

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА  
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної фізики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана  
з навчальної роботи

Харитонов О.М.

« 31 » серпня 2021 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ<sup>1</sup>**  
**Комп'ютерне моделювання в математичній фізиці.**  
**Аналітичні та чисельні методи сучасної математичної**  
**фізики**  
для студентів

галузь знань

11 «Математика та статистика»

спеціальність

111 «Математика»

освітній рівень

другий (магістр)

освітня програма

«Математика»

вид дисципліни

вибіркова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2021/2022
Семестр	3
Кількість кредитів ECTS	5
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	іспит

**Викладачі:** Вакал Євген Сергійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики;  
Довгий Борис Павлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики;  
Гап'як Ігор Васильович, кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри математичної фізики;

Пролонговано: на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.  
на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_) «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**КИЇВ – 2021**

<sup>1</sup> Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма «Комп'ютерне моделювання в математичній фізиці. Аналітичні та чисельні методи сучасної математичної фізики»

для студентів *галузі знань/спеціальності/освітньої програми* 11 Математика та статистика / 111 Математика / Математика

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 року - \_\_\_ с.

**Розробники**<sup>2</sup>: Вакал Євген Сергійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики;  
Довгий Борис Павлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики;

ЗАТВЕРДЖЕНО  
Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
Механіко-математичний факультет (проф. Самойленко В.Г.)  
Протокол № 8 від « 9 » 02.2021



Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від « 31 » серпня 2021 року № 1

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ (проф. Олійник А.С.)

« 31 » серпня 2021 року

<sup>2</sup> Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «Комп'ютерне моделювання в математичній фізиці. Аналітичні та чисельні методи сучасної математичної фізики» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є ДВВС.

Викладається у 3 семестрі 2 курсу в обсязі 150 год. (5 кредитів ECTS<sup>1</sup>) зокрема: лекції – всього 42 год., самостійна робота – 104 год. У курсі передбачено 3 змістових модулі та 3 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна іспитом у третьому семестрі.

**1. Мета дисципліни** – забезпечити формування у студентів практичних навичок математичного моделювання фізичних процесів та сучасних методів аналітичного та чисельного розв'язку задач математичної фізики, що описуються лінійними та нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, оволодіння теоретичними положеннями та основними методологіями розв'язання оптимізаційних задач, нелінійних задач математичної фізики з некласичними крайовими умовами та постановками задач, вміння використовувати та практично реалізовувати наближені методи в системах комп'ютерної математики MATLAB, Maple, Mathematica тощо.

**2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**  
*Знати* основні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, постановками задач для них, методами знаходження їхніх аналітичних та чисельних розв'язків;  
*вміти* будувати розрахункові схеми для найпростіших задач;  
*володіти елементарними навичками:* розв'язувати системи лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь.

### 3. Анотація навчальної дисципліни:

У програмі дисципліни основна увага приділяється аналітичним та чисельним методам розв'язання лінійних і нелінійних крайових задач. Розглядаються основи застосування аналітичних методів та базові поняття теорії чисельних методів – методів скінченних різниць і методів скінченних елементів; способи зведення нелінійних крайових задач до систем нелінійних рівнянь, задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними; побудова алгоритмів та програм для реалізації аналітичних та чисельних методів розв'язання нелінійних еволюційних рівнянь,

---

<sup>1</sup> кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

зокрема рівнянь фільтрації, дифузії, тепломасопереносу з різними видами нелінійності, Больцмана, Енскога, Кортвега-де Фріза, рівнянь з несамоспряженим оператором та інших з подальшим аналізом отриманих розв'язків та їх візуалізацією, використання сучасних асимптотичних методів до моделювання процесів в сильно неоднорідних середовищах, методів теорії усереднення в крайових задачах зі швидко змінними коефіцієнтами.

Отримані математичні поняття необхідні для застосування аналітичних та чисельних методів в комп'ютерних науках, сприяють розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

#### **4. Завдання (навчальні цілі) –**

1. Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики;
2. Здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук;
3. Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу та прогнозу;
4. Здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань;
5. Здатність генерувати нові ідеї при аналізі та розв'язанні прикладних задач;
6. Здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово;
7. Здатність спілкуватися іноземною мовою;
8. Здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування;
9. Здатність критично оцінювати та переосмислювати власний і чужий досвід, аналізувати свою професійну й соціальну діяльність;
10. Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької та/або інноваційної діяльності у сфері математики та її практичних застосувань;
11. Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси;
12. Спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу шляхом використання сценаріїв застосування різницевого алгоритмів і методів та переносити математичні знання у нематематичні контексти;
13. Здатність застосовувати знання, уміння та навички у професійній діяльності і доводити знання та власні висновки до фахівців та нефаківців;
14. Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань;
15. Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації на основі інноваційних підходів у сфері математики.

