгебрі борелевих підмножин $[a, b]$.

Теорема 4.5. *(Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в $C[a,b]$.)* $\forall f \in (C[a,b])^* \ \exists! g \in V[a,b]$:

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t), \ x \in C[a,b]. \tag{4.8}$$

До того ж

$$\|f\| = Var_{[a,b]}g. \tag{4.9}$$

Доведення. Розглянемо банаховий простір обмежених функцій на $[a,b]$

$$M[a,b] := \{x : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \|x\| =: \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| < \infty\}$$

Очевидно, $C[a,b]$ підпростір $M[a,b]$. Згідно з теоремою Гана – Банаха $\forall f \in (C[a,b])^*$ існує $F \in (M[a,b])^*$:

$$1) F \restriction_{C[a,b]} = f, \ \ 2) \|F\| = \|f\|.$$

Покладемо

$$g(t) := F(u_t), \text{ де } u_t := \chi_{(a,t]} \in M[a,b], \ t \in [a,b].$$

Покажемо, що g має обмежену варіацію. Дійсно, нехай $\lambda = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ довільне розбиття $[a,b]$, $\alpha_k := \exp(-iargF(u_{t_{k+1}} - u_{t_k}))$. Тоді,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|F(u_{t_{k+1}}) - F(u_{t_k})\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|F(u_{t_{k+1}} - u_{t_k})\right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(F(u_{t_{k+1}} - u_{t_k})) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\alpha_k(u_{t_{k+1}} - u_{t_k})) =$$

$$= F(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \chi_{(t_k,t_{k+1}]}) \leq \|F\| \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \chi_{(t_k,t_{k+1}]}\right\| = \|F\| = \|f\|$$

Звідси випливає, що

$$Var_{[a,b]}g \leq \|f\|. \tag{4.10}$$

Доведемо (4.8). Позначимо $t_k := a + \frac{(b-a)k}{n}$. Для $\forall x \in C[a,b]$ покладемо

$$x_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)(u_{t_{k+1}}(t) - u_{t_k}(t))$$

Очевидно, що $x_n \to x$ в $M[a,b]$ (збіжність в $M[a,b]$ є рівномірною збіжністю). Тоді, $\forall x \in C[a,b]$

$$f(x) = F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)) = \int\limits_a^b x(t)dg(t).$$

Згідно з лемою 4.2 та (4.10) маємо (4.9). Залишається відзначити, що заміна $g(t)$ на $g(t+0)$ (дпя $t \in (a,b)$) не міняє значення інтеграла $\int_a^b x dg$ (для неперервної функції x) та не збільшої $Var_{[a,b]} g$. □

Зауваження 4.4. Єдиність g випливає зі згаданого ізоморфізма між $V[a,b]$ і простором скінчених зарядів на σ-алгебрі борельових підмножин $[a,b]$.

Зауваження 4.5. Умова $g(a) = 0$ потрібна лише для єдиності і не впливає на значення $Var_{[a,b]} g$ ($Var_{[a,b]} g = Var_{[a,b]}(g + c)$ для довільної сталої c). Навпаки, умова неперервності справа впливає на значення $Var_{[a,b]} g$ і не може бути ігнорована.

Доведена теорема узагальнюється на простір неперервних функцій на довільному компакті K.

Теорема 4.6. ***(Ріса-Маркова)*** *Нехай K компакт в метричному просторі, $E = C(K)$. Тоді $\forall f \in E^* \ \exists!$ скінченний борелевий заряд ν такий, що*

$$f(x) = \int\limits_K x(t)d\nu, \ x \in C(K)$$

До ж того,

$$\|f\| = |\nu|(K).$$

Приклад 4.1. Розглянемо

$$f(x) = 2x(0) - 3x(1) + x(2), \ x \in E = C[0,2].$$

Тоді

$$f(x) = \int\limits_0^2 x(t)dg(t),$$

де

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t = 0, \\ 2, & \text{якщо } t \in (0,1), \\ -1, & \text{якщо } t \in [1,2), \\ 0, & \text{якщо } t = 2. \end{cases}$$

Маємо

$$\|f\| = Var_{[0,2]} g = 2 + 3 + 1 = 6.$$

Приклад 4.2. Розглянемо

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{2} tx(t)dt, \ x \in E = C[0,2].$$

Тоді

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{2} x(t)dg(t),$$

де $g(t) = t^2/2$ (дивись зауваження 4.5). Маємо $\|f\| = Var_{[0,2]}g = 1/2+2 = 5/2$.

Приклад 4.3. Розглянемо

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{2} tx(t)dt - 2x(-1) - x(1), \ x \in E = C[0,2].$$

Тоді

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{2} x(t)dg(t),$$

де

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t = -1, \\ \frac{t^2-5}{2}, & \text{якщо } t \in (-1,1), \\ \frac{t^2-7}{2}, & \text{якщо } t \in [1,2]. \end{cases}$$

$$\|f\| = Var_{[0,2]}g = 2 + 1/2 + 1/2 + 1 + 3/2 = 11/2.$$

4.5 Простір спряжений до l_∞

Нагадаємо, що ми раніше довели, що $\forall p \in [1,\infty)$ $(l_p)^*$ ізометрично ізоморфний l_q, $(1/p+1/q = 1)$. Для $p = \infty$ це вже не так. Легко довести, що формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \tag{4.11}$$

де $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$ задає лінійний неперервний функціонал на l_∞ та $\|f\| = \|y\|_1$. Проте, не всі $f \in (l_\infty)^*$ задаються за допомогою формули (4.11), тобто включення

$$(l_\infty)^* \supset l_1$$

є строгим. Доведемо це.

Теорема 4.7. *Існує $f \in (l_\infty)^*$, що не можна подати у вигляді (4.11).*

Доведення. Розглянемо

$$c := \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty \mid \{x_k \mid k \geq 1\} \text{ збіжна послідовність в } \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, що c лінійна підмножина в l_∞. Розглянемо

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} x_k,\ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c. \tag{4.12}$$

З властивостей границі випливає, що f лінійний функціонал на c. Маємо,

$$|f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} x_k\right| \leq \sup_{k\to\infty} |x_k| = \|x\|_\infty,\ x \in c.$$

Останнє означає, що f лінійний неперервний функціонал на c. За теоремою Гана-Банаха $\exists F \in (l_\infty)^* : F \restriction_c = f$. Проте F не можна подати у вигляді (4.11). Справді, нехай F має вигляд (4.11). Тоді для довільного $n \geq 1$

$$y_n = F(e_n) = f(e_n) = \lim_{k\to\infty} (e_n)_k = 0.$$

Звідси випливає, що $F = 0$, що суперечить (4.12). □

Вправа 4.2. Довести, що c підпростір в l_∞.

Розглянемо

$$c_0 := \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}.$$

Очевидно, що c_0 банаховий простір з $\|x\| = \|x\|_\infty$, що є підпростором l_∞.

Вправа 4.3. Доведіть, що формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k,\ x \in c_0. \tag{4.13}$$

де $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in l_1$ дає загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в c_0, до того ж $\|f\| = \|y\|_1$.

Зауважимо, що твердження вправи означає, що простір c_0^* ізометрично ізоморфний l_1.

Вправа 4.4. Довести, що c^* ізометрично ізоморфний l_1.

4.6 Канонічне вкладення E в E^{**}

Нехай E лінійний нормований простір, $E^{**} := (E^*)^*$ (другий спряжений). Для довільного $x \in E$ розглянемо функціонал

$$F_x(f) := f(x), \;\; f \in E^*. \tag{4.14}$$

Покажемо, що $F_x \in E^{**}$. Перевіримо лінійність. Нехай $f, g \in E^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Маємо

$$F_x(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda F_x(f) + \mu F_x(g).$$

Далі,

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|f\| \, \|x\| = \|x\| \, \|f\| \, .$$

Звідси випливає, що $F_x \in E^{**}$ та

$$\|F_x\| \le \|x\| \, , \;\; x \in E. \tag{4.15}$$

Покладемо

$$J(x) := F_x, \;\; x \in E \tag{4.16}$$

Теорема 4.8. *J лінійна ізометрія E в E^{**}.*

Доведення. З (4.14) випливає, що для довільних $x, y \in E$, $f \in E^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$F_{\lambda x + \mu y}(f) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda F_x(f) + \mu F_y(f).$$

Останнє в точності означає лінійність J. З наслідку 4.2 з теореми Гана-Банаха маємо, що

$$\forall x \in E \;\; \exists \, \widetilde{f} \in E^* : \;\; 1) \, \widetilde{f}(x) = \|x\| \, , \;\; 2) \, ||\widetilde{f}|| = 1.$$

З (4.14) тепер випливає, що

$$\|F_x\| = \|F_x\| \, ||\widetilde{f}|| \ge \left| F_x(\widetilde{f}) \right| = \left| \widetilde{f}(x) \right| = \|x\| \, , \;\; x \in E.$$

Останнє, з огляду на (4.15), доводить ізометричність оператора J. $\square$

Зауважимо, що з лінійності та ізометричності J випливає, що J є взаємно однозначним (ін'єктивним) відображенням E в E^{**}. Справді,

$$\|J(x_1) - J(x_2)\|_{E^{**}} = \|J(x_1 - x_2)\|_{E^{**}} = \|x_1 - x_2\|_E \, .$$

Отже, $J(x_1) = J(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Побудоване відображення J називають ***канонічним вкладенням*** E в E^{**}.

Означення 4.1. Лінійний нормований простір E називається ***рефлексивним***, якщо

$$E^{**} = J(E). \tag{4.17}$$

Іншими словами E рефлексивний тоді і лише тоді, коли

$$\forall F \in E^{**} \;\; \exists x \in E : \; F = F_x. \tag{4.18}$$

Зауважимо, що умова (4.17) *більш сильна* ніж умова ізометричної ізоморфності просторів E та E^{**}. Додатково вимагається, що ізоморфізм здійснюється за допомогою канонічного вкладення J. Ізометрично ізоморфні простори E та $J(E)$ часто ототожнюють та умову рефлексивності записують у вигляді $E^{**} = E$.

Зауваження 4.6. З теореми про повноту спряженого простору випливає, що рефлексивний простір є банаховим.

Як вже зазначалося, з формальної рівності

$$(l_p)^{**} = (l_q)^* = l_p, \text{ де } 1/p + 1/q = 1, \; 1 < p < \infty$$

ще не можна стверджувати рефлексивність l_p для $1 < p < \infty$. Потрібно показати, що ця рівність виконуються в сенсі побудованого вище ізоморфізма J, тобто

$$\forall\, F \in (l_p)^{**} \; \exists\, x \in l_p : \; F(f) = F_x(f) := f(x), \; f \in (l_p)^*, \; 1 < p < \infty. \tag{4.19}$$

Нагадаємо, що загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на l_p дається формулою

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \tag{4.20}$$

де $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q, \quad (1/p+1/q = 1)$. Позначимо через $\alpha : l_q \to (l_p)^*$ ізометричний ізоморфізм, який $y \in l_q$ ставить у відповідність $f \in (l_p)^*$ за формулою (4.20). Розглянемо

$$F_1(y) := F(\alpha(y)), \;\; y \in l_q.$$

Очевидно $F_1 \in (l_q)^*$, а тому знайдеться $x \in l_p$ такий, що

$$F_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k, y \in l_q.$$

Остаточно маємо

$$F(f) = F(\alpha(y)) = F_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k = f(x), \; f \in (l_p)^*.$$

Останнє доводить (4.19) та рефлексивність простору l_p для $1 < p < \infty$. Так само доводиться, що простори $L_p(T, \mu)$ **рефлексивні** для $1 < p < \infty$. Аналогічні міркування, засновані на теоремі Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала у гільбертовому просторі, доводять **рефлексивність гільбертового простору**. Також легко перевірити, що довільний скінченновимірний лінійний нормований простір є рефлексивним.

З теореми 4.7 безпосередньо випливає нерефлексивність l_1. Справді, маємо строге включення

$$(l_1)^{**} = (l_\infty)^* \supset l_1.$$

Простір l_∞ також не рефлексивний. До того ж має місце наступний результат, що ми наведемо без доведення.

Теорема 4.9. *Лінійний нормований простір E рефлексивний тоді і лише тоді, коли E^* рефлексивний.*

Так само можна показати, що простори $L_1(T,\mu)$ та (спряжений до нього) $L_\infty(T,\mu)$ не рефлексивні (за умови, що вони нескінченновимірні).

Доведемо нерефлексивність простору $C[a,b]$. Припустимо від супротивного, що $C[a,b]$ рефлексивний. Тоді для всіх $F \in (C[a,b])^{**}$ знайдеться $x \in C[a,b]$ таке, що

$$F(f) = F_x(f) = f(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t),\ f \in (C[a,b])^*. \tag{4.21}$$

Тут $g = \alpha(f)$, де α ізометричний ізоморфізм, що в силу теореми Ріса кожному $f \in (C[a,b])^*$ ставить у відповідність $g \in V[a,b]$. Розглянемо

$$\widetilde{F}(f) = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} dg(t),\ g = \alpha(f),\ f \in (C[a,b])^*.$$

Очевидно, $\widetilde{F} \in (C[a,b])^{**}$. Покажемо, що $\widetilde{F}$ не можна подати у вигляді (4.21). Розглянемо для довільного $s \in (a,b]$ функціонали

$$f_s(x) := x(s),\ x \in C[a,b].$$

Очевидно, $f_s \in (C[a,b])^*$. Покладемо, $g_s := \alpha(f_s) = \chi_{[s,b]} \in V[a,b],\ s \in (a,b]$. Тоді, функція

$$\widetilde{F}(f_s) = \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} dg_s(t) = \chi_{[a,(a+b)/2]}(s),\ s \in (a,b]$$

розривна в точці $\frac{a+b}{2}$. Проте для довільного $x \in C[a,b]$

$$F_x(f_s) = f_s(x) = x(s),\ s \in (a,b]$$

неперервна на $(a,b]$. Останнє і доводить нерефлексивність $C[a,b]$.

Розділ 5

Принцип рівномірної обмеженості, слабка збіжність.

5.1 Принцип рівномірної обмеженості (Теорема Банаха- Штейнгауза).

Теорема 5.1. ***(Банаха - Штейнгауза)*** *Нехай E банахів простір, $\{f_\alpha| \ \alpha \in T\} \subset E^*$ сім'я лінійних неперервних функціоналів на E така, що*

$$\forall x \in E \ c_x := \sup_{\alpha \in T} |f_\alpha(x)| < \infty. \tag{5.1}$$

Тоді,

$$c := \sup_{\alpha \in T} \|f_\alpha\| < \infty. \tag{5.2}$$

Зауваження 5.1. *A priori* немає жодних умов на поведінку c_x. А втім, з (5.2) випливає, що $c_x \le c\|x\|$.

Зауваження 5.2. Умова повноти E важлива. В неповних просторах твердження теореми неправильне.

Доведення принципу рівномірної обмеженості буде дано згодом для лінійних операторів. Зараз наведемо одне цікаве застосування, що демонструє нетривіальність теореми 5.1.

Теорема 5.2. *(Е.Ландау) Нехай послідовність $\{a_{k\,|\,k\ge 1}\} \subset \mathbb{C}$ така, що $\forall x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_2$*

$$\sum_{k=1}^\infty a_k x_k \ \textit{збігається} \tag{5.3}$$

Тоді $a := (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$.

Доведення. Розглянемо послідовність

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$$

Очевидно $f_n \in (l_2)^*$ та

$$\|f_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \tag{5.4}$$

В силу (5.3) $\forall x \in l_2$ послідовність $\{f_n(x) | n \geq 1\}$ збіжна і, зокрема, обмежена. Тоді з теореми Банаха-Штейнгауза випливає, що

$$\|a\|_{l_2} = \sup_{n \geq 1} \|f_n\| < \infty.$$

□

Вправа 5.1. (Е.Ландау) Нехай $p \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$ Припустимо, що $\{a_k \,|\, k \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ така, що $\forall x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ виконано (5.3). Доведіть, що $a := (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$.

Вправа 5.2. (Е.Ландау) Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ вимірний простір з σ-скінченною мірою μ, $p \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$. Припустимо, що a $\mathcal{F}$-вимірна комплексно-значна функція така, що $\forall x \in L_p(T, \mu)$ добуток $ax \in L_1(T, \mu)$. Доведіть, що $a \in L_q(T, \mu)$.

5.2 Слабка з зірочкою ($*-$слабка) збіжність лінійних неперервних функціоналів.

Нехай E лінійний нормований простір, а $f_n, f \in E^*$.

