

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра алгебри і комп'ютерної математики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана  
з навчальної роботи

Харитонов О.М.

серпня 2021 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ГЕОМЕТРИЧНА ТЕОРІЯ ГРУП. ГОМОЛОГІЧНА АЛГЕБРА

для студентів

галузь знань 11 «Математика та статистика»  
спеціальність 111 «Математика»  
освітній рівень другий (магістерський)  
освітня програма «Математика»  
вид дисципліни вибіркова

Форма навчання денна  
Навчальний рік 2021/2022  
Семестр 3  
Кількість кредитів ECTS 5  
Мова викладання, навчання та оцінювання українська  
Форма заключного контролю іспит

**Викладачі:** Бондаренко Євген Володимирович, доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і комп'ютерної математики; Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем; Журавльов В.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії, топології і динамічних систем.

Пролонговано: на 20 /20 н.р. ( ) « » 20 р.  
на 20 /20 н.р. ( ) « » 20 р.

КИЇВ – 2021

**Розробники:** Бондаренко Євген Володимирович, доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і комп'ютерної математики, Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем.

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
математичний факультет \_\_\_\_\_ (Петравчук А.П.)

Протокол № 2 від «30» 08.21.

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

---

Протокол від «31» 08 2021 року № \_\_\_\_\_

Голова науково-методичної комісії ОА (проф. Олійник А.С.)

«31» 08 2021 року

**1. Мета дисципліни** – оволодіти поняттями й методами комбінаторної і геометричної теорії груп та гомологічної алгебри, які не включені до нормативних курсів з алгебри та топології.

## **2. Попередні вимоги до вибору навчальної дисципліни.**

Володіти основними поняттями та методами теорії груп, диференціальної геометрії і топології.

## **3. Анотація навчальної дисципліни.**

Навчальна дисципліна «Геометрична теорія груп. Гомологічна алгебра» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111 математика освітньої програми «Математика». Дана дисципліна є вибірковою. Дана дисципліна присвячена вивченню сучасного взаємозв'язку між алгеброю та топологією. Темі розбиті на два змістовних модулі – геометрична теорія груп і гомологічна алгебра. Темі з геометричної теорії груп включають: скінченно породжені і скінченно задані групи, конструкції комбінаторної теорії груп, геометрія графів Келі та їх квазі-ізометричні інваріанти, алгоритмічні проблеми в скінченно заданих групах, аменабельні групи. Темі з гомологічної алгебри: функції Морса та розклади на ручки, комплекс Морса-Смейла, гомології многовидів, багатовимірна гіпотеза Пуанкаре, діаграми Кірбі та гомології чотиривимірних многовидів, фундаментальна група вузла та поліноміальні інваріанти вузлів, інваріанти тривимірних многовидів.

Викладається у 3 семестрі 2 курсу в обсязі 150 год. (5 кредитів ECTS<sup>1</sup>) зокрема: лекції – всього 42 год., самостійна робота – 104 год., консультації – 4 год. У курсі передбачено 2 змістовних модулі та 1 модульна контрольна робота. Завершується дисципліна іспитом.

**4. Завдання (навчальні цілі).** Досягнення складової *інтегральної компетентності* – здатності розв'язувати складні задачі та практичні проблеми у профільній діяльності, використовуючи алгебраїчні, геометричні і топологічні методи. Досягнення основних загальних компетентностей:

- 1) Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики (ЗК-1);
- 2) Здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук (ЗК-2);
- 3) Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу та прогнозу (ЗК-3);
- 4) Здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК-4);
- 5) Здатність генерувати нові ідеї (ЗК-5);
- 6) Здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово (ЗК-8);
- 7) Здатність спілкуватися іноземною мовою (ЗК-9);
- 8) Здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування (ЗК-10);
- 9) Здатність критично оцінювати та переосмислювати власний і чужий досвід, аналізувати свою професійну й соціальну діяльність (ЗК-11);

Досягнення основних спеціальних компетентностей:

- 1) Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької та/або інноваційної діяльності у сфері математики та її практичних застосувань (ФК-1);
- 2) Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК-4);
- 3) Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК-4);
- 4) Здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефахівців (ФК-6);

<sup>1</sup> кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

- 5) Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань (ФК-8);
- 6) Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації на основі інноваційних підходів у сфері математики (ФК-10).