## 5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1, знати; 2, вміти; 3, комунікація; 4, автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання (формується розробником)			
1.1	основні поняття теорії різницевих схем, приклади сіток, апроксимації диференціальних операторів,	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 1 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на практичних, лабораторних заняттях, залік, усні відповіді	2,5%
1.2	похибка та порядок апроксимації диференціальних операторів			2,5%
1.3	побудова явних і неявних різницевих схем для нелінійних крайових задач			2,5%
1.4	способи дискретизації крайових умов в нелінійних задачах, апроксимації різницевих схем та дослідження їх стійкості;			2,5%
1.5	основні методи розв'язання нелінійних крайових задач за допомогою різницевих методів			12,5%
1.6	Поняття та методи розв'язання одновимірної задачі оптимізації. Градієнтні та безградієнтні методи розв'язання одновимірної задачі оптимізації	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 2 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на лабораторних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи	7,5%
1.7	Поняття та методи розв'язання багатовимірної задачі оптимізації. Градієнтні та безградієнтні методи розв'язання багатовимірної задачі оптимізації			7,5%
1.8	Загальні поняття асимптотичного аналізу	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 3 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на практичних, лабораторних заняттях, залік, усні відповіді	7,5%
1.9	Регулярна та сингулярна теорія збурень для звичайних диференціальних рівнянь			7,5%
2.1	будувати різницеві схеми для нелінійних крайових задач, систем нелінійних рівнянь, задач Коші для нелінійних диф. рівнянь, задач з розривними розв'язками; для рівнянь нелінійної оптики, Кортевега-де Фріза, нелінійних кінетичних рівнянь	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 1 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на лабораторних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи	7,5%
2.2	розв'язувати рівняння теплопровідності, переносу з несамоспряженим оператором та системи рівнянь. конкретні задачі нелінійної оптики, нелінійні еволюційні рівняння сучасної математичної фізики; використовувати математичні пакети Matlab, Maple, Mathematica для візуалізації і розв'язання задач			7,5%

2.3	Генератори випадкових чисел та їх класифікація й реалізації. Побудова безкореляційних багатовимірних даних	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 2 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на лабораторних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи	2,5%
2.4	Методи Монте-Карло. Метод Метрополіса. Практичне застосування в багатовимірних задачах математичної фізики			2,5%
2.5	Генетичні алгоритми. Загальні принципи та варіанти побудови для задач оптимізації			2,5%
2.6	Побудова формального асимптотичного розв'язку одновимірної крайової задачі з швидко змінними коефіцієнтами.	Лекційні заняття, з використанням математичних пакетів, самостійна робота	Модульна контрольна робота 3 (60% правильних відповідей), оцінювання роботи на лабораторних заняттях, оцінювання виконання завдань для самостійної роботи	10%
2.7	Обґрунтування асимптотичного розв'язку одновимірної крайової задачі з швидко змінними коефіцієнтами			10%
3.1	здатність грамотно будувати комунікацію, виходячи з мети і ситуації спілкування	Лекційні заняття, самостійна робота	<i>Активна робота на лекційних заняттях, самостійна робота, усні відповіді</i> Виступ з доповіддю за темою наукового дослідження	2 %
4.1	продемонструвати розуміння особистої/персональної відповідальності за професійні та/або управлінські рішення, які базуються на використанні математичних методів			1.5%
4.2	демонстрація авторитетності, високий ступінь самостійності, академічна та професійна доброчесність, послідовна відданість розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності			1.5%

## 6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни (код)	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	3.1	4.1	4.2
<b>Програмні результати навчання (назва)</b>																			
<b>знання</b>																			
<b>ПРН-3-1.</b> Знати та розуміти фундаментальні і прикладні аспекти наук у сфері математики.	+	+	+	+			+		+									+	+
<b>ПРН-3-2.</b> Відтворювати знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.	+	+	+	+	+	+	+	+	+									+	+
<b>ПРН-3-3.</b> Володіти основами математичних дисциплін і теорій, зокрема які вивчають моделі природничих і соціальних процесів	+	+	+	+	+	+	+	+	+									+	+
<b>ПРН-3-4.</b> Володіти математичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей, математичними способами інтерпретації числових даних та принципами функціонування природничих процесів.	+	+	+	+	+	+	+	+	+									+	+
<b>уміння</b>																		+	+
<b>ПРН-У-1.</b> Уміти використовувати фундаментальні математичні закономірності у професійній діяльності.										+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-2.</b> Читати і розуміти фундаментальні розділи математичної літератури та демонструвати майстерність їх відтворення в аргументованій усній та/або письмовій доповіді.										+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-3.</b> Доносити професійні знання, власні обґрунтування і висновки до фахівців і широкого загалу.																	+	+	+
<b>ПРН-У-8.</b> Бути наполегливим у досягненні мети під час вирішення математичної проблеми.										+	+	+	+	+	+	+		+	+
<b>ПРН-У-10.</b> Усно й письмово спілкуватися рідною та іноземною мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних джерел																	+	+	+
<b>ПРН-У-11.</b> Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж; застосовувати інформаційні ресурси, у тому числі електронні, для пошуку відповідних математичних моделей.																+	+	+	+
<b>ПРН-У-12.</b> Дотримуватися норм етичної поведінки стосовно інших людей, адаптуватися та комунікувати																	+	+	+