Означення 5.1. Будемо говорити, що f_n $*-$**слабко збігається** до f ($f_n \xrightarrow{w^*} f$), якщо

$$\forall\, x \in E : \ f_n(x) \to f(x). \tag{5.5}$$

Збіжність f_n до f за нормою простору E^* будемо називати **сильною збіжністю** ($f_n \xrightarrow{s} f$).

Твердження 5.1. *Нехай* $f_n \xrightarrow{s} f$, *тоді* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Доведення.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \, \|x\|, \ x \in E.$$

□

Легко показати, що в скінченновимірному просторі ці збіжності еквівалентні.

Вправа 5.3. Нехай $E = \mathbb{C}^m$ (або довільний скінченновимірний) лінійний нормований простір. Довести, що $f_n \xrightarrow{s} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f$.

В нескінченновимірному це вже не так. Наведемо простий приклад.

Приклад 5.1. Нехай $E = l_p$, $p \in [1, \infty)$. Розглянемо послідовність лінійних неперервних функціоналів

$$f_n(x) = x_n, \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p.$$

Для довільного $x \in l_p$ маємо $f_n(x) \to 0$. Таким чином $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. З іншого боку, $\|f_n\| = 1, \ n \geq 1$. Звідси випливає, що f_n не збігається сильно до 0, а в силу твердження 5.1 f_n взагалі не має сильної границі.

Наступна вправа випливає безпосередньо з означення ∗−слабкої збіжності.

Вправа 5.4. Нехай E лінійний нормований простір, $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Довести, що

$$\|f\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

Зауважимо, що ми не виключаємо, що права частина в останній нерівності може бути нескінченною, проте в повному просторі це вже не так.

Твердження 5.2. *Нехай E банаховий простір, $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Тоді, послідовність f_n обмежена, тобто $\sup\limits_{n\geq 1} \|f_n\| < \infty$.*

Доведення. З ∗−слабкої збіжності f_n випливає, що для всіх $x \in E$ послідовність $\{f_n(x) \,|\, n \geq 1\}$ обмежена. Залишається застосувати принцип рівномірної обмеженості. □

Зауважимо, що безпосередня перевірка (5.5) може бути непростою. На практиці зазвичай застосовують наступну теорему.

Теорема 5.3. ***(Критерій ∗−слабкої збіжності.)*** *Нехай E банаховий простір $f_n, f \in E^*$. Тоді $f_n \xrightarrow{w^*} f$ тоді і лише тоді, коли виконані наступні умови:*

$$1) \ c := \sup_{n\geq 1} \|f_n\| < \infty, \tag{5.6}$$

$$2) \ f_n(y) \to f(y) \ \text{для } y \in M, \ \text{де } M \text{ деяка тотальна множина в } E. \tag{5.7}$$

Доведення. Необхідність випливає з твердження 5.2. Доведемо достатність. Нехай $x \in E$, $\varepsilon > 0$. В силу тотальності M існує $y \in$ л.о (M) :

$$\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{3(\|f\|+c+1)}.$$

Виберемо $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geq N$ виконується $|f_n(y)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді для $n \geq N$

$$|f(x)-f_n(x)| \leq |f(x)-f(y)| + |f(y)-f_n(y)| + |f_n(y)-f_n(x)| \leq$$

$$\leq \|f\|\,\|x-y\| + \|f_n\|\,\|x-y\| + |f(y)-f_n(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f(y)-f_n(y)| < \varepsilon,$$

що і доводить теорему. □

Простим, але важливим застосуванням наведеної теореми є наступна класична лема.

Лема 5.1. ***(Рімана-Лебега)*** *Нехай $x \in L_1(a,b)$. Тоді*

$$\int\limits_a^b x(t)e^{int}dt \to 0,\ n \to \infty \tag{5.8}$$

Доведення. Покладемо $E := L_1(a,b)$,

$$f_n(x) := \int\limits_a^b x(t)e^{int}dt,\ x \in E.$$

Очевидно $f_n \in E^*$ та $\|f_n\| = 1,\ n \geq 1$. Застосуємо теорему 5.3. Умова (5.6) виконана, перевіремо (5.7). Покладемо $M := \{\chi_{[a,s]} \mid s \in [a,b]\}$ (очевидно M тотальна в $L_1(a,b)$). Для довільного $y = \chi_{[a,s]} \in M$ маємо

$$|f_n(y)| = \left|\int\limits_a^s e^{int}dt\right| \leq \frac{2}{n} \to 0,\ n \to \infty.$$

□

Зауважимо, що доведення достатності в теоремі 5.3 не використовує повноту E. До того ж легко довести дещо більш сильне твердження.

Вправа 5.5. Нехай E лінійний нормований простір, $\{f_n \,|\, n \geq 1\}$ обмежена послідовність в E^*, M тотальна множина в E така, що $\forall x \in M$ послідовність $\{f_n(x)\}$ збіжна. Тоді існує $f \in E^* : f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Теорема 5.4. ***(Повнота E^* відносно $*-$слабкої збіжності.)*** *Нехай E банаховий простір, $\{f_n \,|\, n \geq 1\} \subset E^*$ така, що для довільного $x \in E$ послідовність $\{f_n(x) \,|\, n \geq 1\}$ фундаментальна в $\mathbb{C}$. Тоді існує $f \in E^*$ такий, що $f_n \xrightarrow{w^*} f$.*

Доведення. Покладемо

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in E. \tag{5.9}$$

Перевірте самостійно, що f лінійний функціонал. Очевидно, для довільного $x \in E$ послідовність $\{f_n(x) \,|\, n \geq 1\}$ обмежена. З принципу рівномірної обмеженості маємо (5.6). Тоді, для всіх $x \in E$

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \sup_{n\geq 1} |f_n(x)| \leq \sup_{n\geq 1} \|f_n\| \, \|x\| = c \, \|x\| \, .$$

Таким чином $f \in E^*$. Слабка з зірочкою збіжність f_n до f випливає з (5.9). $\square$

Теорема 5.5. ***(Компактність кулі спряженого простору відносно $*-$слабкої збіжності)*** *Нехай E сепарабельний банахів простір. Тоді, з довільної обмеженої послідовність функціоналів $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset E^*$ можна виділити $*-$слабко збіжну підпослідовність.*

Доведення. Для доведення застосуємо діагональний метод Кантора. Нехай $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset E^*$ та $c := \sup_{n\geq 1} \|f_n\| < \infty$. Нехай $M = \{x_k \,|\, k \geq 1\}$ злічена скрізь щільна множина в E . Розглянемо числову послідовність $\{f_n(x_1) \,|\, n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$. Вона обмежена, так як

$$|f_n(x_1)| \leq c \, \|x_1\| \, , \ n \geq 1.$$

З теореми Больцано – Вейерштраса випливає, що з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{f_{n,1}(x_1) \,|\, n \geq 1\}$. Послідовність $\{f_{n,1}(x_2) \,|\, n \geq 1\}$ теж очевидно обмежена, і з неї знов можна виділити збіжну підпослідовність $\{f_{n,2}(x_2) \,|\, n \geq 1\}$. Продовжуючи цю процедуру отримаємо злічений набір послідовностей (*"стовпчиків"*) $\{f_{n,k} \,|\, n \geq 1\} \subset E^*$ таких, що для довільного k послідовність $\{f_{n,k}(x_k) \,|\, n \geq 1\}$ збігається, та $\{f_{n,k+1} \,|\, n \geq 1\}$ є підпослідовністю $\{f_{n,k} \,|\, n \geq 1\}$. Розглянемо *діагональну* послідовність $\{f_{k,k} \,|\, k \geq 1\}$. Тоді, для всіх $n \geq 1$ $\{f_{k,k} \,|\, k \geq n\}$ є підпослідовністю послідовності $\{f_{n,k} \,|\, n \geq 1\}$. Звідси випливає, що для всіх $n \geq 1$ $\{f_{k,k}(x_n) \,|\, k \geq 1\}$ збіжна. Твердження теореми тепер випливає з вправи 5.5. $\square$

Зауваження 5.3. Сепарабельність E важлива. Розглянемо в l_∞^* обмежену послідовність функціоналів $f_n(x) := x_n, \ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Доведіть, що з неї **не можна** виділити $*-$слабко збіжну підпослідовність. Порівняйте з прикладом 5.1.

5.3 Слабка збіжність елементів лінійного нормованого простору

Нехай E лінійний нормований простір, $x_n, x \in E$.

Означення 5.2. Будемо говорити, що x_n слабко збігається до x ($x_n \xrightarrow{w} x$), якщо

$$\forall f \in E^* : \ f(x_n) \to f(x).$$

Збіжність x_n до x за нормою в E будемо називати сильною збіжністю ($x_n \xrightarrow{s} x$).

Наведемо основні властивості слабко збіжних послідовностей.

Твердження 5.3. (Єдиність слабкої границі) *Нехай $x_n, x, y \in E$. Тоді, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ та $x_n \xrightarrow{w} y$, то $x = y$.*

Доведення. З означення слабкої збіжності випливає, що $\forall f \in E^*$ $f(x) = f(y)$. Тоді з Наслідку 4.3 з теореми Гана-Банаха, отримаємо, що $x = y$ □

Твердження 5.4. *Нехай $x_n \xrightarrow{s} x$, тоді $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Доведення. Доведіть самостійно. □

Приклад 5.2. Нехай $E = \mathbb{C}^m$, $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^m$, $x = (x_k)_{k=1}^m \in E$. Покажемо, що

$$x^{(n)} \xrightarrow{s} x \ \Leftrightarrow \ x^{(n)} \xrightarrow{w} x.$$

Ясно, що потрібно лише перевірити, що з слабкої збіжності випливає сильна. Розглянемо

$$f_k(x) := x_k, \ x = (x_k)_{k=1}^m \in E, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Очевидно $f_k \in E^*$. Тоді з слабкої збіжності $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ випливає, що

$$x_k^{(n)} = f_k(x^{(n)}) \to f_k(x) = x_k, \ n \to \infty, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Таким чином $x^{(n)}$ збігається покоординатно, а значить і сильно. Очевидно, що твердження залишається правильним для довільного скінченновимірного нормованого простору.

Приклад 5.3. В просторі $E = l_p$, $p \in (1, \infty)$ розглянемо послідовність $x^{(n)} = e^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, 0, ...)$. Для довільного $f \in l_p^*$ маємо $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_k$, де $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$, $1/p + 1/q = 1$. Таким чином $f(e^{(n)}) = y_n \to 0$, $n \to \infty$. Останнє означає слабку збіжність $e^{(n)}$ до 0. Очевидно $\|e^{(n)}\| = 1$, а тому $e^{(n)}$ не збігається сильно до 0. З твердження 5.4 тепер випливає, що $e^{(n)}$ не має сильної границі.

Вправа 5.6. Покажіть, що $e^{(n)}$ не збігається слабко в l_1.

Для довільного $x \in E$ розглянемо

$$F_x(f) := f(x), \; f \in E^*. \tag{5.10}$$

З теореми 4.8 випливає, що

$$F_x \in E^{**} := (E^*)^*, \text{ та } \|F_x\| = \|x\|. \tag{5.11}$$

Теорема 5.6. *Нехай E лінійний нормований простір, $x_n, x \in E$. Тоді:*

$$x_n \xrightarrow{w} x \;\Leftrightarrow\; F_{x_n} \xrightarrow{w^*} F_x.$$

Доведення. В силу (5.10) та означень слабкої та слабкої з $*$ збіжностей маємо

$$F_{x_n} \xrightarrow{w^*} F_x \;\Leftrightarrow\; \forall f \in E^* \; f(x_n) = F_{x_n}(f) \to F_x(f) = f(x) \;\Leftrightarrow\; x_n \xrightarrow{w} x.$$

□

Наслідок 5.1. *Довільна слабко збіжна послідовність в лінійному нормованому просторі E є обмеженою.*

Доведення. Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$ в E. Тоді $F_{x_n} \xrightarrow{w^*} F_x$, і в силу твердження 5.2, $\sup\limits_{n\ge 1} \|F_{x_n}\| < \infty$. Тепер твердження випливає з другої рівності в (5.11). □

Вправа 5.7. Поясніть чому в наслідку 5.1 **не потрібно вимагати повноту** E (на відміну від твердження 5.2).

Теорема 5.7. ***(Критерій слабкої збіжності елементів лінійного нормованого простору)****. Нехай E лінійний нормований простір, x_n, $x \in E$. Тоді $x_n \xrightarrow{w} x$, тоді і лише тоді, коли виконані наступні умови:*

$$1) \; c := \sup_{n \ge 1} \|x_n\| < \infty, \tag{5.12}$$

$$2) \; g(x_n) \to g(x) \; \textit{для } g \in M, \; \textit{де } M \textit{ деяка тотальна множина в } E^*. \tag{5.13}$$

Доведення. Доведення випливає з теореми 5.6 та критерія $*-$слабко збіжної послідовності функціоналів (теорема 5.3). Відновіть деталі самостійно. □

Теорема 5.8. ***(Компактність кулі рефлексивного простору відносно слабкої збіжності)****. Нехай E рефлексивний банахів простір, $\{x_n \,|\, n \ge 1\}$ обмежена послідовність з E. Тоді з $\{x_n \,|\, n \ge 1\}$ можна виділити слабко збіжну в E підпослідовність $\{x_{n_k} \,|\, k \ge 1\}$.*

Доведення. Доведемо теорему за додаткового припущення сепарабельності E^* (насправді воно не потрібно). Розглянемо послідовність $F_{x_n} \in (E^*)^*$. В силу (5.11) ця послідовність обмежена і з теореми 5.5 про компактність кулі спряженого простору відносно $*-$слабкої збіжності випливає існування підпослідовності $\{x_{n_k} \,|\, k \geq 1\}$ та $F \in E^{**}$ таких, що $F_{x_{n_k}} \xrightarrow{w^*} F$, $k \to \infty$. В силу рефлексивності E знайдеться такий $x \in E$, що $F = F_x$. Таким чином, $F_{x_{n_k}} \xrightarrow{w^*} F_x$, $k \to \infty$, що в силу теореми 5.6 означає, що $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. □

Приклад 5.4. В *нерефлексивному* просторі $E = l_1$ розглянемо обмежену послідовність $e^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, 0, ...)$. Нагадаємо, що l_1^* ізометрично ізоморфно l_∞. Зокрема, для довільного $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$ функціонал

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_k \tag{5.14}$$

є лінійним та неперервним на l_1. Ясно, що для довільної підпослідовності $\{e^{(n_k)} \,|\, k \geq 1\}$ послідовності $\{e^{(n)}\}$ знайдеться такий $y \in l_\infty$, що послідовність $f_y(e^{(n_k)}) = y_{n_k}$ розбігається. Останнє означає, що з $\{e^{(n)}\}$ не можна виділити слабко збіжну підпослідовность.

5.4 Слабка збіжність в класичних лінійних нормованих просторах

Ми вже говорили, що в скінченновимірному просторі слабка збіжність еквівалентна сильній. Встановимо критерії слабкої збіжності в класичних просторах l_p, L_p, $C[a, b]$.

Теорема 5.9. *Нехай $E = l_p$, $1 < p < \infty$, $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in l_p$, $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p$. Тоді $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ тоді і лише тоді, коли*

$$1) \ \sup_{n \geq 1} ||x^{(n)}||_p < \infty,$$

$$2) \ \forall k \geq 1 \ x_k^{(n)} \to x_k, \ n \to \infty.$$

Доведення. Нагадаємо, що загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на l_p дається формулою (5.14), де $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in l_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. До того ж відображення

$$I(y) := f_y$$

задає ізометричний ізоморфізм l_q на $(l_p)^*$. Нехай $M := \{g_k \mid k \geq 1\} \subset l_p^*$, де

$$g_k(x) := x_k, \quad x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p.$$

Умова 2) означає, що для довільного $g \in M \;\; g(x^{(n)}) \to g(x)$. В силу теореми 5.7 достатньо показати, що M тотальна в $(l_p)^*$. Маємо $M = I(\widetilde{M})$, де $\widetilde{M} = \{e^{(k)} \mid k \geq 1\}$. Тут $e^{(k)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, 1, 0, 0, ...)$ стандартний базис в l_p. Очевидно $\widetilde{M}$ тотальна в l_q, звідки і випливає тотальність M в $(l_p)^*$. $\square$

Приклад 5.5. Ми вже знаємо, що $e^{(n)} \xrightarrow{w} 0$ в l_p для всіх $p \in (1, \infty)$. Покажемо як це випливає з доведеного критерія. Маємо,

$$1)\ ||e^{(n)}||_p = 1, \;\; 2) \text{ для всіх } k \geq 1 \;\; e_k^{(n)} = 0, \; n > k \;\Rightarrow\; e_k^{(n)} = 0 \to 0, \; n \to \infty.$$

Зауваження 5.4. Послідовність $\{e^{(n)} \mid k \geq 1\}$ не збігається слабко в l_1 (насправді з прикладу 5.4 випливає, що з $e^{(n)}$ не можна виділити слабко збіжну послідовність в l_1). Зауважимо також, що можна довести, що слабка збіжність в l_1 еквівалентна сильній [3].