### 5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1, знати; 2, вміти; 3, комунікація; 4, автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
PH 1.1	основні конструкції в комбінаторній теорії груп (вільні групи, розширення груп, напівпрямий добуток, вільний добуток, амальгамований вільний добуток, HNN розширення), теореми про вкладення	Лекція, самостійна робота	Екзамен	4%
PH 1.2	скінченно задані групи, перетворення Тітце			4%
PH 1.3	основні геометричні об'єкти асоційовані зі скінченно породженими групами, основні квазі-ізометричні інваріанти груп			4%
PH 1.4	алгоритмічні проблеми в скінченно заданих групах			4%
PH 1.5	парадокс Банаха-Тарського, аменабельні дії, аменабельні групи			4%
PH 1.6	основні властивості функцій Морса та розкладів многовида на ручки, операції з ручками (перегрупування, додавання та скорочення пар доповняльних ручок), властивості комплексу Морса-Смейла	Модульна контрольна робота, самостійна робота		10%
PH 1.7	двоїстість Пуанкаре та інші властивості груп гомологій та когомологій многовидів, геометричну інтерпретації множення в когомологіях многовидів, множення в групах гомологій чотиривимірних многовидів			10%
PH 1.8	властивості інваріантів вузлів та їх застосування для побудови інваріантів тривимірних многовидів, діаграми Кірбі			10%
PH 2.1	працювати зі скінченно породженими групами, вільними групами, вільними добутками груп, HNN розширенням	Екзамен		4%
PH 2.2	досліджувати групи на скінченну породженість, скінченну заданість, розв'язність проблеми слів; перевіряти, чи два скінченні зображення визначають ізоморфні групи			4%
PH 2.3	розрізняти групи з точністю до			4%

	квазі-ізометричності			
PH 2.4	перевіряти, чи є група аменабельною			4%
PH 2.5	працювати з функціями Морса та розкладами на ручки многовидів		Модульна контрольна робота, самостійна робота	5%
PH 2.6	будувати комплекс Морса-Смейла та знаходити його гомології			5%
PH 2.7	знаходити фундаментальну групу та інші інваріанти вузлів			5%
PH 2.8	визначати властивості тривимірних та чотиривимірних многовидів за їх діаграмами Хегора та Кірбі			5%
PH 3.1	здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування	Лекція, самостійна робота	Екзамен, модульна контрольна робота	5%
PH 4.1	продемонструвати розуміння особистої/персональної відповідальності за професійні та/або управлінські рішення, які базуються на використанні математичних методів	Лекція, самостійна робота	Екзамен, модульна контрольна робота	8%

**6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання** (необов'язково для вибіркових дисциплін, які не входять до блоків спеціалізації)





## 7. Схема формування оцінки.

### 7.1. Форми оцінювання студентів:

#### Оцінювання впродовж навчального періоду:

1. Виконання завдань, винесених на самостійну роботу: РН1.6, РН1.7, РН1.8, РН2.5, РН2.6, РН2.7, РН2.8 – 25 балів/15 балів;
2. Модульна контрольна робота: РН1.6, РН1.7, РН1.8, РН2.5, РН2.6, РН2.7, РН2.8, РН3.1, РН4.1 – 35 балів/21 балів.

#### Підсумкове оцінювання: іспит.

- максимальна кількість балів, які можуть бути отримані: 40 балів;
- результати навчання, які будуть оцінюватись: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН2.4, РН3.1, РН4.1;
- форма проведення і види завдань: письмово-усна, письмова робота.