## 7. Схема формування оцінки

### 7.1. Форми оцінювання студентів:

#### - оцінювання впродовж навчального періоду:

1. Активна робота на лекційних, практичних, лабораторних заняттях, усні відповіді: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН1.6, РН1.7, РН1.8, РН1.9 – 9 балів/5 балів;
2. Виконання завдань, винесених на самостійну роботу: РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН2.4, РН2.5, РН2.6, РН2.7 – 6 балів/4 бали;
3. Модульна контрольна робота 1: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН2.1, РН2.2 – 17 балів/12 балів;
4. Модульна контрольна робота 2: РН1.6, РН1.7, РН2.3, РН2.4, РН2.5 – 12 балів/6 балів;
5. Модульна контрольна робота 3: РН1.8 РН1.9, РН2.6, 2.7 – 11 /6 балів;
6. Виступ з доповіддю за темою наукового дослідження: РН3.1, РН4.1, РН4.2 – 5 балів/2 бали;  
Разом 60/35;

#### - підсумкове оцінювання: іспит.

- максимальна кількість балів, які можуть бути отримані: 40 балів;
- результати навчання, які будуть оцінюватись: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН1.4, РН1.5, РН1.6, РН1.7, РН1.8 РН1.9, РН2.1, РН2.2, РН2.3, РН2.4, РН2.5, РН2.6, РН2.7, РН4.1, РН4.2;
- форма проведення і види завдань: письмова робота.

### 7.2. Організація оцінювання:

Активна робота на лекційному, практичному та лабораторному занятті передбачає відповіді на питання викладача, виконання задач, запропонованих керівником курсу.

Самостійна робота передбачає виконання зазначених керівником курсу завдань практичного характеру з тематики, запропонованої викладачем, та представлення завдань, виконаних із застосуванням систем комп'ютерної математики.

Допускається оцінювання за допомогою технологій дистанційного навчання.

Критично-розрахунковий мінімум балів за навчання впродовж семестру становить **20** балів, рекомендований мінімум, розрахований з урахуванням специфіки дисципліни становить **35** балів. Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів, ніж рекомендований мінімум **35** балів, для підвищення балів отримують можливість виконати додаткову контрольну роботу та скласти домашні завдання. Студенти, які набрали впродовж семестру та за рахунок додаткових етапів оцінювання сумарно меншу кількість балів ніж критично-розрахунковий мінімум **20** балів, до складання іспиту не допускаються.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі форм контролю здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка” (2018), <http://www.univ.kiev.ua/pdfs/official/Organization-of-the-educational-process.pdf>.

Форма іспиту – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається із 4 завдань, перші два з яких є теоретичними, два інших – задачі. Кожне завдання оцінюється від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів. . Мінімальна кількість балів, які додаються до семестрових – 24 бали.

#### Терміни проведення форм оцінювання:

1. Модульна контрольна робота 1: на 5-му тижні навчального періоду.
2. Модульна контрольна робота 2: на 8-му тижні навчального періоду.
3. Модульна контрольна робота 2: на 11-му тижні навчального періоду.
4. Доповідь за темою наукового дослідження: до 13 тижня навчального періоду.

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59



## 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекційних занять

№ теми	Назва теми	Кількість годин	
		Лекції	Самост. робота
<b>Змістовий модуль 1. Методи розв'язання крайових задач нелінійної оптики, задач тепломасопереносу та оптимізації</b>			
1	Чисельний розв'язок задачі про виникнення в плазмі пробою лазерної активності	2	6
2	Чисельний розв'язок осесиметричної крайової задачі для квазінелінійного рівняння типу Шредінгера	2	6
3	Чисельний розв'язок задачі про взаємодію трьох електромагнітних хвиль в нелінійному квадратичному середовищі	2	6
4	Чисельний розв'язок задачі про вплив дифракції в двовимірному нелінійному кубічному середовищі	2	6
5	Чисельний розв'язок резонаторних задач нелінійної оптики	2	6
6	Чисельний розв'язок задачі про резонаторне перетворення оптичних частот	2	6
7	Чисельний розв'язок задач тепломасопереносу	4	6
8	Чисельний розв'язок нелінійних кінетичних рівнянь та рівняння Кортевега-де_Фріза	4	6
<b>Змістовий модуль 2. Чисельні методи оптимізації</b>			
9	Одновимірні та багатовимірні оптимізаційні задачі	6	12
10	Ймовірнісні методи розв'язання оптимізаційних задач	4	12
<b>Змістовий модуль 3. Асимптотичні методи сучасної математичної фізики</b>			
11	Загальні поняття асимптотичного аналізу	4	12
12	Регулярна та сингулярна теорія збурень для звичайних диференціальних рівнянь	4	10
13	Асимптотичні методи теорії усереднення	4	10
Всього годин за семестр		42	104