Вправа 5.8. Довести, що $e^{(n)} \xrightarrow{w} 0$ в l_∞. Використати те, що $e^{(n)} \in c_0$, де

$$c_0 = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}, \;\; ||x||_{c_0} := ||x||_\infty,$$

та опис спряженого до c_0.

Теорема 5.10. ***(Критерій слабкої збіжності в*** L_p***).*** *Нехай* $E = L_p(\mathbb{R}, \lambda_F)$, *де* $1 < p < \infty$ *та* λ_F *міра Лебега - Стільтьєса,* $x_n, x \in E$. *Тоді* $x_n \xrightarrow{w} x$ *тоді і лише тоді, коли*

$$1)\ \sup_{n\geq 1} \|x_n\|_p < \infty,$$

$$2)\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \;\; \int\limits_{(a,b]} x_n(t) d\lambda_F \to \int\limits_{(a,b]} x(t) d\lambda_F.$$

Доведення. Доведення повторює аргументи для l_p. Наведемо їх для повноти викладення. Нагадаємо, що загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на E дається формулою

$$f_y(x) = \int x(t) y(t) d\lambda_F,$$

де $y \in L_q(\mathbb{R}, \lambda_F)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. До того ж відображення $I(y) := f_y$ задає ізометричний ізоморфізм $L_q(\mathbb{R}, \lambda_F)$ на E^*. Нехай $M := \{g_{ab} \mid a < b\} \subset E^*$, де

$$g_{ab}(x) := \int\limits_{(a,b]} x(t) d\lambda_F, \; x \in L_p(\mathbb{R}, \lambda_F).$$

В силу теореми 5.7 достатньо показати, що M тотальна в E^*. Маємо $M = I(\widetilde{M})$, де $\widetilde{M} = \{\chi_{(a,b]} \mid a < b\}$. Таким чином тотальність M в E^* випливає з тотальності $\widetilde{M}$ в $L_q(\mathbb{R}, \lambda_F)$. $\square$

Приклад 5.6. $E = L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < \infty$

$$x_n(t) = e^{-|t-n|}$$

Перевіримо виконання умов критерія слабкої збіжності в $L_p(\mathbb{R})$.

$$1)\ \|x_n\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-p|t-n|}dt = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-p|s|}ds = \frac{2}{p};$$

$$2)\ \int\limits_a^b e^{-|t-n|}dt = \int\limits_{a-n}^{b-n} e^{-|s|}ds \to 0,\ n \to \infty.$$

Отже, згідно з критерієм $x_n \xrightarrow{w} 0$. Зауважимо, що з 1) випливає, що $\{x_n\}$ не прямує до 0 сильно.

Наведемо частковий випадок попередньої теореми для простору $L_p(a,b)$.

Теорема 5.11. ***(Критерій слабкої збіжності в** $L_p(a,b)$**).*** *Нехай $E = L_p(a,b)$, де $1 < p < \infty$, $x_n, x \in E$. Тоді $x_n \xrightarrow{w} x$ тоді і лише тоді, коли*

$$1)\ \sup_{n\geq 1} \|x_n\|_p < \infty,$$

$$2)\ \forall c \in (a,b)\ \int\limits_a^c x_n(t)dt \to \int\limits_a^c x(t)dt.$$

Приклад 5.7. $E = L_p(a,b),\ 1 < p < \infty$

$$x_n(t) = e^{itn}$$

Перевіримо виконання умов критерія слабкої збіжності в $L_p(a,b)$.

$$1)\ \|x_n\|_p^p = \int\limits_a^b \left|e^{itn}\right|^p dt = \int\limits_a^b dt = b - a;$$

$$2)\ \left|\int\limits_a^c e^{itn}dt\right| = \left|\frac{1}{in}e^{itn}|_a^c\right| \leq \frac{2}{n} \to 0,\ n \to \infty.$$

Таким чином $x_n \xrightarrow{w} 0$. З 1) випливає, що $\{x_n\}$ не прямує до 0 сильно.

Вправа 5.9. Довести, що $x_n(t) = e^{itn} \xrightarrow{w} 0$ в $L_1(a,b)$.

Теорема 5.12. ***(Критерій слабкої збіжності в** $C[a,b]$**).*** *Нехай* $E = C[a,b]$, $x_n, x \in E$. *Тоді* $x_n \xrightarrow{w} x$ *тоді і лише тоді, коли*

$$1) \sup_{n\geq 1} \|x_n\|_{C[a,b]} < \infty,$$

$$2) \, \forall t \in [a,b] \; x_n(t) \to x(t).$$

Доведення. Доведемо необхідність. Перша умова повторює умову (5.12) абстрактного критерія (теореми 5.7). Розглянемо $f_t(x) := x(t)$. Очевидно $f_t \in (C[a,b])^*$, $t \in [a,b]$. Тоді, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$, то

$$\forall t \in [a,b] \;\; x_n(t) = f_t(x_n) \to f_t(x) = x(t).$$

Достатність легко довести за допомогою теореми Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в $E = C[a,b]$ та теореми Лебега про мажоровану збіжність. Відновіть деталі самостійно. □

Вправа 5.10. Доведіть, що множина $\{f_t, \ t \in [a,b]\}$ є тотальною в $(C[a,b])^*$.

Розділ 6

Лінійні неперервні оператори

6.1 Простір лінійних неперервних операторів.

Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A : E_1 \to E_2$ лінійне відображення (оператор), тобто

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y), \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ x, y \in E_1$$

Далі будемо писати Ax замість $A(x)$.

Означення 6.1. Лінійний оператор $A : E_1 \to E_2$ називається обмеженим, якщо існує $c \geq 0$ таке, що для всіх $x \in E_1$

$$\|Ax\|_2 \leq c \|x\|_1 . \tag{6.1}$$

Тут і далі $\|\cdot\|_i$ норма в просторі E_i.

Теорема 6.1. *Нехай A лінійний оператор з E_1 в E_2. Тоді наступні умови еквівалентні:*
1) *A неперервний в 0;*
2) *A неперервний на E_1;*
3) *A обмежений.*

Доведення. Доведення повторює аргументи наведені для лінійних неперервних функціоналів. Доведіть самостійно! □

Позначимо через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ простір лінійних неперервних операторів з E_1 в E_2, $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$. Зауважимо, що $\mathcal{L}(E, \mathbb{C}) = E^*$. В $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ природним чином вводиться структура лінійного простору, а саме для $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ та $\lambda \in \mathbb{C}$ покладемо:

$$(\lambda A)(x) := \lambda Ax, \ x \in E_1,$$

$$(A + B)(x) := Ax + Bx, \ x \in E_1.$$

Так як і для функціоналів можна ввести норму лінійного неперервного оператора.

$$\|A\| := \sup_{x \in E_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}. \tag{6.2}$$

Доведення наступних лем аналогічно доведенню відповідних тверджень для лінійних неперервних функціоналів.

Лема 6.1. *Для $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ маємо*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 = \min\{c \ge 0 \mid \forall x \in E_1 \text{ виконано } (6.1)\}$$

Доведення. Доведіть самостійно! □

Лема 6.2. *Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, тоді $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ з нормою (6.2) є лінійним нормованим простором.*

Доведення. Доведіть самостійно! □

Доведення наступної теореми аналогічне доведенню теореми про повноту спряженого простору.

Теорема 6.2. *Нехай E_1 лінійний нормований простір, E_2 банахів простір. Тоді $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ банахів простір.*

Доведення. Доведіть самостійно! □

Так само як і для функціоналів доводиться і наступне твердження.

Теорема 6.3. ***(продовження по неперервності)*** *Нехай E_1 лінійний нормований простір, E_2 банахів простір, G щільна лінійна підмножина E_1, $A \in \mathcal{L}(G, E_2)$. Тоді існує єдиний $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$:*

$$A \restriction_G = A.$$

Більш того, $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$.

Зауваження 6.1. G розглядається як лінійний нормований простір з $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_{E_1}$.

Доведення. Доведіть самостійно! □

6.2 Приклади лінійних неперервних операторів.

Приклад 6.1. Нехай $E_1 = \mathbb{C}^m$, $E_2 = \mathbb{C}^n$, $A : E_1 \to E_2$ лінійний оператор. Нехай $e_i = (\underbrace{0, ..., 0}_{i-1}, 1, 0, ...0)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ стандартний базис в E_1, g_k $(k = 1, 2, ..., n)$ аналогічний базис в E_2. Для $x = (x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in E_1$ маємо

$$Ax = \sum_{i=1}^m x_i A e_i = \sum_{k=1}^n (Ax)_k g_k \in \mathbb{C}^n.$$

Тоді

$$(Ax)_k = \sum_{i=1}^m x_i (Ae_i)_k = \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i, \ \ k = 1, 2, ..., n, \tag{6.3}$$

де $a_{ki} := (Ae_i)_k$. Таким чином довільний лінійний оператор A з E_1 в E_2 задається матрицею $\widetilde{A} = (a_{ki})_{k=1,i=1}^{n,m}$. Звідси випливає, що всякий лінійний оператор з $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$ (насправді всякий лінійний оператор в скінченновимірних просторах) є неперервним (збіжність в скінченновимірному просторі еквівалентна покоординатній). Обчислимо $\|A\|$ у випадку коли

$$\|x\|_{E_1} = \max_{1 \le i \le m} |x_i|\,, \quad \|y\|_{E_2} = \max_{1 \le k \le n} |y_k|\,.$$

Маємо

$$\|Ax\|_{E_2} = \max_{1 \le k \le n} |(Ax)_k| = \max_{1 \le k \le n} |\sum_{i=1}^m a_{ki} x_i| \le \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^m |a_{ki} x_i| \le c \|x\|_{E_1}\,,$$

де

$$c := \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^m |a_{ki}|.$$

Звідси випливає, що $\|A\| \le c$. Виберемо k_0 так, щоб $c = \sum_{i=1}^m |a_{k_0 i}|$, і покладемо $\tilde{x} := (e^{-i\arg a_{k_0 i}})_{k=1}^n$. Ясно, що $\|\tilde{x}\|_{E_1} = 1$. Тоді,

$$\|A\| \ge \|A\tilde{x}\|_{E_2} \ge |(A\tilde{x})_{k_0}| = \sum_{i=1}^m a_{k_0 i} e^{-i\arg a_{k_0 i}} = c.$$

Остаточно маємо

$$\|A\| = c = \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^m |a_{ki}|.$$

Приклад 6.2. Обчислимо $\|A\|$ у випадку коли

$$\|x\|_{E_1} = \sum_{i=1}^m |x_i|\,, \quad \|y\|_{E_2} = \sum_{i=1}^n |y_k|\,.$$

Маємо

$$\|Ax\|_{E_2} = \sum_{k=1}^{n} |(Ax)_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{m} |x_i| \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}| \le c \|x\|_{E_1},$$

де $c := \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|$. Звідси випливає, що $\|A\| \le c$. Доведіть самостійно, що ця оцінка точна, тобто

$$\|A\| = \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|.$$

Приклад 6.3. Нехай $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$. Розглянемо в просторі $E = l_p$, $1 \le p < \infty$ оператор

$$Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}, \quad x \in l_p. \tag{6.4}$$

Очевидно, що A лінійний оператор та

$$\|Ax\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^p)^{1/p} \le \sup_{k\ge1} |a_k| \, \|x\|_p = \|a\|_\infty \|x\|_p, \; x \in l_p.$$

Звідси випливає, що $A \in \mathcal{L}(E)$ та $\|A\| \le \|a\|_\infty$. З іншого боку

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_p \ge \sup_{k\ge1} \|Ae_k\|_p = \sup_{k\ge1} |a_k| = \|a\|_\infty.$$

Остаточно

$$\|A\| = \|a\|_\infty.$$

Вправа 6.1. Розгляньте випадок $p = \infty$.

Приклад 6.4. Нехай $a \in L_\infty(T,\mu)$, $\mu(T) < \infty$. Розглянемо в просторі $E = L_2(T,\mu)$ оператор

$$(Ax)(t) = a(t)x(t), \quad x \in E. \tag{6.5}$$

Очевидно, що A лінійний оператор та

$$\|Ax\| = \left(\int_T |a(t)x(t)|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \le \|a\|_\infty \|x\|.$$

Звідси випливає, що $A \in \mathcal{L}(E)$ та

$$\|A\| \le \|a\|_\infty. \tag{6.6}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо множину

$$\Delta_\varepsilon = \{t \in T : |a(t)| \ge \|a\|_\infty - \varepsilon\}.$$

З означення істотного супремума випливає, що $\mu(\Delta_\varepsilon) > 0$. Покладемо

$$x_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\mu(\Delta_\varepsilon)}}\chi_{\Delta_\varepsilon}.$$

Очевидно $\|x_\varepsilon\| = 1$ та

$$\|Ax_\varepsilon\| = \left(\int\limits_{\Delta_\varepsilon} |a(t)|^2 \frac{1}{m(\Delta_\varepsilon)} d\mu\right)^{1/2} \geq \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_\varepsilon\| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Враховуючи (6.6), маємо

$$\|A\| = \|a\|_\infty .$$

Вправа 6.2. Довести, що отриманий результат залишається вірним для довільного $p \in [1, \infty]$.

Вправа 6.3. Де використовується скінченість міри μ? Поширьте доведення на випадок σ-скінченої міри μ.

Приклад 6.5. Нехай $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Розглянемо в просторі $E = C[a, b]$ ***інтегральний*** оператор з ***ядром*** K

$$(Ax)(t) := \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds, \quad x \in C[a, b]. \tag{6.7}$$

В силу теореми про неперервність інтеграла залежного від параметра A переводить $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Лінійність A випливає з лінійності інтеграла. Очевидно,

$$\|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| \leq \left\{ \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t, s)|ds\right\} \|x\|_{C[a,b]} .$$

Звідси випливає, що $A \in \mathcal{L}(E)$ та

$$\|A\| \leq \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t, s)|ds.$$

Дещо складніше доводиться, що в останній формулі є рівність.

Приклад 6.6. Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $y \in E_2$, $f \in E_1^*$. Розглянемо оператор

$$Ax = f(x)y, \ \ x \in E_1. \tag{6.8}$$

Очевидно, що A лінійний оператор з E_1 в E_2 та

$$\|A\| = \sup_{||x||_{E_1}=1} \|f(x)y\|_{E_2} = \sup_{||x||_{E_1}=1} |f(x)| \, \|y\|_{E_2} = \|f\|_{E_1^*} \|y\|_{E_2}. \tag{6.9}$$

Приклад 6.7. Розглянемо в просторі $E = L_p(-1,1)$ $(1 < p < \infty)$ оператор

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} ts^2 x(s)ds, \ \ x \in E.$$

Очевидно A має вигляд (6.8), де $E_1 = E_2 = E = L_p(-1,1)$, $f(x) = \int_{-1}^{1} s^2 x(s)ds$, $y = t$. Згідно з (6.9) маємо

$$\|A\| = \|f\|_{E^*} \|y\|_E = \left(\int_{-1}^{1} |s|^{2q} ds \right)^{1/q} \left(\int_{-1}^{1} |t|^p ds \right)^{1/p} = \frac{2}{(2q+1)^{1/q}(p+1)^{1/p}},$$

де $q = p/(p-1)$ спряжений індекс.

Вправа 6.4. Обчисліть $\|A\|$ для $p = 1$ та $p = \infty$.

Приклад 6.8. Нехай $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ ортонормовані системи в гільбертовому просторі H, $\{c_1, c_2, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$. Розглянемо оператор

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} c_k (x, \varphi_k) \psi_k, \ \ x \in H. \tag{6.10}$$

Очевидно, що A лінійний оператор в H. В силу теореми Піфагора та нерівності Беселя маємо

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |(x, \varphi_k)|^2 \le \max_{1 \le k \le n} |c_k|^2 \|x\|^2. \tag{6.11}$$

Звідси випливає, що $A \in \mathcal{L}(E)$ та

$$\|A\| \le \max_{1 \le k \le n} |c_k|.$$

З іншого боку для довільного $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $A\varphi_i = c_i \psi_i$ та

$$\|A\| \ge \|A\varphi_i\| = |c_i|.$$

Остаточно маємо

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} |c_k|. \tag{6.12}$$

Приклад 6.9. Розглянемо в просторі $H = L_2(-1,1)$ оператор

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t - 3s^3)x(s)ds, \;\; x \in H.$$

Тоді A має вигляд (6.10), де

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}},\; \varphi_2(s) = \sqrt{\frac{7}{2}}\,s^3,\;\; \psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\;\; \psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\, c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}},\; c_2 = -\frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Очевидно $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$ ортонормовані системи в H. Звідси випливає, що $\|A\| = \frac{6}{\sqrt{7}}$.