### 7.2. Організація оцінювання:

Самостійна робота передбачає роботу з літературою і своєчасне виконання завдань.

Критично-розрахунковий мінімум балів за навчання впродовж семестру становить **20** балів, рекомендований мінімум, розрахований з урахуванням специфіки дисципліни становить **35** балів. Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж рекомендований мінімум **35** балів для підвищення балів, отримують можливість написати додаткову контрольну роботу та доскласти домашні завдання. Мінімальна кількість балів, які додаються до семестрових – 24 бали, тобто, якщо оцінка студента на іспиті є нижчою від мінімального порогового рівня (24 бали), то бали за іспит не додаються до семестрової оцінки (вважаються рівними нулю), а підсумкова оцінка із дисципліни є незадовільною.

Форма іспиту – письмово-усна. Екзаменаційний білет складається із 4 завдань. Кожне завдання оцінюється від 0 до 10 балів. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі форм контролю здійснюються у відповідності до “Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка” (2018), <http://www.univ.kiev.ua/pdfs/official/Organization-of-the-educational-process.pdf>.

#### Терміни проведення форм оцінювання:

1. Модульна контрольна робота: на 13-му тижні.
2. Оцінювання завдань самостійної роботи: протягом семестра.

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

<b>Відмінно</b> / Excellent	90-100
<b>Добре</b> / Good	75-89
<b>Задовільно</b> / Satisfactory	60-74
<b>Незадовільно</b> / Fail	0-59



## 8. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ

№ п/п	Назва теми	У тому числі			
		Лекції	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота
<b>Змістовний модуль 1. Геометрична теорія груп</b>					
1	Елементи комбінаторної теорії груп	4			10
2	Геометрія скінченно породжених груп	4			10
3	Алгоритмічні проблеми навколо скінченно заданих груп	4			10
4	Аменабельні групи	2			5
<b>Змістовний модуль 2. Гомологічна алгебра</b>					
5	Комплекс Морса-Смейла	8			20
6	Розклади на ручки Смейла та багатовимірна гіпотеза Пуанкаре	10			24
7	Гомології маловимірних многовидів	6			15
8	Застосування гомологій та когомологій	4			10
	<b>Всього</b>	<b>42</b>			<b>104</b>

Загальний обсяг 150 год., у тому числі:

Лекцій – 42 год.

Семінарських занять – 0 год.

Практичних занять – 0 год.

Лабораторних занять – 0 год.

Консультацій – 4 год.

Самостійної роботи – 104 год.

## 9. Рекомендовані джерела:

### Основна:

1. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Є.В. Бондаренко. Вступ до геометричної теорії груп: навчальний посібник – К.: ВПЦ «Київський університет», 2013.
3. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974.
4. Bowditch В.Н. A course on geometric group theory. – MSJ Mem. Vol. 16, 2006.
5. А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс. Курс гомотопической топологии. М. 1989.
6. С. В. Матвеев. Лекции по алгебраической топологии. - М., 2002
7. О.О.Пришляк. Теорія Морса. К. 2002.
8. М. Хирш. Дифференциальная топология. М. 1979.

### Додаткова:

1. Meier J. Groups, graphs and trees: An introduction to the geometry of infinite groups. – Cambridge: Cambridge University Press, Volume 73 of London Mathematical Society Student Texts, 2008.
2. Stillwell J. Classical topology and combinatorial group theory, 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, Volume 72 of Graduate Texts in Mathematics, 1993.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980.

4. Cohen D.E. Combinatorial group theory: a topological approach. – Cambridge: Cambridge University Press, Volume 14 of London Mathematical Society Student Texts, 1989.
5. А. Дольд. Лекции по алгебраической топологии. М. 1976.
6. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. М.1971.
7. В.А.Рохлин, Д.Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М. 1977
8. О.О.Пришляк. Основи сучасної топології. К. 2006.
9. К. Рурк, Б. Сандерсон. Введение в кусочно линейную топологию. М. 1974.