**Загальний обсяг 150 год.**, у тому числі:

Лекцій – 42 год.

Консультацій – 4 год.

Самостійної роботи – 104 год.

## 9. Рекомендовані джерела:

### *Основна: (базова)*

1. Довгий Б.П.. Численное решение задачи о лазерной активности плазмы пробоя. Вычисл. и прикл. математика, 1991, Вып.75. – С.60-64.
2. Довгий Б.П., Вакал Е.С., Вакал Ю.Е. Численное решение осесимметрической задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера. Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, Матэматыка, №1/2016. – С.66-70.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем/ А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 553 с.
4. Довгий Б.П.. Математические модели внутриврезонаторного взаимодействия частот в нелинейной оптике и их реализация на ЭВМ. Вычисл. и прикл. математика, 1990/ – Вып.70. – С.61-67.
5. Довгий Б.П., Марчевский Ф.Н., Стрижевский В.Л. Влияние дифракции на вынужденное комбинационное излучение световых пучков в резонаторе. Квантовая электрон., 1985. – Вып.28. – С.24-31.
6. Довгий Б.П., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Попов А.В. Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, А.В. Попов.– Київ: Фітосоціоцентр, 2012. – 78 с.
7. Довгий Б.П., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Попов А.В. Використання системи комп'ютерної математики MATLAB для розв'язування прикладних задач / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, А.В. Попов. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2016. – 143 с.
8. Довгий Б.П., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є. Методи обчислень: методичні вказівки до лабораторних робіт з використанням пакета MATLAB / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2017. – 60 с.
9. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: ИД "МФТИ", 1994. – 528 с.
10. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. – М.: Мир, 1990.– 400 с.
11. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 132 с.
12. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1965. – 615 с.
13. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
15. Мельник Т.А., Спектральные задачи теории усреднения. Научно-метод. сборник "Математика сегодня - 92". – Київ: "Вища школа". – С. 86-115.
16. Федорюк М.В., Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 360 с.
17. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990. – 280 с.

- 18.Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
- 19.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М: Наука, 1987. – 636 с.
- 20.Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Из-во Томского политехнического ун-та, 2007. – 172 с.
- 21.Ортега Дж. Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М: Наука, 1986. – 288 с
- 22.Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
- 23.Березин Ю.А. О численных решениях уравнения Кортевега-де Вриза / Ю.А. Березин // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск. – 1973. – Т.4, е2, с.20-31.
- 24.Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization of Reticulated Structures. – Springer, 1999.

**Додаткова:**

1. Cercignani C. Gerasimenko V/I/, Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations / C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1997. – 252 p.
2. Аристов В.В., Черемисин В.В. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана / В.В. Аристов, Ф.Г. Черемисин. – ВЦ РАН, 1992.– 192 с.
3. Peraud J.Ph., Landon C.D., Hadjiconstantinou N.G. Monte Carlo methods for solving the Boltzman transport equation / J. M. Peraud, C. D. Landon, & Nicolas G. Hadjiconstantinou. – Cambridge pub., 2014. – 60 p.
4. Довгий Б.П., Обуховский В.В. Влияние фоторефрактивного эффекта на лазерную генерацию. Укр. физ. журн., 1984.– Т.29.– №1. – С.30-35.
5. Назаров С.А., Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. – Т 1. – Новосибирск: Научная книга, 2002. – 406 с.
6. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: МГУ, 1990.

**10. Додаткові ресурси (за наявності):**

1. Filbet F., Russo G. Accurate numerical methods for the Boltzmann equation / F. Filbet, G. Russo. – Chapter 4, Режим доступу: <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/filbet/Papers/chapter4.pdf>.
2. Довгий Б.П., Ловейкін А.В., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є. Слайн-функції та їхнє застосування / Б.П. Довгий, А.В. Ловейкін, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал. – Київ, 127 с. Режим доступу: [www.matfiz.univ.kiev.ua/uploads/books/spline\\_ml.pdf](http://www.matfiz.univ.kiev.ua/uploads/books/spline_ml.pdf)