6.3 Принцип рівномірної обмеженості.

Нехай (E, ρ) метричний простір, $S \subset E$. Нагадаємо, що множина S називається ніде не щільною, якщо її замикання $\overline{S}$ не має внутрішніх точок.

Означення 6.2. S називається множиною I категорії, якщо S є зліченим об'єднанням ніде не щільних множин. S називається множиною II категорії, якщо S не є множиною I категорії.

Теорема 6.4. ***(Бера про категорії.)*** *Повний метричний простір є множиною II категорії.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що E множина I категорії. Тоді

$$E = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} S_n, \tag{6.13}$$

де S_n ніде не щільна в E. Розглянемо множину $E \setminus \overline{S_1}$, яка є відкритою та непорожньою ($\overline{S_1}$ не має внутрішніх точок і не може співпадати з E). Звідси випливає, що існує відкрита куля $B_1 := B(x_1, r_1) \subset E \setminus \overline{S_1}$. Зменшивши r_1, завжди можна вважати, що $r_1 \in (0,1)$ та $\overline{B_1} \subset E \setminus \overline{S_1}$. Очевидно $B_1 \setminus \overline{S_2}$ знов відкрита та непорожня. Звідси випливає, що існує відкрита куля $B_2 = B(x_2, r_2)$ така, що $\overline{B_2} \subset B_1 \setminus \overline{S_2}$ та $r_2 \in (0, 1/2)$. Продовжуючи цей процес отримаємо послідовність відкритих куль $B_n = B(x_n, r_n)$ таких, що

$$\overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus \overline{S_n} \;\text{ та }\; r_n \in (0, 1/2^n),\; n \geq 1.$$

В силу повноти E та теореми про вкладені кулі $\exists x \in E$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \{x\}$. З іншого боку $\forall n \geq 1$ $x \in \overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus \overline{S_n}$. Останнє суперечить (6.13). □

Лема 6.3. ***(Обмеженість оператора і внутрішні точки)***. *Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A : E_1 \to E_2$ лінійний оператор. Тоді A обмежений тоді і лише тоді, коли для деякого $c > 0$ множина*

$$\Phi_c = \{x \in E_1 \mid \|Ax\| \leq c\}$$

має внутрішні точки.

Доведення. Нехай Φ_c має внутрішню точку x_0. Тоді $\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \Phi_c$. Звідси випливає, що $\forall x \in \overline{B}(0, \varepsilon)$ вектор $x + x_0 \in \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \Phi_c$. З означення Φ_c тепер випливає, що

$$\|Ax\| = \|A(x + x_0) - Ax_0\| \leq \|A(x + x_0)\| + \|A(x_0)\| \leq 2c,\ \ x \in \overline{B}(0, \varepsilon).$$

Тоді для всіх $x \in \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}$.

$$\|Ax\| = \left\| A\Big(\frac{\varepsilon}{\|x\|} x\Big) \right\| \frac{\|x\|}{\varepsilon} \leq \frac{2c}{\varepsilon} \|x\| .$$

Звідси випливає, що A обмежений та $\|A\| \leq \frac{2c}{\varepsilon}$.

Доведемо обернене твердженя. З неперервності оператора A маємо неперервність дійснозначної функції $E_1 \ni x \to \|Ax\|$. Звідси випливає, що для довільного $c > 0$ множина $\{x \mid \|Ax\| < c\}$ відкрита, а тому Φ_c має внутрішні точки. □

Лема 6.4. ***(Про рівномірну обмеженість сім'ї операторів)***. *Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $\{A_\alpha, \alpha \in T\} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ сім'я лінійних операторів. Нехай для деякого $c > 0$ множина*

$$\Phi_c = \{x \in E_1 \mid \forall \alpha \in T \ \ \|A_\alpha x\| \leq c\} \tag{6.14}$$

має внутрішні точки. Тоді

$$\sup_{\alpha \in T} \|A_\alpha\| < \infty.$$

Доведення. Доведення повторює аргументи попередньої леми. Зокрема, з умови $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset \Phi_c$ випливає, що для всіх $\alpha \in T$

$$\|A_\alpha\| \leq \frac{2c}{\varepsilon},$$

що і доводить твердження леми. □

Теорема 6.5. ***(Принцип рівномірної обмеженості)***. *Нехай E_1 банахів простір, E_2 лінійний нормований простір, $\{A_\alpha, \alpha \in T\} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Припустимо, що для довільного $x \in E_1$*

$$c_x := \sup_{\alpha \in T} \|A_\alpha x\| < \infty. \tag{6.15}$$

Тоді

$$c := \sup_{\alpha \in T} \|A_\alpha\| < \infty. \tag{6.16}$$

Доведення. Умова (6.15) означає, що для всіх $x \in E_1$ виконується $x \in \Phi_{c_x}$, де Φ_c множина визначена (6.14). Таким чином $x \in \Phi_n$ для $n \geq c_x$. Звідси випливає, що

$$E_1 = \bigcup_{n \geq 1} \Phi_n.$$

Зауважимо, що для довільного n множина

$$\Phi_n = \bigcap_{\alpha \in T} \{x \in E_1 : \|A_\alpha x\| \leq n\}$$

замкнена як перетин замкнених множин. З теореми Бера про категорії тепер випливає, що для деякого n_0 множина $\Phi_{n_0} = \overline{\Phi}_{n_0}$ має внутрішні точки. Тепер твердження теореми є наслідком леми 6.4. $\square$

6.4 Збіжність операторів

Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори. Збіжність за нормою в просторі $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ називається *рівномірною збіжностю* операторів.

Будемо казати, що послідовність операторів $\{A_n \,|\, n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ *сильно збігається* до $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ($A_n \xrightarrow{s} A$), якщо

$$\forall x \in E_1 \ A_n x \xrightarrow{s} Ax \text{ в } E_2.$$

Будемо казати, що A_n *слабко збігається* до A ($A_n \xrightarrow{w} A$), якщо

$$\forall x \in E_1 \ A_n x \xrightarrow{w} Ax \text{ в } E_2,$$

тобто

$$\forall x \in E_1 \ \forall f \in E_2^* \ \ f(A_n x) \to f(Ax).$$

Безпосередньо з означення видно, що з рівномірної збіжності випливає сильна, а з сильною слабка:

$$A_n \rightrightarrows A \ \Rightarrow \ A_n \xrightarrow{s} A \ \Rightarrow \ A_n \xrightarrow{w} A.$$

Імплікації в інший бік взагалі кажучи невірні.

Приклад 6.10. Нехай $E = l_2$,

$$A_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...), \ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2.$$

Очевидно, $\forall x \in l_2$

$$\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k \geq n+1} |x_k|^2 \to 0.$$

Останнє означає, що $A_n \xrightarrow{s} I$, де I одиничний (тотожний) оператор ($Ix := x$, $x \in E$). Так як з рівномірної збіжності випливає сильна, то єдиним кандидатом на рівномірну границю є одиничний оператор. Проте для всіх n $\|A_n - I\| = 1$ (доведіть це). Таким чином рівномірної збіжності немає.

Приклад 6.11. Нехай $E = l_2$,

$$B_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_1, x_2, ...), \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2.$$

З критерія слабкої збіжності в $E = l_2$ випливає, $\forall x \in l_2 \ B_n x \xrightarrow{w} 0$, а значить і $B_n \xrightarrow{w} 0$. З іншого боку $\forall x \in l_2 \ \|B_n x\| = \|x\|$. Таким чином сильної збіжності немає.

Вправа 6.5. Довести, що у випадку скінченнновимірних просторів E_1, E_2 всі введені операторні збіжності еквівалентні.

Наведемо деякі властивості збіжних операторних послідовностей.

Твердження 6.1. Нехай E_1 банахів простір, E_2 лінійний нормований простір, $\{A_n \,|\, n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Припустимо, що $A_n \xrightarrow{w} A$, тоді

$$\sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty. \tag{6.17}$$

Доведення. З означення слабкої збіжності операторів маємо, що $\forall x \in E_1$ $A_n x \xrightarrow{w} Ax$ в E_2. Зокрема, з наслідку 5.1 випливає, що

$$\forall x \in E_1 \quad c_x := \sup_{n \geq 1} \|A_n x\| < \infty.$$

Залишається застосувати принцип рівномірної обмеженості (теорема 6.5). □

Зауважимо, що у випадку рівномірної збіжності (6.17) виконується для довільного лінійного нормованого E_1.

Теорема 6.6. ***(Критерій сильної збіжності операторів)****. Нехай E_1 банахів простір, E_2 лінійний нормований простір, A_n, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді $A_n \xrightarrow{s} A$ тоді і лише тоді, коли*
1) виконано (6.17);
2) знайдеться множина M тотальна в E_1 така, що $\forall y \in M \quad A_n y \xrightarrow{s} Ay$.

Доведення. Необхідність випливає з твердження 6.1. Достатність доводиться аналогічно доведенню критерія $*-$слабкої збіжності функціоналів. □

Приклад 6.12. Нехай $p \in [1, \infty)$. Розглянемо в просторі $E = L_p(\mathbb{R})$ послідовність операторів

$$(A_n x)(t) = x\Big(t - \frac{1}{n}\Big), \ x \in L_p(\mathbb{R}).$$

Маємо

$$\|A_n x\|^p = \int_{\mathbb{R}} |x(t - 1/n)|^p \, dt = \|x\|^p, \ x \in L_p(\mathbb{R}).$$

Звідси випливає, що $\forall n \geq 1$ $\|A_n\| = 1$. Зокрема виконано (6.17). Перевіримо другу умову критерія сильної збіжності. Нехай $M = \{\chi_{[a,b)} \,|\, a < b\}$ (M очевидно тотальна в $L_p(\mathbb{R})$). Для $x = \chi_{[a,b)} \in M$ маємо $(A_n x) = \chi_{[a+1/n, b+1/n)}$. Тоді для $n > 1/(b-a)$

$$\|A_n x - x\|^p = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{(b,b+1/n)}(t) - \chi_{(a,a+1/n)}(t)|^p dt = \frac{2}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Таким чином $A_n \xrightarrow{s} I$ (I одиничний оператор). Перевірте самостійно, що $\|A_n - I\| = 2$ для всіх $n \geq 1$. Зокрема рівномірної збіжності немає.

Теорема 6.7. ***(Критерій слабкої збіжності операторів).*** *Нехай E_1 банахів простір, E_2 лінійний нормований простір. A_n, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді $A_n \xrightarrow{w} A$ тоді і лише тоді, коли*
1) виконано (6.17);
2) знайдуться множини M_1 тотальна в E_1, M_2 тотальна в E_2^* такі, що $\forall y \in M_1$, $\forall g \in M_2$

$$g(A_n y) \to g(Ay).$$

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 5.3 можно перейти від M_1 до E_1, а потім від M_2 до E_2. Відновіть деталі самостійно. □

З теореми Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі безпосередньо випливає наступне твердження.

Вправа 6.6. Нехай H гільбертів простір. $A_n, A \in \mathcal{L}(H)$. Тоді $A_n \xrightarrow{w} A$ тоді і лише тоді, коли $\forall x, y \in H$

$$(A_n x, y) \to (Ax, y),\ n \to \infty.$$

Тепер легко довести наступну теорему.

Теорема 6.8. ***(Критерій слабкої збіжності операторів в гільбертовому просторі.)*** *Нехай H гільбертів простір. $A_n, A \in \mathcal{L}(H)$. Тоді $A_n \xrightarrow{w} A$ тоді і лише тоді, коли*
1) виконано (6.17);
2) знайдеться множина M тотальна в H така, що $\forall x, y \in M$

$$(A_n x, y) \to (Ax, y),\ n \to \infty.$$

Доведення. Доведіть самостійно. □

Приклад 6.13. Розглянемо в просторі $H = L_2(\mathbb{R})$ послідовність операторів

$$(A_n x)(t) = x(t-n),\ x \in L_2(\mathbb{R})$$

Очевидно

$$\|A_n x\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |x(t-n)|^2\,dt = \|x\|^2,\ x \in L_2(\mathbb{R}).$$

Звідси випливає, що $\forall n \geq 1$ $\|A_n\| = 1$. Зокрема виконано (6.17). Перевіримо другу умову критерія слабкої збіжності. Нехай $M = \{\chi_{[a,b)} \,|\, a < b\}$ (M очевидно тотальна в $L_2(\mathbb{R})$). Для $x = \chi_{[a,b)} \in M$, $y = \chi_{[c,d)} \in M$ маємо

$$(A_n x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[a+n,b+n)}(t)\overline{\chi_{[c,d)}}(t)dt = 0,\ n > d-a.$$

Таким чином $A_n \xrightarrow{w} 0$. Перевірте самостійно, що сильної збіжності немає.

6.5 Добуток операторів. Обернений оператор.

Нехай E_1, E_2, E_3 лінійні нормовані простори, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Визначимо добуток операторів

$$ABx := A(Bx),\ x \in E_1.$$

Очевидно AB лінійний оператор та

$$\|ABx\|_{E_3} \leq \|A\| \|Bx\|_{E_2} \leq \|A\| \|B\| \|x\|_{E_3}.$$

Звідси випливає, що $AB \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$, та

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Зазначимо, що у випадку $E_1 = E_2 = E_3 = E$ визначені добутки BA та AB. Зокрема $\mathcal{L}(E)$ утворює алгебру (непререрервних) операторів.

Для довільного $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ визначимо ядро $KerA := \{x \in E_1 \mid Ax = 0\}$ і образ оператора $RanA = \{Ax \mid x \in E_2\}$.

Вправа 6.7. Довести, що $KerA$ підпростір E_1, а $RanA$ лінійна множина в E_2.

Зауважимо, що умова $KerA = \{0\}$ еквівалентна ін'єктивності оператора A. Дійсно, в силу лінійності A маємо, що $Ax = Ay$ тоді і лише тоді, коли $x-y \in KerA$. Таким чином, якщо $KerA = \{0\}$, то можна визначити *обернений* оператор $A^{-1} : RanA \to E_1$

$$A^{-1}(Ax) := x,\ x \in E_1. \tag{6.18}$$

Вправа 6.8. Довести, що A^{-1} лінійний оператор з $RanA$ в E_1.

Означення 6.3. Нехай $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Будемо говорити, що A неперервно оборотний, якщо виконані наступні умови:

$$1)\, KerA = \{0\},\ 2)\, RanA = E_2,\ 3)\, A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1). \tag{6.19}$$

Умови 1), 2) означають, що A є бієкцією, в 3) додатково вимагається неперервність A^{-1}.

Приклад 6.14. Нехай $E = E_1 = E_2 = \mathbb{C}^n$ та оператор A задається матрицею $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Тоді

$$KerA = \{0\} \ \Leftrightarrow\ det((a_{i,j})_{i,j=1}^n) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ RanA = E_2 \Leftrightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Більш загально, у випадку скінченовимірного $E = E_1 = E_2$ умови 1), 2), 3) означення неперервної оборотності еквівалентні.

В нескінченовимірному випадку це вже не вірно. Розберемо наступний приклад.

Приклад 6.15. Нехай $E = C[0,1]$ та $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$. Очевидно $A \in \mathcal{L}(E)$. Якщо $x \in KerA$, то $\forall t \in [0,1]$ $\int_0^t x(s)ds = 0$. Продиференціювавши останню рівність отримаємо $x = 0$. Таким чином $KerA = \{0\}$ і умова 1) виконана. Зауважимо, що

$$RanA = \{y \in C[0,1] \mid y(t) = \int\limits_0^t x(s)ds,\ x \in C[0,1]\} = \{y \in C^1[0,1] \,|\, y(0) = 0\} \neq E.$$

Зокрема 2) не виконано. Знайдемо A^{-1}. Маємо

$$y(t) := (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds\ \Rightarrow y'(t) = x(t) \Rightarrow (A^{-1}y)(t) = x(t) = y'(t).$$

Таким чином

$$(A^{-1}x)(t) = x'(t),\ x \in RanA.$$

Покажемо, що A^{-1} не обмежений. Нехай $x_n(t) = \sin nt$. Очевидно $x_n \in RanA$ та $\|x_n\|_{C[0,1]} = 1$ для $n \geq 2$. З іншого боку,

$$(A^{-1}x_n)(t) = n\cos nt \quad \text{та} \quad \left\|A^{-1}x_n\right\|_{C[0,1]} = n \to \infty.$$

Таким чином зараз виконана лише перша умова (6.19).

Позначимо через I_E одиничний оператор в E ($I_E x := x$, $x \in E$).

Теорема 6.9. ***(Критерій неперервної оборотності)*** *Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді A неперервно оборотний тоді і лише тоді, коли знайдеться такий $B \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, що*

$$BA = I_{E_1} \tag{6.20}$$

$$AB = I_{E_2} \tag{6.21}$$

Доведення. Для доведення необхідності достатньо взяти $B := A^{-1}$. Доведемо достатність. Нехай $x \in KerA$, тоді $BAx = 0$ і з (6.20) випливає, що $x = 0$. Таким чином $KerA = \{0\}$. З (6.21) маємо що $RanA \supset Ran(AB) = Ran(I_{E_2}) = E_2$. Таким чином A є біекцією з E_1 в E_2. В силу (6.20) A^{-1} співпадає з B на $RanA = E_2$. Останнє означає, що $A^{-1} = B \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. $\square$

З доведення видно, що умова (6.20) забезпечує, що $KerA = \{0\}$. В свою чергу умова (6.21) дає $RanA = E_2$.

Приклад 6.16. Нехай $E_1 = E_2 = L_2(\mathbb{R})$ та

$$(Ax)(t) = x(t+1),\ (Bx)(t) = x(t-1),\ x \in L_2(\mathbb{R}).$$

Очевидно, $A, B \in \mathcal{L}(E)$, та $AB = BA = I$. Звідси випливає, що A, B неперервно оборотні та $A^{-1} = B$.

Приклад 6.17. Нехай $E = L_1(0, \infty)$,

$$(Ax)(t) = tx(t^2),\ \ x \in E.$$

Очевидно, що A лінійний оператор та

$$\|Ax\| = \int_0^\infty t\big|x(t^2)\big|dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty |x(s)|ds = \frac{1}{2}\|x\|,\ x \in E.$$

Таким чином A неперервний. З рівняння

$$y(t) = (Ax)(t) = tx(t^2),$$

маємо

$$x(t) = t^{-1/2}y(\sqrt{t}).$$

Ця формула задає формальну дію оберненого оператора. Визначимо

$$(Bx)(t) := t^{-1/2}x(\sqrt{t}),\ \ x \in E.$$

Перевірте самостійно, що $B \in \mathcal{L}(E)$ та $AB = BA = I$. Звідси випливає, що оператор A неперервно оборотний та $A^{-1} = B$.

Пояснимо, що (на відміну від скінченовимірного випадку) однієї з умов (6.20), (6.21) не достатньо для неперервної оборотності A.

Приклад 6.18. Нехай $E_1 = E_2 = l_2$ та

$$Ax = (0, x_1, x_2, ...),\ x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2.$$

Очевидно $A \in \mathcal{L}(l_2)$. Маємо $KerA = \{0\}$, $RanA = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2 \,|\, x_1 = 0\} \neq l_2$. Звідси випливає, що не виконана друга умова (6.19) і A не є неперервно оборотним. Розглянемо оператор $Bx = (x_2, x_3, ...),\ x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2$. Маємо

$$BA = I,\ ABx = (0, x_2, x_3, ...),\ x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2.$$

Таким чином умова (6.20) виконана, а (6.21) ні.

Так само легко навести приклад лінійних неперервних операторів для яких умова (6.21) виконана, а (6.20) ні.

Твердження 6.2. Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ неперервно оборотний оператор. Тоді знайдеться $c > 0$ таке, що $\forall\ x \in E_1$

$$\|Ax\|_2 \geq c\|x\|_1. \tag{6.22}$$

Доведення. З неперервної оборотності A випливає, що $\forall\ y \in E_2$

$$\left\|A^{-1}y\right\|_1 \leq \left\|A^{-1}\right\| \|y\|_2$$

Для довільного $x \in E_1$ застосуємо цю нерівність до вектора $y = Ax$. В результаті отримаємо (6.22) з $c := \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$. □

Приклад 6.19. Нехай $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Розглянемо в просторі $E = l_p$ діагональний оператор

$$Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}, \quad x \in l_p.$$

Покажемо, що A неперервно оборотний тоді і лише тоді, коли

$$c := \inf_{k \geq 1} |a_k| > 0. \tag{6.23}$$

Припустимо спочатку, що A неперервно оборотний. Тоді в силу твердження 6.2

$$\inf_{k \geq 1} |a_k| = \inf_{k \geq 1} \|Ae_k\| \geq \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0.$$

Навпаки, нехай виконано (6.23). Розглянемо оператор

$$Bx = (a_k^{-1} x_k)_{k=1}^{\infty}, \quad x \in l_p.$$

Очевидно, $B \in \mathcal{L}(E)$ (перевірте, що $\|B\| = \frac{1}{c}$) та $AB = BA = I$. Зокрема силу теореми 6.9, оператор A неперервно оборотний та $A^{-1} = B$.

Вправа 6.9. Нехай $a \in L_\infty(T, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Розглянемо в просторі $E = L_p(T, \mu)$ оператор

$$(Ax)(t) = a(t)x(t), \quad x \in E.$$

Довести, що A неперервно оборотний тоді і лише тоді, коли

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t \in T} |a(t)| > 0.$$

Знайти A^{-1}.

Наступна важлива і нетривіальна теорема С. Банаха стверджує, що в повних просторах третя умова (6.19) автоматично випливає з перших двох. Іншими словами лінійна неперервна бієкція є гомеоморфізмом.

Теорема 6.10. ***(Банаха про обернений оператор)*** *Нехай E_1, E_2 банахові простори, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді A неперервно оборотний тоді і лише тоді, коли A є бієкцією з E_1 в E_2, тобто $KerA = \{0\}$ та $RanA = E_2$.*

Доведення. Доведення цієї теореми можна знайти в [5], [6]. Зауважимо, що в неповних лінійних нормованих просторах твердження теореми не виконується. □

Наведемо приклад застосування теореми 6.10.

Твердження 6.3. Нехай E лінійний простір на якому задані норми $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Припустимо, що E повний (банаховий) простір відносно норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, та для деякого $c_1 > 0$ справедлива оцінка

$$\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1, \ \ x \in E. \tag{6.24}$$

Тоді знайдеться $c_2 > 0$ таке, що

$$\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2, \ \ x \in E. \tag{6.25}$$

Зауваження 6.2. Наведене твердження означає, що якщо в просторі E введені дві норми відносно яких E є повним (банаховим) простором, та одна з цих норм підпорядкована іншій, то насправді ці норми мають бути еквівалентними.

Доведення. Позначимо через E_i простір E з нормою $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$. Розглянемо тотожний оператор $Ax := x$, як оператор з E_1 в E_2. З (6.24) випливає, що $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Очевидно A бієкція і з теореми Банаха про обернений оператор маємо, що $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$. Тоді

$$\|x\|_1 = \left\|A^{-1}x\right\|_1 \leq \left\|A^{-1}\right\| \|x\|_2, \ x \in E.$$

□

Вправа 6.10. Нехай $E = C[0, 1]$,

$$\|x\|_1 = \max_{[0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt.$$

Довести, що в цьому випадку оцінка (6.24) вірна, проте (6.25) не справедлива. Як це корелює з доведеним твердженням?

Теорема 6.11. ***(Про оборотність оператора близького до I)*** *Нехай E банахів простір, $A \in \mathcal{L}(E)$ і $\|A\| < 1$. Тоді оператор $I + A$ неперервно оборотний.*

Зауваження 6.3. Так як $\|A\| = \|-A\|$, то в доведенні теореми $I + A$ можна замінити на $I - A$.

Доведення. Покладемо $S_n := I + A + A^2 + ... + A^n$. Очевидно

$$\|S_n - S_m\| = \left\|A^{m+1} + ... + A^n\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \to 0, \ \ m, n \to \infty.$$

Звідси випливає, що S_n фундаментальна в $\mathcal{L}(E)$, а тому існує $S \in \mathcal{L}(E)$: $S_n \rightrightarrows S, \ n \to \infty$. Безпосередньо перевіряється, що

$$S_n(I - A) = (I - A)S_n = I - A^{n+1}.$$

Спрямувавши n до ∞, отримаємо:

$$S(I - A) = (I - A)S = I.$$

З критерію неперервної оборотності (теорема 6.9) випливає, що $I - A$ неперервно оборотний та

$$(I - A)^{-1} = S. \tag{6.26}$$

$\square$

Зауваження 6.4. Формула (6.26) є операторним аналогом формули для суми геометричної прогресії.

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \ \ |q| < 1.$$

Вправа 6.11. Нехай E банахів простір. Довести, що множина неперервно оборотних операторів відкрита в $\mathcal{L}(E)$.

Розділ 7

Оператори в гільбертовому просторі

7.1 Білінійні форми

Нехай H комплексний гільбертів простір, $B : H \times H \to \mathbb{C}$.

Означення 7.1. B називається білінійною формою, якщо

$$1)\, \forall x, y, z \in H \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \;\; B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x, z) + \mu B(y, z);$$

$$2)\, \forall x, y, z \in H \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \;\; B(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} B(z, x) + \overline{\mu} B(z, y).$$

Таким чином білінійна форма, це функція з $H \times H$ в $\mathbb{C}$, що лінійна по першому аргументу та антилінійна по другому.

Означення 7.2. Білінійна форма B називається обмеженою, якщо

$$\exists c \geq 0 \; \forall x, y \in H : \;\; |B(x, y)| \leq c \|x\| \, \|y\| \, . \tag{7.1}$$

Очевидно, скалярний добуток є обмеженою білінійною формою. Для обмеженою білінійною форми B введемо

$$\|B\| := \sup_{x \neq 0, \; y \neq 0} \frac{|B(x, y)|}{\|x\| \, \|y\|}. \tag{7.2}$$

Вправа 7.1. Довести, що

$$\|B\| = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |B(x, y)| = \min\{c \geq 0 \mid \forall x, y \in H : \;\; |B(x, y)| \leq c \|x\| \, \|y\|\}.$$

Вправа 7.2. Довести, що обмежена білінійна форма є неперервною функцією на $H \times H$.

Приклад 7.1. Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$. Розглянемо

$$B_A(x,y) := (Ax,y) \tag{7.3}$$

Очевидно, B_A білінійна форма та $|B_A(x,y)| \le \|A\| \, \|x\| \, \|y\|$. Звідси випливає, що B_A обмежена та

$$\|B_A\| \le \|A\| \, . \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. ***(Про операторне представлення білінійної форми).*** *Нехай H гільбертів простір, B обмежена білінійна форма. Тоді $\exists!\ A \in \mathcal{L}(H)$:*

$$B = B_A. \tag{7.5}$$

До того ж,

$$\|A\| = \|B_A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)| \, . \tag{7.6}$$

Доведення. Нехай $x \in H$ фіксований елемент гільбертового простору. Розглянемо

$$f(y) := \overline{B(x,y)}, \ y \in H. \tag{7.7}$$

Тоді f лінійний функціонал на H та

$$|f(y)| = \left|\overline{B(x,y)}\right| \le \|B\| \, \|x\| \, \|y\| \, , \ y \in H.$$

Таким чином $f \in H^*$. З теореми Ріса випливає, що $\exists!\, h \in H : f(y) = (y,h)$. Враховуючи (7.7), маємо $B(x,y) = (h,y)$. Застосувавши наведені аргумерти для довільного $x \in H$ отримаємо, що

$$\forall x \in H \ \exists!\, h_x \in H \ \forall y \in H : \ B(x,y) = (h_x,y). \tag{7.8}$$

Покладемо

$$Ax := h_x, \ x \in H.$$

Перевіримо, що A є лінійним неперервним оператором в H. $\forall x_1, x_2, y \in H, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ маємо

$$(h_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}, y) = B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1,y) + \lambda_2 B(x_2,y) =$$

$$= \lambda_1 (h_{x_1},, y) + \lambda_2 (h_{x_2}, y) = (\lambda_1 h_{x_1} + \lambda_2 h_{x_2}, y).$$

Таким чином $h_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \lambda_1 h_{x_1} + \lambda_2 h_{x_2}$, себто A є лінійним оператором. З (7.8) маємо

$$B(x,y) = (Ax,y) \ \ x,y \in H, \tag{7.9}$$

що еквівалентно (7.5). Підставивши $y = Ax$ в (7.9) отримаємо

$$\|Ax\|^2 = B(x,Ax) \le \|B\| \, \|x\| \, \|Ax\| \, , \ x \in H.$$

Звідси випливає, що $\forall x \in H \ \|Ax\| \le \|B\| \, \|x\|$, а значить і $\|A\| \le \|B\|$. Враховуючи (7.4) маємо, що $\|A\| = \|B\|$. Зауважимо, що ми встановили існування A, єдиність доведіть самостійно. $\square$

Позначимо $B[x] := B(x, x)$, $x \in H$. Наступне твердження доводиться так само, як і для скалярного добутку.

Вправа 7.3. (Принцип поляризації) Нехай $B : H \times H \to \mathbb{C}$ білінійна форма. Тоді $\forall x, y \in H$

$$B(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \{1, -1, i, -i\}} \alpha B[x + \alpha y].$$

7.2 Спряжений оператор в гільбертовому просторі

Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$. Покладемо

$$\widetilde{B}_A(x, y) := (x, Ay), \ x, y \in H.$$

Ясно, що $\widetilde{B}_A$ обмежена білінійна форма. З теореми 7.1 тепер випливає, що $\exists!\ A^* \in \mathcal{L}(H) : \widetilde{B}_A = B_{A^*}$. Це означає, що

$$(A^* x, y) = (x, Ay), \ x, y \in H. \tag{7.10}$$

Означення 7.3. Оператор $A^* \in \mathcal{L}(H)$, що задовольняє (7.10) називається спряженим до оператора A.

Як вже відзначалося, теорема 7.1 забезпечує існування і єдиність A^*. Покажемо, що

$$\|A^*\| = \|A\| . \tag{7.11}$$

Дійсно, з (7.6) маємо

$$\|A^*\| = ||\widetilde{B}_A|| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(x, Ay)| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ay, x)| = \|A\| .$$

Приклад 7.2. Нехай $H = \mathbb{C}^n$ та оператор A задається матрицею $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, тобто для $x = (x_1, ..., x_n)$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{7.12}$$

Тоді $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ маємо

$$(A^* x, y) = (x, Ay) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} x_i \right) \overline{y_j}.$$

Звідси випливає, що

$$(A^*x)_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}} x_i,\ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Таким чином спряжений оператор A^* задається спряженою траспонованою до $\mathcal{A}$ матрицею $\overline{\mathcal{A}^t} := (\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^{n}$.

Приклад 7.3. Нехай $H = L_2(T, \mu)$, $a \in L_\infty(T, \mu)$,

$$(Ax)(t) = a(t)x(t),\ \ x \in H.$$

Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$(A^*x, y) = (x, Ay) = \int\limits_T x(t)\overline{a(t)y(t)}d\mu = \int\limits_T \overline{a(t)}x(t)\overline{y(t)}d\mu.$$

Звідси випливає, що $(A^*x)(t) = \overline{a(t)}x(t),\ \ x \in H.$

Приклад 7.4. Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$,

$$(Ax)(t) = x(t+s),\ \ x \in H.$$

Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$(A^*x, y) = (x, Ay) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t+s)}dt = \int\limits_{\mathbb{R}} x(\tau - s)\overline{y(\tau)}d\tau.$$

Звідси випливає, що $(A^*x)(t) = x(t-s),\ \ x \in H.$

Приклад 7.5. Нехай $H = l_2$,

$$Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)\,,\ \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2.$$

Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$(A^*x, y) = (x, Ay) = x_1 \cdot 0 + x_2\overline{y_1} + ... + x_k\overline{y_{k-1}} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1}\overline{y_k}.$$

Звідси випливає, що $A^*x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)\,,\ \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2.$

Вправа 7.4. Нехай $H = l_2$,

$$Ax = (x_3, x_4, x_5 \ldots)\,,\ \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2.$$

Довести, що $A^*x = (0, 0, x_1, x_2, \ldots)\,,\ \ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2.$

Наведемо елементарні властивості спряжених операторів

Твердження 7.1. Нехай $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тоді

$$(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*, \tag{7.13}$$

$$(AB)^* = B^* A^*, \tag{7.14}$$

$$A^{**} = A. \tag{7.15}$$

Доведення. В силу (7.10)

$$\forall x, y \in H \ ((AB)^* x, y) = (x, ABy) = (A^* x, By) = (B^* A^* x, y),$$

що доводить (7.14). Так само (7.15) випливає з того, що

$$\forall x, y \in H \ (A^{**} x, y) = ((A^*)^* x, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y).$$

Доведіть (7.13) самостійно. □

Приклад 7.6. Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$,

$$(Cx)(t) = e^{it} x(t+3), \ \ x \in H.$$

Тоді $C = AB$, де

$$(Ax)(t) = e^{it} x(t), \ (Bx)(t) = x(t+3), x \in H.$$

Згідно з прикладами 7.3, 7.4 маємо $(A^* x)(t) = e^{-it} x(t), \ (B^* x)(t) = x(t-3), x \in H$. Тоді

$$(C^* x)(t) = B^*(A^* x)(t) = e^{-i(t-3)} x(t-3), \ \ x \in H.$$

7.3 Самоспряжені оператори

Означення 7.4. Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$, A називається самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Ясно, що умову самоспряженості можна переписати вигляді

$$(Ax, y) = (x, Ay), \ \ x, y \in H, \tag{7.16}$$

або в термінах білінійної форми $B_A(\cdot, \cdot) = (A\cdot, \cdot)$

$$B_A(x, y) = \overline{B_A(y, x)}, \ \ x, y \in H. \tag{7.17}$$

Білінійні форми, що задовольняють (7.16) називають *ермітовими.* Ясно, що скалярний добуток є прикладом ермітової білінійної форми.

Приклад 7.7. Нехай $H = \mathbb{C}^n$ і оператору A відповідає $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді (дивись приклад 7.2) $A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i, j \in 1, 2, ..., n$, тобто матриця $\mathcal{A}$ ермітова.

Приклад 7.8. Нехай $H = L_2(T, \mu)$, $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, де $a \in L_\infty(T, \mu)$. В силу приклада 7.3 маємо, що A самоспряжений тоді і лише тоді, коли a дійсна майже скрізь відносно міри μ.

Наступна теорема показує, що в комплексному гільбертовому просторі самоспряженість еквівалентна дійсності квадратичної форми $B_A[x] = B_A(x, x)$. Зауважимо, що цей результат невірний для дійсних гільбертових просторів (в дійсному просторі всі квадратичні форми будуть дійсними).

Теорема 7.2. *Нехай H комплексний гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Тоді A самоспряжений, тоді і лише тоді, коли*

$$\forall x \in H \quad B_A[x] \equiv (Ax, x) \in \mathbb{R}. \tag{7.18}$$

Доведення. Необхідність випливає з (7.17). Доведемо достатність. Завдяки принципу поляризації для довільних $x, y \in H$ маємо

$$B_A(x, y) = \frac{1}{4}(B_A[x+y] - B_A[x-y] + iB_A[x+iy] - iB_A[x-iy]). \tag{7.19}$$

Тоді в силу (7.18)

$$\overline{B_A(y, x)} = \frac{1}{4}(B_A[y+x] - B_A[y-x] - iB_A[y+ix] + iB_A[y-ix]) \tag{7.20}$$

Враховуючи

$$B_A[\lambda x] = B_A(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 B_A[x], \ \lambda \in \mathbb{C}, \ x \in H,$$

маємо

$$B_A[y-x] = B_A[x-y], \ B_A[y+ix] = B_A[x-iy], \ B_A[y-ix] = B_A[x+iy].$$

З (7.19), (7.20) тепер очевидно випливає умова ермітовості (7.17). □

Теорема 7.3. ***(Про норму самоспряженого оператора)*** *Нехай $A = A^*$. Тоді*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|. \tag{7.21}$$

Доведення. Позначимо праву частину (7.21) через c_A. В силу (7.6) маємо

$$c_A \leq \|A\|.$$

Доведемо протилежну нерівність. З означення c_A випливає, що $\forall x \in H$

$$|B_A[x]| = |(Ax, x)| \leq c_A \|x\|^2.$$

З дійсності квадратичної форми $B_A[\cdot]$ та (7.19) маємо, що $\forall x, y \in H$

$$|\mathrm{Re} B_A(x,y)| = \left|\frac{1}{4}(B_A[x+y] - B_A[x-y])\right| \leq$$

$$\leq \frac{c_A}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{c_A}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

де остання рівність випливає з тотожності паралелограма. Для довільних фіксованих $x, y \in H$ позначимо $\alpha := e^{-iargB_A(x,y)}$. Тоді

$$|B_A(x,y)| = B_A(\alpha x, y) = \mathrm{Re} B_A(\alpha x, y) \leq \frac{c_A}{2}(\|\alpha x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{c_A}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

З (7.6) тепер випливає, що

$$\|A\| = \|B_A\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |B_A(x,y)| \leq \frac{c_A}{2}(1+1) = c_A.$$

□

Вправа 7.5. Нехай $A = A^*$. Покладемо

$$M := \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad m := \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Довести, що

$$\|A\| = \max\{M, -m\}.$$

Вправа 7.6. Навести приклад оператора $A \in \mathcal{L}(H)$, такого, що $c_A < \|A\|$.

Означення 7.5. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називається невід'ємним ($A \geq 0$), якщо

1) $A = A^*$

2) $\forall x \in H \ (Ax, x) \geq 0$

Вправа 7.7. В комплексному гільбертовому просторі з другої умови означення випливає перша.

Приклад 7.9. $H = L_2(\mathbb{R}), a \in L_\infty(\mathbb{R}), (Ax)(t) = a(t)x(t), x \in H$. Ми вже знаємо, що самоспряженість A еквівалентна дійсності (майже скрізь відносно міри Лебега) функції a. Покажемо, що невід'ємність A еквівалентна невід'ємності a (майже скрізь відносно міри Лебега). Очевидно для невід'ємних a

$$(Ax, x) = \int_{\mathbb{R}} a(t)\,|x(t)|^2\,dt \geq 0, \quad x \in L_2(\mathbb{R}),$$

що означає невід'ємність оператора A. Навпаки, припустимо, що A невід'ємний. Для довільного $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $m(\Delta) < \infty$ розглянемо $x := \chi_\Delta \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді для всіх таких Δ маємо

$$(Ax, x) = \int_{\Delta} a(t)\,dt \geq 0.$$

Добре відомо, що звідси випливає, що $a \geq 0\,(mod\ m)$.

7.4 Унітарні оператори

Означення 7.6. Нехай H гільбертів простір. Оператор $U \in \mathcal{L}(H)$ називається унітарним, якщо

1) $\forall x \in H \ \ \|Ux\| = \|x\|$,

2) $Ran\,(U) = H$.

Умови 1), 2) в точності означають, що U є ізометричною бієкцією.

Вправа 7.8. Доведіть за означенням, що оператор зсуву

$$(Ux)(t) = x(t-1), \quad x \in L_2(\mathbb{R})$$

є унітарним в $H = L_2(\mathbb{R})$.

Вправа 7.9. Довести, що для унітарного оператора U виконується

$$(Ux, Uy) = (x, y), \ \ x, y \in H. \tag{7.22}$$

Доведіть це за допомогою поляризаційної тотожності.

Вправа 7.10. Довести, що в скінченовимірному гільбертовому просторі з першого пункту означення унітарного оператора випливає другий.

Приклад 7.10. Розглянемо в просторі $H = l_2$ оператор $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Переконайтесь, що перший пункт означення 7.6 виконаний, а другий ні.

Теорема 7.4. *Оператор $U \in \mathcal{L}(H)$ є унітарним тоді і лише тоді, коли*
a) оператор U неперервно оборотний,
b) $U^{-1} = U^*$.

Доведення. Доведемо необхідність. З ізометричності U випливає, що $Ker\,U = \{0\}$. Тоді з умови $Ran\,U = H$ маємо, що U є бієкцією, і завдяки теоремі Банаха про обернений оператор U є неперервно оборотним. Покажемо, що $U^{-1} = U^*$. В силу означення спряженого оператора та (7.22)

$$(x, U^*Uy) = (Ux, Uy) = (x, y)\,, \ \ x, y \in H.$$

Звідси випливає, що $U^*U = I$ та $U^{-1} = U^*$. Достатність доведіть самостійно. □

Приклад 7.11. Нехай $H = L_2(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$

$$(Ux)(t) = x(t+s), \ \ x \in H.$$

Згідно з прикладами 6.16, 7.4 маємо, що U неперервно оборотний та

$$(U^{-1}x)(t) = (U^*x)(t) = x(t-s), \ \ x \in H.$$

Таким чином $U^{-1} = U^*$ і U є унітарним оператором.

Приклад 7.12. Нехай $H = L_2(0, \infty)$,

$$(Ux)(t) = \sqrt{2t}x(t^2), \ \ x \in H.$$

Очевидно, що U лінійний оператор та

$$\|Ux\|^2 = 2\int_0^\infty t\big|x(t^2)\big|^2 dt = \int_0^\infty |x(s)|^2 ds = \|x\|^2, \ x \in H.$$

Таким чином U ізометричний оператор. Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$(U^* x, y) = (x, Uy) = \int_0^\infty x(t)\overline{\sqrt{2t}y(t^2)}dt = 2^{-1/2}\int_0^\infty s^{-1/4}x(\sqrt{s})\overline{y(s)}ds.$$

Звідси випливає, що

$$(U^* x)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{t}}\,x(\sqrt{t}), \ \ x \in H.$$

Перевірте самостійно, що $U^*U = UU^* = I$. Таким чином U неперервно оборотний та $U^{-1} = U^*$, зокрема U є унітарним оператором.

7.5 Ортопроектори

Нехай H гільбертів простір, L підпростір H та $L^\perp$ його ортогональне доповнення. Нагадаємо, що теорема про ортогональний розклад гільбертова простору стверджує, що

$$\forall x \in H \ \exists! \ x_1 \in L, \ \exists! \ x_2 \in L^\perp : \ x = x_1 + x_2.$$

Вектор x_1 називають ортопроекцією x на L ($x_1 = pr_L x$).

Означення 7.7. Оператор

$$P_L x := pr_L x, \ x \in H$$

називається оператором ортогонального проектування (**ортопроектором**) на підпростір L.

Покажемо, що P_L лінійний оператор. Нехай $x = x_1 + x_2, \ y = y_1 + y_2$, де $x_1, \ y_1 \in L, \ x_2, \ y_2 \in L^\perp$, $\lambda, \ \mu \in \mathbb{C}$. Тоді

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2).$$

Звідси випливає, що

$$P_L(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda P_L x + \mu P_L y,$$

тобто P_L лінійний оператор. Очевидно

$$\|P_L x\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 , \ x \in H.$$

Звідси випливає, що $P_L \in \mathcal{L}(H)$ та $\|P_L\| \leq 1$. Так як $P_L x = x$ для $x \in L$, то $\|P_L\| = 1$, якщо $L \neq \{0\}$. Наступна теорема дає опис ортопроекторів в H.

Теорема 7.5. *Оператор $P \in \mathcal{L}(H)$ є ортопроектором на деякий підпростір L в H тоді і лише тоді, коли P самоспряжений та $P^2 = P$.*

Доведення. Нехай $P = P_L$ ортопроектор на підпростір L. Тоді $\forall x, y \in H$

$$(P_L x, y) = (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) = (x, y_1) = (x, P_L y) .$$

Тут $x = x_1 + x_2, \ y = y_1 + y_2$, де $x_1, \ y_1 \in L, \ x_2, \ y_2 \in L^\perp$. Таким чином оператор P_L самоспряжений. Далі, $\forall x \in H$

$$P_L x = x_1, \ P_L^2 x = P_L x_1 = x_1 \ \Rightarrow P_L^2 = P_L.$$

Нехай тепер P самоспряжений оператор такий, що $P^2 = P$. Визначимо $L := \{x \in H \mid Px = x\}$. Доведіть самостійно, що L підпростір та $P = P_L$. □

7.6 Оператори Гільберта-Шмідта

Нехай H сепарабельний гільбертів простір, $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ортонормований базис в H, $A \in \mathcal{L}(H)$. Розглянемо розклад вектора $x \in H$ в ряд Фурьє за базисом $\{e_k \mid k \geq 1\}$

$$x = \sum_{k \geq 1} (x, e_k)\, e_k = \sum_{k \geq 1} x_k e_k,$$

де $x_k := (x, e_k)$. З лінійності та неперервності A випливає, що $Ax = \sum\limits_{k \geq 1} x_k A e_k$, та $(Ax, e_j) = \sum_{k \geq 1} (Ae_k, e_j)\, x_k$. Покладемо

$$a_{jk} := (Ae_k, e_j) .$$

Тоді

$$(Ax)_j = (Ax, e_j) = \sum_{k \geq 1} a_{jk} x_k, \ x \in H. \tag{7.23}$$

Таким чином ми показали, що кожен лінійний неперервний оператор A в гільбертовому просторі H задається матрицею $\mathcal{A} := (a_{j,k})_{j,k \geq 1}$ (допускає матричне зображення) в довільному ортонормованому базисі $\{e_k \mid k \geq 1\}$. Ясно, що матриця $\mathcal{A}$ однозначно задає оператор A. Справді, з (7.23) та рівності

$$(Ae_k, e_j) = (Be_k, e_j) , \ \ k, j \geq 1,$$

випливає, що $A = B$.

Лема 7.1. *Нехай H сепарабельний гільбертів простір, $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ортонормований базис в H. Матриця $\mathcal{A} = (a_{j,k})_{j,k\geq 1}$, що задовільняє умову*

$$C := \sum_{j,k\geq 1} |a_{j,k}|^2 < \infty, \tag{7.24}$$

визначає за формулою (7.23) лінійний неперервний A оператор в H. До того ж, $\|A\| \leq \sqrt{C}$

Доведення. З рівності Парсеваля та нерівності Коші – Буняковського маємо, що для довільного $x \in H$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|(Ax)_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk} x_k| \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) = C \|x\|^2.$$

Таким чином $A : H \to H$. Лінійність A випливає з (7.23), обмеженість та оцінка для норми з доведеної нерівності. □

Зауважимо, що умова (7.24) є лише достатньою, але не необхідною для задання оператора $A \in \mathcal{L}(H)$. Зокрема тотожньому оператору відповідає одинична матриця, що не задовольняє умові (7.24) в нескінченовимірному H.

Означення 7.8. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називається оператором Гільберта-Шмідта, якщо для деякого ортонормованого базиса $\{e_k \mid k \geq 1\}$ в H

$$\sum_{k\geq 1} \|Ae_k\|^2 < \infty \tag{7.25}$$

Позначимо клас операторів Гільберта-Шмідта через $S_2(H)$ та введемо норму Гільберта-Шмідта

$$\|A\|_2 := (\sum_{k\geq 1} \|Ae_k\|^2)^{1/2}. \tag{7.26}$$

Теорема 7.6. *Норма Гільберта-Шмідта не залежить від вибору базиса.*

Доведення. Нехай $\{e_k\}$, $\{g_j\}$ ортонормовані базиси в H. В силу рівності Парсеваля маємо

$$\|Ae_k\|^2 = \sum_{j\geq 1} |(Ae_k, g_j)|^2,$$

та

$$\sum_{k\geq 1} \|Ae_k\|^2 = \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} |(Ae_k, g_j)|^2 = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq 1} |(e_k, A^* g_j)|^2 = \sum_{j\geq 1} \|A^* g_j\|^2 \tag{7.27}$$

Зафіксуємо базис $\{g_j\}$ та отримаємо, що ліва частина (7.27) (а значить і $\|A\|_2$), не залежить від вибору базиса $\{e_k\}$. Зокрема, якщо сума в (7.25) скінчена для одного базиса, то вона скінчена і для довільного іншого. □

Теорема 7.7. *Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$ та $\{e_k \mid k \geq 1\}$ ортонормований базис в H. Тоді $A \in S_2(H)$ тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{j,k \geq 1} |(Ae_k, e_j)|^2 < \infty. \tag{7.28}$$

До того ж,

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{k,j \geq 1} |(Ae_k, e_j)|^2 \right)^{1/2} \equiv \left(\sum_{j,k \geq 1} |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.29}$$

Доведення. Покладіть $g_j = e_j$ в (7.27). □

Таким чином умова (7.28) визначає клас $S_2(H)$ операторів Гільберта – Шмідта в H.

Наслідок 7.1. *Для $A \in S_2(H)$*

$$\|A\| \leq \|A\|_2.$$

Доведення. Випливає з леми 7.1 та (7.29). □

Наслідок 7.2. *$A \in S_2(H) \Leftrightarrow A^* \in S_2(H)$, більш того $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$.*

Доведення. Випливає з (7.27). □

Твердження 7.2. $S_2(H)$ лінійний нормований простір з $\|\cdot\|_2$.

Доведення. Нехай $A,\ B \in S_2(H)$, $a_{j,k} = (Ae_k, e_j)$, $b_{j,k} = (Be_k, e_j)$ матричні елементи операторів $A,\ B$ в базисі $\{e_k\}$. Тоді

$$\|A+B\|_2 = \left(\sum_{k,j \geq 1} |a_{j,k} + b_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k,j \geq 1} |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k,j \geq 1} |b_{j,k}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|A\|_2 + \|B\|_2 < \infty.$$

Таким чином $A+B \in S_2(H)$. Очевидно також, що $\lambda A \in S_2(H)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$, та $\|\lambda A\|_2 = |\lambda| \|A\|_2$. Звідси випливає, що $S_2(H)$ лінійна множина та $\|\cdot\|_2$ норма в $S_2(H)$ (перша аксіома норми виконана завдяки наслідку 7.1). □

Твердження 7.3. Нехай $A \in S_2(H)$, $B \in \mathcal{L}(H)$. Тоді добутки $AB,\ BA \in S_2(H)$.

Доведення. Нехай $\{e_k\}$ ортонормований базис в H. Тоді

$$\|BA\|_2^2 = \sum_{k\geq 1} \|BAe_k\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{k\geq 1} \|Ae_k\|^2 = \|B\|^2 \|A\|_2^2 < \infty.$$

Таким чином $BA \in S_2(H)$ та $\|BA\|_2 \leq \|B\| \|A\|_2$. В силу наслідка 7.2

$$\|AB\|_2 = \|(AB)^*\|_2 = \|B^* A^*\|_2 \leq \|B^*\| \|A^*\|_2 = \|B\| \|A\|_2,$$

зокрема $AB \in S_2(H)$. □

Теорема 7.8. *$S_2(H)$ двосторонній ідеал в $\mathcal{L}(H)$.*

Доведення. Безпосередньо випливає з тверджень 7.2, 7.3. □

Вправа 7.11. Нехай $A,\ B \in S_2(H)$, $\{e_k\}$ ортонормований базис в H. Введемо

$$(A, B)_2 := \sum_{k\geq 1} (Ae_k, Be_k). \tag{7.30}$$

Довести, що

1) ряд (7.30) збігається, та його сума не залежить від вибору базиса в H;

2) $$(A, B)_2 := \sum_{j,k\geq 1} a_{jk} \overline{b_{jk}},$$

   де $a_{j,k} = (Ae_k, e_j)$, $b_{j,k} = (Be_k, e_j)$ матричні елементи операторів $A,\ B$ в базисі $\{e_k\}$.

3) $S_2(H)$ з $(\cdot, \cdot)_2$ є сепарабельним гільбертовим простором.

Нагадаємо, що одновимірні оператори в гільбертовому просторі H задаються формулою $A = (\cdot, y)z$, $y, z \in H$.

Вправа 7.12. Довести, що

1) одновимірний оператор в H є оператором Гільберта – Шмідта;

2) оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ є одновимірним тоді і лише тоді, коли $\|A\|_2 = \|A\|$;

3) для ортонормованого базиса $\{\varphi_k \mid k \geq 1\}$ в H система одновимірних операторів $\{A_{jk} := (\cdot, \varphi_k)\varphi_j \mid j, k \geq 1\}$ утворює ортонормований базис в $S_2(H)$.

7.7 Оператори Гільберта-Шмідта в $L_2(T,\mu)$

Опишемо клас операторів Гільберта-Шмідта в $H = L_2(T,\mu)$ з σ-скінченою мірою μ.

Лема 7.2. *Нехай* $K \in L_2(T \times T, \mu \times \mu)$ *та*

$$(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s), \;\; x \in L_2(T,\mu). \tag{7.31}$$

Тоді $A \in \mathcal{L}(H)$ *і* $\|A\| \le \|K\|_{L_2(T\times T)}$.

Доведення. Зауважимо, що в силу теореми Фубіні

$$\int\limits_T |K(t,s)|^2 \, d\mu(s) < \infty \; (mod\, \mu).$$

Оскільки добуток функцій квадратично сумовних функцій абсолютно сумовний, то права частина (7.31) скінчена μ-майже скрізь та

$$|(Ax)(t)|^2 \le \int\limits_T |K(t,s)|^2 \, d\mu(s) \, \|x\|_H^2 \, . \tag{7.32}$$

Проінтегрувавши (7.32) отримуємо твердження леми. □

Зауваження 7.1. В умовах леми 7.31

$$(A^*x)(t) = \int\limits_T \overline{K(s,t)} x(s)d\mu(s), \;\; x \in L_2(T,\mu).$$

Справді, в силу теореми Фубіні для всіх $x, y \in L_2(T,\mu)$ маємо

$$(Ax,y) = \int\limits_T (\int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s))\overline{y(t)}d\mu(t) =$$

$$= \int\limits_T x(s)\overline{(\int\limits_T \overline{K(t,s)}y(t)d\mu(t))}d\mu(s) = (x, A^*y).$$

Таким чином спряжений оператор є інтегральним з ("спряженим") ядром

$$K^*(t,s) := \overline{K(s,t)}.$$

Приклад 7.13. (Інтегральний оператор Вольтери) Нехай $H = L_2(a,b)$, $\Delta = \{(t,s) \mid a \le s \le t \le b\}$, $K \in L_2(\Delta)$,

$$(Ax)\,(t) = \int\limits_a^t K\,(t,s)\,x\,(s)\,ds, \;\; x \in H.$$

Оператор A можна записати у вигляді

$$(Ax)(t) = \int\limits_a^b K_0(t,s)\,x(s)\,ds, \quad x \in H,$$

де

$$K_0(t,s)(x) := \begin{cases} K(t,s), & a \le s \le t \le b \\ 0, & a \le t < s \le b\,. \end{cases}$$

Очевидно $K_0 \in L_2((a,b)^2)$ та

$$K_0^*(t,s) := \overline{K_0(s,t)} = \begin{cases} 0, & a \le s \le t \le b \\ \overline{K(s,t)}, & a \le t < s \le b\,. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$(A^*x)(t) = \int\limits_t^b \overline{K(s,t)}x(s)ds, \quad x \in H. \tag{7.33}$$

Зауважимо, що формулу (7.33) можна трактувати як нескінченновимірний аналог очевидного спостереження, що спряжена до нижньотрикутної матриці є верхньотрикутною матрицею.

Вправа 7.13. Доведіть (7.33) безпосередньо за допомогою зміни порядку інтегрування.

Далі будемо вважати, що простір $H = L_2(T,\mu)$ сепарабельний. Для $\varphi, \psi \in L_2(T,\mu)$ позначимо $(\varphi \otimes \psi)(t,s) := \varphi(t)\psi(s)$.

Теорема 7.9. *Нехай $\{\varphi_k \mid k \ge 1\}$ і $\{\psi_j \mid j \ge 1\}$ ортонормовані базиси в $L_2(T,\mu)$. Тоді $\{\varphi_k \otimes \psi_j \mid k,j \ge 1\}$ ортонормований базис в $L_2(T \times T, \mu \times \mu)$.*

Доведення. Доведіть самостійно, що $\{\varphi_k \otimes \psi_j \mid k,j \ge 1\}$ ортонормована система в $L_2(T\times T,\mu\times\mu)$. Покажемо що ця система повна. Нехай $x \in L_2(T\times T,\mu\times\mu)$ ортогональна до всіх функцій $\{\varphi_k \otimes \psi_j\}$. Розглянемо

$$x_j(t) = \int\limits_T x(t,s)\,\overline{\psi_j(s)}d\mu(s)\,, \quad j \ge 1.$$

Зауважимо, що в силу леми 7.2 $x_j \in L_2(T,\mu)$. З теореми Фубіні маємо, що

$$(x_j, \varphi_k) = \int\limits_T x_j(t)\overline{\varphi_k(t)}d\mu(t) = \int\limits_{T\times T} x(t,s)\,\overline{\varphi_k(t)\psi_j(s)}d(\mu\times\mu)(t,s) = 0, \quad k,j \ge 1.$$

Звідси випливає, що $x_j = 0$ μ-майже скрізь. Зауважимо, що з теореми Фубіні випливає, що $x(t,\cdot) \in L_2(T,\mu)$ для μ-майже всіх $t \in T$. З рівності Парсеваля тепер маємо

$$\int\limits_T |x\,(t,s)|^2\, d\mu\,(s) = \sum_{j\geq 1} \left| \int\limits_T x\,(t,s)\,\overline{\psi_j\,(s)} d\mu\,(s) \right|^2 = \sum_{j\geq 1} |x_j\,(t)|^2 = 0\,(mod\ \mu)\,.$$

Тоді, в силу теореми Фубіні,

$$\|x\|^2 = \int\limits_T \left(\int\limits_T |x\,(t,s)|^2\, d\mu\,(s) \right) d\mu\,(t) = 0.$$

□

Наслідок 7.3. *Нехай* $\{\varphi_k \mid k \geq 1\}$ *ортонормований базис в* $L_2(T,\mu)$. *Тоді* $\{\varphi_j \otimes \overline{\varphi_k} \mid k,j \geq 1\}$ *ортонормований базис в* $L_2(T\times T, \mu \times \mu)$.

Теорема 7.10. *Нехай* $H = L_2(T,\mu)$. *Оператор* $A \in \mathcal{L}(H)$ *є оператором Гільберта – Шмідта тоді і лише тоді, коли існує* $K \in L_2(T\times T, \mu\times\mu)$ *така, що* A *має вигляд (7.31). До того ж*

$$\|A\|_2 = \|K\|_{L_2(T\times T,\,\mu\times\mu)}. \tag{7.34}$$

Доведення. Припустимо, що $K \in L_2(T \times T,\ \mu \times \mu)$. З леми 7.2 випливає, що $A \in \mathcal{L}(H)$. Нехай $\{\varphi_k \mid k \geq 1\}$ ортонормований базис в H. Тоді з (7.29), теореми Фубіні, наслідка 7.3 та рівності Парсеваля маємо, що

$$\|A\|_2^2 = \sum_{k,j\geq 1} |(A\varphi_k, \varphi_j)|^2 = \sum_{k,j\geq 1} \left| \int\limits_T \Big(\int\limits_T K(t,s)\varphi_k(s) d\mu(s) \Big) \overline{\varphi_j(t)} d\mu(t) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k,j\geq 1} \left| \int\limits_{T\times T} K(t,s)\overline{\varphi_j(t)\overline{\varphi_k(s)}} d\mu\times\mu(t,s) \right|^2 = \sum_{k,j\geq 1} |(K, \varphi_j \otimes \overline{\varphi_k})_{L_2(T\times T)}|^2 =$$

$$= \|K\|^2_{L_2(T\times T)} < \infty.$$

Нехай тепер $A \in S_2(H)$, $a_{jk} := (A\varphi_k, \varphi_j)$. Покладемо

$$K(t,s) := \sum_{k,j\geq 1} a_{jk}\varphi_j(t)\overline{\varphi_k(s)}.$$

В силу (7.28) $K \in L_2(T\times T, \mu\times\mu)$. Розглянемо оператор

$$(Bx)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s),\ x \in L_2(T,\mu).$$

З леми 7.1 випливає, що $B \in \mathcal{L}(H)$. Легко перевірити, що

$$\forall\ k, j \geq 1 \ \ (B\varphi_k, \varphi_j) = a_{jk} = (A\varphi_k, \varphi_j).$$

В силу (7.23) маємо, що $A = B$. Таким чином A інтегральний оператор з ядром $K \in L_2(T \times T)$. $\square$

Розділ 8

Компактні оператори

8.1 Означення і основні властивості

Нагадаємо означення передкомпактної множини в (метричному) просторі E.

Означення 8.1. Множина M називається передкомпактною в E, якщо її замикання $\overline{M}$ компактне в $E \Leftrightarrow$ для будь-якої послідовності $\{x_n\} \subset M$ існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$.

Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори. $A : E_1 \to E_2$ лінійний оператор.

Означення 8.2. Оператор A називається компактним, якщо образ $A(M)$ довільної обмеженої в E_1 множини M є передкомпактом в E_2.

Клас усіх компактних операторів позначатимемо $S_\infty(E_1, E_2)$, $S_\infty(E) := S_\infty(E, E)$.

Вправа 8.1. $A \in S_\infty(E_1, E_2) \Leftrightarrow \forall r > 0$ образ $A\left(\overline{B}\,(0, r)\right)$ кулі радіуса r є передкомпактом в $E_2 \Leftrightarrow A\left(\overline{B}\,(0, 1)\right)$ передкомпакт в $E_2 \Leftrightarrow$ для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}$ в E_1 існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ така, що $\{Ax_{n_k}\}$ збігається в E_2.

Очевидно $S_\infty(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Дійсно для компактного оператора A образ кулі $A\left(\overline{B}\,(0, 1)\right)$ передкомпактна, а значить і обмежена множина в E_2. Таким чином $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < \infty$.

Означення 8.3. Нехай $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. A називається скінченновимірним, якщо $dim\,(Ran\,(A)) < \infty$.

Твердження 8.1. Нехай $A : E_1 \to E_2$ скінченновимірний оператор. Тоді $A \in S_\infty(E_1, E_2)$.

Доведення. Очевидно $A\left(\overline{B}\,(0,1)\right) \subset \overline{B}\,(0, \|A\|) \cap Ran\,(A)$ і твердження випливає з передкомпактності обмеженої множини в скінченновимірному лінійному нормованому просторі. $\square$

Вправа 8.2. Нехай $dimE_2 < \infty$ або $dimE_1 < \infty$. Тоді $S_\infty\,(E_1, E_2) = \mathcal{L}\,(E_1, E_2)\,.$

Приклад 8.1. Нехай $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset E_2, \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset E_1^*$,

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)\,y_k, \;\; x \in E_1. \tag{8.1}$$

Очевидно $A \in \mathcal{L}\,(E_1, E_2)$ та $Ran(A) \subset$ л.о.$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Звідси випливає, що A скінченновимірний, зокрема $A \in S_\infty\,(E_1, E_2)$. Неважко довести, що формула (8.1) E_1 дає загальний вигляд скінченновимірного оператора з E_1 в E_2.

Вправа 8.3. Нехай $p \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$, $E = L_p\,(T, \mu)\,,$ $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset L_p\,(T, \mu)$, $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset L_q\,(T, \mu)$,

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(t)\,b_k\,(s)\,.$$

Довести, що

$$(Ax)\,(t) = \int\limits_T K\,(t,s)\,x\,(s)\,ds, \;\; x \in E$$

скінченовимірний оператор в E.

Приклад 8.2. (Інтегральний оператор Вольтери.) Нехай $E = C[a,b]$, $\Delta = \{(t,s) \mid a \le s \le t \le b\}$, $K \in C(\Delta)$,

$$(Ax)\,(t) = \int\limits_a^t K\,(t,s)\,x\,(s)\,ds, \;\; x \in E. \tag{8.2}$$

Доведемо, що образ одиничної кулі $F := A\left(\overline{B}\,(0,1)\right)$ передкомпактна множина в E. Очевидно F обмежена ($F \subset \overline{B}\,(0, ||A||)$). В силу теореми Кантора ядро K рівномірно неперервно на Δ , зокрема

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,\{(t_1, s),\,(t_2, s)\} \subset \Delta,\; |t_1 - t_2| < \delta :\; |K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Позначимо $M := \|K\|_{C(\Delta)}$. Ясно, що можна вважати, що $\delta \le \frac{\varepsilon}{2M}$. Тоді $\forall\; x \in \overline{B}\,(0,1)$, та $\forall\;\{t_1,\, t_2\} \subset [a,b]$ таких, що $0 \le t_2 - t_1 < \delta$ виконується

$$|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| \le \int\limits_a^{t_1} |K(t_1,s) - K(t_2,s)|ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} |K(t_2,s)|ds \le \frac{\varepsilon}{2} + M|t_1 - t_2| < \varepsilon.$$

Останнє означає, що множина F рівностепенево неперервна, та за теоремою Арцела – Асколі передкомпактна в E. Таким чином $A \in S_\infty\,(E)\,.$

Так само можна встановити компактність в просторі $C[a, b]$ інтегрального оператора Фредгольма

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \;\; x \in C[a, b] \tag{8.3}$$

з ядром $K \in C([a, b]^2)$. Згодом ми дамо інше доведення цього твердження. Наведемо приклад некомпактного оператора.

Приклад 8.3. Нехай E нескінченновимірний лінійний нормований простір, тоді одиничний оператор $A = I \notin S_\infty(E)$. Справді, $A\left(\overline{B}(0, 1)\right) = \overline{B}(0, 1)$ не передкомпактна множина в E.

Твердження 8.2. $S_\infty(E_1, E_2)$ лінійна множина в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Доведення. Нехай $A, B \in S_\infty(E_1, E_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Очевидно $\lambda A \in S_\infty$. Доведемо, що $A + B \in S_\infty$. Використаємо вправу 8.1. Нехай $\{x_n\}$ обмежена послідовність в E_1, тоді в силу компактності A існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ така, що $\{Ax_{n_k}\}$ збігається в E_2. Завдяки компактності B існує підпослідовность $\{x_{n_{k_l}}\}$ така, що $\{Bx_{n_{k_l}}\}$ збіжна в E_2. Тоді $\{(A + B)x_{n_{k_l}}\}$ збігається в E_2, що і доводить твердження. □

Вправа 8.4. Доведіть, що сума компактного та некомпактного операторів некомпактна.

Приклад 8.4. Розглянемо в просторі $E = L_p(0, 1)$ оператор $(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 ts^2 x(t) dt$, $x \in E$. Тоді A некомпактний як сума одиничного та одновимірного операторів.

Покажемо, що добуток компактного та обмеженого операторів (в довільному порядку) буде компактним.

Твердження 8.3. Нехай E_i, $(i = 1, ..., 4)$ лінійні нормовані простори, оператори $A \in S_\infty(E_2, E_3)$, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $C \in \mathcal{L}(E_3, E_4)$. Тоді

$$AB \in S_\infty(E_1, E_3), \;\; CA \in S_\infty(E_2, E_4).$$

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ обмежена послідовність в E_1, тоді в силу обмеженості оператора B послідовність $\{Bx_n\}$ обмежена послідовність в просторі E_2. З компактності A тепер випливає, що існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ така, що $\{ABx_{n_k}\}$ збігається в E_3. Останнє означає компактність AB. Компактність оператора CA доведіть самостійно. □

Теорема 8.1. *$S_\infty(E)$ двосторонній ідеал в алгебрі $\mathcal{L}(E)$.*

Доведення. Безпосередньо випливає з тверджень 8.2, 8.3. □

Наслідок 8.1. *Нехай E нескінченновимірний лінійний нормований простір, $A \in S_\infty(E)$, тоді A не є неперервно оборотний.*

Доведення. Припустимо, що A неперервно оборотний. Тоді $I = A^{-1}A \in S_\infty(E)$, що суперечить прикладу 8.3. $\square$

Теорема 8.2. *Нехай E_1 лінійний нормований простір, E_2 банаховий простір. Тоді рівномірна границя послідовності компактних операторів $\{A_n\}$ з E_1 в E_2 є компактним оператором.*

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : A_n \rightrightarrows A$. З означення рівномірної збіжності випливає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \|A_N - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$. З компактності A_N випливає, що множина $A_N\left(\overline{B}(0,1)\right)$ передкомпактна в E_2. Тому за критерієм Гаусдорфа знайдеться $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset E_2$:

$$\forall x \in \overline{B}(0,1) \quad \min_{1\le k\le n} \|A_N x - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно

$$\|Ax - y_k\| \le \|Ax - A_N x\| + \|A_N x - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \|A_N x - y_k\|, \ \ x \in \overline{B}(0,1).$$

Звідси випливає, що

$$\min_{1\le k\le n} \|Ax - y_k\| \le \min_{1\le k\le n} \|A_N x - y_k\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \ x \in \overline{B}(0,1).$$

Таким чином $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ є ε-сіткою для $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$. За критерієм Гаусдорфа $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$ передкомпактна множина в E_2, що означає компактність оператора A. $\square$

Наслідок 8.2. *Нехай E_1 лінійний нормований простір, E_2 банаховий простір. Тоді, рівномірна границя послідовності скінченновимірних операторів $\{A_n\}$ з E_1 в E_2 є компактним оператором.*

Наслідок 8.3. (Інтегральний оператор Фредгольма.) Нехай $E = C[a,b]$, $K \in C\big([a,b]^2\big)$,

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \ \ x \in E. \tag{8.4}$$

Тоді $A \in S_\infty(E)$.

Доведення. Згідно з прикладом 6.5 оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ та

$$\|A\| \le \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \le \|K\|_{C\left([a,b]^2\right)}(b-a). \tag{8.5}$$

За теоремою Стоуна – Вейерштраса знайдеться послідовність многочленів

$$P_n(t,s) = \sum_{k,j=0}^{n} a_{kj} t^k s^j \ : \ \|K - P_n\|_{C\left([a,b]^2\right)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Розглянемо оператори

$$(A_n x)(t) = \int_a^b P_n(t,s)\, x(s)\, ds,\ \ x \in E.$$

Очевидно $Ran\,(A_n) \subset$ л.о. $\{1, t, \ldots, t^n\}$, зокрема оператори A_n скінченновимірні. До того ж в силу (8.5)

$$\|A - A_n\| \le \|K - P_n\|_{C\left([a,b]^2\right)} (b-a) \to 0 \ \Rightarrow A \in S_\infty(E).$$

$\square$

Вправа 8.5. За допомогою теореми Арцела – Асколі доведіть, що множина $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$ передкомпактна в $C([a,b])$.

Зауваження 8.1. На відміну від інтегрального оператора Фредгольма оператор Вольтери (8.2) з поліноміальним ядром K вже не є скінченновимірним. Зокрема доведення наслідку 8.3 не переноситься на інтегральні оператори Вольтери. Зауважимо, що компактність оператора (8.2) доведена раніше за допомогою означення та теореми Арцела – Асколі.

Вправа 8.6. Нехай $E = L_p(a,b)$, $p \in [1,\infty]$, $K \in C\left([a,b]^2\right)$, A задається формулою (8.4). Довести, що $A \in \mathcal{L}(E)$ та $\|A\| \le \|K\|_{C\left([a,b]^2\right)} (b-a)$. Показати, що $A \in S_\infty(E)$.

Зауважимо, що наведена в вправі оцінка для норми оператора A в просторі $L_p(a,b)$ не випливає автоматично з аналогічної оцінки в $C[a,b]$. Проте її легко отримати безпосередньо.

8.2 Характеризація компактних операторів в гільбертовому та рефлексивному просторах

Покажемо, що в гільбертовому просторі довільний компактний оператор є рівномірною границею скінченновимірних.

Теорема 8.3. *Нехай H гільбертів простір. Тоді $A \in \mathcal{L}(H)$ компактний тоді і лише тоді, коли існує послідовність $\{A_n \mid n \ge 1\}$ скінченновимірних операторів в H таких, що $A_n \rightrightarrows A$.*

Доведення. Достатність випливає з наслідку 8.2, доведемо необхідність. Нехай $A \in S_\infty(H)$. Тоді $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$ передкомпактна в H і в силу критерія Гаусдорфа

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset H : \forall x \in \overline{B}(0,1) \quad \min_{1 \le k \le n} \|Ax - y_k\| < \varepsilon.$$

Нехай $L :=$ л.о. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ та P_L ортопроектор на L. Введемо оператор $A_L := P_L A \in \mathcal{L}(H)$. Очевидно $Ran\,(A_L) \subset L$. Звідси випливає, що A_L скінченновимірний оператор. Очевидно

$$\forall x \in \overline{B}(0,1) \;\; \|Ax - A_L x\| = \rho\,(Ax, L) := \inf_{y \in L} \|Ax - y\| \le \min_{1 \le k \le n} \|Ax - y_k\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\|A - A_L\| \le \varepsilon.$$

Теорема доведена. □

Зауваження 8.2. Твердження теореми залишається вірним в класичних банахових просторах в $C[a,b],\; l_p,\; L_p(a,b),\; p \in [1,\infty)$.

Наслідок 8.4. *Нехай H сепарабельний гільбертів простір, тоді $S_2(H) \subset S_\infty(H)$.*

Доведення. Нехай $A \in S_2(H)$, $\{e_k\}$ ортонормований базис в H, та $a_{jk} = (Ae_k, e_j)$ матричні елементи A в цьому базисі. Нагадаємо, що

$$\|A\|_2^2 = \sum_{k,j \ge 1} |a_{kj}|^2 < \infty.$$

Розглянемо оператори A_n , що відповідають по формулі (7.23) матрицям

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Очевидно, $A_n \in S_2(H)$. До того ж A_n скінченновимірні, бо $Ran\,(A_n) \subset$ л.о. $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Маємо

$$\|A - A_n\|^2 \le \|A - A_n\|_2^2 = \sum_{j \ge n+1} \sum_{k \ge 1} |a_{jk}|^2 \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Таким чином A компактний, як рівномірна границя скінченновимірних операторів A_n. □

Наслідок 8.5. *Нехай H сепарабельний простір $L_2(T,\mu)$, $K \in L_2(T \times T, \mu \times \mu)$,*

$$(Ax)(t) = \int_T K(t,s)\,x(s)\,d\mu(s)\,, \quad x \in H.$$

Тоді $A \in S_\infty(H)$.

Доведення. Випливає з теореми 7.10 та попереднього наслідку. □

Покажемо, що компактні оператори переводять слабко збіжні послідовності в сильно збіжні. Наступне елементарне твердження безпосередньо випливає з означення слабкої збіжності.

Вправа 8.7. Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді

$$E_1 \ni x_n \xrightarrow{w} x \in E_1 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax. \tag{8.6}$$

Тепер неважко довести наступну теорему.

Теорема 8.4. *Нехай E_1, E_2 лінійні нормовані простори, $A \in S_\infty(E_1, E_2)$ Тоді для будь - якої слабко збіжної послідовності $\{x_n\}$ в E_1 послідовність $\{Ax_n\}$ сильно збігається в E_2.*

Доведення. Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$ E_1. Доведемо, що $Ax_n \xrightarrow{s} Ax$. Припустимо від супротивного, що це не виконано. Тоді

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \exists \{x_{n_k}\} : \forall k \geq 1 \quad \|Ax_{n_k} - Ax\| \geq \varepsilon. \tag{8.7}$$

Зауважимо, що послідовність $\{x_{n_k}\}$ слабко збіжна, а тому обмежена. В силу компактності A знайдеться підпослідовність $\{x_{n_{k_l}}\}$ та $y \in E_2 : Ax_{n_{k_l}} \xrightarrow{s} y$. З (8.6) тепер випливає, що $y = Ax$. Останнє суперечить (8.7). □

У випадку рефлексивного простору E_1 вірно і обернене твердження.

Теорема 8.5. *Нехай E_1 рефлексивний банаховий простір, E_2 лінійний нормований простір, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тоді $A \in S_\infty(E_1, E_2)$ тоді і лише тоді, коли*

$$\forall \{x_n\} \subset E_1 : x_n \xrightarrow{w} 0 \quad \textit{в} \quad E_1 \textit{ виконується } \quad Ax_n \xrightarrow{s} 0 \quad \textit{в} \quad E_2.$$

Доведення. Зауважимо, що необхідність випливає з теореми 8.4. Доведемо достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена в E_1. Тоді з рефлексивності E_1 випливає існування підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ та вектора $x \in E_1$ таких, що $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Звідси випливає, що $A(x_{n_k} - x) \xrightarrow{s} 0$. Таким чином $\{Ax_{n_k}\}$ збігається і значить $A \in S_\infty(E_1, E_2)$. □

Покажемо, що компактність оператора A в гільбертовому просторі еквівалентна компактності спряженого оператора A^*.

Теорема 8.6. *Нехай H гільбертів простір. Тоді $A \in S_\infty(H)$ тоді і лише тоді, коли $A^* \in S_\infty(H)$.*

Доведення. Нехай оператор A компактний. В силу твердження 8.3 добуток $AA^* \in S_\infty(H)$. Припустимо, що $x_n \xrightarrow{w} 0$, тоді з теореми 8.5 випливає, що

$$\|A^* x_n\|^2 = (AA^* x_n, x_n) \le \|AA^* x_n\| \, \|x_n\| \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Таким чином A^* переводить слабо збіжну послідовність в сильно збіжну і згідно з теоремою 8.5 є компактним. Обернене твердження випливає з рівності $A = (A^*)^*$. □

Приклад 8.5. Нехай $E = l_p, \ 1 < p < \infty$, $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$,

$$Ax = (a_n x_n)_{n=1}^\infty, \ \ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p.$$

Тоді $A \in S_\infty(E)$, тоді і лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$.

Доведення. Зауважимо, що в силу приклада 6.3 $A \in \mathcal{L}(l_p)$ та

$$\|A\| = \|a\|_\infty = \sup_{k \ge 1} |a_k|.$$

Доведемо необхідність. Нагадаємо, що $e_n = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, ...) \xrightarrow{w} 0$ в l_p. В силу компактності A та теореми 8.4 маємо $|a_n| = \|Ae_n\| \to 0$. Нехай тепер $a_n \to 0$. Розглянемо оператори

$$A_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots), \ \ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p.$$

Очевидно A_n скінченновимірні, та

$$\|A - A_n\| = \sup_{k \ge n+1} |a_k| \to 0.$$

Таким чином A компактний, як рівномірна границя скінченновимірних операторів. □

Вправа 8.8. Довести, що результат попереднього приклада залишається вірним для $p = 1, \infty$.

Вправа 8.9. Нехай $E = l_p, \ 1 \le p \le \infty$, $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$,

$$Ax = (a_n x_{n+1})_{n=1}^\infty, \ \ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l_p.$$

Довести, що $A \in S_\infty(E)$, тоді і лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$.

Приклад 8.6. Нехай $E = L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, $\alpha \in L_\infty(a,b)$, A оператор множення на функцію α:

$$(Ax)(t) = \alpha(t)\, x(t), \;\; x \in E. \tag{8.8}$$

Тоді $A \in S_\infty(E) \Leftrightarrow \alpha = 0\,(mod\ m)$.

Доведення. Нехай $A \in S_\infty(E)$. Розглянемо послідовність $x_n(t) = e^{int}$. Очевидно $x_n \xrightarrow{w} 0$. Звідси випливає, що

$$\|\alpha\|_{L_p(a,b)} = \|Ax_n\|_{L_p(a,b)} \to 0.$$

Останнє означає, що $\alpha = 0\,(mod\ m)$. □

Вправа 8.10. Довести, що результат попереднього приклада залишається вірним для $p = 1, \infty$.

Вправа 8.11. Нехай $E = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in L_\infty(\mathbb{R})$,

$$(Ax)(t) = \alpha(t)\, x(t+1), \;\; x \in E.$$

Довести, що $A \in S_\infty(E) \Leftrightarrow \alpha = 0\,(mod\ m)$.

Нехай E лінійний нормований простір, L підпростір E. Будемо казати, що L *інваріантний підпростір* оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, якщо $\forall\, x \in L$ виконується $Ax \in L$ (тобто A переводить L в L). Звуження оператора A на L будемо позначати A_L. Очевидно $A_L \in \mathcal{L}(L)$.

Твердження 8.4. Нехай L інваріантний підпростір оператора $A \in S_\infty(E)$. Тоді $A_L \in S_\infty(L)$.

Доведення. Безпосередньо випливає з означень компактності та інваріантного підпростору оператора. □

Приклад 8.7. Нехай $E = C[a,b]$, $\alpha \in C[a,b]$, A оператор вигляду (8.8). Покажемо, що $A \in S_\infty(E) \Leftrightarrow \alpha(t) = 0,\ t \in [a,b]$. Нехай $A \in S_\infty(E)$. Припустимо, від супротивного що $\exists\ t_0 \in [a,b]$ таке, що $\alpha(t_0) \neq 0$. В силу неперервності α знайдеться (відкритий) інтервал $\Delta \subset [a,b]$ такий, що

$$\inf_{t \in \Delta} |\alpha(t)| > 0. \tag{8.9}$$

Розглянемо $L = \{x \in E \mid x(t) = 0,\ t \in [a,b] \setminus \Delta\}$. Очевидно L інваріантний підпростір оператора A. З умови (8.9) випливає, що A_L неперервно оборотний оператор в L, а тому $A_L \notin S_\infty(L)$. Останнє суперечить компактності A.

Бібліоґрафія

[1] Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель, Функциональний анализ, Киев, 1990.

[2] В.М. Кадец, Курс функционального анализа, Харьков, 2006.

[3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ, СПб., 2004.

[4] А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани, Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1988.

[5] А.М. Колмогоров, С.В. Фомін, Елементи теорії функцій та функціонального аналізу, Київ, 1974

[6] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional analysis, New York, 1980.

[7] W. Rudin, Functional Analysis, New York, 1991.

[8] G. Teschl, Topics in Real and Functional Analysis, Wien, 2016.